

高校1年生	津波
累乗根と津波の高さ	

____ 高等学校 ____ 年 ____ 氏名

累乗根 (1)

◇◇◇ 累乗根 ◇◇◇

n が 2 以上の整数であるとき、実数 a に対し、 n 乗すると a になる数、すなわち、

$$x^n = a$$

となる x を a の n 乗根という。とくに、2 乗根を平方根、3 乗根を立方根ともいい、2 乗根、3 乗根、4 乗根、... をまとめて 累乗根 という。

【例 1】 $2^3 = 8$ であるので 2 は 8 の 3 乗根である。また、 $(-2)^3 = -8$ であるので -2 は -8 の 3 乗根である。 ± 2 は 16 の 4 乗根である。

◇◇◇ 根号 ◇◇◇

・ n が偶数のとき、

$a > 0$ ならば a の n 乗根は 2 つあり、それを $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ と表す。

$a < 0$ ならば a の n 乗根は存在しない。

・ n が奇数のとき、

a の符号に関わらず a の n 乗根は 1 つあり、それを $\sqrt[n]{a}$ と表す。

ここで、記号 $\sqrt[n]{}$ を 根号 といい、 n を累乗根の 指数 という。

$$x^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = x$$

【例 2】 $\sqrt[3]{8}$ は 8 の 3 乗根 ($2^3 = 8$) であるので $\sqrt[3]{8} = 2$ である。同様に、 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 、 $\sqrt[4]{16} = 2$ であるが、 $\sqrt[4]{-16}$ は実数の範囲では存在しない。

演習 1 次の値を根号を用いて表せ。

(1) 15 の 3 乗根

(2) -5 の 5 乗根

(3) 2 の 4 乗根

演習 2 次の値を根号を用いずに表せ。

(1) $\sqrt[5]{32}$

(2) $\sqrt[3]{-27}$

(3) $-\sqrt[4]{81}$

(4) $\sqrt[4]{-81}$

高校1年生 津波

累乗根と津波の高さ

高等学校 年 氏名

累乗根 (2)

◇◇◇ 累乗根の性質 ◇◇◇

$a > 0, b > 0$ で m, n が 2 以上の整数のとき, 次が成り立つ.

$$[I] \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad [II] (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad [III] \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad [IV] \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

【例 3】 $\sqrt[5]{9}(\sqrt[5]{3})^3 = \sqrt[5]{9} \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{9 \times 3^3} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

◇◇◇ 指数の拡張 ◇◇◇

$a \neq 0$ で n が正の整数のとき, 次が成り立つ.

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$a > 0$ で m は整数, n が 2 以上の整数のとき, 次が成り立つ.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

【例 4】 $a^2 \times a^{-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad 3^5 \times \left(\frac{1}{9}\right)^4 = \frac{3^5}{3^8} = \frac{1}{27}, \quad \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \quad 5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}$

【注意】 $a > 0$ のとき, 無理数 p に対しても a^p が定義でき, 指数が任意の実数のとき指数法則が成り立つ.

演習 3 次の各式を計算せよ.

$$(1) \sqrt[3]{9} \sqrt[3]{3} \quad (2) \sqrt[4]{\frac{9}{4}} \sqrt[4]{36} \quad (3) \frac{\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{6}}$$

演習 4 $a > 0$ のとき, 次の各式を簡単にせよ.

$$(1) \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times 2^{-7} \quad (2) 15^2 \times 3^{-4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$(3) \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[4]{a^5} \quad (4) \frac{a \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}$$

高校1年生 津波

累乗根と津波の高さ

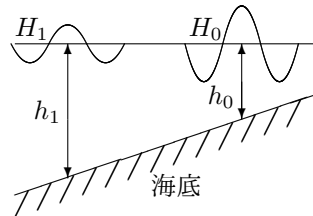
高等学校 年 氏名

津波の高さ（グリーンの法則 I）

ある沖合での津波の高さを $H_1(\text{m})$ 、水深を $h_1(\text{m})$ とし、沿岸付近の津波の高さを $H_0(\text{m})$ 、水深を $h_0(\text{m})$ とするとき、

$$\frac{H_1}{H_0} = \sqrt[4]{\frac{h_0}{h_1}}$$

が成り立つ。すなわち、沿岸付近の津波の高さは、水深比の $\frac{1}{4}$ 乗に逆比例して大きくなる。



気象庁では $h_0 = 1(\text{m})$ とし、次の式で沿岸での津波の高さ H_0 を予測している。

$$H_0 = \sqrt[4]{h_1} \times H_1$$

【例題 1】 水深 16(m) 地点で津波の高さが 2(m) であるとき、気象庁が発表する沿岸付近でのこの津波の高さを求めよ。

【解 1】 $H_1 = 2, h_1 = 16, h_0 = 1$ をグリーンの法則に当てはめると

$$H = \sqrt[4]{16} \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

より、およそ 4(m) である。

問 1 次の場合について、沿岸付近での津波の高さを求めよ。

(1) 水深 100(m) 地点での津波の高さが 2(m) と観測されたとき。

(2) 沿岸付近の水深が 10(m) であるとき、水深 100(m) 地点での津波の高さが 2(m) と観測されたとき。

高校 1 年生 津波

累乗根と津波の高さ

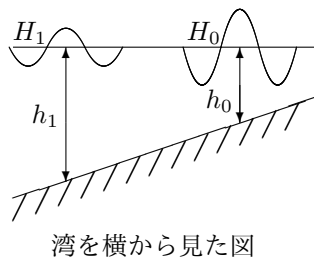
高等学校 年 氏名

津波 の高さ（グリーンの法則 II）

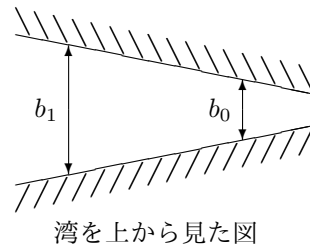
ある沖合での津波の高さを $H_1(\text{m})$ 、水深を $h_1(\text{m})$ とし、沿岸付近の津波の高さを $H_0(\text{m})$ 、水深を $h_0(\text{m})$ とする。津波が湾内に侵入して湾の幅が狭くなると、エネルギー集中が生じて波高は急激に増大する。三陸沿岸のようなリアス式海岸で湾の平面形状が V 字形になっているところでは、それらを考慮して、 b_1 を湾口の幅、 b_0 を湾奥の幅としたとき、

$$\frac{H_1}{H_0} = \sqrt[4]{\frac{h_0}{h_1}} \times \sqrt{\frac{b_0}{b_1}}$$

が成り立つ。すなわち、湾内に侵入した津波の高さは、水深比の $\frac{1}{4}$ 乗及び湾幅比の $\frac{1}{2}$ 乗に逆比例して大きくなる。



波 ⇒



問 2 前ページ問 1 について、湾口と湾奥の幅が次である湾内における沿岸付近での津波の高さを求めよ。

(1) $b_1 = 1(\text{km}), b_0 = 10(\text{m})$

(2) $b_1 = 5(\text{km}), b_0 = 100(\text{m})$

問 3 宮城県にある志津川湾は湾口の幅が $6.6(\text{km})$ で、湾口における最大水深は $54(\text{m})$ である。湾口で高さ $8(\text{m})$ の津波が観測されたとき、湾奥の水深 $1(\text{m})$ 地点における津波の高さを求めよ。ただし、湾奥の水深 $1(\text{m})$ 部分の湾の幅は $0.5(\text{km})$ であるとする。

問 4 宮城県にある気仙沼湾は湾口の幅が $2.6(\text{km})$ で、湾口における最大水深は $29(\text{m})$ である。湾の幅が $100(\text{m})$ の湾奥の沿岸部には高さ $10.8(\text{m})$ の防波堤が立てられている。湾口において高さ 何 (m) の津波までは、問題がないか、湾奥の水深を $1(\text{m})$ として求めよ。