２００６年度　熱統計物理学　Week8 演習課題　解答例

１：温度 T_1 の高温熱源から Q_1 の熱を吸収し，温度 T_2 の低温熱源へ Q_2 の熱を放出する熱機関がある．１サイクルの間に外部にする仕事を W とするとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$W \leq \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) Q_2 \quad .$$

ここで，等号はどのようなサイクルのときに成立するか．

【解答】

１サイクル完了時で内部エネルギーは変化しないから，エネルギー保存則は

$$W = Q_1 - Q_2 \quad .$$

エントロピーの定義より

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$$

だから，両式より Q_1 を消去すると

$$T_1 \Delta S = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) Q_2 - W$$

を得る．一般の不可逆な熱機関ではエントロピーが増大するので，$T_1 \Delta S \geq 0$ より，

$$W \leq \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) Q_2$$

となる．等号は可逆な場合に成り立つ．

２：ファン・デル・ワールスによれば，分子間力を考慮したとき，内部エネルギーと圧力は理想気体の場合と少し異なり，

$$U = \frac{3}{2} nRT - \frac{A}{V}$$

$$P = \frac{nRT}{V - B} - \frac{A}{V^2}$$

で与えられるという．ここで，ＡとＢは定数であり，理想気体の場合はＡ＝Ｂ＝０である．エネルギー保存則 $dU = TdS - PdV$ を用いて，エントロピー変化 dS が

$$dS = \frac{1}{T} \frac{3}{2} nRdT + \frac{nR}{V - B} dV$$

で与えられることを示せ．また，これを積分して

$$S = \frac{3}{2} nR \log T + nR \log(V - B) + S_0$$

となることを示せ．

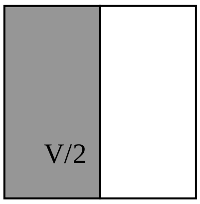
【解答】

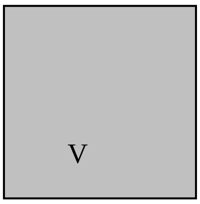
エネルギー保存則より $dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV$ である．U の式より，$dU = \frac{3}{2}nRdT + \frac{A}{V^2}dV$，$P$ の式より，$PdV = \left(\frac{nRT}{V-B} - \frac{A}{V^2}\right)dV$ だから，$dS = \frac{1}{T}\frac{3}{2}nRdT + \frac{nR}{V-B}dV$ となる．

積分は$V - B = V'$ とおいて Vの積分を V'の積分に置き換えれば簡単にできる．

３：図のように断熱壁で囲まれた体積 V の容器がある．最初，左図のように半分の体積に n mol の理想気体が詰められ，残りの体積は真空だった．中央のしきりを取り除き，気体を体積 V の容器全体に自由膨張させたとき，エントロピーの変化ΔS を求めよ．

（注）真空中に膨張させたので，気体は体積が増えても仕事はしない（$P = 0$ だから）．したがって内部エネルギーは，この過程で変化しない．





【解答】

２の結果より，理想気体の場合 $B = 0$ だから，$S = \frac{3}{2}nR\log T + nR\log V + S_0$ となる．内部エネルギーが一定だから T は一定．体積が２倍になっただけだから，エントロピーの差は，$nR\log 2$ である．

４：マクスウェルの速度分布則によれば，気体分子で，早さが v と $v + dv$ の間にある確率は次式で与えられる：

$$p(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv \quad .$$

（１）$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ を示せ．ただし記号 $< v >$ は v の平均を示す．$< v > = 0$ でないのは

なぜか.

（２）$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}kT$ となることを示せ.

（３）ゴキブリの感覚センサーは，何と 4×10^{-21} J の力学的エネルギーを感知するという.これは20℃の空気分子のランダムな熱運動の運動エネルギーの何倍か．ただし，k = 1.38×10^{-23} J/K である.

（注）必要に応じて次の積分公式を使え.

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}a^{-1} \quad ; \quad \int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}a^{-2} \quad ; \quad \int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}a^{-\frac{5}{2}}$$

【解答】

（１）と（２）は解答略．積分公式を使えば難なく求まる（はず).

（３）は（２）の右辺に T = 293 K を代入すると 6×10^{-21} J となるので， 2/3 倍である.