

# 双対 Ginzburg-Landau 理論に基づく カラーの閉じ込めと Flux-Tube の物理<sup>1</sup>

大阪大学核物理研究センター 駒 佳明<sup>2</sup>

## 概要

双対 Ginzburg-Landau 理論は非摂動的 QCD の有効理論であり、双対 Meissner 効果を通じた flux-tube の形成によりカラーの閉じ込めを説明する。本研究ではこの理論の flux-tube 解を非摂動的 QCD に絡む以下の二つの物理の現象に応用しその解明を試みた。

まず超相対論的重イオン衝突によるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 相生成の機構を flux-tube の多体系という観点から調べた。これにより flux-tube と anti flux-tube の対消滅過程は系に対して  $4 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  ものエネルギー堆積を与えることが分かった。このエネルギー堆積は QGP 相転移温度 ( $150 \sim 200 \text{ MeV}$ ) でのプラズマのエネルギー密度  $0.9 \sim 2.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  に比べて大きく、従ってこの過程は QGP 相生成に対して大きな寄与を与えることが結論できる。次にバレンスクォークを含まないグルーボールを端点を持たない flux-tube ring 解と同一し、それを解析することでグルーボールの諸性質を調べた。ただし古典的な flux-tube ring 解は shrink する傾向にあるためにそのままでは安定な解にはならない。そこで本研究では双対 Ginzburg-Landau 理論と紐の理論を融合し、南部・後藤の作用から flux-tube ring を記述して量子効果を取り入れることで安定解を探した。そしてこの解析からグルーボールの質量とサイズを評価した。

## 目次

1	はじめに	2
2	双対 Ginzburg-Landau 理論と Flux-Tube 形成によるカラーの閉じ込め	5
2.1	アーベリアン射影とモノポール	6
2.2	双対 Ginzburg-Landau 理論	10
2.3	双対 Higgs 機構と双対 Meissner 効果	14
2.4	Flux-Tube 形成によるカラーの閉じ込め	15
2.5	閉じ込めポテンシャルと弦張力	18
3	一体系 Flux-Tube 解の諸性質	21
3.1	一般的な関係式	21
3.2	一体系 Flux-Tube 解の導出	23
3.3	一体系 Flux-Tube 解の GL パラメーター依存性	26
4	Flux-Tube 多体系と QGP 相生成機構	27
4.1	多体系 Flux-Tube 解の導出方法	29

<sup>1</sup> 本稿は平成 9 年度大阪大学理学研究科に提出した修士論文に加筆・修正を施したものです。

<sup>2</sup> E-mail address: koma@rcnp.osaka-u.ac.jp

4.2	二体系 Flux-Tube 解の考察 . . . . .	30
4.3	Flux-Tube 間相互作用による QGP 相生成 . . . . .	34
5	Flux-Tube Ring 解とグルーボール . . . . .	37
5.1	Flux-Tube Ring 解と有効弦張力 . . . . .	38
5.2	閉じた紐と南部・後藤作用 . . . . .	43
5.3	グルーボールの質量とサイズ . . . . .	46
6	まとめと今後の課題 . . . . .	48
	謝辞 . . . . .	51
	参考文献 . . . . .	51

## 1 はじめに

我々の物質観は例えば水は水分子から、水分子は水素原子と酸素原子から、そしてその原子は原子核とその回りを運動する電子から構成される、というようなものである。そして原子核は陽子や中性子という核子の集合体として理解されている。つまり物質には階層構造があり我々がどのスケールで物質を見るかによってこのように全く異なる形態を示す。そして各階層ごとに典型的な相互作用の型が存在しており、その帰結として一つ上の階層が構成される。例えば核子どうしはそれらの間を飛び交う様々な中間子による核力と呼ばれる強い力を通じて相互作用し、束縛状態として原子核を作る。これら核子や中間子は総称としてハドロンと呼ばれている。また原子核と電子は光子による電気的な力を通じて相互作用し、原子を構成する。さらに原子と原子は... という具合である。1960年代までは核子や中間子がそれ以上不可分であるという意味で素粒子と考えられていた。

ところが1970年代に入り宇宙線の研究や高エネルギー加速器実験の発展にともなって陽子や中性子以外に  $\Lambda$ 、 $\Sigma$ 、 $\Xi$  等の多数のハドロンが続々と発見されるに至り、核子のさらに下にも階層があることが分かってきた。すなわちクォークの存在が見えてきたのである。クォークはスピン  $1/2$  の Fermi 粒子であり  $e$  を素電荷として分数電荷  $\pm e/3$ 、 $\pm 2e/3$  を持つ。クォークは6種類存在することが確認されている。これはフレーバーという量子数で分類されており、質量の軽い順に up, down, strange, charm, bottom, top と名付けられている。現在のところこれより下の階層は見つかっておらず、これが物質を構成する素粒子の一部であると信じられている。すると次のような疑問が浮かぶ。「クォークはどのような性質を持つ粒子なのか？そしてどのような相互作用を通して一つ上の階層であるハドロンを構成するのか？」これらに答えるためにはまずクォークの世界を理解しなければならない。つまりこの階層を支配する基本法則を知る必要性が出てきたのである。

現在ではこのクォークの世界の基本法則は量子色力学 (QCD) [1] によって記述され、このQCDを解けばクォークの世界のみならずその上の階層のハドロンの世界も系統的に理解できると考えられている。QCDはSU(3)群に基づく非可換ゲージ理論 [2] であり、これによるとクォーク

は基本粒子として表現され相互作用は随伴粒子としてのグルーオンが担う。クォークとグルーオンはカラーと呼ばれる量子数を持ち、それを交換することで相互作用する。カラーは Blue, Red, Green の全部で三種類ある。SU(3) 群の 3 はそれに対応する。

しかしながら QCD はゲージ群 SU(3) の非可換性のために解析的に扱うのが非常に難しい理論である。この非可換性という性質によりグルーオンは自分自身とも相互作用する。すなわち理論が非線形となり重ね合わせの原理が適用できない。そのためこの理論が記述する真空構造は非常に複雑なものとなる。これは量子電気力学 (QED) のような可換群に基づくゲージ理論とは対照的な性質である。しかも QCD はその非可換性に起因して、クォークとグルーオンの結合定数が高エネルギー領域では結合定数が小さくなるという漸近自由性 [3]、逆に低エネルギー領域では結合定数が大きくなるという強結合性を持つ。同じ理論でありながらスケールに依存して理論構造が全く変わってしまうのである。このことは通常場の理論における解析方法として威力を發揮する摂動論が低エネルギー領域で適用できないことを意味する。そのため低エネルギー領域における多くの物理現象を未だ満足 of いく形で説明できずにいる。この代表的なものとしてカラーの閉じ込め [4]、カイラル対称性の破れの問題 [5] が挙げられる。いずれも非摂動的な低エネルギー領域の QCD がこの問題を解明する鍵を握っている。特にカラーの閉じ込め問題はクォークの持つ分数電荷が観測にかからないという実験事実に基づく。レプトンと核子の深部非弾性散乱の実験で示されるように核子が内部構造を持っていることからクォークが存在していることは明らかである [6]。しかしいくらこの実験を高いエネルギーで行なっても単独粒子としてのクォークを確認できないのである。このような実験的背景を踏まえると、カラーを持った粒子には単独では表に出てこれない何らかの閉じ込め機構が働くのだ、と考えるのが妥当ということになる。一方で現象論的には、ハドロンの Regge 軌跡 [7] やハドロン反応実験における双対性からハドロンの紐的構造を持つことが示されている。ハドロンの紐的構造を持つということはクォーク間に線形ポテンシャルが現れることを意味する。なぜなら紐的構造は Regge 軌跡の考察から得られる弦張力  $\sigma \sim 1 \text{ GeV/fm}$  により特徴づけることができ、そしてこれは線形ポテンシャルの傾きに他ならないからである。ここでクォーク間に線形ポテンシャルが現れるということはクォークを無限に引き離すために無限のエネルギーを要するというものであり、言い替えると有限のエネルギーではクォークを単独で取り出すことができないということの意味する。従ってハドロンの紐的性質はクォークの閉じ込め問題と関連させて考えることができる。このことを踏まえるとカラーの閉じ込め問題はなぜクォーク間に線形ポテンシャルが現れるのかという問題に置き換わる。非摂動的 QCD がこのような線形ポテンシャルを導く機構を実際に内包しているのか？ ということになる。

この問題に対して Nambu, 't Hooft, Mandelstam は、超伝導体において磁場が排除されるといふ Meissner 効果と双対的な描像により線形ポテンシャルが現れることを示した [8, 9, 10]。これによるとカラー磁荷を持ったモノポールが凝縮することでカラー電場が排除され結果としてそれが 1 次元的に絞り込まれる。場が 1 次元方向に一様になることはその方向に関して長さに比例したエネルギーを稼ぐこと、つまり線形ポテンシャルの出現を意味する。さらに 't Hooft は非可換ゲージ理論にアーベリアン射影という部分ゲージ固定を施すことで理論が可換ゲージ理論に還元されると同時にモノポールが現れることを示した [11]。ついで Ezawa, Iwasaki はある臨界的なスケールより大きい領域ではゲージ場の可換成分が重要なのだというアーベリアン・ドミナンスを仮定してこのモノポールが凝縮することを解析的に示した [12]。このことは非可換ゲージ理論である QCD が以上のような描像に基づくクォークの閉じ込め機構を内包していることを意味

する。現在では非摂動論的 QCD における可換ゲージ場の重要性に着目した格子 QCD に基づく数値シミュレーションが数多くなされており、QCD 真空の双対超伝導体的な描像を強く支持する結果が得られている [13, 14]。

このような背景を踏まえると非摂動論的 QCD を双対超伝導体的な理論に焼き直して考えることができる。これが本研究で用いる双対 Ginzburg-Landau 理論である [16, 17]。この理論は 't Hooft のアーベリアン射影の処方をもとに QCD に施していったモノポールを含む可換ゲージ理論に還元した後に、アーベリアン・ドミナンスの仮定のもとに双対ゲージ場を導入してこのモノポールを理論に取り込むことにより構築される。このときモノポール凝縮が起こることを前提として、超伝導理論における Ginzburg-Landau 理論に習いモノポールの自己相互作用項を付け加えるということをする。双対 Ginzburg-Landau 理論は正にモノポール凝縮が双対 Meissner 効果を引き起こしカラー電場が 1 次元的に絞られるという解 (flux-tube 解) を持つ。そしてこの解の存在がカラーの閉じ込めを説明する。現在では、最大アーベリアン・ゲージ固定 [15] を施した場合に非摂動論的 QCD に特徴的な弦張力やクォーク凝縮という物理量に対して、アーベリアン・ドミナンスとモノポール凝縮の二つの仮定が実際に成立していることが格子 QCD の計算から示されている [13, 14]。従って双対 Ginzburg-Landau 理論の構築に際しては、最大アーベリアン・ゲージ固定を意図したアーベリアン射影を QCD に施しているのだと考えれば、これは QCD から直接導き出される理論であると考えられる。双対 Ginzburg-Landau 理論はカラーの閉じ込め問題の説明を念頭に置き構築された理論であるが、もう一つの代表的な問題であるカイラル対称性の破れの問題も同時に説明できることが調べられており [17]、ますますこの有効理論の利用価値は高まっているといえる。

本研究ではこのような双対 Ginzburg-Landau 理論を非摂動論的 QCD に関連する他の物理現象に逆に応用する。特に閉じ込め・非閉じ込め相転移の問題 [18, 19] と、QCD が予言する粒子であるグルーボール [20] の性質解明を試みる。

そもそも相転移の問題は QCD がハドロン相とクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 相という二つの相を予言することによる。我々の世界はクォークやグルーオンを単独で検出することができないハドロン相であるが、逆に高温・高密度の世界ではクォークやグルーオンが自由に飛び回れる QGP 相になると考えられている。これを実験室で確かめようという試みが近々米国ブルックヘブン国立研究所 (BNL) の RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) で行なわれることになっている。具体的には超相対論的な速度まで加速した重イオンどうしを正面衝突させることにより外からコントロールされた形で QGP 相を作り出してその性質を調べる。この実験の解析に先立ち QGP 相生成の機構を理論的に押さえておく必要がある。そこで我々はこの衝突の際に重イオン間に flux-tube の多体系が構成されるという描像をもとにして flux-tube 多体系と QGP 相生成機構の関係について調べる [21, 22]。

グルーボールとは、QCD の非可換性に起因したグルーオンの自己相互作用項から予言されるグルーオンの束縛状態としてのハドロンである。実験的には多数の候補が挙げられている [23, 24, 25] もの、これがグルーボールであるという決定的な証拠はまだ確認されていない [26]。というのもその性質について不明な点が多いからである。QCD からグルーボールの諸性質について言及する必要がある。ここで我々はグルーボールがバレンスクォークを含まない粒子であることに着目する。双対 Ginzburg-Landau 理論は、バレンスクォークを含むハドロンを端点付きの flux-tube として記述することができるので対するグルーボールは端点を持たない flux-tube ring とみな

すことができる。この対応を基にすれば flux-tube ring 解を調べることでグルーボールの性質を調べることができるはずである。本研究では特に双対 Ginzburg-Landau 理論の flux-tube 解の応用という観点からこれらの物理を考察する。

2章では非摂動的QCDの有効理論としての双対 Ginzburg-Landau 理論の内容とその導出過程を、't Hooft の提唱したアーベリアン射影のアイデアも含めてかえりみる。特に flux-tube とカラーの閉じ込めの関係に重点を置く。3章では純粹に flux-tube 解の諸性質について復習する。また理論のパラメーターの再検討も行なう。4章では超相対論的重イオン衝突によるQGP相生成機構を flux-tube の多体系という観点から、5章ではグルーボールを flux-tube ring という観点からそれぞれ調べる。6章ではまとめと今後の課題について述べる。

## 2 双対 Ginzburg-Landau 理論と Flux-Tube 形成によるカラーの閉じ込め

非可換ゲージ理論は一般に、あるゲージに依存する随伴演算子を対角化するというアーベリアン・ゲージ固定 (abelian gauge fixing) を行なうと特異点モノポールを含む可換ゲージ理論に還元される [11]。これをアーベリアン射影 (abelian projection) という。

QCDは  $q$  と  $A_\mu$  をそれぞれクォーク場とグルーオン場、 $e$  をゲージ結合定数として

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= -\frac{1}{2}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \bar{q}(i\not{D} - m_q)q \\ G_{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{e}[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu], \quad i\hat{D}_\mu \equiv i\hat{\partial}_\mu + e[A_\mu, *]\end{aligned}\quad (1)$$

で記述されるように、カラー  $SU(N_c = 3)$  群の非可換群の変換

$$q \rightarrow U(x)q, \quad A_\mu \rightarrow U(x)\left(A_\mu + \frac{i}{e}\partial_\mu\right)U(x)^\dagger; \quad U(x) \in su(N_c = 3)\quad (2)$$

に対して不変な非可換ゲージ理論である。この理論にアーベリアン・ゲージ固定を施すとQCDモノポールを含む可換ゲージ理論になり、その際の可換ゲージ対称性のゲージ群は  $SU(N_c = 3)$  の最大可換部分群  $[U(1)_3 \times U(1)_8]$  になる。フレーバーの自由度は今は無関係なので考慮しない。

さらにこのQCDモノポールを含む可換ゲージ理論に対して、非摂動的QCDの物理にはゲージ場の可換成分が重要なのだというアーベリアン・ドミナンス (abelian dominance) の仮定 [12] のもとに双対ゲージ場を導入してQCDモノポールを理論に取り込むという処方を実施すると双対 Ginzburg-Landau 理論を構築することができる。そしてこの理論は非摂動的QCDに特徴的なカラーの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れの問題等を説明することができる [17]。

ここで一つ留意しておくべきことがある。それは対角化すべき演算子として何を選ぶかという任意性に対応してアーベリアン・ゲージ固定の仕方は無数に存在するということである。この中で最大アーベリアン・ゲージ固定 [15] という特殊なアーベリアン・ゲージ固定を施すと、いくつかの非摂動的QCDに関連する物理量、例えば弦張力 (string tension) やクォーク凝縮 (quark condensate) に対してアーベリアン・ドミナンスが実際に成立することが格子QCDの数値シミュレーションで示されており [13]、従って双対 Ginzburg-Landau 理論の構築に際してはそのようなゲージを選んでおくと解釈しておくべきである。

この章では、まず QCD モノポールの導出過程と双対 Ginzburg-Landau 理論のあらましをかえりみる。そして次にこの理論が示唆する双対 Meissner 機構による flux-tube の形成を通じたカラーの閉じ込め機構をみる。そしてこれを後章の研究対象である「flux-tube の物理」への導入としたい。

## 2.1 アーベリアン射影とモノポール

まず 't Hooft [11] によって示唆された非可換ゲージ理論に対するアーベリアン・ゲージ固定とその帰結としてのモノポール自由度の出現をみる。

論点の要旨を先にまとめておく。

「非可換ゲージ群  $SU(N_c)$  に対するアーベリアン・ゲージ固定は、随伴表現に属する任意のゲージ依存量  $X(x) \in \mathfrak{su}(N_c)$  を  $\Omega(x) \in \mathfrak{su}(N_c)$  を用いて、

$$X(x) \rightarrow \Omega(x) X(x) \Omega(x)^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{N_c}(x) \end{pmatrix} \equiv X_d(x) \quad (3)$$

のように対角化するものとして定義される。このゲージ固定後には  $SU(N_c)$  群の最大可換部分群のゲージ対称性と、固有値  $\lambda_i$  の入れ換えに対する Weyl 対称性、 $[U(1)]^{N_c-1} \times \text{Weyl}$  が残る。ゲージ場の対角成分は残された可換ゲージ対称性のもとでゲージ場として振舞うが、非対角成分は固定されてしまうので、もはやゲージ場としての性質を失い荷電物質場のように振舞う。しかしながら  $X(x)$  の固有値の中に縮退点が存在すると、その点においてはゲージ関数の多価性が生じて非対角成分でさえも一意的に固定することができず、これが特異点として可換ゲージ理論中に登場する。そしてこの特異点がモノポールの自由度となって理論に現れることになる。」

このことを簡単のためゲージ群  $SU(N_c = 2)$  の場合について見ることにする。

まず対角化すべきゲージ依存量を

$$X(x) \equiv T^a X_a(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_3(x) & X_1(x) - iX_2(x) \\ X_1(x) + iX_2(x) & -X_3(x) \end{pmatrix} ; \quad T^a \equiv \frac{1}{2} \tau^a \quad (a = 1, 2, 3) \quad (4)$$

とする。但し  $\tau^a$  は Pauli 行列

$$\tau^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。このゲージ依存量を対角化すると、その対角成分として固有値が並ぶ。すなわち、

$$X_d(x) = \begin{pmatrix} \lambda_+(x) & 0 \\ 0 & \lambda_-(x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\lambda_\pm(x) \equiv \pm \frac{1}{2} \sqrt{X_1^2(x) + X_2^2(x) + X_3^2(x)} \quad (7)$$

となる。ここで固有値  $\lambda_{\pm}(x)$  は

$$X_1(x) = X_2(x) = X_3(x) = 0 \quad (8)$$

で縮退することに気付く。以下の議論ではこの縮退点の存在が重要となる。

(8) の3条件を同時に満足する縮退点は4次元時空では世界線を描くが3次元時空では点であるので、 $X(x)$  をある固定した時刻  $t$  における縮退点  $\mathbf{x}_0$  のまわりで Taylor 展開してみる。するとその近傍では

$$X(x) = T_a \hat{C}^{ai} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^i, \quad \hat{C}^{ai} \equiv \partial^i X^a(\mathbf{x}_0) \quad (9)$$

となる。ここで  $\det \hat{C} \neq 0$  であれば適当な線形変換を定義することができ、これにより新しい座標

$$w^a \equiv \hat{C}^{ai} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^i \quad (10)$$

を用いて  $\mathbf{x}_0$  近傍でのトポロジを議論することが可能となる [17]。すなわち新しい座標  $w^a$  に対して非自明なトポロジを有する針鼠型配位 (hedgehog configuration)、

$$X(w^a) = T_a w^a \quad (11)$$

を得る。この針鼠型配位はホモトピー群  $\pi_2(\text{SU}(2)/\text{U}(1)) = \pi_1(\text{U}(1)) = Z_{\infty}$  に属する非自明な解である。このとき固有値は  $\pm \frac{1}{2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$  であり縮退点は  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$  となる。

ここでさらにその性質を詳しくみるために  $w_a$  として、

$$\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, w_3) \equiv (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \quad (12)$$

という極座標を採ると、 $X$  は

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_3 & w_1 - iw_2 \\ w_1 + iw_2 & -w_3 \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

のように表現することができ、これを対角化するゲージ関数、

$$\Omega = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta & \sin \frac{1}{2}\theta \\ -\sin \frac{1}{2}\theta & e^{-i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

を定義できる。実際  $X$  はこのゲージ関数  $\Omega$  により、

$$X_d = \Omega X \Omega^\dagger = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = r T_3 \quad (15)$$

のように対角化される。ゲージ依存量  $X$  が  $T_3$  方向を向く。すなわち  $\text{SU}(2)$  非可換ゲージ理論はこの  $\Omega$  に基づきゲージ固定される。このゲージ固定後は (15) から明らかなように  $\text{SU}(2)$  の最大可換部分群  $\text{U}(1)_3 \subset \text{SU}(2)$  の対称性が残ることになる。

このときゲージ場  $A_\mu$  は  $\Omega$  により

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \Omega \left( A_\mu + \frac{i}{e} \partial_\mu \right) \Omega^\dagger \quad (16)$$

と変換することになるが、ここで元のゲージ場  $A_\mu$  が正則であればゲージ変換後も第一項目は正則となる一方で第二項目から特異性が現れることに気付く。このことは二項目を閉じた経路  $C$ ;  $r, \theta = \text{const.}, \phi \in [0, 2\pi)$  で周回積分すると明白になる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\Phi &\equiv \int_C dx^\mu \left[ \frac{i}{e} \Omega \partial_\mu \Omega^\dagger \right] \\
&= -\frac{i}{e} \int_0^{2\pi} d\phi \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \Omega^\dagger \\
&= -\frac{1}{e} \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{1}{2}\theta & -e^{i\phi} \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta \\ -e^{-i\phi} \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta & -\cos^2 \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \\
&= -\frac{2\pi}{e} (1 + \cos \theta) T_3 \equiv \Phi(\theta)
\end{aligned} \tag{17}$$

となるが最後の表式を見て分かるように、これは経路  $C$  が一点に潰れた場合 ( $\theta = 0$ ) においても有限値

$$\Phi(\theta = 0) = -\frac{4\pi}{e} T_3 \tag{18}$$

を与える。つまり  $\theta = 0$  において磁束  $\Phi$  に対応する磁場が  $\delta$  関数的に発散していることを意味する。すなわち Dirac 紐の存在を示唆する。これを踏まえて (17) を

$$\Phi(\theta) = \frac{4\pi}{e} \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) T_3 - \frac{4\pi}{e} T_3 \tag{19}$$

のように書き直すと、この表式の一項目と二項目をそれぞれ磁荷  $g = 4\pi/e$  を持つモノポールが作る磁束と、それに対応する Dirac 紐として理解することができる [17]。ここで  $eg = 4\pi$  はモノポールに対する Dirac 条件であり Dirac 紐が非物理的なものであることを保証する。

そして (19) の性質は  $X$  の固有値の縮退点近傍における可換ゲージ場の配位が  $w$  座標系でのモノポールの配位と等価になることを意味している。トポロジ的な性質は  $x$  座標系でも  $w$  座標系でも  $\det \hat{C} \neq 0$  ならば線形変換でつながるので変わらないので、従って  $X$  の固有値の縮退点がモノポールとなる。このように非可換ゲージ理論においては、対角化すべきゲージ依存量の固有値の縮退点がアーベリアン・ゲージ固定後のモノポールとして登場することになる。

ところでモノポールは時刻  $t$  を固定した 3 次元時空で点状であるので 4 次元時空では世界線を描く。そしてこれが磁流を与えることになるが、例えば上の場合は磁流を  $k^\mu$  とすると

$$k^0 = g\delta^3(x), \quad k^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

で定義でき、この磁流の空間積分

$$g \equiv \int d^3x k^0 \tag{21}$$

として磁荷  $g$  を定めることができる。

しかし一般にはモノポールとして様々なトポロジに属するものが存在し得るのでこの定義では不十分である。(20) を踏まえて一般化すると、

$$k^\mu = g \sum_{l=1}^N n_l \int d\tau_l \left( \frac{d}{d\tau_l} \bar{x}_l^\mu \right) \delta^4(x - \bar{x}_l(\tau_l)) \tag{22}$$

として磁流が定義される。なお  $N$  はモノポールの総数、 $n_l$  は磁荷に相当するトポロジカルな保存量である。また  $\bar{x}_l(\tau_l)$  はモノポールの世界線を表し  $\tau_l$  はそれを記述するパラメーター（固有時）である。

ここで今の場合、理論はアーベリアン・ゲージ固定により  $U(1)_3$  群の対称性を持つ可換ゲージ理論に還元されている。

$$C_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad , \quad E \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 + iT_2) \quad (23)$$

としてゲージ場  $A_\mu$  を

$$A_\mu = A_\mu^a T_a = A_\mu^3 T_3 + C_\mu E^\dagger + C_\mu^* E \quad (24)$$

のように書くと、これは  $U(1)_3$  のゲージ変換

$$U(x) \equiv e^{ie\theta(x)T_3} \in u(1)_3 \quad (25)$$

に対して

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow A'_\mu &= U(x) \left( A_\mu + \frac{i}{e} \partial_\mu \right) U(x)^\dagger \\ &= (A_\mu^3 + \partial_\mu \theta) T_3 + e^{-ie\theta} C_\mu E^\dagger + e^{ie\theta} C_\mu^* E \end{aligned} \quad (26)$$

となる。つまり非対角成分  $C_\mu$  と  $C_\mu^*$  は荷電物質場となりゲージ場としての性質を失う一方で、対角成分  $A_\mu^3$  のみがゲージ場として振舞う。

このときその可換ゲージ対称性に関する場の強さはゲージ場  $A_\mu^3$  により

$$F_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 \quad (27)$$

で与えられるように思える。

しかしながら (27) の場の強さの定義は、今の場合のようにモノポールの出現により磁流  $k_\mu$  が現れる場合は正しくない。というのも磁流が存在すると正則な可換ゲージ理論において常に成立すべき Bianchi 恒等式が破れるからである。すなわち、

$$\partial_\mu^* F^{\mu\nu} = k^\nu \neq 0 \quad (28)$$

が成り立つことになる。ここで

$$*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (29)$$

であるので、つまり (28) を導くためには場の強さは磁流  $k_\mu$  の寄与を内に含んだ形で定義する必要がある。このため (27) の定義では不十分となり、従ってこのような系における場の強さ  $F_{\mu\nu}$  はゲージ場  $A_\mu^3$  とこの磁流  $k_\mu$  を用いて、

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{n \cdot \partial} n^\alpha k^\beta \quad (30)$$

と表されることになる。つまりアーベリアン・ゲージ固定後の場の強さは (27) ではなくてこのように書き替わる。なお  $n^\alpha$  は  $|n|^2 = 1$  を満たす任意の4元定ベクトルであり、これは Dirac 紐の方向ベクトルに対応すると考えることができる。

このように非可換ゲージ理論にアーベリアン射影を施すと理論はモノポール含む可換ゲージ理論になる。このとき場の強さの定義はQ E Dのような純粋な可換ゲージ理論におけるそれと、モノポールの特異性を内に含むという点で異なる。つまりアーベリアン射影の成果は全て (30) のような場の強さの表式に集約される。

## 2.2 双対 Ginzburg-Landau 理論

ここでは非摂動的 QCD の有効理論である双対 Ginzburg-Landau 理論のあらましをかえりみる。この理論の構築は 2.1 節での処方を  $SU(N_c = 3)$  非可換ゲージ理論 QCD に適用して、かつ、その中から非摂動的 QCD のダイナミクスに “relevant” な自由度のみを抜き出すという操作により行なわれる。この操作は数あるアーベリアン・ゲージ固定の中で最大アーベリアン・ゲージ固定 [15] を念頭に置くことで有効的に行なうことができる。というのも QCD からカラーの閉じ込めに対する双対超伝導体的な描像を導く際には仮定が二つ必要となるからである。一つは非摂動的ダイナミクスにゲージ場の非対角成分はほとんど寄与しないという「アーベリアン・ドミナンス」の仮定 [12]、もう一つは理論に現れるモノポールが Bose 凝縮するという「モノポール凝縮」の仮定 [16] である。これらの仮定は決して自明なことではない。しかし近年の格子 QCD の計算結果から、最大アーベリアン・ゲージ固定 [15] のもとでは非摂動的 QCD に特徴的な物理量、弦張力やクォーク凝縮に対してアーベリアン・ドミナンスが成立すること [13]、またモノポールが凝縮することも示されているので [14]、従ってこのゲージ固定を念頭に置けばこれらは仮定ではなくなる。

では具体的な内容を見る。

### (i) アーベリアン射影

QCD の Lagrangian (1) に最大アーベリアン・ゲージ固定を意図したゲージ固定項  $\mathcal{L}_{G.F.}$  を付け加えてゲージ依存量  $X(x) \in \mathfrak{su}(3)$  を

$$X(x) \rightarrow \Omega(x)X(x)\Omega(x)^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & 0 \\ & \lambda_2(x) & \\ 0 & & \lambda_3(x) \end{pmatrix} \equiv X_d(x) \quad (31)$$

のように対角化する。但し今度は  $\Omega(x) \in \mathfrak{su}(3)$  であるので、このゲージ固定後には系の対称性は最大可換部分群  $[U(1)]^2 = [U(1)_3 \times U(1)_8]$  となる。

するとこのときゲージ場  $A_\mu$  は  $\Omega$  により

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \Omega \left( A_\mu + \frac{i}{e} \partial_\mu \right) \Omega^\dagger \quad (32)$$

という変換を受ける。固有値に縮退点が存在すると (32) の二項目からモノポールが現れることは既に述べた通りである。但し今度は  $SU(3)$  であるので、その可能性として  $SU(3)$  の中の三つの  $SU(2)$  の部分群の固有値の縮退点  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_3 = \lambda_1$  のそれぞれの場合に対応して三種類のモノポールが登場し得る。しかしながら Weyl 対称性の存在故にこれら三種類の全てが独立という訳ではなく、実際独立なのは  $[U(1)]^2$  の対称性に対応した二種である。このとき QCD はこのモノポールを含む  $[U(1)_3 \times U(1)_8]$  の可換ゲージ理論に還元されている。以下ではこの  $[U(1)]^2$  対称性に着目し、 $SU(3)$  群の Cartan 分解を用いて QCD の Lagrangian (1) を変形していくことにする。

これをするにあたり、まず

$$\vec{H} \equiv (T_3, T_8) \quad , \quad \vec{A}_\mu \equiv (A_\mu^3, A_\mu^8) \quad (33)$$

を定義する。さらに

$$E_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + iT_2) \quad , \quad E_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 - iT_5) \quad , \quad E_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 + iT_7) \quad (34)$$

$$C_\mu^1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad , \quad C_\mu^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^4 - iA_\mu^5) \quad , \quad C_\mu^3 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^6 + iA_\mu^7) \quad (35)$$

としてゲージ場  $A_\mu$  を

$$A_\mu = \vec{A}_\mu \cdot \vec{H} + \sum_{\alpha=1}^3 (C_\mu^{\alpha*} E_\alpha + C_\mu^\alpha E_\alpha^\dagger) \quad (36)$$

のように書く。ここで  $T^a$  は Gell-Mann 行列  $\lambda^a$  ( $a = 1 \sim 8$ ) により  $T^a \equiv \frac{1}{2}\lambda^a$  で定義され、さらに  $\vec{H}$  ,  $E_\alpha$  は、

$$[\vec{H}, E_\alpha] = \vec{\epsilon}_\alpha E_\alpha \quad , \quad [\vec{H}, E_\alpha^\dagger] = -\vec{\epsilon}_\alpha E_\alpha^\dagger \quad (37)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma^\dagger \quad , \quad [E_\alpha, E_\beta^\dagger] = \vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{H} \delta_{\alpha\beta} \quad (38)$$

$$\text{tr} E_\alpha^\dagger E_\beta = \text{tr} E_\alpha E_\beta^\dagger = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \text{tr} E_\alpha E_\beta = \text{tr} E_\alpha^\dagger E_\beta^\dagger = 0 \quad (39)$$

という関係を満たす。 $\vec{\epsilon}_\alpha$  は SU(3) 代数のルートベクトル (root vector)

$$\vec{\epsilon}_1 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad , \quad \vec{\epsilon}_2 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad , \quad \vec{\epsilon}_3 = (1, 0) \quad (40)$$

である。

そしてこれらの関係式を用いるとゲージ固定後の QCD の Lagrangian (1) は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}^2 + \bar{q} (i\not{\partial} + e\vec{A} \cdot \vec{H} - m_q) q \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left| \left( (\partial - ie\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{A}) \wedge C^\alpha \right)_{\mu\nu} - \frac{ie}{\sqrt{2}}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} C_\mu^{\beta*} C_\nu^{\gamma*} \right|^2 \\ & + \frac{ie}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{\epsilon}_\alpha (C^{\alpha*} \wedge C^\alpha)^{\mu\nu} + \frac{e^2}{4} \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \vec{\epsilon}_\alpha (C^{\alpha*} \wedge C^\alpha)_{\mu\nu} \right]^2 \\ & + e \sum_{\alpha=1}^3 \bar{q} (C^{\alpha*} E_\alpha + C^\alpha E_\alpha^\dagger) q + \mathcal{L}_{\text{G.F.}} \end{aligned} \quad (41)$$

と書ける。但し、

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mu\nu} \equiv \alpha_\mu \beta_\nu - \alpha_\nu \beta_\mu \quad (42)$$

と定義している。このように書くと対角成分と非対角成分の寄与があらわになる。重要な点は  $\mathcal{L}_{\text{G.F.}}$  により理論が  $[U(1)_3 \times U(1)_8]$  の可換ゲージ理論に還元されていることであり、そしてその対称性に関する場の強さ  $\vec{F}_{\mu\nu}$  がゲージ場の対角成分  $\vec{A}_\mu$  を用いて表されることにある。

このことは可換ゲージ対称性  $[U(1)_3 \times U(1)_8]$  に対するゲージ変換を

$$U(x) \equiv U(x)^3 \cdot U(x)^8 = e^{ie\vec{\theta}(x) \cdot \vec{H}} \quad ; \quad \vec{\theta}(x) \equiv (\theta^3(x), \theta^8(x)) \quad (43)$$

で定義すると表式 (36) を考慮したゲージ場  $A_\mu$  が

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow A'_\mu &= U(x) \left( A_\mu + \frac{i}{e} \partial_\mu \right) U(x)^\dagger \\ &= \left( \vec{A}_\mu + \partial_\mu \vec{\theta} \right) \cdot \vec{H} + \sum_{\alpha=1}^3 \left( e^{-ie\vec{\theta} \cdot \vec{\epsilon}_\alpha} C_\mu^\alpha E_\alpha^\dagger + e^{ie\vec{\theta} \cdot \vec{\epsilon}_\alpha} C_\mu^{*\alpha} E_\alpha \right) \end{aligned} \quad (44)$$

と変換し、ゲージ場の非対角成分  $C_\mu^\alpha$  と  $C_\mu^{*\alpha}$  が荷電物質場となってゲージ場としての性質を失う一方で、対角成分  $\vec{A}_\mu$  のみがそのままゲージ場として振舞うことから分かる。SU(2) の場合で既に見た通りである。しかしこの場合も前節と同様に、 $\xi_\alpha$  を任意の整数値として一般に磁荷

$$\vec{m} = g \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha \vec{\epsilon}_\alpha = (m^{(3)}, m^{(8)}) \quad (45)$$

を持つモノポールが出現するので、

$$\vec{k}^\mu = \sum_{l=1}^N \vec{m}_l \int d\tau_l \left( \frac{d}{d\tau_l} \vec{x}_l^\mu \right) \delta^4(x - \vec{x}_l(\tau_l)) \quad (46)$$

の磁流が理論に寄与してくる。つまり [U(1)]<sup>2</sup> の可換ゲージ理論に対する Bianchi 恒等式が破れるので、結果として [U(1)]<sup>2</sup> の対称性に関する場の強さはゲージ場  $\vec{A}_\mu$  と磁流  $\vec{k}^\mu$  により

$$\vec{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{n \cdot \partial} n^\alpha \vec{k}^\beta \quad (47)$$

と表されることになる。これが (41) における  $\vec{F}_{\mu\nu}$  の定義である。

## (ii) アーベリアン・ドミナンス

このような背景を踏まえた上でアーベリアン・ドミナンスを考慮する。すなわち非摂動の物理にゲージ場の非対角成分は寄与しないと見て (41) の荷電物質場  $C_\mu^\alpha$  と  $C_\mu^{*\alpha}$  に関する項を全て切り捨て、

$$\mathcal{L}'_{\text{QCD}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{Abel}} \equiv -\frac{1}{4} \left( \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{n \cdot \partial} n^\alpha \vec{k}^\beta \right)^2 + \bar{q} (i\cancel{\partial} + e\vec{A} \cdot \vec{H} - m_q) q \quad (48)$$

とする。この Lagrangian が双対 Ginzburg-Landau 理論を構築する上で出発点となる。

## (iii) 双対ゲージ場の導入

さて (48) は、場の強さ  $\vec{F}_{\mu\nu}$  に相当する項を見て分かるように磁流を与える項があらわに特異性を背負っており、その帰結として理論が非局所的になっている。理論を構成する上でこのことは非常に都合が悪い。

このような系に対して Zwanziger は、磁流  $\vec{k}_\mu$  と結合する双対ゲージ場  $\vec{B}_\mu$  を導入することで理論を局所的にするという定式化を行なった [27]。この定式化のもとでは、電流  $\vec{j}_\mu \equiv e\bar{q}\gamma_\mu \vec{H}q$  と磁流  $\vec{k}_\mu$  の双対性が明白になる。これによると  $\mathcal{L}_{\text{Abel}}$  から Dirac 項

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \equiv \bar{q} (i\cancel{\partial} - m_q) q \quad (49)$$

を除いた部分  $\mathcal{L}[\vec{A}_\mu] \equiv \mathcal{L}_{\text{Abel}} - \mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  は経路積分の表式で

$$\int \mathcal{D}\vec{A}_\mu e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\vec{A}_\mu]} = \int \mathcal{D}\vec{B}_\mu e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\vec{B}_\mu]} = \int \mathcal{D}\vec{A}_\mu \mathcal{D}\vec{B}_\mu e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\vec{A}_\mu, \vec{B}_\mu]} \quad (50)$$

の関係を満たす。ここで

$$\mathcal{L}[\vec{A}_\mu] \equiv -\frac{1}{4} \left( \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{n \cdot \partial} n^\alpha \vec{k}^\beta \right)^2 + \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}^\mu \quad (51)$$

$$\mathcal{L}[\vec{B}_\mu] \equiv -\frac{1}{4} \left( \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{n \cdot \partial} n^\alpha \vec{j}^\beta \right)^2 + \vec{k}_\mu \cdot \vec{B}^\mu \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\vec{A}_\mu, \vec{B}_\mu] &\equiv \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^\nu [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]_\nu + \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^\nu [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]_\nu \\ &\quad - \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^2 - \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^2 + \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}^\mu + \vec{k}_\mu \cdot \vec{B}^\mu \\ &\equiv \mathcal{L}_{\text{Zwanziger}} \end{aligned} \quad (53)$$

である。場の方程式を導くという観点からするとこれらの Lagrangian は全て “ 等価 ” である。どれを用いても良い。最後の表式 (53) が Zwanziger の処方の帰結であり Lagrangian が局所的になっていることがわかる。なお、ここでは

$$[a \cdot (b \wedge c)]^\nu \equiv a_\mu (b^\mu c^\nu - b^\nu c^\mu) \quad , \quad [a \cdot (\partial \wedge c)]^\nu \equiv a_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha c_\beta \quad (54)$$

の定義を用いている。そしてこの Lagrangian はさらに、ゲージ場  $\vec{A}^\mu$  と双対ゲージ場  $\vec{B}^\mu$  がパラレルに扱われており、そのため電流と磁流の双対性が明白な形で表現されている。このような形で磁流を双対ゲージ場と結合するものとして Lagrangian を構成すると、 $\vec{A}^\mu$  と  $\vec{B}^\mu$  それぞれについて変分することにより、それに対応する場の方程式として、Maxwell の方程式と Bianchi 恒等式の破れの式を導くことができる。

#### (iv) モノポール場とその凝縮

ここまではモノポールを古典的な粒子のごとく扱い、その作る磁流を理論に取り込むということを考えてきた。しかしながらこのモノポールは、アーベリアン射影という人為的なゲージ固定におけるトポロジカルな議論から導出されたものであり、従ってそのトポロジ性以外にダイナミクスについては議論することができない。

そこで磁流  $\vec{k}_\mu$  を Samuel の公式 [28] を用いて

$$\vec{k}_\mu \cdot \vec{B}^\mu \rightarrow \sum_{\alpha=1}^3 |(i\partial_\mu - g\vec{e}_\alpha \cdot \vec{B}_\mu)\chi_\alpha|^2 \quad (55)$$

のように複素スカラー場  $\chi_\alpha$  に、すなわち “ ボソン場 ” に書き換えるということをする。この際に三種のモノポールが Weyl 対称性で結び付いていることにより、モノポール場の位相には拘束条件

$$\sum_{\alpha=1}^3 \arg \chi_\alpha = \text{const.} \equiv 0 \quad (56)$$

が付く [16]。

そして、このように磁流と双対ゲージ場の結合する項を書き換えた後に、モノポールが Bose 凝縮を起こすとして超伝導の理論に習ってモノポール場の自己相互作用項、

$$\mathcal{L}_{\text{self-int}} \equiv - \sum_{\alpha=1}^3 \lambda (|\chi_\alpha|^2 - v^2)^2 \quad (57)$$

を導入する。この項は QCD 真空において双対 Higgs 機構を引き起こす役割をする。これについては 2.3 節で触れる。

このようにして最終的に非摂動的 QCD の有効理論としての双対 Ginzburg-Landau 理論が

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DGL}} &\equiv \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Zwanziger}} + \mathcal{L}_{\text{self-int}} \\ &= -\frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^\nu [n \cdot^* (\partial \wedge \vec{B})]_\nu + \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^\nu [n \cdot^* (\partial \wedge \vec{A})]_\nu \\ &\quad - \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^2 - \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^2 \\ &\quad + \bar{q} (i\cancel{\partial} - e\vec{A} \cdot \vec{H} - m_q) q \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^3 [(i\partial_\mu - g\vec{e}_\alpha \cdot \vec{B}_\mu)\chi_\alpha]^2 - \lambda (|\chi_\alpha|^2 - v^2)^2 \end{aligned} \quad (58)$$

のように構築される。

この Lagrangian は  $\vec{A}_\mu$  と  $\vec{B}_\mu$  の双対性に起因して、 $[U(1)_e]^2$  のゲージ対称性

$$q(x) \rightarrow e^{-i\vec{H} \cdot \vec{\theta}_A(x)} \quad \vec{A}_\mu(x) \rightarrow \vec{A}_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \vec{\theta}_A(x) \quad (59)$$

に加えて

$$\chi_\alpha(x) \rightarrow e^{-i\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\theta}_B(x)} \quad \vec{B}_\mu(x) \rightarrow \vec{B}_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\theta}_B(x) \quad (60)$$

という  $[U(1)_m]^2$  の双対ゲージ対称性も持つ。一見すると対称性が拡張されたように見えるが、これは  $\vec{A}_\mu$  と  $\vec{B}_\mu$  が  $\mathcal{L}_{\text{Zwanziger}}$  を通して繋がっているのもそれぞれ独立ではなく従ってゲージ自由度が増えたのではないということに注意しておく。

### 2.3 双対 Higgs 機構と双対 Meissner 効果

さて、 $\mathcal{L}_{\text{DGL}}$  で記述されるような系は tree レベルで  $\langle 0 | \chi_\alpha | 0 \rangle = v$  の真空期待値を持つ。すなわちモノポール凝縮が実現している（こうなるように Lagrangian を構成した）。

そこでモノポール場  $\chi_\alpha$  を極分解により

$$\chi_\alpha \equiv (v + \tilde{\chi}_\alpha) e^{i\eta_\alpha/v} \quad (61)$$

のように再定義する。これを  $\mathcal{L}_{\text{DGL}}$  に代入してユニタリーゲージ (unitary gauge) をとる。すなわち双対ゲージ変換により  $\eta_\alpha$  場を消去してしまう。すると、

$$\mathcal{L}_{\text{DGL}} = -\frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^\nu [n \cdot^* (\partial \wedge \vec{B})]_\nu + \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^\nu [n \cdot^* (\partial \wedge \vec{A})]_\nu$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^2 - \frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^2 \\
& + \bar{q} (i\not{\partial} - e\vec{A} \cdot \vec{H} - m) q + \frac{1}{2}m_B^2 \vec{B}_\mu^2 \\
& + \sum_{\alpha=1}^3 [(\partial_\mu \tilde{\chi}_\alpha)^2 - m_\chi^2 \tilde{\chi}_\alpha^2 - \lambda(4v\tilde{\chi}_\alpha^3 + \tilde{\chi}_\alpha^4) + g^2 \tilde{\chi}_\alpha^2 (\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{B}_\mu)^2]
\end{aligned} \tag{62}$$

となる。ここで、

$$m_B \equiv \sqrt{3}gv \quad , \quad m_\chi \equiv 2\sqrt{\lambda}v \tag{63}$$

であり、また双対ゲージ変換により

$$\vec{B}_\mu + \frac{1}{gv} \vec{\epsilon}_\alpha (\partial_\mu \eta_\alpha) \rightarrow \vec{B}_\mu \tag{64}$$

のように  $\vec{B}_\mu$  を変換した。

表式 (62) を見てわかるようにこのような系では双対ゲージ対称性  $[U(1)_m]^2$  が自発的に破れている (但し  $[U(1)_e]^2$  のゲージ対称性は破れずに残る)。そして双対ゲージ場  $\vec{B}_\mu$  は  $\eta_\alpha$  場を“吸収”して同時に質量  $m_B$  を獲得している。つまりモノポール凝縮は双対 Higgs 機構を引き起こす。

双対ゲージ場が質量を持つということは、この場に対応する粒子が無限遠まで到達できないということを意味し、巨視的には双対ゲージ場の回転で与えられるカラー電場が、このモノポール凝縮を起こした真空 (これを非摂動論的真空と呼ぶことにする) に対して  $1/m_B$  程度しか浸入できないということを意味する。すなわちカラー電場が非摂動論的真空から排除されるという双対 Meissner 効果が起こる。

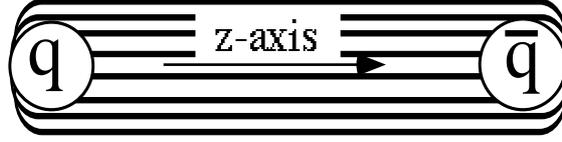
従ってこのような非摂動論的真空中にカラー電場を供給するカラー電荷があるとすると、それは単独では存在できず必ずそれを吸収する反カラー電荷も存在することになり、カラー電荷と反カラー電荷がある程度離れている場合にはそれらの間のカラー電場は紐のように細く 1 次元状に絞られることになる。すなわち flux-tube が形成される。カラー電場が 1 次元方向に一樣になるということは、その長さに比例したエネルギーを稼ぐということであり、カラー電荷と反カラー電荷を無限に引き離すためには無限のエネルギーを要するということを意味する。従って有限のエネルギーではカラー電荷を取り出すことができない。すなわちカラー電荷は閉じ込められる。まとめると

「 flux-tube の形成 → カラーの閉じ込め 」

ということになる。このことを次の節で詳しくみることにする。

## 2.4 Flux-Tube 形成によるカラーの閉じ込め

この節では Fig.1 のようなカラー電荷 (クォーク) と反カラー電荷 (反クォーク) がある系を想定して、クエンチ近似レベルの  $\mathcal{L}_{\text{DGL}}$  からその性質を調べる。ここでクエンチ近似とはクォークのダイナミカルな効果を見捨て、ソースとして  $c$  数の外場を扱う近似のことをいう。このような近似は重いクォーク系 ;  $m_q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$  に対しては妥当であり、今はそのような系を念頭に置く。



## flux-tube

**Fig.1** flux-tube 形成を通じたカラー電荷（クォーク）の閉じ込め描像。

このとき Lagrangian は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{DGL}} = & -\frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^\nu [n \cdot * (\partial \wedge \vec{B})]_\nu + \frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^\nu [n \cdot * (\partial \wedge \vec{A})]_\nu \\
& -\frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^2 - \frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^2 \\
& + \sum_{\alpha=1}^3 [ |(\partial_\mu + ig\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{B}_\mu)\chi_\alpha|^2 - \lambda(|\chi_\alpha|^2 - v^2)^2 ]
\end{aligned} \tag{65}$$

で与えられる。ソースは  $c$  数としてのカラー電流

$$\vec{j}_\mu(x) = e\bar{q}\gamma_\mu \vec{H}q \equiv \vec{Q}g_{\mu 0} [\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a})] \tag{66}$$

である。但し、

$$\vec{Q} \equiv (Q_3, Q_8) \tag{67}$$

はクォークのカラー電荷であり、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{a}$  はそれぞれカラー電荷と反カラー電荷の位置ベクトルである。正確には (66) はカラーの足を持っており、クォークの基本表現として、

$$\text{Blue } (1, 0, 0) \quad , \quad \text{Red } (0, 1, 0) \quad , \quad \text{Green } (0, 0, 1) \tag{68}$$

を選ぶと、それぞれのクォークのカラー電荷は SU(3) 代数のウエイトベクトル (weight vector)

$$\vec{w}_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \vec{w}_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \vec{w}_3 = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \tag{69}$$

を用いて、

$$\vec{Q}_\alpha \equiv e\vec{w}_\alpha \tag{70}$$

で与えられることになる。ラベル  $\alpha = 1, 2, 3$  がそれぞれ Blue、Red、Green のカラーに対応する。参考までにこのウエイトベクトルは前述のルートベクトル  $\vec{\epsilon}_a$  と、

$$\vec{\epsilon}_1 = \vec{w}_2 - \vec{w}_3, \quad \vec{\epsilon}_2 = \vec{w}_3 - \vec{w}_1, \quad \vec{\epsilon}_3 = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 \tag{71}$$

の関係がある。

このようなソースがあることを念頭に置き、まずゲージ場のみで記述される系を考察する。これは Fig.1 において端点を除いた部分、すなわちカラー電荷と反カラー電荷の中間領域を調べる

ことに相当する。そして特にこの場合は (65) において  $\vec{A}_\mu$  に関して単純に汎関数積分でき、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DGL-pure}} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu)^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^3 [ |(\partial_\mu + ig\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{B}_\mu)\chi_\alpha|^2 - \lambda(|\chi_\alpha|^2 - v^2)^2 ] \end{aligned} \quad (72)$$

を得ることができる。

ここで (66) のような系を想定するということは、三種類のカラー電荷のうち一種のカラー電荷、例えば Blue と反 Blue の系を考えることに相当するが、このような系においては Gauss の法則により、

$$\vec{B}_\mu \propto \vec{Q}_1 \quad (73)$$

であるので

$$\vec{B}_\mu \equiv \vec{w}_1 B_\mu^{\text{Blue}} \quad (74)$$

と定義することができる。

すると、

$$\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{B}_\mu = \vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{w}_1 B_\mu^{\text{Blue}} = \frac{1}{2} (0, -1, 1) B_\mu^{\text{Blue}} \quad (75)$$

より (72) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DGL-pure}} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu^{\text{Blue}} - \partial_\nu B_\mu^{\text{Blue}})^2 + |\partial_\mu \chi_1|^2 - \lambda(|\chi_1|^2 - v^2)^2 \\ &\quad + |(\partial_\mu - \frac{1}{2} ig B_\mu^{\text{Blue}})\chi_2|^2 - \lambda(|\chi_2|^2 - v^2)^2 \\ &\quad + |(\partial_\mu + \frac{1}{2} ig B_\mu^{\text{Blue}})\chi_3|^2 - \lambda(|\chi_3|^2 - v^2)^2 \end{aligned} \quad (76)$$

となる。ここでモノポール場導入の際にその位相に課せられた拘束条件 (56) を考慮すると、この場合、

$$\chi_1 = v \quad , \quad \chi_2 = \chi^{\text{Blue}*} \quad , \quad \chi_3 = \chi^{\text{Blue}} \quad (77)$$

とすることができるので結局、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DGL-pure}} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu^{\text{Blue}} - \partial_\nu B_\mu^{\text{Blue}})^2 \\ &\quad + 2|(\partial_\mu + \frac{1}{2} ig B_\mu^{\text{Blue}})\chi^{\text{Blue}}|^2 - 2\lambda(|\chi^{\text{Blue}}|^2 - v^2)^2 \end{aligned} \quad (78)$$

となる。そしてこれは場と結合定数パラメーターの再定義、

$$B_\mu^{\text{Blue}} \equiv \sqrt{3}\hat{B}_\mu \quad , \quad \chi^{\text{Blue}} \equiv \hat{\chi} \quad (79)$$

$$g \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{g} \quad , \quad \lambda \equiv 2\hat{\lambda} \quad , \quad v \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v} \quad (80)$$

を行なうと、

$$\mathcal{L}_{\text{DGL-pure}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \hat{B}_\nu - \partial_\nu \hat{B}_\mu)^2 + |(\partial_\mu + i\hat{g}\hat{B}_\mu)\hat{\chi}|^2 - \hat{\lambda}(|\hat{\chi}|^2 - \hat{v}^2)^2 \quad (81)$$

の形に帰着する。これは U(1) ゲージ対称性を有する Nielsen-Olesen の Lagrangian [29] そのものであり、従ってこの理論は Nielsen-Olesen vortex 解を持つ。この解が「flux-tube」となる。す

なわち、中間領域のカラー電場は半径  $1/m_B (= 1/\sqrt{3}gv)$  程度の広がりを持った電束管のような配位を取る。

カラー電束管を  $z$  軸方向にとった円筒座標  $(r, \varphi, z)$  で考えるとこれは  $\varphi$  方向に対しては回転対称性を有し、 $z$  方向に関しては並進対称性を有する系となる。Fig.1 で示した通りである。 $r$  に関してこの電束管から十分離れたところではモノポール凝縮  $|\chi_\alpha| = v$  が実現しており双対ゲージ対称性は自発的に破れているが、逆に中心付近では  $|\chi_\alpha| = 0$  となるため、そこではこの対称性は回復しており  $m_B \sim 0$  となる。従って中心付近の領域ではカラー電場の存在が許されることになる。およそこの二つの領域の境界は、モノポール場のコヒーレンスの長さ  $1/m_\chi (= 1/2\sqrt{\lambda}v)$  によって特徴付けられ、この様子を簡単に表現すると、

$$m_B(r) \simeq m_B \theta(r - m_\chi^{-1}) = \sqrt{3}gv \theta(r - m_\chi^{-1}) \quad (82)$$

となる。ここで  $m_\chi$  は先に定義したモノポール場の揺らぎに対応する質量である。

そして vortex 解の見地からすれば、カラー電束管はその長さに比例したエネルギーを稼ぐので、中間領域がこの Lagrangian で記述されるということは、カラー電荷と反カラー電荷間に弦張力が定義されるということであり、その結果、線形ポテンシャルが現れてカラーが閉じ込められることになる。この Lagrangian (81) で記述される系が本研究の中心課題であり、これについては三章以降で詳しく触れる。

ところで一種類のカラー電荷と結合する双対ゲージ場を考える限り、Weyl 対称性により他の Red でも Green でもこの形に還元することができる。その場合は (74) で、

$$\vec{B}_\mu \equiv \vec{w}_2 B_\mu^{\text{Red}} \quad \text{or} \quad \vec{B}_\mu \equiv \vec{w}_3 B_\mu^{\text{Green}} \quad (83)$$

とすれば良い。

## 2.5 閉じ込めポテンシャルと弦張力

以上を踏まえて、この節では実際に端点を含む全系を考慮してクォークと反クォークの閉じ込めポテンシャルを求める。但し超伝導における vortex の議論からわかるように、この解を直接解析的に得ることは困難である（このことに対応して後章では数値的に解くという方法を用いる）。しかしながらなるべく解析的な表式で見たいので、ここではその超伝導の vortex の議論でよく行なわれている処方、「平均場近似 + カットオフ」の処方を行なうことにより議論を進める [31]。なお、カットオフは平均場近似が flux-tube の持つ非物理的な特異性を取り込んでしまうことにより生じる発散を取り除くためにある。

今一度 (65) の  $\mathcal{L}_{\text{DGL}}$  に立ち戻り、これに平均場近似  $|\chi_\alpha| = v$  を施す。すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DGL-MF}} = & -\frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^\nu [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]_\nu + \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^\nu [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]_\nu \\ & -\frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{A})]^2 - \frac{1}{2n^2} [n \cdot (\partial \wedge \vec{B})]^2 + \frac{1}{2} m_B^2 \vec{B}_\mu^2 \end{aligned} \quad (84)$$

を得る。なお、カットオフは後で (82) を考慮して決める。

ここでポテンシャルは、外場  $\vec{j}_\mu$  を置いたときの系のエネルギーで与えられるので、

$$Z[\vec{j}_\mu] \equiv \langle 0 | e^{i \int \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}^\mu} | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= N \int \mathcal{D}\vec{A}_\mu \mathcal{D}\vec{B}_\mu e^{\int (\mathcal{L}_{\text{DGL-MF}}[\vec{A}_\mu, \vec{B}_\mu] + \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}^\mu)} \\
&= e^{-iV(\vec{j}_\mu)} \int dt \\
&= e^{iS[\vec{j}_\mu]}
\end{aligned} \tag{85}$$

における  $V(\vec{j}_\mu)$  がそれに相当することになる。従ってこれは  $S[\vec{j}_\mu]$  を計算すれば定まる。 $\vec{j}_\mu$  については既に (66) で定義した。

そこで (85) の第二式をまず  $\vec{B}_\mu$  について汎関数積分する。するとその Lagrangian として、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\vec{A}_\mu, \vec{j}_\mu] &= \frac{1}{2} \vec{A}^\mu \cdot D_{\mu\nu}^{-1} \vec{A}^\nu + \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}^\mu \\
&= \frac{1}{2} (\vec{A}^\mu + \vec{j}_\alpha D^{\alpha\mu}) \cdot D_{\mu\nu}^{-1} (\vec{A}^\nu + D^{\nu\beta} \vec{j}_\beta) - \frac{1}{2} \vec{j}_\mu \cdot D^{\mu\nu} \vec{j}_\nu
\end{aligned} \tag{86}$$

を得る。これをさらに  $\vec{A}_\mu$  について汎関数積分すると、

$$\mathcal{L}[\vec{j}_\mu] = -\frac{1}{2} \vec{j}_\mu \cdot D^{\mu\nu} \vec{j}_\nu \tag{87}$$

となる。ここで  $D_{\mu\nu}$  は可換グルーオンの伝搬関数であり、 $\alpha_e$  をゲージパラメーターとした共変ゲージ

$$\mathcal{L}_{\text{G.F.}} = -\frac{1}{2\alpha_e} (\partial_\mu \vec{A}^\mu)^2 \tag{88}$$

のもとで、

$$D_{\mu\nu}^{-1} = g_{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha_e}\right) \partial_\mu \partial_\nu + \frac{m_B^2 n^2}{(n \cdot \partial)^2 + m_B^2 n^2} X_{\mu\nu} \tag{89}$$

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{\partial^2} \left( g_{\mu\nu} + (\alpha_e - 1) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) \frac{1}{\partial^2} \frac{m_B^2}{\partial^2 + m_B^2} \frac{n^2}{(n \cdot \partial)^2} X_{\mu\nu} \tag{90}$$

の形を取る。ここで、

$$X^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{n^2} \varepsilon_\lambda^{\mu\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\nu\gamma\delta} n_\alpha n_\gamma \partial_\beta \partial_\delta \tag{91}$$

である。モノポールが凝縮していない ( $v=0$ ) ときは  $m_B=0$  であり、(89)、(90) から  $m_B$  に関する項が消えて摂動論的 QCD から得られる伝搬関数に帰着する。

この  $D_{\mu\nu}$  を用いて (87) をあらわに書くと、

$$\mathcal{L}[\vec{j}_\mu] = -\frac{1}{2} \vec{j}^\mu \cdot \left[ \frac{1}{\partial^2 + m_B^2} g_{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{\partial^2 + m_B^2} \frac{n^2}{(n \cdot \partial)^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu n_\nu}{n^2} \right) \right] \vec{j}^\nu \tag{92}$$

となる。これはゲージパラメーター  $\alpha_e$  に依らない。従って作用は、

$$\begin{aligned}
S[\vec{j}_\mu] &= \int d^4x \mathcal{L}[\vec{j}_\mu] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \vec{j}^\mu(-k) \cdot \left[ \frac{1}{k^2 - m_B^2} g_{\mu\nu} - \frac{m_B^2}{k^2 - m_B^2} \frac{n^2}{(n \cdot k)^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu n_\nu}{n^2} \right) \right] \vec{j}^\nu(k)
\end{aligned} \tag{93}$$

で与えられる。

さて (66) を運動量表示で

$$\vec{j}_\mu(k) \equiv \int d^4x e^{ik \cdot x} \vec{j}_\mu(x) = 2\pi \vec{Q} g_{\mu 0} \delta(k_0) (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}} - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}) \quad (94)$$

のように書き改めて作用 (93) に代入すると、

$$S[\vec{j}_\mu] = -\vec{Q}^2 \int dt \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})(1 - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \left( \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_B^2} + \frac{m_B^2}{\mathbf{k}^2 + m_B^2} \frac{1}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2} \right) \quad (95)$$

を得る。但し  $r \equiv b - a$  である。この表式で  $k$  積分を遂行すれば (85) によりポテンシャルが求まることになる。

ここでポテンシャルを次のように分けて書いておく。

$$V(\vec{j}_\mu) = V_{\text{yukawa}}(r) + V_{\text{linear}}(\mathbf{r}; \mathbf{n}) \quad (96)$$

すると、

$$\begin{aligned} V_{\text{yukawa}}(r) &\equiv \vec{Q}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})(1 - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \frac{m_B^2}{\mathbf{k}^2 + m_B^2} \\ &= \frac{\vec{Q}^2 \exp(-m_B r)}{4\pi r} \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{linear}}(\mathbf{r}; \mathbf{n}) &\equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \frac{m_B^2}{\mathbf{k}^2 + m_B^2} \frac{1}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2} \\ &= \frac{\vec{Q}^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_r}{k_r^2} [1 - \cos(k_r r)] \int_0^{\infty} dk_T^2 \frac{m_B^2}{k_r^2 + k_T^2 + m_B^2} \\ &= \frac{\vec{Q}^2 m_B^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_r}{k_r^2} [1 - \cos(k_r r)] \ln \frac{m_\chi^2 + k_r^2 + m_B^2}{k_r^2 + m_B^2} \\ &= \left[ \frac{\vec{Q}^2 m_B^2}{8\pi} \ln \frac{m_B^2 + m_\chi^2}{m_B^2} \right] r \end{aligned} \quad (98)$$

となる。但し (97) では  $r$  に依らない定数項を落とし、(98) の計算では  $q - \bar{q}$  系の軸対称性を考慮して  $n // k$  としている。この軸方向、軸に垂直な方向の運動量がそれぞれ  $k_r, k_T$  である。先に述べたように平均場近似を行なったことに対応して (98) の二行目の  $k_T^2$  積分は紫外発散を含む形となるが、ここで (82) を運動量空間での表式に書き直した

$$m_B(k_T) \simeq m_B \theta(m_\chi - k_T) \quad (99)$$

を考慮に入れることで、その積分区間を

$$\int_0^{\infty} dk_T^2 \rightarrow \int_0^{m_\chi^2} dk_T^2 \quad (100)$$

として発散を除去している。

従って最終的にポテンシャルは  $q - \bar{q}$  間の距離  $r$  の関数として、

$$V(r) = -\frac{\vec{Q}^2 \exp(-m_B r)}{4\pi r} + \left[ \frac{\vec{Q}^2 m_B^2}{8\pi} \ln \frac{m_B^2 + m_\chi^2}{m_B^2} \right] r \quad (101)$$

で与えられることになる。ここで (70) より、

$$\vec{Q}^2 = Q_3^2 + Q_8^2 = \frac{1}{3} e^2 \quad (102)$$

である。そしてこのポテンシャルの二項目から弦張力、

$$\sigma \equiv \frac{\vec{Q}^2 m_B^2}{8\pi} \ln \frac{m_B^2 + m_\chi^2}{m_B^2} \quad (103)$$

が定義できる。

このように flux-tube がカラー電荷と反カラー電荷間に形成されることに対応して線形ポテンシャルが現れ、カラー電荷は系に閉じ込められる。これらは全て双対 Meissner 効果の帰結であり、双対 Ginzburg-Landau 理論では flux-tube の形成を通じてカラーの閉じ込めを説明する。

以上のような非摂動的 QCD が示唆するカラーの閉じ込めと flux-tube の関係を踏まえて、次の章では純粋に (81) の  $\mathcal{L}_{\text{DGL-pure}}$  が記述する flux-tube 解に焦点を絞り、その諸性質を数値的に詳しく調べる。

### 3 一体系 Flux-Tube 解の諸性質

この章では純ゲージの双対 Ginzburg-Landau 理論の Lagrangian (81) (これは双対可換 Higgs 理論ともいう)

$$\mathcal{L}_{\text{DGL-pure}} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + |(\partial_\mu + i\hat{g}B_\mu)\chi|^2 - \hat{\lambda}(|\chi|^2 - \hat{v}^2)^2 \quad (104)$$

を出発点とし (場の “ $\hat{\phantom{x}}$ ” は省略) この Lagrangian が記述する一体系の flux-tube 解とその性質について、今後用いる場の方程式の導出も含めて述べることにする。なお Regge 軌跡 [7] から得られる弦張力や、格子 QCD に基づく双対ゲージ場の質量計算 [30] を考慮して、現時点で最も妥当だと思われる双対 Ginzburg-Landau 理論のパラメーターセットについても検討する。このパラメーターセットはこの理論が導く弦張力の近似式 (103) を用いて行なわれていたが [17]、本研究では場の方程式を有限差分法を用いて直接数値的に解くという方法を取るのにより適当に定めることができる。

#### 3.1 一般的な関係式

Lagrangian (104) は双対ゲージ場  $B_\mu$  が一種類のカラーと結合する場であることに対応して  $U(1)$  群のゲージ変換

$$\chi(x) \rightarrow \chi(x) e^{i\alpha(x)} \quad (105)$$

$$\chi^*(x) \rightarrow \chi^*(x) e^{-i\alpha(x)} \quad (106)$$

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) - \frac{1}{\hat{g}} \partial_\mu \alpha(x) \quad (107)$$

に対して不変である。ここで場  $\chi(x)$  は複素スカラー場であり一般に実スカラー場  $\phi(x)$  と位相  $f(x)$  を用いて、

$$\chi(x) = \phi(x)e^{if(x)} \quad (108)$$

と書けるので、先の U(1) ゲージ対称性を利用して  $\alpha(x) \equiv -f(x)$  とすることで (104) の Lagrangian を

$$\mathcal{L}_{\text{DGL-pure}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu)^2 + |(\partial_\mu + i\hat{g}B'_\mu)\phi|^2 - \hat{\lambda}(\phi^2 - \hat{v}^2)^2 \quad (109)$$

但し、

$$B'_\mu \equiv B_\mu + \frac{1}{\hat{g}}\partial_\mu f \quad (110)$$

のように書き換える (ユニタリーゲージ)。このようにすると位相  $f(x)$  の flux-tube 解に対する役割が見易くなる。

これより  $\phi$ 、 $B'_\mu$  に対する場の方程式を導出すると、

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \hat{g}^2 B'_\mu B'^{\mu} \phi + 2\hat{\lambda}\phi(\phi^2 - \hat{v}^2) = 0 \quad (111)$$

$$\partial^\nu (\partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu) - 2\hat{g}^2 B'_\mu \phi^2 = 0 \quad (112)$$

となる。さらに静的な場合は、

$$\nabla^2 \phi - \hat{g}^2 \mathbf{B}'^2 \phi - 2\hat{\lambda}\phi(\phi^2 - \hat{v}^2) = 0 \quad (113)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}' + 2\hat{g}^2 \mathbf{B}' \phi^2 = 0 \quad (114)$$

但し、

$$\mathbf{B}' \equiv \mathbf{B} - \frac{1}{\hat{g}}\nabla f \quad (115)$$

となる。このとき系のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &\equiv \int d^3x (-\mathcal{L}_{\text{DGL-pure}}) \\ &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{B}')^2 + (\nabla \phi)^2 + \hat{g}^2 \mathbf{B}'^2 \phi^2 + \hat{\lambda} (\phi^2 - \hat{v}^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (116)$$

であり、これが有限になるような種々の境界条件のうち、特殊なものを選んで場の方程式 (113) , (114) を解くと flux-tube 解を得ることができる。従って flux-tube 解を得るという作業は境界条件をいかに設定するか、という問題に帰着する。そしてその設定は位相  $f(x)$  が鍵となる。その理由は  $f(x)$  は flux-tube を与える境界条件のときには、その “芯” のところで特異的であるために、一般に

$$\nabla \times \nabla f \neq 0 \quad (117)$$

となるからである (具体的な表式はすぐ後でみる)。そしてこの性質がトポロジカルな保存量である巻き数を与え、flux-tube 解の古典的な安定性を保証する。

ここでパラメーター  $\hat{g}$  ,  $\hat{\lambda}$  ,  $\hat{v}$  の役割について述べておく。これらは flux-tube の太さを指定する二つの長さ、カラー電束の浸入長とコヒーレンスの長さ、それぞれ

$$m_B^{-1} \equiv 1/(\sqrt{2} \hat{g} \hat{v}) \quad (118)$$

$$m_\chi^{-1} \equiv 1/(2\sqrt{\hat{\lambda}} \hat{v}) \quad (119)$$

と関係しており、その比は系の真空を特徴付ける最も重要な Ginzburg-Landau (GL) パラメーター、

$$\tilde{\kappa} \equiv \sqrt{2}\kappa \equiv \frac{m_B^{-1}}{m_\chi^{-1}} = \frac{\sqrt{2\hat{\lambda}}}{\hat{g}} \quad (120)$$

を与える。通常、超伝導の理論では  $\kappa$  が GL パラメーターと呼ばれるが、ここではそれを  $\tilde{\kappa}$  で定義しておく。この定義に基づくと、 $\tilde{\kappa} > 1$  が Type-II、 $\tilde{\kappa} < 1$  が Type-I としてその超伝導性が分類される。この量は無次元量であり系のエネルギースケールに依らない。従っていったん flux-tube 解が得られれば、その定性的な性質はこの GL パラメーターで制御されることになる。

### 3.2 一体系 Flux-Tube 解の導出

以上のような準備のもと、 $z$  軸に対して並進対称性を有する場合の一体系の flux-tube 解導出を試みる。この系においてはその並進対称性と一体系という設定により場の自由度が軸回りの回転対称性を持つ。従って場  $B$ 、 $\phi$  は  $z$  軸からの距離  $r$  の自由度のみで

$$\begin{aligned} B &= B(r)\mathbf{e}_\theta = \frac{\tilde{B}(r)}{r}\mathbf{e}_\theta \\ \phi &= \phi(r) \end{aligned} \quad (121)$$

のように記述できる。さらに位相  $f$  は前述のように flux-tube の“芯”のところで

$$\nabla \times \nabla f = 2\pi n \delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z \quad (122)$$

のように特異的であることから生じる多価性により、

$$f = n\theta \quad (123)$$

と定義できる。通常は (123) の帰結として (122) が導かれるが、ここではそれを逆に定義した。ここで  $\theta$  は  $z$  軸回りの方位角であり、 $n$  は flux-tube の巻き数で整数値を取る (flux の量子化)。 $f$  の原点での特異性はその勾配をとると次のように明らかになる。

$$\nabla f = \frac{n}{r}\mathbf{e}_\theta \quad (124)$$

このとき場の方程式は、

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} - \left(\frac{n - \hat{g}\tilde{B}}{r}\right)^2 \phi - 2\hat{\lambda}\phi(\phi^2 - \hat{v}^2) = 0 \quad (125)$$

$$\frac{d^2\tilde{B}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\tilde{B}}{dr} + 2\hat{g}(n - \hat{g}\tilde{B})\phi^2 = 0 \quad (126)$$

であり、 $z$  軸単位長さ  $1/\hat{v}$  あたりの系のエネルギーは

$$E = \frac{2\pi}{\hat{v}} \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left( \frac{n - \hat{g}\tilde{B}}{r} \right)^2 \phi^2 + \hat{\lambda}(\phi^2 - \hat{v}^2)^2 \right] \quad (127)$$

で与えられる。従って境界条件は、

$$r \rightarrow 0 \quad \text{で} \quad \tilde{B} \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad \phi \rightarrow 0 \quad (128)$$

$$r \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \tilde{B} \rightarrow n/\hat{g} \quad \text{かつ} \quad \phi \rightarrow \hat{v} \quad (129)$$

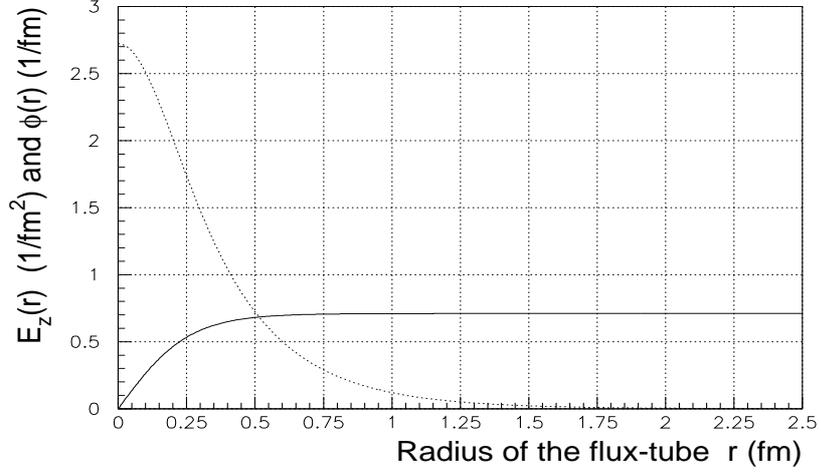


Fig.2 一体系 flux-tube 解の profile 。点線はカラー電場  $E_z(r)$ 、実線はモノポール場  $\phi(r)$ 。

を課せば良い。このようにすると  $n = 1$  のときは Fig.2 のような解を得ることができる。

但し、ここでは  $E$  が弦張力  $\sigma$  と

$$\sigma = E / \int_0^{1/\hat{v}} dz = E \hat{v} \quad (130)$$

の関係にあり、この物理量が Regge 軌跡 [7] の考察から

$$\sigma = 1.0 \text{ GeV/fm} \quad (131)$$

で与えられること、そして  $m_B$  や  $m_\chi$  が、格子 QCD に基づく双対ゲージ場の質量計算 [30] と双対 Ginzburg-Landau 理論の紫外のカットオフの考察 [17] により、

$$m_B = 0.6 \text{ GeV} \quad (132)$$

$$m_\chi = 1.6 \text{ GeV} \quad (133)$$

のように要請されること、の計三つを考慮し、これらの値を再現するようにパラメーターセットを

$$\hat{g} = 3.0 \quad (134)$$

$$\hat{\lambda} = 33 \quad (135)$$

$$\hat{v} = 0.14 \text{ GeV} = 0.71 \text{ fm}^{-1} \quad (136)$$

のように決定した ((80) :  $g = 3.5$  ,  $e = 4\pi/g = 3.6$  ,  $\lambda = 66$  ,  $v = 0.10 \text{ GeV}$  )。このとき GL パラメーターは

$$\tilde{\kappa} = 2.7 > 1 \quad (137)$$

である。これは考えている系の真空が Type-II に属していることを意味する。以上のパラメーターセットが双対 Ginzburg-Landau 理論のパラメーターであり、これを後章の解析で用いる。

ここで平均場近似を適用した flux-tube 解に対する解析的アプローチについて簡単に見ておく [31]。一般にこの近似は Type-II の極限、

$$\tilde{\kappa} \gg 1 \quad (138)$$

においてのみ正当化される。というのも、この場合は  $m_B^{-1} \gg m_\chi^{-1}$  であり、flux-tube の広がり  $m_B^{-1}$  を固定すると、 $m_\chi^{-1} \rightarrow 0$  とみることができ、従ってこの系は一様にモノポールが凝縮している系と考えることができるからである。

するとこの場合には  $\phi \sim \hat{v}$  と取れ、場の方程式 (125)、(126) は結局、片方の (126) 式、

$$\frac{d^2 \tilde{B}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}}{dr} + 2\hat{g}(n - \hat{g}\tilde{B})\hat{v}^2 = 0 \quad (139)$$

のみで記述されてしまうことになる。ここで  $r \equiv m_B^{-1}\rho$  の置き換えをして、

$$\tilde{B}(\rho) \equiv \frac{n}{\hat{g}} - \rho K(\rho) \quad (140)$$

とすれば (139) は、

$$\frac{d^2 K}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dK}{d\rho} - \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) K = 0 \quad (141)$$

の形に帰着する。この解は変形ベッセル関数  $K_1(\rho)$  (first order modified Bessel function) に他ならない。この漸近形は、

$$K_1(\rho) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\rho} \quad (142)$$

であるので、従って双対ゲージ場は

$$\tilde{B}(\rho) \sim \frac{n}{\hat{g}} - \rho \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\rho} \quad (143)$$

のように振舞い、カラー電場  $E$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\equiv \nabla \times \mathbf{B} \\ &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{\rho}} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (144)$$

となる。これは中心にカラー電場が局在していること、すなわち flux-tube の存在を示唆する。勿論、(144) をみてわかるようにこれは  $\rho \rightarrow 0$  において発散する。この表式が妥当なのは  $\rho > 1$ 、すなわち  $r > m_B^{-1}$  の範囲であり、もしもこの表式を用いようとするならば適当なところで“カット”しなければならない。2章で用いた「平均場近似 + カットオフ」の処方とはこれのことである。

### 3.3 一体系 Flux-Tube 解の GL パラメーター依存性

ここで Type-I、Type-II の真空の性質を明らかにするために系のエネルギー（弦張力）と GL パラメーターの関係を定量的に調べるのも有用である。これを Fig.3 に示す。この結果は系が Type-II のときには巻き数  $n$  の一体系の flux-tube は巻き数 1 の  $n$  体系の flux-tube よりエネルギーが高いこと、そして Type-I のときにはその逆であることを意味している。従って、力とは勿論ポテンシャルの勾配で定義されるものであるが、Type-II では flux-tube 間は斥力的、Type-I では引力的になることが結論できる。

興味深い特徴としては  $\tilde{\kappa} = 1$  のとき、すなわち  $m_B = m_\chi$  のときには flux-tube 間に力が働かないということである。歴史的にはこれは Bogomol'nyi Bound として古くから知られており [32]、この場合においては二階微分方程式である場の方程式 (125)、(126) を一階の微分方程式、

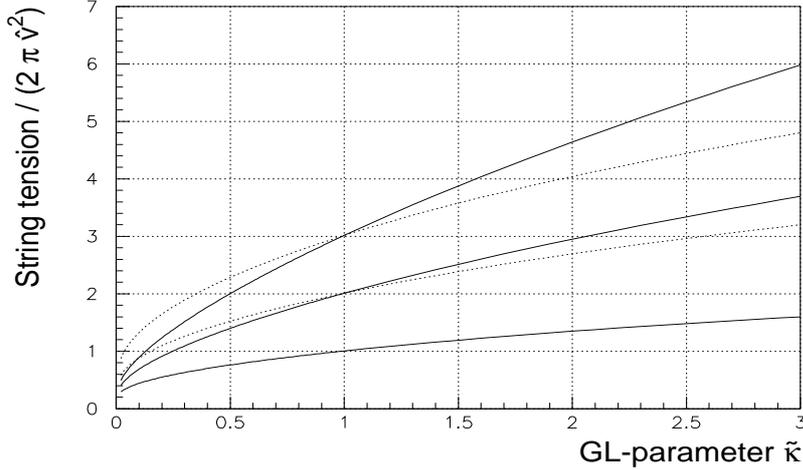
$$\frac{d\phi}{dr} - (n - \hat{g}\tilde{B}) \frac{\phi}{r} = 0 \quad (145)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}}{dr} + \sqrt{2\hat{\lambda}} (\phi^2 - \hat{v}^2) = 0 \quad (146)$$

に還元することができる。さらにこれらを (127) に代入することで系のエネルギーを

$$\begin{aligned} E &= 4\pi n \int_0^\infty dr \phi \frac{d\phi}{dr} \\ &= 2\pi\hat{v}n \end{aligned} \quad (147)$$

のように解析的に求めることができる。系のエネルギーが巻き数に比例するということが flux-tube 間に力が働かないということの要因となる。



**Fig.3** GL パラメーターと弦張力の関係。但し、弦張力は  $2\pi\hat{v}^2$  で割ることにより無次元化している。従って以上の関係は系のエネルギースケールに依らない。 $\tilde{\kappa} > 1$ : Type-II、 $\tilde{\kappa} < 1$ : Type-I、 $\tilde{\kappa} = 1$ : Bogomol'nyi Bound。実線は下から順に  $n = 1, 2, 3$ 。  $n = 2, 3$  と  $\tilde{\kappa} = 1$  で交わっている点線は  $n = 1$  の値をそれぞれ 2 倍、3 倍したもの。

以上、一体系の flux-tube 解に焦点を絞り、解の導出過程とその諸性質について言及した。flux-tube の定性的な性質は全て GL パラメーターによって制御され、定量的には系のエネルギースケールがそれに絡んで効いてくる。ここで定めたパラメーターによると QCD 真空は Type-II に属することになる。次章からこのパラメーターセットのもとでの flux-tube 解を実際の物理現象に応用し、その解明を試みる。

## 4 Flux-Tube 多体系と QGP 相生成機構

QCD はハドロン相とクォーク・グルーオン・プラズマ (quark-gluon plasma 略して QGP) 相の二つの相の存在を予言する [18, 19]。我々の世界はクォークやグルーオンを単独で検出することができないハドロン相であるが、逆に高温・高密度の世界ではクォークやグルーオンが自由に飛び回れる QGP 相になると考えられている。現在の QGP 相に対する一致した見解は、ある高温・高密度の臨界値を超えた場合にそのような相が現れるということである。通常、我々が住んでいる世界の真空はこのような高温・高密度の世界ではないので、そのためクォークやグルーオンを直接的に単体で観測することはない。すなわちカラーは閉じ込められている。つまり我々にとって QGP 相は無縁の世界かも知れない。

では、そのような相を理解しようとするのは意味がないのではないか？ と思えるのだが実はそうでもない。例えばビッグ・バン模型 [33] によると初期宇宙においては、そのような高温・高密度の状態が実現していたと考えられており、現在においてもその痕跡が残されている可能性がある。或いは超新星爆発や中性子星の内部などにおいても高温・高密度の状態が出現すると考えられているので QGP 相が実現している可能性がある。従って QGP 相の性質を調べることは自然現象を理解する上で我々にとって重要な位置を占めることになる。そして何よりハドロン相をより深く理解する上でも QGP 相を調べることは重要である。

そこで、このような相を実験的に作り出し、その性質を調べようという試みが近々米国のブルックヘブン国立研究所 (BNL) の RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) で行なわれることになっている。具体的には超相対論的なスピードまで加速した重イオンどうしを正面衝突させることにより外からコントロールされた形で高温領域を、すなわち QGP 相を作り出し、それを解析する。

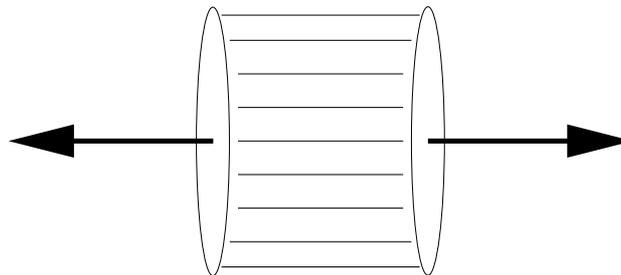
しかしながらこのような解析には解決すべき問題が山積みされている。単純にはこのような衝突実験によって高温領域が作り出され、そして QGP 相が実現しそうであるが、その QGP 相生成の機構に対する理論的説明はまだ充分ではない。さらに仮に QGP 相が実現したとして、そのシグナルをどのように認識すれば良いのかという問題に至っては、種々の候補はあるが現在でも明確な結論が出ていない。簡単に言えば粒子の衝突実験を行えば当然いろいろな破片としてのハドロンやレプトンが飛び出してくることになるが、そのほとんどはバックグラウンドであり、仮に QGP 相が出来たとしても、QGP 相の情報を持った粒子とそれらを区別するのが難しいということである。いずれにしても、このような理論的研究の困難さの裏には、やはり非摂動論的 QCD の不透明さという厳然たる事実がある。非摂動論的 QCD の解析こそ何よりもまず望まれることと言える。

このことに対応して我々は双対 Ginzburg-Landau 理論が非摂動論的 QCD の性質、カラーの閉じ込めや、本研究では触れていないがカイラル対称性の自発的破れ等を定性的かつ定量的に説明することを見てきた [17]。特にカラーの閉じ込めは双対 Meissner 効果による flux-tube の形成を通じて説明されることを 2 章でかえりみた。従ってこの非摂動論的 QCD の情報を含んだ双対 Ginzburg-Landau 理論の性質を活かして上に挙げた山積みの問題の一部の解決に寄与することが

できるのではないかと期待が持たれる。

ここで我々はその一部として重イオン衝突実験における QGP 相生成機構の問題に着目する。現在では衝突の描像として流体力学に基づいた Bjorken の描像 [34] が広く受け入れられている。これによると、衝突に際して重イオンは互いにすり抜け（これを nuclear transparency と呼ぶ）その際に中に含まれる核子同士が相互作用する。そしてその帰結として発生するエネルギー堆積がハドロンの生成時間内にある臨界値を超えた場合に時間発展とともに系は熱平衡状態に至って最終的に QGP 相が形成される。このような描像においてはハドロンの生成時間内のエネルギー堆積という概念が QGP 相生成の機構を調べる上で重要な鍵となる。

flux-tube 模型的 [7] には、このとき核子間相互作用の結果として多数の flux-tube がその重イオン間に光速に近いスピードで互いに逆方向へ進む核子対に引っ張られる形で 1 次元状に形成されると考えることができる (Fig.4-5)。そして、このような flux-tube の多体系におけるエネルギー堆積の可能性として、従来では flux-tube が途中で切れてクォークと反クォークの対生成が起こるといふ Schwinger 機構 [35, 36] を通じたエネルギー堆積というものが考えられてきた。勿論、このような機構が重要となるには違いないが、ここで重イオン衝突直後において 1 核子対あたり一定数の flux-tube が張られるとみた場合、衝突の中心領域においては周辺領域に比べその flux-tube の密度が高くなるので、そのような領域においてはクォーク-反クォーク対を作る過程よりもまず先に flux-tube 間の相互作用を通じた系に対するエネルギー堆積という可能性もあることに気付く [21, 22]。



————— : flux-tube

Fig.4 超相対論的なスピードまで加速された重イオンどうしの衝突直後の概念図。

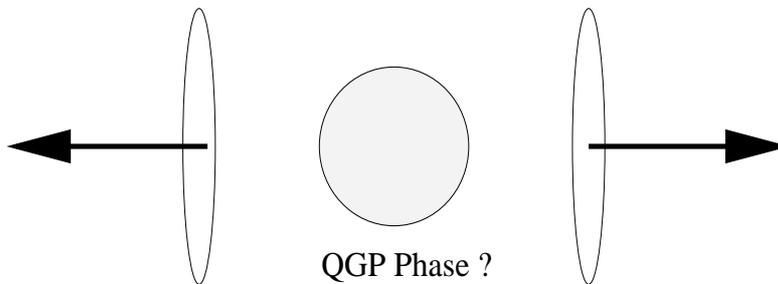


Fig.5 QGP 相生成の概念図。

このような背景を踏まえ、本研究では双対 Ginzburg-Landau 理論が持つ flux-tube 解を応用することにより、特に後者の「flux-tube 間の相互作用」という観点から flux-tube の多体系を考察することで、系に対するエネルギー堆積の可能性とそれに必要な条件を探る。

この章ではまず 3 章で導出した場の方程式 (113)、(114) をもとに、 $z$  軸に対する並進不変性のみを有する場合の多体系 flux-tube 解の導出方法を考察する。そして次にこれらの解の中で、「flux-tube 間の相互作用」を調べるのに適した系を定義してその諸性質を調べる。最後にこれらの結果から Q G P 相生成に対する考察を行なう。

#### 4.1 多体系 Flux-Tube 解の導出方法

$z$  軸に対する並進不変性を有する場合の  $N$  体系を考える。場  $B$  ,  $\phi$  は自由度が  $(x, y)$  に制限されることから、

$$\mathbf{B} = B_x(x, y)\mathbf{e}_x + B_y(x, y)\mathbf{e}_y \quad (148)$$

$$\phi = \phi(x, y) \quad (149)$$

とすることができる。さらに位相  $f$  は一体系の場合の拡張により、

$$\nabla \times \nabla f = 2\pi \sum_{j=1}^N n_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \mathbf{e}_z \quad (150)$$

という特異性をもつ。ここで  $n_j$  は位置  $(x_j, y_j)$  における flux-tube の巻き数である。つまり  $f$  は、

$$f = \sum_{j=1}^N n_j \theta_j = \sum_{j=1}^N n_j \tan^{-1} \frac{y - y_j}{x - x_j} \quad (151)$$

と定義できる。 $\theta_j$  は  $j$  番目の flux-tube の方位角である。これらを一般的な場の方程式 (113)、(114) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \hat{g}^2 (B_x'^2 + B_y'^2) \phi - 2\sqrt{\hat{\lambda}} \phi (\phi^2 - \hat{v}^2) = 0 \quad (152)$$

$$\frac{\partial^2 B_y'}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_x'}{\partial y^2} + 2\hat{g}^2 B_x' \phi^2 = 0 \quad (153)$$

$$\frac{\partial^2 B_x'}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 B_y'}{\partial x^2} + 2\hat{g}^2 B_y' \phi^2 = 0 \quad (154)$$

但し、

$$B_x' \equiv B_x - \frac{\partial f}{\partial x} = B_x + \sum_{j=1}^N n_j \frac{y - y_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (155)$$

$$B_y' \equiv B_y - \frac{\partial f}{\partial y} = B_y - \sum_{j=1}^N n_j \frac{x - x_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (156)$$

が得られる。単位長さ  $1/\hat{v}$  あたりの系のエネルギーは、

$$E = \frac{1}{\hat{v}} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_y'}{\partial x} - \frac{\partial B_x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \hat{g}^2 (B_x'^2 + B_y'^2) \phi^2 + \hat{\lambda} (\phi^2 - \hat{v}^2)^2 \right] \quad (157)$$

である。これより境界条件、

$$(x, y) \rightarrow (x_j, y_j) \quad \text{で} \quad \phi \rightarrow 0 \quad (158)$$

$$r \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad B_x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = - \sum_{j=1}^N n_j \frac{y - y_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (159)$$

$$B_y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^N n_j \frac{x - x_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (160)$$

$$\text{かつ} \quad \phi \rightarrow \hat{v} \quad (161)$$

が定まる。但し  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$  である。

ここまでが  $z$  軸に対して並進不変性を有する  $N$  体系の考察に必要な準備である。境界条件 (158) ~ (161) のもとで場の方程式 (152) ~ (154) を解けば、位置  $(x_j, y_j)$  に巻き数  $n_j$  の flux-tube が存在するような任意の  $N$  体系の flux-tube 解を得ることができる。第3章の一体系の flux-tube 解は、ここで  $N = 1, n_1 = 1, (x_1, y_1) = (0, 0)$  とすれば良い。このようにすると Fig.2 を方位角  $\theta$  方向に一回転させた profile が得られることになる。

## 4.2 二体系 Flux-Tube 解の考察

さて、4.1 節の処方せんに従えば任意の flux-tube 多体系の解を求めることができる。しかしながら一体系 flux-tube の考察で得られたカラー電場の profile をみると、その広がりには有限であり  $m_B^{-1} \sim 0.4$  fm 程度であるので、十分に離れていて、その profile が重ならないような flux-tube どうしは flux-tube 多体系が構成された初期段階でまず相互作用しないと予想される。つまり相互作用は近接した flux-tube 間で行なわれると考えられる。このような系として我々は二体系、flux-tube と flux-tube の系 ( $\equiv$  F-F 系) と flux-tube と anti flux-tube の系 ( $\equiv$  F-A 系) を考察の対象とした。これら二体系は相互作用の本質を見極めるのにも適当な系である。

4.1 節に従うと F-F 系と F-A 系はそれぞれ

$$\text{F-F 系} : N = 2 (n_1 = 1, n_2 = 1)$$

$$\text{F-A 系} : N = 2 (n_1 = 1, n_2 = -1)$$

で定義され、場の方程式、境界条件等はこれを代入すれば定まる。この設定のもとで得られた F-F 系、F-A 系のカラー電場とモノポール場の profile をそれぞれ Fig.6-7、Fig.8-9 に示す。これらは二つの flux-tube 間の距離、

$$d \equiv \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (162)$$

の関数として描かれている。上から順に、 $d = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0$  fm である。Fig.6-7 に注目すると、 $d > 1.5$  fm では個々のカラー電場の profile が独立しているが、 $d = 1.5 \sim 0$  fm では F-F 系においては profile が重なり始め、一方、F-A 系においては profile が次第に崩れていく様子が見てとれる。そして遂に  $d = 0$  fm では F-F 系は統合して  $N = 1, n_1 = 2$  の flux-tube になり、方や F-A 系では対消滅することがわかる。

相互作用エネルギー  $E_{\text{Int}}(d)$  を全系のエネルギー  $E_{\text{Total}}(d)$ 、一体系のそれを  $E_{\text{Single flux-tube}}$  として、

$$E_{\text{Int}}(d) \equiv E_{\text{Total}}(d) - 2 \times E_{\text{Single flux-tube}} \quad (163)$$

のように定義すると、このときの  $E_{\text{Int}}$  と flux-tube 間距離  $d$  の関係は Fig.10 のようになる。 $d > 1.5$  fm では F-F 系、F-A 系ともに相互作用エネルギーが  $\sim 0$  GeV/fm であるのに対し、 $d = 1.5 \sim 0$  fm では、F-F 系は正、F-A 系は負の有限値をとる。これは F-F 系には斥力が、F-A 系には引力が働くことを意味する。ここで特に注目すべき点は F-A 系の相互作用エネルギーの曲

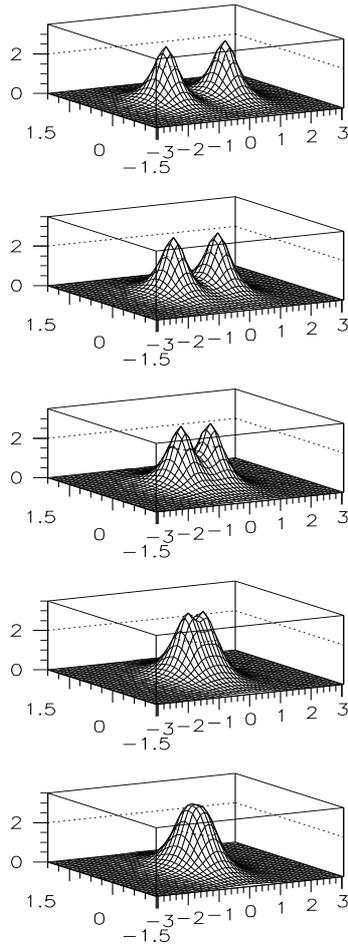


Fig.6 F-F 系

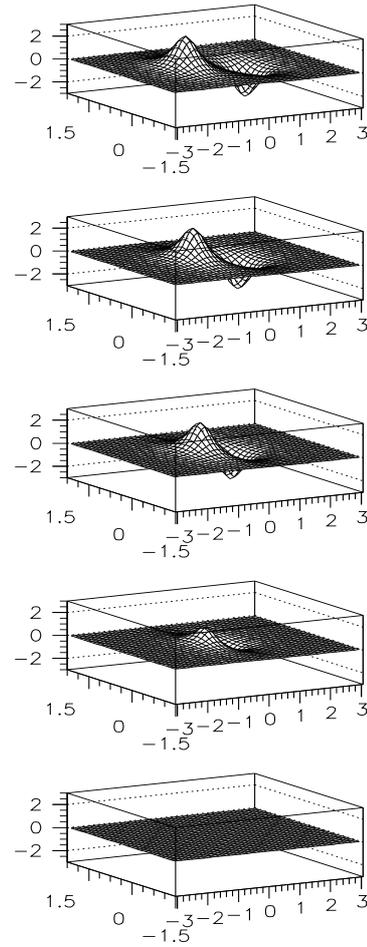


Fig.7 F-A 系

F-F 系 (Fig.6) と F-A 系 (Fig.7) におけるカラー電場の profile。  
 縦軸はカラー電場  $E_z(x, y) \text{ fm}^{-2}$ 。  $x$  軸、  $y$  軸の単位は fm。 上から順に flux-tube 間距離  $d = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0 \text{ fm}$ 。  $d = 0$  で F-F 系は統合して巻き数  $n = 2$  の flux-tube になるのに対し、 F-A 系は対消滅する。

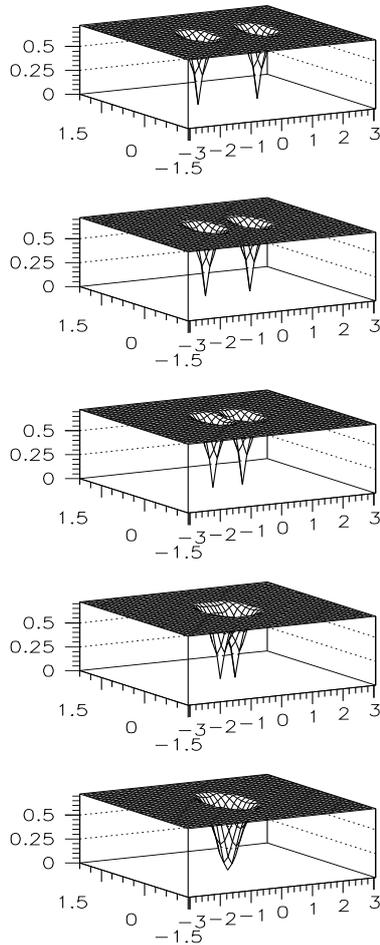


Fig.8 F-F 系

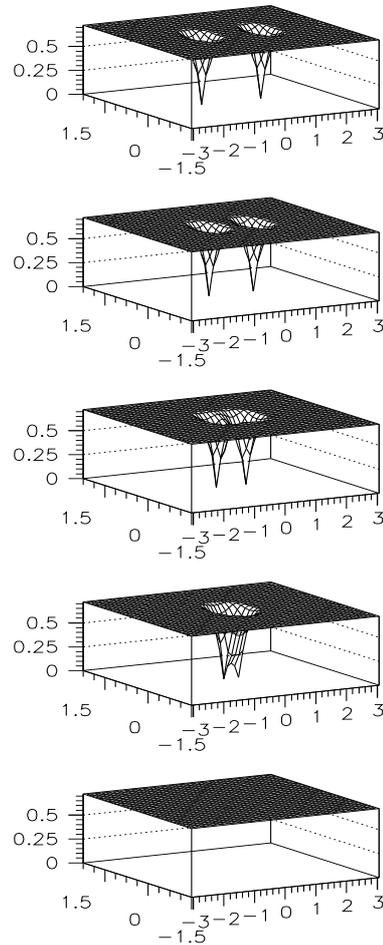
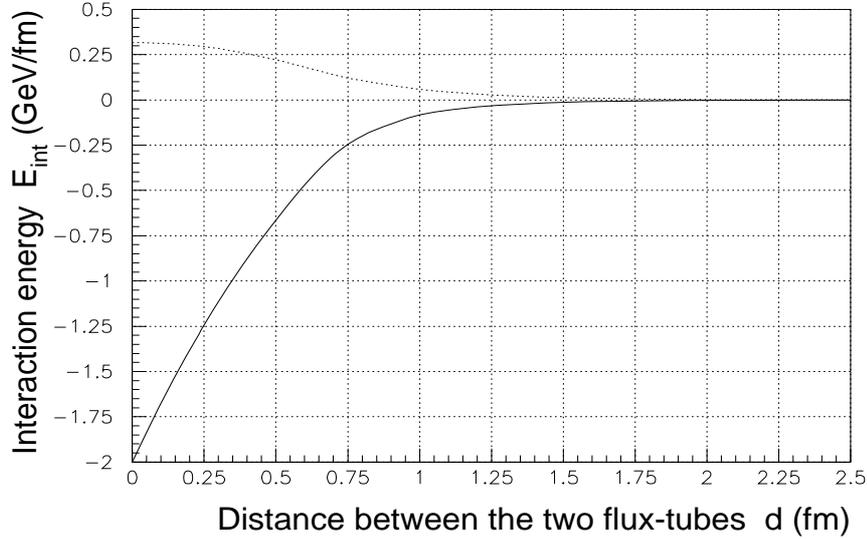


Fig.9 F-A 系

F-F 系 (Fig.8) と F-A 系 (Fig.9) におけるモノポール場の profile。  
 但し、縦軸はモノポール場  $\phi(x, y) \text{ fm}^{-1}$ 。x 軸、y 軸の単位は fm。上から順に flux-tube  
 間距離  $d = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0 \text{ fm}$ 。

線の勾配である。これは F-F 系のそれに比べ急激である。このことから絶対値として F-A 系には F-F 系よりも強い力が働くことがわかる。対消滅しようとする力は近距離であればあるほど強くなるというのも特徴の一つに挙げられる。F-F 系においてはその斥力は近距離であればあるほど弱くなる。なお、ここで F-F 系の相互作用が斥力的であるのは 3.3 節の一体系の flux-tube 解の考察で述べたように、系の真空が Type-II ( $\tilde{\kappa} = 2.7$ ) であることの帰結である。系の真空がもしも Type-I であるならば F-F 系の相互作用は引力的になる (Fig.3 を参照のこと)。



**Fig.10** F-F系(点線)、F-A系(実線)の相互作用エネルギー  $E_{\text{Int}}$  と flux-tube 間距離  $d$  の関係。一般に相互作用は F-F 系では斥力的であるが、F-A 系では引力的である。F-F 系が斥力的であるのは系の真空が Type-II であることの帰結 (Fig.3 を参照のこと)。なお  $d > 2.0$  fm では相互作用しない。

### 4.3 Flux-Tube 間相互作用による QGP 相生成

さて、以上の結果をもとに物理的考察を試みる。勿論ここで得られた結果は全て静的な古典解であるが、少なくともこれらの結果からこのような系が構成された後に系がどのように時間発展していくかの初期の情報を読みとれる。F-F 系は反発しあい、F-A 系は強い引力的相互作用により対消滅しようとするであろう。これら flux-tube 間相互作用による系へのエネルギー堆積という観点からその相互作用ポテンシャルを見ると、F-F 系のような系の場合は接近した flux-tube が互いに退け合う際、或は巻き数の大きい flux-tube が巻き数の小さいそれに分離する際に、そして F-A 系の場合はその対消滅過程の際にそれぞれエネルギーが解放されることができると考えることができる。特に後者の場合は系に対して

$$\frac{2 \text{ GeV/fm}}{\pi \times (0.4 \text{ fm})^2} \simeq 4 \text{ GeV/fm}^3 \quad (164)$$

ものエネルギー堆積があることがわかる ( $0.4 \text{ fm}$  は flux-tube の広がり  $m_B^{-1}$ )。これは QGP 相転移温度 ( $150 \sim 200 \text{ MeV}$ ) でのプラズマのエネルギー密度  $0.9 \sim 2.5 \text{ GeV/fm}^3$  と比べて大きいエネルギー密度であるので、この過程が相転移に寄与する可能性は十分にある。

以上のような可能性を考慮した上で、問題はこれらエネルギー堆積の過程がハドロンの生成時間  $\tau_0 \sim 1 \text{ fm}/c = 10^{-23} \text{ s}$  以内に起こるか否かである。というのは、たとえそのエネルギー堆積の寄与が QGP 相転移を起こすそれに比べ十分に大きいものであったとしても、それがこの生成時間以内に起こらなければ局所熱平衡状態に移行することなくそのエネルギーはハドロン化に費や

されてしまうからである。つまり QGP 相生成は有り得ない。(勿論このように言うのは Bjorken の描像を基礎に置いていることが背景にある)。

そこで、この節では得られた相互作用ポテンシャルをもとに flux-tube の力学を簡単に考察し、ハドロン生成時間内のエネルギー堆積の可能性とその必要条件を探る。エネルギー堆積のみの考察から、その可能性として F-A 系の対消滅過程がまず候補に挙がるので、ここでは特にこの過程を調べることにする。

まず flux-tube の単位長さ 1 fm を考える。すると、これは質量  $\sigma_0 \equiv 1 \text{ GeV}$  をもった“粒子”とみることができる。従って F-A 系における対消滅過程は“粒子”と“反粒子”の対消滅過程と同定できる。そしてこの“粒子 - 反粒子”間のポテンシャルが Fig.10 のそれ ( $\equiv V(d)$ ) で与えられると考えることができる。これを踏まえて対消滅に要する時間を計算する。簡単のため粒子と反粒子のどちらか一方が多体効果により系の重心になっているとすると、 $t = 0$  で重心から  $d = d_0$  だけ離れた粒子の持つ位置エネルギー  $E_0$  は、

$$E_0 \equiv \mu_0 + V(d_0) \quad (165)$$

で与えられる。ここで  $\mu_0$  は換算質量であり、今の場合は

$$\mu_0 \equiv \left( \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \right)^{-1} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (166)$$

である。時刻  $t$  に距離  $x$  ( $< d_0$ ) の位置に粒子が来たとすると、エネルギー保存則より、

$$E_0 = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} + V(x) \quad (167)$$

であるので、これより対消滅に要する時間  $T$  は、

$$T(d_0) = \int_0^T dt = \int_{d_0}^0 dx \frac{1}{\dot{x}} = - \int_{d_0}^0 dx \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + V(d_0) - V(x)} \right)^2}} \quad (168)$$

で与えられることになる。ここで flux-tube と anti flux-tube がある程度接近した、

$$d_0 \leq 2 m_B^{-1} \quad (169)$$

で与えられるような F-A 系を考えてみる。するとこのときはポテンシャル  $V(x)$  をおよそ、傾き  $2.0 \text{ GeV}/0.80 \text{ fm} = 2.5 \text{ GeV}/\text{fm}$ 、切片  $-2.0 \text{ GeV}$  の線形ポテンシャル、

$$V(x) = 2.5 x - 2.0 \text{ GeV} \quad (170)$$

とみることができるので、これを (168) に代入すると

$$T(d_0) = \sqrt{d_0^2 + 0.40 d_0} \quad (171)$$

を得る。そして特に  $d_0 = 2m_B^{-1}$  のときに

$$T(2m_B^{-1} = 0.80 \text{ fm}) = 0.98 \text{ fm}/c \simeq \tau_0 \quad (172)$$

となるので “ $2m_B^{-1}$ ” がハドロンの生成時間内に対消滅可能な臨界距離であることが分かる。つまり、この程度の距離がそれよりも接近した F-A 系における flux-tube の対消滅過程は Q G P 相生成に寄与し得ると考えることができる。

勿論、実際には系は多体系であるのでこのような二体の計算がそのまま成立するとは考え難い。多体効果によってこのように簡単に対消滅しないかも知れない。しかしこの結果は flux-tube 間相互作用が Q G P 相生成機構の一つに関与する可能性を示唆するものであることには違いない。

ではこのようにハドロンの生成時間内に対消滅可能な距離まで接近した flux-tube の系が実際の原子核の衝突で構成されるのか？ という問題について触れておく必要があるだろう。以下どのくらいの密度の flux-tube 多体系が構成されるのかを簡単に推算しておく。なお、ここで上の対消滅時間の結果は少なくとも多数の flux-tube が隙間なく並ぶ (closed packing) 程度の flux-tube 密度を要求していることに留意しておく。

一般に原子核の核子数を  $A$  とすると、その半径が  $R_A = r_0 A^{1/3}$  ( $r_0 = 1.2$  fm) で与えられるので、バリオン密度は  $\rho_0 = A / (\frac{4}{3}\pi R_A^3)$  となる。ここでハード・プロセスを考え、さらに原子核の中心部分に着目すると、そこでの 1 核子当たりの反応体積は  $\pi r_0^2 \times 2R_A = 2\pi r_0^3 A^{1/3}$  であるので、その衝突回数は  $\rho_0 \times$  反応体積  $= \frac{3}{2} A^{1/3}$ 、従って中心部分の 1 核子当たりの全衝突回数は  $[\frac{3}{2} A^{1/3}]^2 = \frac{9}{4} A^{2/3}$  となる。そして核子 - 核子の衝突で flux-tube が 1 本形成されるするとその flux-tube 密度  $\rho_{\text{flux-tube}}$  は

$$\rho_{\text{flux-tube}} = \frac{9}{4} A^{2/3} / \pi r_0^2 \quad (173)$$

で与えられることになる。すなわち面積  $\pi r_0^2$  当たり  $\frac{9}{4} A^{2/3}$  本の flux-tube が形成されるという計算になる。

従って、原子核として特に重イオン  $^{197}\text{Au}$ 、 $^{208}\text{Pb}$  を考え、その衝突  $\text{Au} + \text{Au}$  や  $\text{Pb} + \text{Pb}$  を考えると、これらの場合  $\rho_{\text{flux-tube}} \sim 17$  本/fm<sup>2</sup> となることが分かる。

ここで一般に単位面積 1 fm<sup>2</sup> 当たりに広がり  $l$  fm の flux-tube が  $n$  本、closed packing 程度に分布しているとする、

$$\pi l^2 \times n = 1 \text{ fm}^2 \quad (174)$$

の関係がつくので

$$l = \sqrt{\frac{1}{n\pi}} \text{ fm} \quad (175)$$

となる。この  $l$  が

$$l \leq m_B^{-1} \quad (176)$$

を満たすときは、つまり隣合う flux-tube の profile が重なり合う程に接近しているということであり、従ってこの条件が flux-tube 間相互作用によるエネルギー堆積が Q G P 相生成に対して有効に効くための必要条件となる。

$n = 17$  のときは  $l = 0.14 \text{ fm} < m_B^{-1} = 0.40 \text{ fm}$  であるので、従ってこのような重イオン衝突における衝突の中心領域では多分に flux-tube 間相互作用が重要になると考えられる。なお、 $l = m_B^{-1}$  となるとき原子核の核子数は  $A = 8$  である。

最後にその他に必要な条件について考察しておく。flux-tube の多体系が構成されるものとして上の考察を行ってきたが、それが可能となるためには、まだクリアすべき条件が多数ある。

例えば、以上では述べなかったが、まず最も重要な条件として nuclear transparency が起こることが必要である。これは原子核の入射エネルギーや衝突パラメーターに非常に大きく依存すると考えられる。そしてさらにこの諸条件を仮にクリアして flux-tube の多体系が構成され、その相互作用により局所的に十分なエネルギー堆積が得られたとしても、今度はその系が局所熱平衡状態に移行するためにはある程度のサイズが必要となる。そしてこのサイズは原子核のサイズに依存すると考えられる。例えば上の計算では  $A > 8$  であればどのような原子核でも良いと思えるが、そのサイズを  $^{208}\text{Pb}$  のような大きい原子核と比べてみると、例えば  $R_{A=8} = 2.4 \text{ fm}$  に対し  $R_{A=208} = 7.1 \text{ fm}$  のように数倍もサイズが異なる。つまり実験に用いる原子核の核子数に臨界的な数があると考えられる。

少なくともこれらの条件を全てクリアすることが QGP 相生成のためには必要である。このような背景から超相対論的なスピードまで加速した重イオンの衝突実験が計画されたのは言うまでもないが、これらの条件を定量的に調べることが重要であり、そのためには種々の角度からの理論的アプローチが望まれる。これらを調べることは今後の課題でもある。

## 5 Flux-Tube Ring 解とグルーボール

グルーボールは、QCD がグルーオン場とその自己相互作用の存在から予言するバレンスクォーク (valence quark) を含まない“素粒子”である [20]。この予言は単純なクォーク模型 [1] の範囲を超える。グルーボールを観測することはグルーオン場の存在そのものを直接検証することになり、今日 QCD が強い相互作用を記述する理論として築いている地位を揺るぎないものにする。むしろ現在の地位からすれば存在して然るべきである。

しかしながら現在において未だグルーボールに対する確定的な実験的証拠はない。勿論、全く無い訳ではなく種々の“候補者”は存在する。例えば代表的な候補として  $f_0(1500)$  [23],  $f_J(1710)$  ( $J = 0 \text{ or } 2$ ) [24]、さらに  $\xi(2230)$  [25] がある。これらは少なくとも  $q - \bar{q}$  では説明出来ないと考えられているが、メソンの束縛状態や 4 クォーク状態である可能性もあるためにグルーボールと断定するには至っていない [26]。いずれにしても、これらの候補者の中からグルーボールを見分けられない背景には我々の非摂動的 QCD に対する理解不足がある。グルーボール検証のためには非摂動的 QCD を解析し、その性質を見極めねばならない。

これをする試みとして格子 QCD を用いてグルーボールの性質を調べるというアプローチが近年 IBM グループ [37] や UKQCD グループ [38] らによってなされた。これらの解析によるとグルーボールの質量は、最も軽いものとしてスカラー  $0^{++}$  状態が  $1.50 \sim 1.75 \text{ GeV}$ 、そして最初のテンソル  $2^{++}$  状態が  $2.15 \sim 2.45 \text{ GeV}$  程度であると報告されている。特に IBM グループはスカラーグルーボールの擬スカラー粒子への 2 体崩壊、 $\pi_0\pi_0$ ,  $K_S K_S$ ,  $\eta\eta$  の結合定数も計算しており、その全崩壊幅と結合定数の比率が実験で確認されている  $f_J(1710)$  とほぼ一致していることから、これがスカラーグルーボールである可能性が高いということを指摘している。しかしながら、この計算は直接 QCD に結び付いているとはいえ、この結果を出すのにスーパーコンピュータを用いて 2 年半程かかるという大掛かりなものであり、もっと別の簡単な解析方法が望まれる。特に格子 QCD の計算のみでは我々はその背後にある本質を知ることが出来ない。

そこで、我々は非摂動的 QCD の有効理論である双対 Ginzburg-Landau 理論を用いてその解析を試みる。先に見たように双対 Ginzburg-Landau 理論は flux-tube 解を持ち、バレンスクォークを含むハドロンを端点付きの flux-tube として記述する。この性質はバレンスクォークを含まないグルーボールを端点を持たない“flux-tube ring”として捉えよということを示唆す

る。従ってこの双対 Ginzburg-Landau 理論における flux-tube ring 解が我々にグルーボールの性質を理解する糸口を与えてくれる可能性がある。

以上のような背景を踏まえ、この章ではグルーボールと flux-tube ring の対応を基にグルーボールの質量とサイズを調べる。これをするにあたり我々は次の処方を取る [40]。

I : まず双対 Ginzburg-Landau 理論の flux-tube ring 解を ring 半径  $R$  の関数として調べ、そのエネルギー  $E_{\text{cl}}(R)$  と有効弦張力  $\tilde{\sigma}(R)$  を評価する。ここでは flux-tube のノードが円を形成するとした場合の ring 解を求める。なお、ノードとは flux-tube においてモノポール場の位相が特異的になっている部分のことをいう。この部分ではモノポール凝縮が消失している。

II : 次にこの flux-tube ring を有効弦張力を持つ相対論的な閉じた紐 (closed string) とみなして南部・後藤の作用 [39] で記述する。そしてその作用から Hamiltonian を導き量子効果を取り入れた ring のエネルギー  $E_{\text{qu}}(R)$  を求めてその最小値を調べる。このエネルギー最小値とそれを与える ring 半径がグルーボールの質量とサイズの下限であると考ええる。なお、このような二段階のステップを踏む理由は (I) の有効弦張力を求める際に明らかにされる。

## 5.1 Flux-Tube Ring 解と有効弦張力

$z$  軸回りの回転対称性を有する系を考える (Fig.11)。このような系を記述する座標系として円柱座標を用いる。すると、場  $B$  ,  $\phi$  は  $(r, z)$  の自由度により、

$$\mathbf{B} = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z \quad (177)$$

$$\phi = \phi(r, z) \quad (178)$$

のように書くことができる。位相  $f$  は

$$\nabla \times \nabla f = 2\pi n \delta(r - R) \delta(z) \mathbf{e}_\theta \quad (179)$$

という特異性をもつ。つまり、

$$f = n \tan^{-1} \frac{z}{r - R} \quad (180)$$

と定義できる。但し ring の flux の中心を  $(r, z) = (R, 0)$  のようにとっている。  $R$  は ring 半径であり、  $n$  は ring を形成する flux-tube の巻き数である。これらを場の方程式 (113)、(114) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \hat{g}^2 (B_r'^2 + B_z'^2) \phi - 2\sqrt{\hat{\lambda}} \phi (\phi^2 - \hat{v}^2) = 0 \quad (181)$$

$$\frac{\partial^2 B_z'}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 B_r'}{\partial z^2} + 2\hat{g}^2 B_r' \phi^2 = 0 \quad (182)$$

$$\frac{\partial^2 B_r'}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 B_z'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial B_r'}{\partial z} - \frac{\partial B_z'}{\partial r} \right) + 2\hat{g}^2 B_z' \phi^2 = 0 \quad (183)$$

但し、

$$B_r' \equiv B_r - \frac{\partial f}{\partial r} = B_r + n \frac{z}{(r - R)^2 + z^2} \quad (184)$$

$$B_z' \equiv B_z - \frac{\partial f}{\partial z} = B_z - n \frac{r - R}{(r - R)^2 + z^2} \quad (185)$$

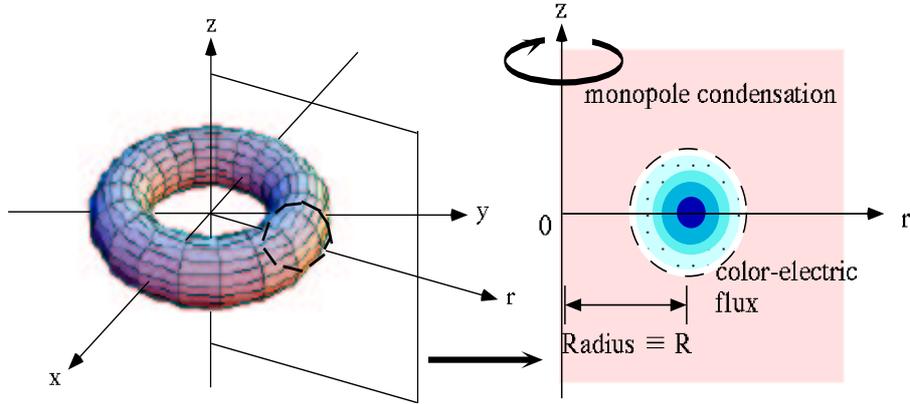


Fig.11 flux-tube ring の概念図。z 軸に関して回転対称性を持つとする。

を得る。そして系のエネルギーは

$$E_{cl}(R) = 2\pi \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty dz \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B'_r}{\partial z} - \frac{\partial B'_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \hat{g}^2 (B_r'^2 + B_z'^2) \phi^2 + \hat{\lambda} (\phi^2 - \hat{v}^2)^2 \right] \quad (186)$$

であるので、境界条件

$$(r, z) \rightarrow (R, 0) \quad \text{で} \quad \phi \rightarrow 0 \quad (187)$$

$$\sqrt{(r-R)^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad B_r \rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = -n \frac{z}{(r-R)^2 + z^2} \quad (188)$$

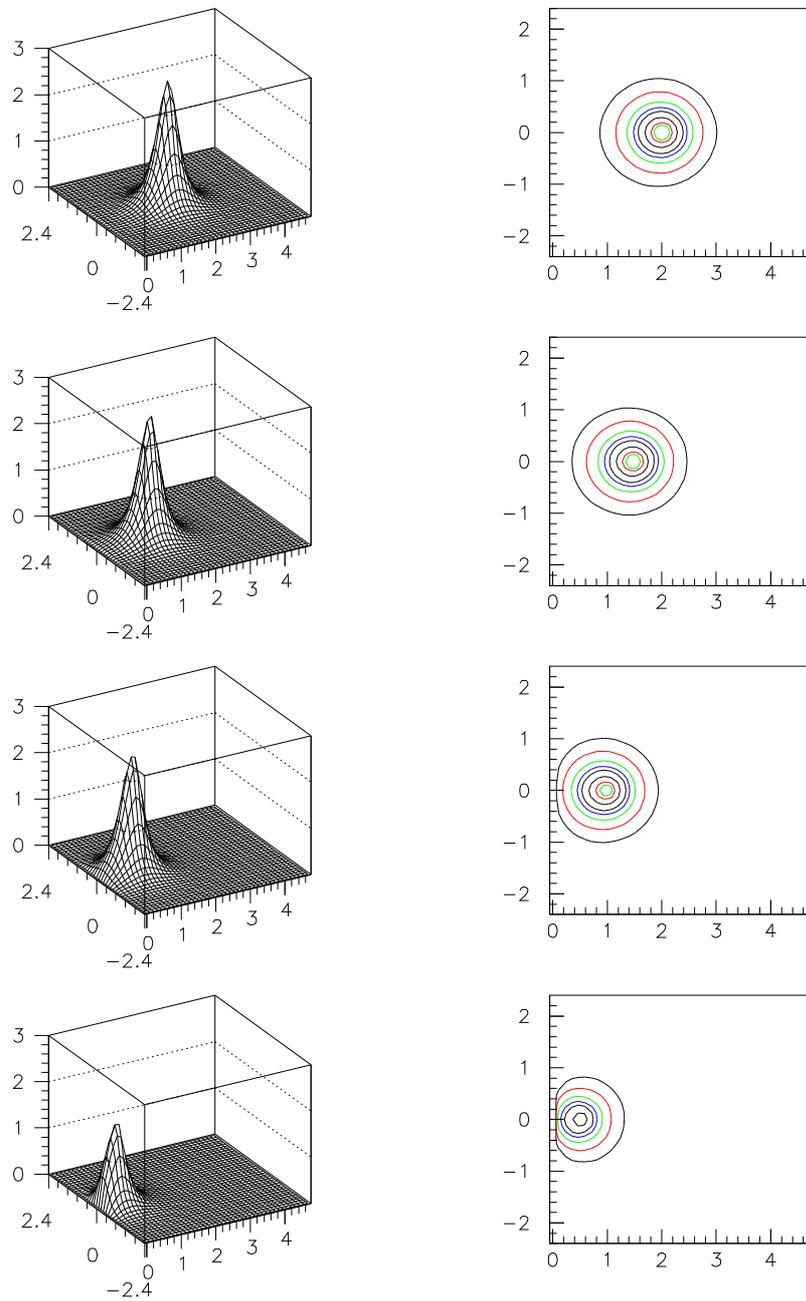
$$B_z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = n \frac{r-R}{(r-R)^2 + z^2} \quad (189)$$

$$\text{かつ} \quad \phi \rightarrow \hat{v} \quad (190)$$

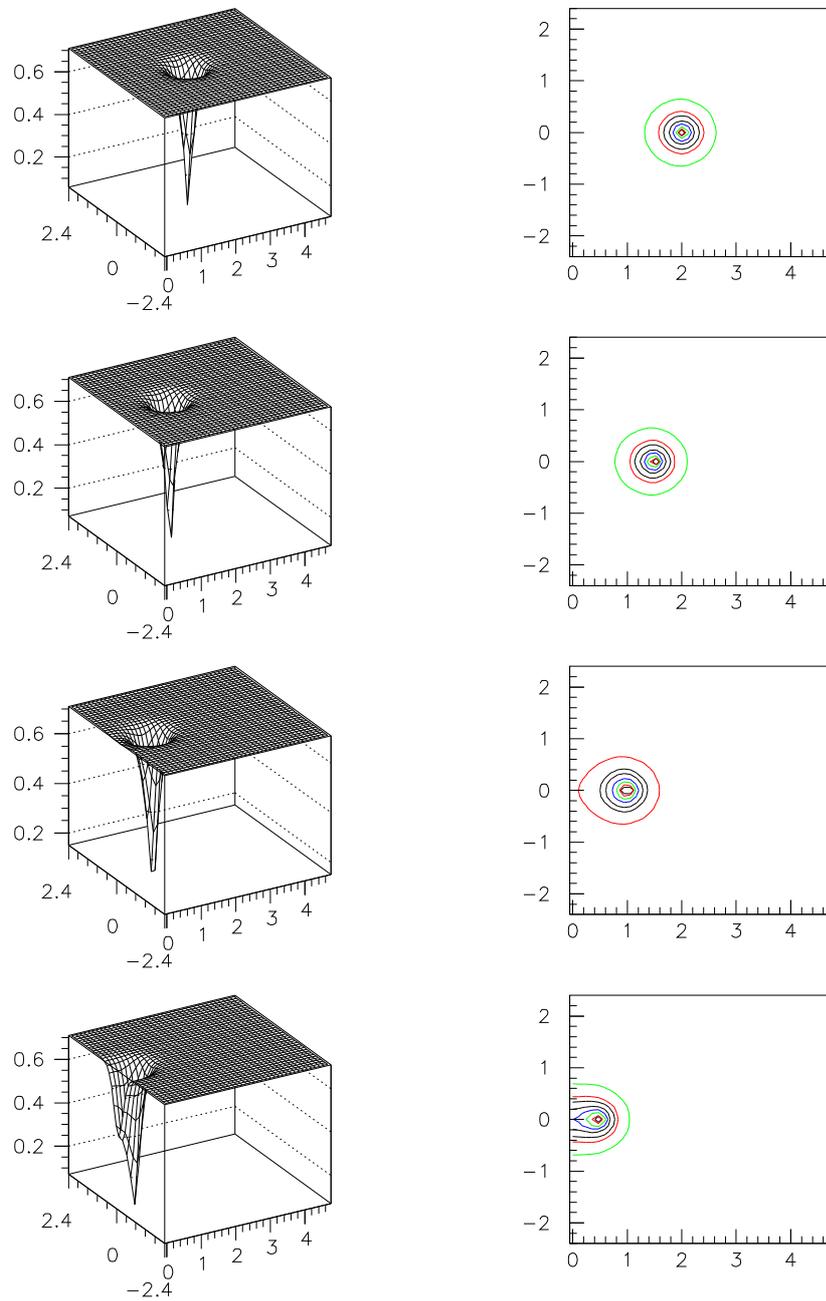
を課せばよい。ここで行なっている処方方は 4 章のそれとほぼ同じである。この境界条件のもとで得られたカラー電場とモノポール場の profile を Fig.12、Fig.13 に示す。上から順に半径  $R = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$  fm である。半径が小さくなるにつれてカラー電場が消失していき、そしてモノポール場の ring の中心領域の凝縮が消えていく様子が見える。これは半径が小さいときには flux-tube ring と呼べなくなることを意味する。このことは系の古典的なエネルギー  $E_{cl}(R)$  と有効弦張力  $\tilde{\sigma}(R)$  の振舞いを見ればさらによく分かる (それぞれ Fig.14、Fig.15 で与える)。ここで有効弦張力は

$$\tilde{\sigma}(R) \equiv E_{cl}(R) / (2\pi R) \quad (191)$$

で定義している。半径が小さくなると flux-tube ring のエネルギーが小さくなることに伴って有効弦張力も小さくなっていく。つまり一定の弦張力を与えるべき flux-tube としての機能が失われていくのである。この自己相殺的な機構は 4 章における flux-tube と anti flux-tube の対消滅過程と非常に似通っている。



**Fig.12** flux-tube ring 断面のカラー電場の profile 。左図、右図はそれぞれ三次元 plot と contour plot 。左図の縦軸はカラー電場  $E_{\theta}(r, z) \text{ fm}^{-2}$  。 $r$  軸、 $z$  軸の単位は  $\text{fm}$  。上から順に半径  $2.0, 1.5, 1.0, 0.5 \text{ fm}$  。半径が小さくなるにつれてカラー電場が消失していく様子がわかる。



**Fig.13** flux-tube ring 断面のモノポール場の profile。左図、右図はそれぞれ三次元 plot と contour plot。左図の縦軸はモノポール場  $\phi(r, z) \text{ fm}^{-1}$ 。  $r$  軸、  $z$  軸の単位は fm。上から順に半径 2.0, 1.5, 1.0, 0.5 fm。半径が小さくなるにつれて ring の中心部のモノポール凝縮は消失していく。

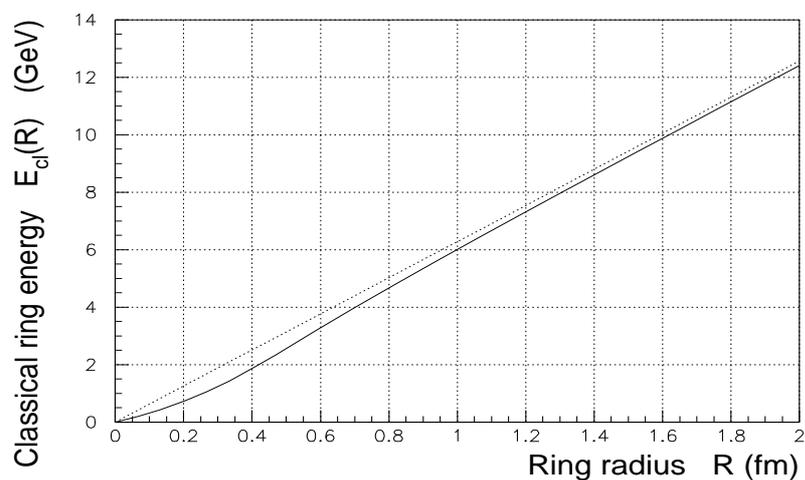


Fig.14 古典的なエネルギー  $E_{cl}$  と ring 半径  $R$  の関係 (実線)。点線は flux-tube を string 近似した場合。一般に flux-tube は有限の広がりをもつために実線は点線を下回るが、半径が  $R > 2.0$  fm では両者は一致する。

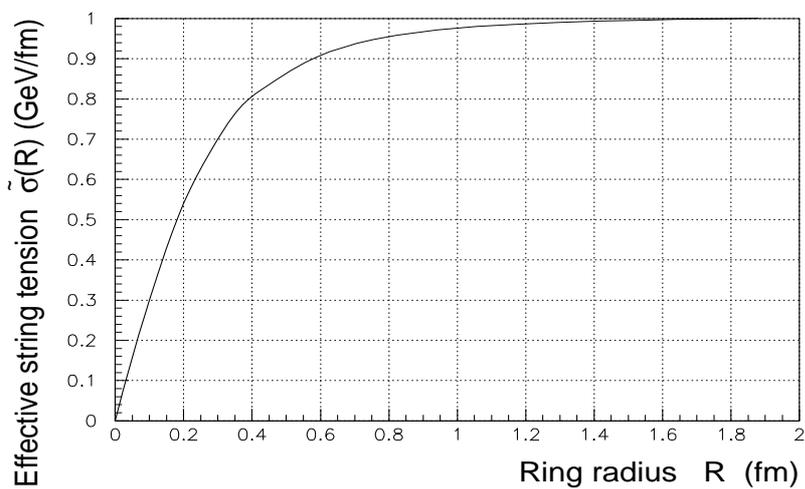


Fig.15 有効弦張力  $\tilde{\sigma}$  と ring 半径  $R$  の関係。但し、 $\tilde{\sigma}(R) \equiv E_{cl}(R)/(2\pi R)$ 。半径  $R > 2.0$  fm では有効弦張力は一体系の弦張力  $1.0$  GeV/fm に収束する。

## 5.2 閉じた紐と南部・後藤作用

ここまでが静的な場合の結果であるが Fig.14 から ring の半径が有限のものは不安定であり潰れてしまう傾向にあることが読み取れるので、このままでは ring をグローボールと見ることは出来ない。そこで次のように考える。潰れてしまうということはエネルギーが一点に集中することを意味するが、これは量子論的に許されないことなのでこれを避けるような量子論的な斥力が働くはずだ、と考える。基本的な考え方は水素原子において何故電子が陽子に落ち込まないのかという問題と同じである。例えばこの問題においては、電子 - 陽子間には引力的なクーロン・ポテンシャル  $-e^2/r$  が存在するが、運動項  $p^2/2\mu$  も存在するため、結局、全系のエネルギーは

$$E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \quad (192)$$

で与えられた。ここで  $p$  は  $r$  に“正準共役な”運動量であり、 $\mu$  は電子の換算質量  $\sim m_e$  である。不確定性原理により  $p \cdot r \geq 1$  が成り立つので、従って、

$$E \geq \frac{1}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \quad (193)$$

が成立し、エネルギーの最小値  $E_{\min} = -\mu e^4/2$ 、そしてボーア半径  $r_{\min} = 1/\mu e^2$  が求まった。これは非常に簡単な推算であるが、実際の水素原子の基底状態と一致する。このような考え方を今の flux-tube ring にも応用しようというわけである。

もう一度振り返ると重要なのは、座標に正準共役な運動量の存在とその運動量からなる運動項の存在であった。これをどのように取るかは非常に難しい問題である。この場合の運動項は ring の半径  $R$  を座標とみたときに、この  $R$  に対する共役な運動量  $P_R$  から成るものでなくてはならない。Fig.14 のポテンシャル  $E_{\text{cl}}(R)$  をみると系のエネルギースケールは GeV オーダーであり、従ってまず非相対論的な運動項では不適當であることが予想される。

そこで我々は相対論的な運動項を導入するべく flux-tube ring を有効弦張力を持つ閉じた紐 (closed string) と同定し、その運動項を南部・後藤作用から調べることを試みる。

具体的な話に入る前に紐の理論 [39] について簡単に触れておく。相対論的な紐の運動を支配する作用は、相対論的な粒子一個の運動を記述する作用積分を決定する際の指導原理、「作用は粒子が描く世界線に比例し、その運動は世界線の長さが最小になるように起こる」を拡張することにより得られる。すなわち、紐の場合は「作用は紐が描く世界面に比例し、その運動は世界面が最小になるように起こる (面積則)」。時空次元は  $D$  次元 (時間 1 次元、空間  $D-1$  次元) としておく。この面積則をもとに紐の運動を記述する作用積分と Hamiltonian の導出を行えば良い。上述の指導原理の対応関係をより明確にするために、まず粒子の場合の作用積分と Hamiltonian 導出を振り返るのも有用であろう。その後で紐の場合について考えると非常に分かり易い。

### (i) 粒子の場合

粒子の場合はその世界線を一つのパラメータ “ $\tau$ ” を用いて  $x^\mu(\tau)$  ( $\mu = 0, 1, \dots, D-1$ ) のように目盛付けすることができるので、その世界線の線要素は、

$$dl \equiv \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} d\tau \quad (194)$$

となる。但し、

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \dot{x}_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$$

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{ii} = -1 \quad (i = 1, \dots, D-1), \quad \text{他は } 0 \quad (195)$$

である。従って作用積分を、

$$S_{\text{particle}} \equiv \int_{\tau_I}^{\tau_F} (-m) dl = \int_{\tau_I}^{\tau_F} d\tau L_{\text{particle}} \quad (196)$$

$$L_{\text{particle}} \equiv -m \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \quad (197)$$

と定めることができる。 $m$  は適当な比例係数であり、後々わかるようにこれは粒子の質量に対応する。運動方程式は作用積分  $S_{\text{particle}}$  の停留条件により、

$$m \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \right) = 0 \quad (198)$$

となる。そしてこの力学系は作用積分  $S_{\text{particle}}$  の世界線の目盛付けの変更

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau) \quad (199)$$

に対する不変性 (parametrization invariance) を持つゲージ系であることにより、 $D$  個の力学変数  $x^\mu$  のうち 1 個は決まらないという特徴を持つ。

この特徴は  $\tau$  を時間パラメーターとみなして座標  $x^\mu$  に正準共役な運動量  $p_\mu$  を

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L_{\text{particle}}}{\partial \dot{x}^\mu(\tau)} = m \frac{\dot{x}_\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \quad (200)$$

で定義すると、 $p_\mu$  の全てが独立ではないというよく知られた拘束条件、

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0 \quad (201)$$

に擦り替わる。この拘束条件の存在は正準形式を、すなわち Hamiltonian を定義するためには適当に余分な自由度 (この場合は 1 自由度) を固定して座標と正準共役な運動量の数を合わせる必要があるということを我々に示唆する。この固定こそがゲージ固定である。

例えばゲージ固定として特に時間ゲージ (chronological gauge)

$$x^0(\tau) \equiv \tau \quad (202)$$

を取ると、 $x^0$  を時間とみなせるので Hamiltonian を  $x^0$  に共役な運動量  $p^0$  により、

$$H_{\text{particle}} \equiv p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (203)$$

のように与えることができる。

(ii) 紐の場合

紐の場合はその運動が2次元状の世界面を構成することから、それを目盛付けするために今度は二つのパラメーター“ $\tau, \theta$ ”を必要とする。すなわち、

$$X^\mu(\tau, \theta) \quad (204)$$

で目盛付けをする。これを変分すると、

$$dX^\mu = \dot{X}^\mu d\tau + X'^\mu d\theta \quad (205)$$

但し、

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \theta} \quad (206)$$

が得られるので、微小面積テンソルを

$$dX^\mu \wedge dX^\nu = (\dot{X}^\mu X'^\nu - \dot{X}^\nu X'^\mu) d\tau \wedge d\theta \equiv dF^{\mu\nu} \quad (207)$$

で与えることができる。従って面積要素は

$$dA \equiv \sqrt{-\frac{1}{2}dF^{\mu\nu}dF_{\mu\nu}} = \sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}d\tau d\theta \quad (208)$$

となるので、作用積分は、

$$\begin{aligned} S_{\text{string}} &\equiv \int_{\tau_I}^{\tau_F} \int_0^{2\pi} (-\Sigma) dA \\ &\equiv \int_{\tau_I}^{\tau_F} d\tau \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{L}_{\text{string}} \end{aligned} \quad (209)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{L}_{\text{string}} \equiv -\Sigma \sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} \quad (210)$$

である。 $\Sigma$ は弦張力の次元を持つ適当な比例係数である。この作用積分は南部・後藤の作用と呼ばれる。閉じた紐を考察するので $\theta$ の積分範囲を $0 \sim 2\pi$ に取っている。

作用積分は粒子の場合と同様に、但し拡張された形での目盛付けの変更、

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau, \theta), \quad \theta \rightarrow \theta' = \theta'(\tau, \theta) \quad (211)$$

に対する不変性を持っている。そしてこの特徴は $D$ 個の力学変数 $X^\mu$ のうち2個には不定性があることを示している。従ってその正準形式も粒子の場合と同様の議論となる。 $X^\mu$ に正準共役な運動量(密度)を、

$$\mathcal{P}_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{string}}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\Sigma \frac{(\dot{X}X')X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \quad (212)$$

で定義すると、これは今度は二つのヴィラソロ条件 (Virasoro condition) と呼ばれる拘束条件、

$$\mathcal{P}^\mu X'_\mu = 0 \quad (213)$$

$$\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu + \Sigma^2 (X')^2 = 0 \quad (214)$$

を与え、そしてこれらの拘束条件の存在故に Hamiltonian を得るためにはゲージを固定しなければならぬ。例えば、

$$X^0(\tau, \theta) \equiv \tau \quad , \quad \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}' \equiv 0 \quad (215)$$

のようにゲージを固定すると  $X^0$  を時間とみることができ、二番目のヴィラソロ条件から、

$$H_{\text{string}} \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{P}^0 = \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{\mathcal{P}^2 + \Sigma^2 \mathbf{X}'^2} \quad (216)$$

を得る。但し、ここで注意しておくべきこととして  $\mathcal{P}$  は Hamiltonian 密度  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{P}^0$  を考慮する際に意味を持つ運動量（密度）である。 $H_{\text{string}}$  に対応する運動量は

$$\mathbf{P} \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{P} \quad (217)$$

で定義される。

以上が相対論的な粒子と紐の古典論の概要である。量子論に移行するためには拘束条件を考慮し正準交換関係を定義する必要があるがここではそれに深入りしない。

### 5.3 グルーボールの質量とサイズ

それでは具体的な話に入る。まず flux-tube ring を有効弦張力  $\tilde{\sigma}(R)$  を持つ閉じた紐と同定する。これは、

$$\Sigma \equiv \tilde{\sigma}(R) \quad (218)$$

とすることにより行なわれる。flux-tube 自身の広がり効果による flux-tube ring の弦張力の変化は全てこの有効弦張力に含まれていると考える。そして次にその世界面をどのように目盛付けするかであるが、簡単のためと flux-tube ring の計算に合わせるために、閉じた紐が円を形成するとしその運動方向は動径方向に限られているとする。すなわち  $D = 3$  とし、

$$X^0(\tau, \theta) = \tau \quad , \quad X^1(\tau, \theta) = R(\tau) \cos \theta \quad , \quad X^2(\tau, \theta) = R(\tau) \sin \theta \quad (219)$$

のように目盛付けをする。この目盛付けはゲージを (215) のように固定することと同値である。実際、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}' &= \dot{X}^1 X'^1 + \dot{X}^2 X'^2 \\ &= \dot{R} \cos \theta \cdot -R \sin \theta + \dot{R} \sin \theta \cdot R \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (220)$$

が成立する。この目盛付けのもとでは運動量（密度）は (212) より、

$$\mathcal{P}^0 = \tilde{\sigma}(R) \frac{R}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \quad , \quad \mathcal{P} = \tilde{\sigma}(R) \frac{R \dot{R}}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \mathbf{e}_R \equiv \frac{P_R}{2\pi} \mathbf{e}_R \quad (221)$$

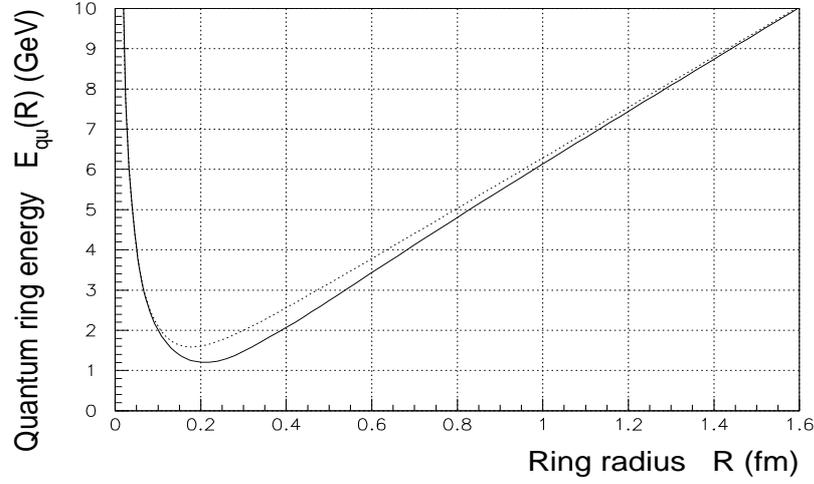


Fig.16 有効弦張力を持つ閉じた紐のエネルギー  $E_{\text{qu}}$  とその半径  $R$  の関係 (実線)。点線は flux-tube を紐近似して弦張力が一定値  $1 \text{ GeV/fm}$  を取るとした場合。有効弦張力の効果はエネルギー最小値を下げるように効く。また、この図を Fig.14 と比べると  $R$  の大きいところでのその振舞いが同じであることがわかる。これは flux-tube ring と閉じた紐の同定を保証するものである。

で与えられ、結局 Hamiltonian (216) は

$$\begin{aligned} H_{\text{string}} &= 2\pi \sqrt{\left(\frac{P_R}{2\pi}\right)^2 + \tilde{\sigma}(R)^2 R^2} \\ &= \sqrt{P_R^2 + (2\pi\tilde{\sigma}(R)R)^2} \end{aligned} \quad (222)$$

となる。これはまさに (203) に対応する。

ここで水素原子と同じ手続きを踏む。すなわち  $P_R$  を座標  $R$  に正準共役な運動量とみることにより不確定性関係、

$$P_R \cdot R \geq 1 \quad (223)$$

を課す。するとこの系のエネルギーは、

$$E_{\text{qu}}(R) \geq \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (2\pi\tilde{\sigma}(R)R)^2} \geq 2\sqrt{\pi\tilde{\sigma}(R_{\text{min}})} \equiv E_{\text{min}} \quad (224)$$

で与えられることになる。そしてこの関係式は有限の ring 半径  $R_{\text{min}}$  においてエネルギー最小値  $E_{\text{min}}$  を取る。我々はこのエネルギー最小値とそれを与える半径こそがグルーボールの質量とサイズの下限であると考え。この  $E_{\text{qu}}$  と  $R$  の関係を Fig.16 に示す。これによりグルーボールとして

$$\text{質量} : 1.2 \text{ GeV} \quad , \quad \text{サイズ} : 0.22 \text{ fm} \quad (225)$$

を得る。このサイズはその質量に対応した Compton 波長に他ならない。もちろんここで得られたグルーボールの質量は前述の格子 QCD の結果、

$$\begin{aligned} J^{PC} &= 0^{++} && 1.50 \sim 1.75 \text{ GeV} \\ &2^{++} && 2.15 \sim 2.45 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (226)$$

と比べると若干小さめではあるが、我々の得た結果はあくまで静的な flux-tube ring のエネルギーの下限とそれを与える半径をグルーボールの質量とサイズと同定しただけであるので、これらの格子 QCD の結果とは矛盾しない。むしろ結果 (225) は flux-tube ring のダイナミカルな効果も考えよ、ということを示唆しているとみるべきであろう。運動エネルギーの寄与によって下限が押し上げられるはずである。さらに実際、格子 QCD の結果と比較するためには flux-tube ring の物理的な例えばスカラーやテンソルなどの量子状態  $J^{PC}$  を定める必要もある。このような計算をするためには flux-tube ring の種々の運動モードを考慮して角運動量射影 (angular momentum projection) を施す必要があると考えられる。これらは今後の課題である。

ここでは以上で得られた計算結果からできる簡単な考察、flux-tube ring と真の閉じた紐との差異、すなわち有効弦張力  $\tilde{\sigma}(R)$  と一定の弦張力  $\sigma$  が与えるグルーボールの質量とサイズへの影響の差異について考察しておく。Fig.16 に描かれている点線が上の関係式 (224) において  $\tilde{\sigma}(R) \equiv \sigma = 1 \text{ GeV/fm (const.)}$  としたときの結果である。この場合はエネルギー最小値とそれを与える半径を、

$$\text{エネルギー最小値} : 2\sqrt{\pi\sigma} = 1.6 \text{ GeV} \quad , \quad \text{半径} : 1/\sqrt{2\pi\sigma} = 0.17 \text{ fm} \quad (227)$$

のように厳密に計算できるが、これと有効弦張力を用いたそれとを比べると 0.4 GeV その質量が下がり、サイズが 0.05 fm 大きくなっていることがわかる。系の真空が Type-II の極限のときに flux-tube が紐のように細くなることを考えるとこの傾向は系の真空の Type-II の極限からのずれを反映したものであることになる。

以上、双対 Ginzburg-Landau 理論と紐の理論を融合させて flux-tube ring をグルーボールと同定しその諸性質、ここでは質量とサイズを議論してきた。この flux-tube ring という描像は非常に直観的でありイメージしやすいというのがこの計算の長所である。そして、無論、課題はあるが双対 Ginzburg-Landau 理論がこのようなアプローチからのグルーボールの諸性質に関する計算方法を与え得るという点は新しいことであり強調すべき点であろう。

## 6 まとめと今後の課題

我々是非摂動的 QCD の有効理論である双対 Ginzburg-Landau 理論の flux-tube 解を応用して、超相対論的重イオン衝突によるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 相生成の機構を flux-tube の多体系という観点から、そしてグルーボールを flux-tube ring 解という観点からその諸性質について調べた。

いずれも非摂動的 QCD の解明なしにはその真相を語るができない物理である。しかしながら非摂動的 QCD は、その名の通りゲージ結合定数を摂動パラメーターとした摂動論が強結合性のために適用できないのでその解析が非常に困難である。唯一格子 QCD に基づく大掛か

りな数値シミュレーションが非摂動的 QCD の解析方法として確立しているものの、その適用にも限界があり、これらの物理については未だ完全には解き明かされていない。

このような状況の中で非摂動的 QCD の有効理論による理論的な枠組でのアプローチが必要不可欠である。我々が用いた双対 Ginzburg-Landau 理論は、非摂動的 QCD の物理に対してアーベリアン・ドミナンスが成り立つとの考えをもとに 't Hooft の提案したアーベリアン射影を QCD に施していったモノポールを含む可換ゲージ理論に還元し、さらにこのモノポールが凝縮するとして構築された理論である。その上でこの有効理論はカラーの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れの問題等の非摂動的 QCD に特徴的な現象を説明することができる。勿論、この理論が構築された当初はアーベリアン・ドミナンスとモノポール凝縮はあくまで仮定であったが、現在では最大アーベリアン・ゲージ固定を施した場合において、非摂動的 QCD に特徴的な物理量に対してこれらの仮定が実際に成立していることが格子 QCD の計算から示されている。従って双対 Ginzburg-Landau 理論の構築に際しては、そのようなゲージ固定を意図したアーベリアン射影を QCD に施しているのだと考えるのが妥当であり、そのように理解することで非摂動的 QCD の有効理論としての威力を発揮することができる。本研究ではこのような双対 Ginzburg-Landau 理論の理論的背景を踏まえて、非摂動的 QCD に関連する種々の物理現象を理解するために、この理論の解を応用するという立場を取った。

本論文の 1 章では現在において知られている非摂動的 QCD に関連した物理とその問題点、残されている課題等を中心にまとめた。2 章ではその問題解明に“有効”だと考えられる双対 Ginzburg-Landau 理論の構築をかえりみた。アーベリアン射影についても触れた。特にこの章の後半では本研究での主題である QCD 真空における flux-tube について、さらにこの flux-tube とカラーの閉じ込めの関係について焦点を絞って議論した。これにより、カラー電荷-反カラー電荷間に flux-tube が形成されるということとその間に線形ポテンシャルが現れるということが一対一対応すること、そしてその結果カラー電荷が QCD 真空に閉じ込められるのだという双対超伝導体描像に基づくカラーの閉じ込め機構についてかえりみた。

そして 3 章では、4 章における QGP 相生成機構の議論、5 章におけるグルーボールの議論をする上で必要な双対 Ginzburg-Landau 理論における flux-tube 解の諸性質について考察した。有限差分法を駆使して理論を直接数値的に解き、厳密な flux-tube 解とその弦張力を得た。この解と弦張力を物理量と対応させて理論のパラメーターの再検討も行なった。このパラメーターセットはすなわち QCD 真空を定義するという事と同値であり、これに対し我々は QCD 真空が双対超伝導体描像で Type-II に属するという結果を得た。勿論この結果については既に [17] で議論されているので今さら強調することではないが非常に重要なことなので敢えて強調しておく。何故なら flux-tube の物理という観点からすると QCD 真空が Type-I か Type-II かでその flux-tube の性質と振舞いが大きく異なるからである。

ここまでを振り返ると 2 章は完全に“review”であり何も新しいことはない。3 章の一部の内容は超伝導の教科書をみればわかるように“常識”である。しかしながら 3 章では後章で説明した種々の flux-tube 解を得る必要があったのでこれらを後で得ることを意識してその構成を工夫した。勿論数値的に解くことを前提にしているが、これにより後の種々の flux-tube 解を得る作業が統一的にできるようになったことを強調しておく。本研究で調べた解以外にも同様な手法で得ることができる。

さてこのような準備を整えた後で 4 章では超相対論的重イオン衝突による QGP 相生成の機構

について flux-tube 多体系における flux-tube 間の相互作用という観点から調べた。Bjorken の描像を基礎に置き、ハドロンの生成時間内のエネルギー堆積の可能性について探った。ここでは特に flux-tube 間相互作用を調べる上で典型的な系として flux-tube と flux-tube の系 (F-F 系)、flux-tube と anti flux-tube (F-A 系) の系という二体系を定義し、その解と相互作用エネルギーをそれら flux-tube 間距離の関数として求めた。

これにより F-F 系は斥力的、F-A 系は非常に強い引力的な相互作用をすることを突き止めた。特に後者の系はその強い引力的な相互作用により対消滅することが可能であり、仮に対消滅すると系に対して  $4 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  ものエネルギー堆積を与え得るという結果を得た。このエネルギー密度は QGP 相転移温度 ( $150 \sim 200 \text{ MeV}$ ) でのプラズマのエネルギー密度  $0.9 \sim 2.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  に比べて大きく、従ってこの過程が相転移に寄与する可能性は十分にある。なおこれら相互作用の定性的な振舞いは全て QCD 真空が Type-II であることの帰結である。

ここで更に簡単な力学的考察と推算を行なうことにより flux-tube の広がり  $m_B^{-1} \sim 0.4 \text{ fm}$  として flux-tube 間距離が  $2 m_B^{-1} \sim 0.8 \text{ fm}$  より接近している F-A 系であればハドロンの生成時間  $\sim 1 \text{ fm}/c$  以内に対消滅する可能性があることについても言及した。この結果を flux-tube 多体系におけるその flux-tube 密度に焼き直すと、closed pack された系よりも密な系であれば flux-tube の profile が互いに重なっているので何らかの相互作用を通じて系はエネルギー堆積を獲得するということになる。そしてこのことは flux-tube の密度が大きければ大きいほど flux-tube 間の相互作用がエネルギー堆積の候補として重要になることを意味する。原子核の核子数が大きいものどうしの正面衝突では中心部分において flux-tube の密度が大きくなることが予想され、従って重イオンどうしの衝突による QGP 相生成機構に対してはこの flux-tube 間相互作用という過程が多分に寄与すると考えることができる。

このように flux-tube 間の相互作用によるハドロンの生成時間内のエネルギー堆積という観点から QGP 相生成機構とそれに必要な条件について調べた。

5章では、双対 Ginzburg-Landau 理論における端点を持たない flux-tube ring 解とバレンスクォークを含まないグルーボールを対応付けることにより、flux-tube ring 解を解析することでグルーボールの質量とサイズを調べた。これをするに当たり我々は二段階のステップを踏んだ。まず始めに flux-tube ring 解を得てその有効弦張力と ring 半径の関係を調べた。ここでは flux-tube のノードが円を形成するとし、有効弦張力は系の全エネルギーをノードの円周で割ったものとして定義した。なお、ノードとは flux-tube においてモノポール場の位相が特異的になっている部分のことをいう。この部分ではモノポール凝縮が消失している。次に flux-tube ring を有効弦張力を持つ閉じた紐とみなして南部・後藤の作用で記述した。そしてその作用から Hamiltonian を導き量子効果を取り入れた ring のエネルギーを求めてその最小値を調べた。このエネルギー最小値とそれを与える ring 半径がグルーボールの質量とサイズの下限であると考えることにより、その質量とサイズを求めた。これにより質量  $1.2 \text{ GeV}$ 、サイズ  $0.22 \text{ fm}$  を得た。この質量は格子 QCD の結果で知られているそれと比べて多少小さめであるが簡単な計算にしては良い一致を見せている。

ここで flux-tube ring を有効弦張力を持つ閉じた紐とみなしたことが我々の主なアイデアであることを強調しておく。というのも、我々はまず始めの解析で ring 半径が小さくなるにつれて有効弦張力が消失していくという結果を得た。これは 4章での F-A 系における flux-tube と anti flux-tube の対消滅過程とその機構が非常に似通っており、従ってこの結果から古典的な flux-tube ring は潰れてしまう傾向にあることが読みとれる。これは古典的かつ静的な flux-tube ring 解

を調べる限りにおいては避けられない問題である。つまりこのままでは ring をグルーボールとみることができない。しかしながらここで ring が潰れるということはエネルギーが一点に集中することを意味する。従って量子論的にはこの過程は許されないはずである。この考えに基づきそれを避けるような量子効果を採り入れるべく紐の理論と flux-tube ring 解を融合して考えた結果、ある有限のサイズで安定な解を見つけた。そして我々は最終的にそれをグルーボールと同定した。

今後の課題はこの方向からの解析をさらに進めてグルーボールの物理的な量子状態  $0^{++}$  や  $2^{++}$  等を定めることである。これをするためには ring のダイナミカルな効果も考慮して、例えば角運動量射影等の手法を用いる必要があると思われる。これを行なうことが出来ればグルーボールに関してよりいっそう理解を深めることができ、さらにはその性質について種々の予言を行なうことが可能になると考えられる。

いずれにしても双対 Ginzburg-Landau 理論がこのような観点からグルーボールに対してアプローチし得るという点は新しいことであり大変興味深い。

## 謝辞

本論文は大阪大学助手の菅沼秀夫氏、並びに同大学の土岐博教授との共同研究によるものです。菅沼氏には非摂動論的 QCD における flux-tube の物理という大変興味深い研究テーマを与えて戴いたのみならず、研究全般にわたり熱心な御指導、そして非常に有益な議論をして頂き誠に感謝致しております。土岐教授には数々の議論、ご助言を戴き、さらには研究生活において激励の言葉をかけて頂くなど大変お世話になりました。非常に環境の良い研究の場も提供して下さいました。心から感謝を申し上げます。

また、本研究を行なうに当たり京都大学基礎物理学研究所の佐々木氏には数々の有益な議論をして頂きました。非常に感謝致しております。門田氏には flux-tube に関する基礎的なこと、そして数値計算の方法について御指導頂きました。心からお礼を申し上げます。

そして当研究室の大学院生の皆様、市江さんをはじめ、海勢頭さん、田中さん、雨宮さん、大槻さん、福島さん、荒木さん、中島さん、杉本君、高山さんには研究に関連する数々の議論に御付き合い頂きました。研究生活全般においても大変お世話になりました。心より感謝致します。

## 参考文献

- [1] W. Greiner and A. Schäfer, “*Quantum Chromodynamics*”, (Springer,1994)
- [2] T. P. Cheng and L. F. Li, “*Gauge theory of elementary particle physics*”, (Clarendon press, Oxford, 1984)
- [3] D. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973)
- [4] 宮沢弘成 「物理学最前線 1 クォークの閉じ込め」(共立)
- [5] 河原林研 「物理学最前線 5 素粒子のカイラル対称性」(共立)
- [6] R. G. Roberts, “*The Structure of the Proton - deep inelastic scattering*”, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990)

- [7] K. Sailer, Th. Schönfeld, Zs. Schram, A. Schäfer and W. Greiner, *J.Phys. G:Nucl. Part. Phys.* **17**, 1005 (1991)
- [8] Y. Nambu, *Phys. Rev. D* **10**, 4262 (1974)
- [9] G. 't Hooft, Proc. of Int. Conf. on *High Energy Physics*, Palermo Italy, (1975)
- [10] S. Mandelstam, *Phys. Rep. C* **23**, 245 (1976)
- [11] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **190**, 455 (1981)
- [12] Z. F. Ezawa and A. Iwasaki, *Phys. Rev. D* **25**, 2681 (1982) ; *Phys. Rev. D* **26**, 631 (1982)
- [13] F. Brandstater, U. J. Wiese and G. Schierholz, *Phys. Lett. B* **272**, 319 (1991)  
T. Suzuki and I. Yotsuyanagi *Phys. Rev. D* **42**, 4257 (1990)  
S. Hioki, S. Kitahara, S. Kiura, Y. Matsubara, O. Miyamura, S. Ohno and T.Suzuki *Phys. Lett. B* **272**, 326 (1991)
- [14] J. D. Stack, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **34**, 204 (1994)  
J. D. Stack and R. J. Wensley and S. D. Neiman, *Phys. Rev. D* **50**, 3399 (1994)  
S. Kitahara, Y. Matsubara and T. Suzuki *Prog. Theor. Phys.* **93**, 1 (1995)
- [15] A. Kronfeld G. Shierholz and U. -J Wiese, *Nucl. Phys. B* **293**, 461 (1987)  
A. Kronfeld, M.Laursen, G. Shierholz and U. -J Wiese, *Phys. Lett. B* **198**, 516 (1987)
- [16] T. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **80**, 929 (1988)  
S. Maedan, T. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **81**, 229 (1989)
- [17] H. Suganuma, S. Sasaki and H. Toki, *Nucl. Phys. B* **435**, 207 (1995)
- [18] E. V. Shuryak, “*The QCD Vacuum, Hadrons And The Superdense Matter*”, (World Scientific, 1988)
- [19] 神吉健 「パリティ物理学コース クォーク・グルーオン・プラズマ」(丸善) (1992)
- [20] G. B. West, “*The Glueball: The Fundamental Particle of Nonperturbative QCD*”, hep-ph/9608258
- [21] H. Suganuma, S. Sasaki, H. Toki and H. Ichie, *Prog. Theor. Phys. (Suppl.)* **120**, 57 (1995)
- [22] H. Ichie, H. Suganuma and H. Toki, *Phys. Rev. D* **54**, 3382 (1996)
- [23] V. V. Anisovich *et al.*, *Phys. Lett. B* **323**, 233 (1994)  
C. Amsler *et al.*, *Phys. Lett. B* **291**, 347 (1992) ; *Phys. Lett. B* **340**, 259 (1994) ;  
*Phys. Lett. B* **342**, 433 (1995) ; *Phys. Lett. B* **353**, 385 (1995)
- [24] Particle Data Group, L. Montanet *et al.*, *Phys. Rev. D* **50**, 1173 (1994)
- [25] BES Collaboration, J. Bai *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3502 (1996)
- [26] N. A. Törnqvist, “*Summary of Gluonium95 and Hadron95 Conferences*”, HU-SEFT-R-1996-16a, hep-ph/9510256

- [27] D. Zwanziger, *Phys. Rev. D* **3**, 880 (1971)
- [28] K. Bardacki and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **18**, 2849 (1978)  
S. Samuel, *Nucl. Phys. B* **154**, 62 (1979)
- [29] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973)
- [30] A. Tanaka and H. Suganuma, Proc. of Int. Symp. on “*Innovative Computational Methods in Nuclear Many-Body Problems*”, Osaka, Nov. 1997, (World Scientific) ; “*Dual Wilson Loop and InterMonopole Potential in Lattice QCD*”, hep-lat/9712027
- [31] 中島貞雄「新物理学シリーズ9 超伝導入門」(培風館)(1971)
- [32] E. B. Bogomol’nyi, *Sov. J. of Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976)
- [33] S. Weinberg, *The First Three Minutes* (Basic Books, Inc. ,New York,1977)
- [34] J. D. Bjorken *Phys. Rev. D* **27**, 140 (1983)
- [35] N. K. Glendenning and T. Matsui, *Phys. Rev. D* **28**, 2890 (1983) ; *Phys. Lett. B* **141**, 419 (1984)
- [36] H. Suganuma, and T. Tatsumi, *Phys. Lett. B* **269**, 371 (1991) ; *Prog. Theor. Phys.* **90**, 379 (1993)
- [37] H. Chen, J. Sexton, A. Vaccarino and D. Weingarten, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **34**, 357 (1994)  
D. Weingarten , “*Evidence for the Observation of a Glueball*”, hep-ph/9607212
- [38] G. Bali, K. Schilling, A. Hulsebos, A. Irving, C. Michael and P. Stephenson, *Phys. Lett. B* **309**, 357 (1993)
- [39] M. Kaku, “*Introduction to Superstrings*”, (Springer Verlag, 1988)
- [40] Y. Koma, H. Suganuma and H. Toki, Proc. of Int. Symp. on “*Innovative Computational Methods in Nuclear Many-Body Problems*”, Osaka, Nov. 1997, (World Scientific) ; “*Hadronic Flux-Tubes in the Dual Ginzburg-Landau Theory*” , hep-ph/9804289