

第 31 回 発展方程式若手セミナー
報告集

2009 年 12 月

第 31 回発展方程式若手セミナー報告集の発刊にあたって

幹事をお引受けして 1 年半ほどたちましたが、無事に報告集の発刊にこぎつけることができました。これもご支援くださった先生方、特別講演を引き受けてくださった北直泰先生、そして参加してくださったみなさまのおかげであります。まずは簡単に今年度のセミナーについてご報告いたします。

第 31 回発展方程式若手セミナーは 2009 年 8 月 31 日から 9 月 3 日の間、独立行政法人国立女性教育会館に於いて開催されました。セミナーでは、特別講演として宮崎大学の北直泰先生に「非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動について」というタイトルで講演いただき、また 31 の一般講演と主に修士課程の大学院生によるショートコミュニケーションを実施いたしました。この報告集は、講演者の方々に執筆していただいた講演の内容をまとめたものです。

特別講師の北直泰先生には、初学者の大学院生に配慮しつつ、かつ専門家であっても見落しがちな側面を指摘するようご講演を工夫していただき、参加者にとって非常に有意義な特別講演となりました。また、両日の講演中・質疑応答時間に合わせて 30 程度の質問があがり、非常に活発な議論がなされました。

一般講演に於いても、初学者に分かるよう、発表内容が工夫されており、問題の背景や研究の動機と目的、そして最新の結果と今後の展望について丁寧な解説がなされていました。質疑応答や休憩時間に質問者と講演者がリラックスして議論している姿が見受けられ、参加者にとって有意義な時間であったと思われます。

本セミナーは東北大学の小藺 英雄先生ならびに京都大学の堤 誉志雄先生が代表を務める科学研究補助金から多大なるご支援を頂いております。この場を借りて御礼申し上げます。

科学研究費補助金 基盤研究 (S) 研究課題番号: 20224013
「非線形偏微分方程式の大域的適切性」
研究代表者 小藺 英雄 先生

科学研究費補助金 基盤研究 (A) 研究課題番号: 19204012
「非線形波動・分散型方程式の幾何学的対称性と解の構造」
研究代表者 堤 誉志雄 先生

科学研究費補助金 若手研究 (B) 研究課題番号: 19740073
「非線形ラプラシアンを含む発展方程式の研究」
研究代表者 赤木 剛朗

また、本研究集会が発足して間もないころ、学問的な影響を与えると共に私財を投じるなど、若手の育成に多大な貢献をされた高村 幸男 お茶の水大学名誉教授が今年 3 月に逝去されました。ここに謹んで高村先生のご冥福をお祈りすると共に、感謝の念を捧げます。

今は祭の後のようなさみしさを若干感じておりますが、ともかく無事に終えることができたことを喜んでおります。第 32 回発展方程式若手セミナーは沼津高専の松澤 寛先生に幹事をお引受けいただくことになりました。今後も、本セミナーがますます繁栄し、多くの若手研究者にとって有意義なセミナーとなるようお祈りしております。

2009 年 12 月

第 31 回発展方程式若手セミナー

幹事 赤木 剛朗 (芝浦工大)
補佐 松浦 啓 (早稲田大)

第 31 回発展方程式若手セミナー プログラム

日程 2009 年 8 月 31 日 (月) ～ 2009 年 9 月 3 日 (木)

会場 独立行政法人 国立女性教育会館

住所 〒 355-0292

埼玉県比企郡嵐山町菅谷 728 番地

TEL 0493-62-6711 (代表)

URL <http://www.nwec.jp/>

すべてのセッションと特別講演は大会議室で実施します.

幹事 赤木 剛朗 (芝浦工業大学 システム理工学部) g-akagi@sic.shibaura-it.ac.jp
松浦 啓 (早稲田大学 理工学研究所)

URL <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~g-akagi/wakate31/>

8 月 31 日 (月)

13:30 – 14:00 開会挨拶・自己紹介 (大会議室)

セッション 1 座長: 眞崎 聡 (東北大学)

14:10 – 14:35 菅 徹 (東北大学)
細い領域における半線形楕円型方程式の解の分岐

14:40 – 15:05 前田 昌也 (京都大学)
Instability of bound states of nonlinear Schrödinger equations

15:10 – 15:35 岡部 考宏 (東北大学)
非斉次境界問題における Navier-Stokes 方程式の時間周期解について

セッション 2 座長: 深尾 武史 (京都教育大学)

15:50 – 16:15 水野 将司 (東北大学)
Porous Media 型非線形拡散方程式の解のヘルダー連続性について

16:20 – 16:45 村瀬 勇介 (広島修道大学)
単調型作用素に対する楕円型仮似変分不等式

16:50 – 17:15 上田 好寛 (東北大学)
Convergence rate to the nonlinear waves for viscous conservation laws on the half space

18:00 – 19:00 夕食 (カフェテリア形式)

19:00 – 21:00 ショートコミュニケーション (研修棟 101 号室)
座長: 川上 竜樹 (東北大学)・上田 好寛 (東北大学)

9 月 1 日 (火)

7:30 – 8:30 朝食 (カフェテリア形式)

セッション 3 座長: 宮本 安人 (東京工業大学)

9:00 – 9:25 生駒 典久 (早稲田大学)
非線型 Schrödinger 方程式の正值解の一意性について

9:30 – 9:55 熊崎 耕太 (名古屋工業大学)
Penrose-Fife 型の相転移モデルに対する可解性について

10:00 – 10:25 川上 竜樹 (東北大学)
半空間における非線形境界条件付き熱方程式の大域解の分類

特別講演 (その 1) 座長: 白川 健 (神戸大学)

10:40 – 12:10 北 直泰 (宮崎大学)
非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動について

12:10 – 13:00 昼食 (カフェテリア形式)

セッション 4 座長: 久保 隆徹 (筑波大学)

13:00 – 13:25 宮本 安人 (東京工業大学)
活性因子・抑制因子系の漸近挙動について

13:30 – 13:55 劉 永琴 (九州大学)
Global existence and asymptotic behavior of solutions for quasi-linear dissipative plate equation

14:00 – 14:25 中村 能久 (熊本大学)
シュレディンガー方程式の解の平滑化効果について

セッション 5 座長: 横田 智巳 (東京理科大学)

14:40 – 15:05 竹田 寛志 (東北大学)
連立非線形消散型波動方程式の時間大域解の臨界指数について

15:10 – 15:35 加藤 孝盛 (名古屋大学)
Wellposedness of the fifth order KdV equation

15:40 – 16:05 渡邊 紘 (中央大学)
非局所的移流項を持つ強退化拡散方程式系の可解性

セッション 6 座長: 五十嵐 威文 (日本大学)

16:20 – 16:45 深尾 武史 (京都教育大学)
熱水力学に現れる障害物問題の大域的アトラクターについて

16:50 – 17:15 黒田 紘敏 (北海道大学)
非斉次項をもつ特異拡散方程式の近似問題

18:00 – 19:00 夕食 (カフェテリア形式)

9 月 2 日 (水)

7:30 – 8:30 朝食 (カフェテリア形式)

セッション 7 座長: 久藤 衡介 (福岡工業大学)

9:00 – 9:25 猪奥 倫左 (東北大学)
放物型方程式における最大正則性と指数可積分性について

9:30 – 9:55 眞崎 聡 (東北大学)
2次元全空間における Schrödinger-Poisson 方程式の時間局所解の一意存在について

10:00 – 10:25 中川 和重 (埼玉大学)
ABP type estimates for nonlinear elliptic systems

特別講演 (その 2) 座長: 白川 健 (神戸大学)

10:40 – 12:10 北 直泰 (宮崎大学)
非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動について

12:10 – 13:00 昼食 (カフェテリア形式)

13:00 – 13:30 (国立女性教育会館)

セッション 8 座長: 黒田 紘敏 (北海道大学)

13:30 – 13:55 山本 征法 (東北大学)
移流拡散方程式の解の漸近展開について

14:00 – 14:25 浅井 智朗 (東京大学)
On smoothing effect for higher order curvature flow equations

セッション 9 座長: 上田 好寛 (東北大学)

14:40 – 15:05 平山 浩之 (名古屋大学)
トーラス上の高階次分散型方程式の時間局所適切性

15:10 – 15:35 原田 潤一 (早稲田大学)
非線形境界条件をもつ放物型方程式の解の爆発について

15:40 – 16:05 ダルマワルダネ マヘシ (九州大学)
Decay property for second order hyperbolic systems of viscoelastic materials

セッション 10 座長: 松浦 啓 (早稲田大学)

16:20 – 16:45 岩渕 司 (東北大学)
Modulation 空間における Navier-Stokes 方程式の解の存在定理について

16:50 – 17:15 増田 茂 (首都大学東京)
The two constants and tensors of the original Navier-Stokes equations

18:00 – 20:00 懇親会

9 月 3 日 (木)

7:30 – 8:30 朝食 (カフェテリア形式)

セッション 11 座長: 松浦 啓 (早稲田大学)

9:00 – 9:25 加納 理成 (近畿大学)
仮似変分不等式論による癌浸潤モデルの局所可解性について

9:30 – 9:55 五十嵐 威文 (日本大学)
cone 領域における反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

10:00 – 10:25 村井 宗二郎 (東海大学)
Strichartz estimates for wave equations with a potential in an exterior domain

10:30 – 10:55 石本 登志男 (九州大学)
双安定反応拡散系における 2 次元スパイラルパターン

11:00 – 11:30 来年度について・閉会のあいさつ

第 31 回発展方程式若手セミナー 参加者一覧

氏名	所属	学年・職位
黒田 紘敏	北海道大学大学院 理学研究院	専門研究員
上田 好寛	東北大学大学院 理学研究科	助教
川上 竜樹	東北大学大学院 理学研究科	研究支援者
眞崎 聡	東北大学大学院 情報科学研究科	PD
竹田 寛志	東北大学大学院 理学研究科	D3
水野 将司	東北大学大学院 理学研究科	D3
山本 征法	東北大学大学院 理学研究科	D3
猪奥 倫左	東北大学大学院 理学研究科	D2
岩渕 司	東北大学大学院 理学研究科	D2
岡部 考宏	東北大学大学院 理学研究科	D2
菅 徹	東北大学大学院 理学研究科	D1
瓜屋 航太	東北大学大学院 理学研究科	M1
山本 宏子	東北大学大学院 理学研究科	M1
久保 隆徹	筑波大学大学院 数理物質科学研究科	助教
中川 和重	埼玉大学大学院 理工学研究科	D4
赤木 剛朗	芝浦工業大学 システム理工学部	准教授
榎本 裕子	芝浦工業大学 システム理工学部	助教
垣花 達志	芝浦工業大学大学院 工学研究科	M1
長岐 隆	芝浦工業大学大学院 工学研究科	M1
増田 茂	首都大学東京大学院 理学研究科	D5
野井 貴弘	中央大学大学院 理工学研究科	D3
渡邊 紘	中央大学大学院 理工学研究科	D3
浅井 智朗	東京大学大学院 数理科学研究科	D1
宮本 安人	東京工業大学大学院 理工学研究科	助教
横田 智巳	東京理科大学 理学部第一部	講師
田村 博志	東京理科大学大学院 理学研究科	D2
吉井 健太郎	東京理科大学大学院 理学研究科	D2
前田 佳紀	東京理科大学大学院 理学研究科	D1
鈴木 敏行	東京理科大学大学院 理学研究科	M2
側島 基宏	東京理科大学大学院 理学研究科	M2
長友 宏樹	東京理科大学大学院 理学研究科	M2
最上 桂	東京理科大学大学院 理学研究科	M2
石田 祥子	東京理科大学大学院 理学研究科	M1

氏名	所属	学年・職位
須永 悟	東京理科大学大学院 理学研究科	M1
長岡 敬佑	東京理科大学大学院 理学研究科	M1
埜口 博司	東京理科大学大学院 理学研究科	M1
松永 浩介	東京理科大学大学院 理学研究科	M1
五十嵐 威文	日本大学 理工学部	助教
松浦 啓	早稲田大学 理工学研究所	嘱託職員
原田 潤一	早稲田大学大学院 先進理工学研究科	D3
生駒 典久	早稲田大学大学院 基幹理工学研究科	D2
山崎 教昭	神奈川大学 工学部	准教授
村井 宗二郎	東海大学大学院 総合理工学研究科	D2
松澤 寛	沼津工業高等専門学校	講師
加藤 孝盛	名古屋大学大学院 多元数理科学研究科	D2
平山 浩之	名古屋大学大学院 多元数理科学研究科	M2
熊崎 耕太	名古屋工業大学大学院 工学研究科	D3
愛木 豊彦	岐阜大学 教育学部	准教授
前田 昌也	京都大学大学院 理学研究科	D2
深尾 武史	京都教育大学 教育学部	准教授
李 春花	大阪大学大学院 理学研究科	D1
池田 正弘	大阪大学大学院 理学研究科	M2
小林 政志郎	大阪大学大学院 理学研究科	M2
上垣 彰伸	大阪市立大学大学院 理学研究科	M2
伊藤 昭夫	近畿大学 工学部	准教授
加納 理成	近畿大学 工学部	非常勤講師
白川 健	神戸大学大学院 工学研究科	准教授
村瀬 勇介	広島修道大学 経済科学部	助教
劉 永琴	九州大学大学院 数理学府	PD
石本 登志男	九州大学大学院 数理学府	D1
ダルマワルダネ マヘシ	九州大学大学院 数理学府	M2
青山 鈴香	九州大学大学院 数理学府	M1
藤 潤次	福岡大学大学院 理学研究科	M2
山本 佑治	福岡大学大学院 理学研究科	M2
岡田 拓也	福岡大学大学院 理学研究科	M1
久藤 衡介	福岡工業大学 工学部	准教授
中村 能久	熊本大学大学院 自然科学研究科	助教
北 直泰	宮崎大学 教育文化学部	准教授

—— 目次 ——

北 直泰 (宮崎大学)	
特別講演 非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動について	1-27
浅井 智朗 (東京大)	
On smoothing effect for higher order curvature flow equations	29-39
猪奥 倫左 (東北大)	
放物型方程式における最大正則性と指数可積分性について	41-49
五十嵐 威文 (日本大)	
cone 領域における反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について	51-67
生駒 典久 (早稲田大)	
非線型 Schrödinger 方程式系の正值解の一意性について	69-78
石本 登志男 (九州大)	
双安定反応拡散系における 2 次元スパイラルパターン	79-88
岩渕 司 (東北大)	
Modulation 空間における Navier-Stokes 方程式の解の存在定理について	89-94
上田 好寛 (東北大)	
Convergence rate to the nonlinear waves for viscous conservation laws on the half space	95-103
岡部 考宏 (東北大)	
非斉次境界問題における Navier-Stokes 方程式の時間周期解について	105-111
加藤 孝盛 (名古屋大)	
Local well-posedness for the fifth order KdV equation	113-124
加納 理成 (近畿大)	
仮似変分不等式論による癌浸潤モデルの局所可解性について	125-132
川上 竜樹 (東北大)	
半空間における非線形境界条件付き熱方程式の大域解の分類	133-142
菅 徹 (東北大)	
細い領域における半線形楕円型方程式の解の分岐	143-150
熊崎 耕太 (名古屋工業大)	
A Non-Isothermal Phase Transition Model With Time-Dependent Constraints	151-160
黒田 紘敏 (東北大)	
特異拡散方程式の近似問題について	161-172

竹田 寛志 (東北大)	
連立非線形消散型波動方程式の時間大域解の臨界指数について	173–182
PMN Dharmawardane (九州大)	
Decay Property for Hyperbolic Systems of Viscoelastic Materials	183–195
中川 和重 (埼玉大)	
ABP type estimates for nonlinear elliptic systems	197–205
中村 能久 (熊本大)	
シュレディンガー方程式の解の平滑化効果について	207–215
原田 潤一 (東北大)	
非線形境界条件を持つ放物型方程式の解の爆発について	217–222
平山 浩之 (名古屋大)	
トーラス上の高階次分散型方程式の時間局所適切性について	223–236
深尾 武史 (京都教育大)	
熱水力学に現れる障害物問題の大域的アトラクターについて	237–246
前田 昌也 (京都大)	
On the radially symmetric ground states of nonlinear Schrödinger equations	247–253
眞崎 聡 (東北大)	
2次元全空間における Poisson 方程式について	255–268
増田 茂 (首都大)	
The two constants and tensors of the original Navier-Stokes equations	269–288
水野 将司 (東北大)	
Porous Media 型非線形拡散方程式の解のヘルダー連続性について	289–298
宮本 安人 (東京工業大)	
Asymptotic behavior of solutions for the shadow reaction-diffusion system with the nonlinearity of the FitzHugh-Nagumo type	299–305
村井 宗二郎 (東海大)	
Strichartz estimates for wave equations with a potential in an exterior domain	307–316
村瀬 勇介 (広島修道大)	
仮似変分不等式に対する最適制御問題について	317–324
山本 征法 (東北大)	
移流拡散方程式の解の漸近展開について	325–334

劉 永琴 (九州大)

Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions for Quasi-linear

Dissipative Plate Equation 335–350

渡邊 紘 (中央大)

非局所的移流項を持つ強退化拡散方程式系に対する可解性 351–359

非線形 Schrödinger 方程式の解の挙動

北 直泰 (宮崎大学 教育文化学部)

§ 1. 序文 — 非線形 Schrödinger 方程式の物理的な背景

この報告集では、主に空間 1 次元の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題：

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u + \lambda N(u), \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

を取り扱う。ここで、 $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ であり、 $u = u(t, x)$ は複素数値の未知関数である。 i は虚数単位を表す。また、非線形項 $\lambda N(u)$ は p 次のベキ型で、

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad N(u) = |u|^{p-1} u \quad (1 < p)$$

のような形を持つものとする。この形を持つ非線形項については、 u にゲージ変換を施したものの、つまり $e^{i\theta} \times u$ (ただし、 $\theta \in \mathbb{R}$) を代入すると、

$$(1.1) \quad N(e^{i\theta} u) = e^{i\theta} N(u)$$

のように phase の修正 $e^{i\theta}$ がそっくりそのまま $N(u)$ の外に飛び出す性質がある。性質 (1.1) のお陰で、 u が (NLS) の解ならば、 $e^{i\theta} \times u$ (ただし、 θ は実数定数) もまた (NLS) の解になる。このような事情から、性質 (1.1) を満たす非線形項を伴った (NLS) を「**ゲージ不変性**のある非線形 Schrödinger 方程式」と呼ぶ。ゲージ不変性は様々な保存則を導く際に非常に有用な性質となる。また、§3 で $t \rightarrow \infty$ における解の漸近挙動を調べるが、その際ゲージ不変性から非線形効果ならではの影響が解の漸近形に現れてくることがわかる。

次に方程式 (NLS) の物理的な背景について紹介する。非線形 Schrödinger 方程式は、 $p=3$ (たまに $p=5$) の場合が物理学で登場し、流体中の渦糸の運動や光ファイバー内部を伝播する光信号 (=電磁波) の振る舞いを近似的に記述している。今回の講演では聴講者がイメージを持ちながら解 $u(t, x)$ を把握できるようにしたいので、特に光ファイバーの話題に焦点を絞って説明を続けよう。光は電磁波であるから、その振る舞いは Maxwell の方程式によって記述されるはずである。しかし、Maxwell の方程式を解いてこと細かく波形の解析をしても、現代の人類の技術力ではピコ秒～フェムト秒周期の振動を観測して理論を実証することはまずもって不可能である。そこで、激しく振動する電場であってもその振動の包絡線は緩やかに変化することに着目し、その振る舞いを記述する支配方程式を構築する試みから非線形 Schrödinger 方程式が編み出された。この辺の事情を Agrawal [1] に従って数式で説明しよう。今、3次元空間の x 軸に沿ってファイバーが伸びているも

のとし、電場は $(0,0,E(x,t))$ で記述されるように z 軸方向に振動しているものとしよう。様々な振動数（様々な色）の光を混ぜ込んで光信号を作るので、電場 $E(x,t)$ は次のように単色光の重ね合わせで表現できる。

$$(1.2) \quad E(x,t) = \operatorname{Re} \int \tilde{A}(\omega) \exp(ikx - i\omega t) d\omega$$

ただし、 Re は複素数の実部、 $\tilde{A}(\omega)$ は重ね合わせの重み、そして $k = k(\omega)$ は波数を表す。

特定の色（波数）の光を主に寄せ集めて信号を作る。つまり、 $\operatorname{supp} \tilde{A} \subset (\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta)$ なる状況を考えると、

$$(1.3) \quad E(x,t) = \operatorname{Re}(A(x,t) \exp(ik_0 x - i\omega_0 t))$$

のように書ける。ここで、 $k_0 = k(\omega_0)$ であり、

$$A(x,t) = \operatorname{Re} \int \tilde{A}(\omega) \exp(i(k - k_0)x - i(\omega - \omega_0)t) d\omega$$

は緩やかに変動する関数である。単色光の振動数によって誘電率が変化する場合、電束密度 $D(x,t)$ は線形応答を仮定すれば $D(x,t) = \operatorname{Re} \int \varepsilon(\omega) \tilde{A}(\omega) \exp(ikx - i\omega t) d\omega$ と書けるが、現実には Kerr 効果と呼ばれる非線形的な応答になるので、これも取り入れて、

$$(1.4) \quad \begin{aligned} D(x,t) &= \operatorname{Re} \int \varepsilon(\omega) \tilde{A}(\omega) \exp(ikx - i\omega t) d\omega + \nu E(x,t)^3 \\ &= \operatorname{Re} \int \varepsilon(\omega) \tilde{A}(\omega) \exp(ikx - i\omega t) d\omega + \nu (\operatorname{Re}(A(x,t) \exp(ik_0 x - i\omega_0 t)))^3 \end{aligned}$$

と書く。上記の $E(x,t)$, $D(x,t)$ を Maxwell の方程式から得られる波動方程式：

$$\partial_x^2 E - \mu \partial_t^2 D = 0 \quad (\mu \text{ は透磁率})$$

に代入したあと、 $|\partial_x^2 A| \ll k_0^2 |A|$ などの性質を利用すると、

$$(1.5) \quad \begin{aligned} &\operatorname{Re}((2ik_0 \partial_x A - k_0^2 A) e^{i\Theta_0}) \\ &\approx -\mu \operatorname{Re} \int \varepsilon(\omega) \omega^2 \tilde{A}(\omega) e^{i\Theta} d\omega - \frac{3\mu\nu\omega_0^2}{4} \operatorname{Re}(|A|^2 A e^{i\Theta_0}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Theta_0 = ik_0 x - i\omega_0 t$, $\Theta = ikx - i\omega t$ とおいた。右辺積分内の関数 $\varepsilon(\omega)\omega^2$ を $\omega = \omega_0$ のまわりで2次の項まで Taylor 展開する。

$$\varepsilon(\omega)\omega^2 = \varepsilon(\omega_0)\omega_0^2 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

すると (1.5) から、

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & (2ik_0\partial_x A - k_0^2 A)e^{i\theta_0} \\
 & \approx -\mu(\varepsilon(\omega_0)\omega_0^2 A + i\beta_1\partial_t A - \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2 A)e^{i\theta_0} - \frac{3\mu\nu\omega_0^2}{4}|A|^2 A e^{i\theta_0}
 \end{aligned}$$

振動数 ω_0 の光については, $k_0^2 = \mu\varepsilon(\omega_0)\omega_0^2$ という関係が成り立つので, (1.6) から

$$2ik_0\partial_x A + i\mu\beta_1\partial_t A \approx \frac{\mu\beta_2}{2}\partial_t^2 A - \frac{3\mu\nu\omega_0^2}{4}|A|^2 A$$

が得られる. 関数 $A(x, t)$ の変数に平行移動とスケール変換を適宜施したものを $u(x, t)$

とおけば, 非線形 Schrödinger 方程式 $i\partial_x u = -\partial_t^2 u + \lambda|u|^2 u$ が得られる. ただし, 異常分散効果として $\beta_2 < 0$ の場合を採用していること, および λ は Kerr 効果の係数 ν に“負の係数がつく”形で比例していることに注意. あとは, x と t を入れ替えることで, (NLS) を導くことができる. このような変数の入れ替えをするのは, 数学の流儀に従って, (NLS) の発展方程式論的な取り扱いのほうを尊重したいからである.

以上の考察からわかるように, 光ファイバーモデルの場合, (NLS) の変数 t はファイバーに沿った“位置”を表しており, 変数 x は波形を記述するための“時刻”を表す. 数学における t, x の役割と逆になっているが, 読者に混乱のないことを祈りたい. また, 解 $u(t, x)$ の絶対値 $|u(t, x)|$ は激しく振動する電場の“包絡線”を表している. そして, 非線形項 $\lambda N(u)$ は, 非線形 Kerr 効果を表現しており, 係数 λ はこの効果の度合を表している.

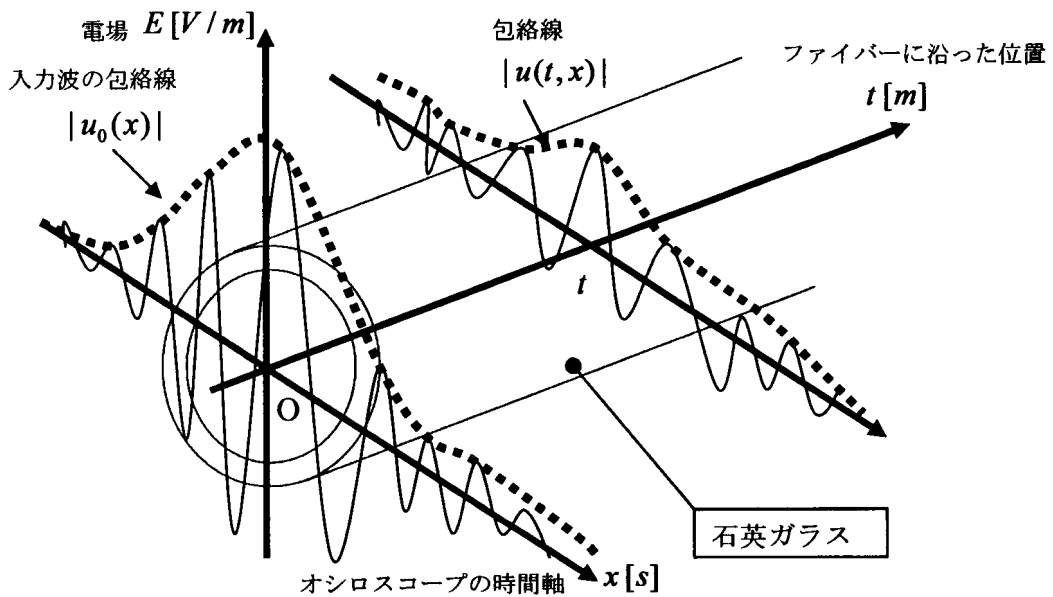


図 1.1 (NLS) が解ければ, ファイバー中の波形の包絡線がわかる

さて, (NLS) の数学的な研究では, 数多くの研究者によって,

- ・ 時間局所解の適切性と非適切性
- ・ 時間大域解の存在と非存在
- ・ 時間大域解の減衰・ソリトン解など特殊解の安定性と不安定性

などの問題が盛んに調べられている. この報告集では, 紙面の都合と筆者の力量を鑑みて, 上記すべての事柄について丁寧に紹介することは難しいであろう. そこで, 特に「時間局所解の適切性と非適切性」・「時間大域解の存在と非存在」・「 $t \rightarrow \infty$ における解の減衰」の話題に焦点を絞る. 先に非線形 Schrödinger 方程式は光ファイバー内の電場の振舞いを記述すると書いたが, 近似に近似を重ねて得られた (NLS) が解を持たないなどということが起こると, 何のための方程式なのか怪しくなってしまう. だから, (NLS) がちゃんと何らかの意味で解を持つことを数学的に確かめておくことは重要である. そこで, §2では時間局所解を構成し, その解が時間大域的に存在するのか否かを論じる. 加えて, 特異なデータの枠組みでは (NLS) の解の適切性が失われてしまうことについても言及する. §3では小さいデータに対して, 時間大域解が $t \rightarrow \infty$ で線形 Schrödinger 方程式の解と似たような振る舞いになることを示し, 小さな信号はファイバー内部を伝播するにつれてどんどん潰れてしまうことを数学的に証明する. なお, 非線形 Schrödinger 方程式の入門的な書籍として, Cazenave-Haraux [5] および 堤誉志雄先生 [34] を挙げておく.

§ 2. 時間局所解および時間大域解

関数空間の設定 (NLS) の解を構成する際に, まず解が属する関数空間を設定しておかねばならない. 我々は初期値問題を解く際にいつも「時間大域解が存在するか否か? (＝いかなる時刻においても方程式は現象を記述し得るか?)」という問題意識を持っているので, 時間局所解をつないで先へ先へと解を延長できるようにうまく関数空間を準備しておく必要がある. 解を延長するには, $u(t, x)$ のノルムが t の経過とともに急激に増えないことが望ましい. そこで利用したいものが「保存量 (t について不変な量)」である. λ が実数の場合, (NLS) の解 $u(t, x)$ が t, x について滑らかで, $x \rightarrow \pm\infty$ のときに減衰していることを仮定すれば, 次のような保存量を持つことが知られている.

$$(2.1) \quad Q(t) \equiv \|u(t, \cdot)\|_{L^2(R)}^2 \quad (\text{電荷あるいは質量})$$

$$(2.2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^2(R)}^2 + \frac{\lambda}{p+1} \|u(t, \cdot)\|_{L^{p+1}(R)}^{p+1} \quad (\text{エネルギー})$$

今, 我々が光ファイバーの話題に沿って議論を展開しているにもかかわらず, これらの量

を「電荷」, 「エネルギー」と呼ぶのは, Schrödinger 方程式が量子力学で登場することの名残であろう. (量子力学では, $|u(t, x)|^2$ は位置 x に電子が存在する確率密度を表し, 微分作用素 $i^{-1}\partial_x$ は運動量を固有値にもつ演算子と見做している.) これらの保存量が無限大に発散しないように, 関数空間として $H^1(R)$, つまり,

$$H^1(R) \equiv \{f(x) \in L^2(R); \partial_x f \in L^2(R)\}$$

を選ぶのがよい. この Sobolev 空間のノルムとして, $\|f\|_{H^1(R)} \equiv \|f\|_{L^2(R)} + \|\partial_x f\|_{L^2(R)}$ を与えておく. $u(t, \cdot) \in H^1(R)$ のとき, Sobolev の埋め込みを使えば, エネルギー $E(t)$ に含まれるノルム $\|u(t, \cdot)\|_{L^{p+1}(R)}$ は有限の値になる.

以上の議論から, (NLS)の解を「 $H^1(R)$ に値を取る t の関数」という枠組みで構成すればよいことがわかる. そして, 初期値問題として意味を持つためには, 解 $u(t, x)$ が初期データ $u_0(x)$ に連続的につながる必要があるので, t 方向に連続性を課して $u \in C(I; H^1(R))$ の枠組みで解を構成するのがよい. ここで, I は時刻変数の区間 — 例えば, $[-T, T]$ — である. さらに, (NLS) に含まれる $\partial_t u$ と $\partial_x^2 u$ が等式を介してうまく意味を持つためには, $u \in C^1(I; H^{-1}(R))$ という条件下で解を見つけるのがよからう. ここで, $H^{-1}(R)$ は $H^1(R)$ の双対空間である. $u \in C(I; H^1(R))$ のとき, 非線形項 $\lambda N(u) \in C(I; H^1(R)) \subset C(I; H^{-1}(R))$ であることにも注意しておこう. 以上の議論から, 偏微分方程式(NLS)の時間大域解を求めるときに保存量を利用したいのであれば, 関数空間として,

$$u \in C(I; H^1(R)) \cap C^1(I; H^{-1}(R))$$

を用意するのが自然である.

まず初めに時間局所的な解の存在および一意性について述べる. 以下の結果は今から30年ほど前に Ginibre-Velo [10] によって導かれたものである.

Theorem 2.1 (時間局所解 : Ginibre-Velo [10])

$u_0 \in H^1(R)$ とする. このとき, ある $T > 0$ に対し, (NLS) の解

$$u \in C(I; H^1(R)) \cap C^1(I; H^{-1}(R))$$

が唯一つ存在する.

保存量 (2.1) と (2.2) を利用すると, $\|u(t, \cdot)\|_{H^1(R)}$ がいかなる時刻 t においても有限の値をとることが示されて, 時間局所解をどんどんつなげていくことができる. ただし, 非線形項の係数が $\lambda < 0$ のときには, ベキ p に制限が必要になる. 時間大域解の存在については以下の結果が知られている.

Theorem 2.2 (時間大域解 : Ginibre-Velo [10])

$u_0 \in H^1(R)$ とする. また, 非線形項のベキ p に対して,

- $\lambda \geq 0$ のとき $1 < p < \infty$,
- $\lambda < 0$ のとき $1 < p < 5$

とする. このとき, (NLS) の時間大域解 $u \in C(R; H^1(R)) \cap C^1(R; H^{-1}(R))$ が唯一つ存在する.

《Theorem 2.1 の証明》

(NLS) を積分方程式に書き直して, 縮小写像の原理を用いる. ここで, 積分方程式とは (NLS) に Duhamel の原理を適用して得られるもので,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u(t) &= U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)N(u(\tau))d\tau \\ &\equiv \Phi(u) \end{aligned}$$

のことである. ただし, $U(t) \equiv \exp(it\partial_x^2)$ は線形の Schrödinger 方程式の解作用素であり, (2.3) の右

辺に現れている積分 $\int_0^t \cdots d\tau$ は, $H^{-1}(R)$ に値を取る関数に対する Bochner 積分である (Bochner 積分に関して必要最小限の知識を手短にまとめてある書籍として Cazenave-Haraux [5] を挙げておく). ここで, $u \in C([-T, T]; H^1(R)) \cap C^1([-T, T]; H^{-1}(R))$ が偏微分方程式 (NLS) を満たすことと, $u \in C([-T, T]; H^1(R))$ が積分方程式 (2.3) を満たすことは同値であることに注意しておこう.

(注意) 今 $N(u) \in C(I; H^1(R))$ を期待していることを考えると, t に関して連続な関数を積分すればよいから, $\int_0^t \cdots d\tau$ について Bochner 積分のように面倒な積分を使わずとも, Riemann 積分で十分なのでは? と思う人がいるかもしれない. 結論は否である. なぜなら, 後に紹介する解の存在証明で $L^\infty(I; H^1(R))$ における弱収束極限によって (t に関して連続とは限らない) 解をひとまず捕まえようとするからである. 最終的に, この弱収束極限は t に関して連続になることが示されるのだが, 証明途中の不都合を解消したいので, Riemann 積分よりも Bochner 積分の方を採用する. このような紆余曲折を経るのは, $p < 2$ のときに非線形項 $N(u)$ が $u = 0$ のところで看過できない特異性を持つことが最大

の理由である。この特異性のために、 $L^\infty(I; H^1(R))$ の距離で $\Phi(u)$ が縮小写像になることが示しづらくなる。

(Theorem 2.1 の証明の続き) $\|u_0\|_{H^1(R)} \leq \rho_0$ とする。区間 $I = [0, T]$ に対して、(2.3) の写像 Φ が $L^\infty(I; H^1(R))$ の閉集合 $\bar{B}_{2\rho_0} \equiv \{u; \|u\|_{L^\infty(I; H^1(R))} \leq 2\rho_0\}$ 上で縮小写像になることを示す。た

だし、べき p が 1 付近になると非線形項 $N(u)$ が $u = 0$ で特異なものになるので、閉集合 $\bar{B}_{2\rho_0}$

には弱い空間 $L^\infty(I; L^2(R))$ の距離を入れる。(このような距離を導入しても、 $\bar{B}_{2\rho_0}$ は完備になることに注意。) $U(t)$ が $L^2(R)$ でユニタリーであることと、非線形項の評価で Sobolev の埋め込み： $H^1(R) \subset L^\infty(R)$ を使うと、

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{L^\infty(I; H^1(R))} &\leq \rho_0 + CT \times (2\rho_0)^p \\ &\leq 2\rho_0 \end{aligned} \quad (\leftarrow T \text{ を十分小さくした})$$

となるので、 $\Phi: \bar{B}_{2\rho_0} \rightarrow \bar{B}_{2\rho_0}$ となることがわかる。さらに、

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{L^\infty(I; L^2(R))} &\leq CT \times (2\rho_0)^{p-1} \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(I; L^2(R))} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(I; L^2(R))} \end{aligned} \quad (\leftarrow T \text{ を十分小さくした})$$

が成り立つこともわかる。以上の議論から Φ は縮小写像になっている。従って、漸化式 $u_{n+1} = \Phi(u_n)$,

$u_1 = U(t)u_0$ によって定まる点列 $\{u_n\}$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき $L^\infty(I; L^2(R))$ で強収束し、

$L^\infty(I; H^1(R))$ で*弱収束する。この極限 $u \in C(I; L^2(R)) \cap L^\infty(I; H^1(R))$ が積分方程式 (2.3)

を満たす。そして、(2.3) の右辺にある $U(t)u_0$ と $\int_0^t U(t-\tau)N(u(\tau))d\tau$ は Lebesgue の収束定理を

利用すればともに $C(I; H^1(R))$ に属することがわかるので、(2.3) の左辺にある $u(t)$ も $C(I; H^1(R))$ に属することになる。これで、積分方程式を満たす解 $u \in C(I; H^1(R))$ の存在がわかった。解の一意性については、(2.5) を導くのと同一評価をすれば容易に示せる。なお、区間 $I' = [-T, 0]$ における解の存在・一意性も同様に示すことができる。□

《Theorem 2.2 の証明》

初期データをどんどん取り替えながら時間局所解をつないだときに、 $\|u(t)\|_{H^1(R)}$ が有限時刻で ∞ に発散しないことを示せばよい。そうすれば、いかなる時刻においても解の存在を示せる。 $I = (-T, T)$ とおく。解 $u \in C([-T, T]; H^1(R)) \cap C^1([-T, T]; H^{-1}(R))$ に対して (2.1) と (2.2) が保存すること

を厳密に示すためには、空間方向の cut-off $\chi_\nu(x) = \chi(\nu x)$ と軟化子 $\eta_\varepsilon(t), \eta_\varepsilon(x)$ を用いる。

$u_{\nu,\varepsilon} \equiv \eta_\varepsilon(t) * \eta_\varepsilon(x) * (\chi_\nu \times u)$ とおくと、 $u_{\nu,\varepsilon}$ は t, x について滑らかで、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき減衰

することに注意。そして、 u が(NLS)の解であることから、 $u_{\nu,\varepsilon}$ は次の関係式を満たすことがわかる。

$$(2.6) \quad i\partial_t u_{\nu,\varepsilon} = -\partial_x^2 u_{\nu,\varepsilon} + \lambda N(u_{\nu,\varepsilon}) + \text{error}_{\nu,\varepsilon}$$

ただし、

$$\text{error}_{\nu,\varepsilon} = \eta_\varepsilon(t) * \eta_\varepsilon(x) * (2\nu\chi'_\nu \partial_x u + \nu^2 \chi''_\nu u) + \lambda(\eta_\varepsilon(t) * \eta_\varepsilon(x) * \chi_\nu N(u) - N(u_{\nu,\varepsilon}))$$

である。 $\text{error}_{\nu,\varepsilon}$ は $L^\infty([-T+2\varepsilon, T-2\varepsilon]; L^2(R))$ の意味で $L^\infty([-T+2\varepsilon, T-2\varepsilon]; H^1(R))$ に属する

極限 $\lim_{\nu \downarrow 0} \text{error}_{\nu,\varepsilon}$ を持つこと、および $L^\infty_{loc}(I; H^1(R))$ の意味で $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\lim_{\nu \downarrow 0} \text{error}_{\nu,\varepsilon}) = 0$ になることに

注意しよう。(2.6)の両辺に $\bar{u}_{\nu,\varepsilon}$ を掛けて x について積分し、部分積分を利用したあとで虚部をとる。

すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_{\nu,\varepsilon}(t)\|_{L^2(R)}^2 &= 2 \operatorname{Im}(u_{\nu,\varepsilon}, \text{error}_{\nu,\varepsilon}) \\ \Rightarrow \|u_{\nu,\varepsilon}(t)\|_{L^2(R)}^2 &= \|u_{\nu,\varepsilon}(0)\|_{L^2(R)}^2 + 2 \int_0^t \operatorname{Im}(u_{\nu,\varepsilon}, \text{error}_{\nu,\varepsilon}) d\tau \end{aligned}$$

となる。なお、記号 $(\dots, \dots)$ は L^2 内積を表す。ここで $\nu \downarrow 0$, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば、 L^2 ノルムの保存を示すことができる。

次にエネルギー (2.2) の保存については、(2.6)の両辺に $\partial_t \bar{u}_{\nu,\varepsilon}$ を掛けて、 x について積分し、部分積分を利用したあとで実部をとる。すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left\{ \|\partial_x u_{\nu,\varepsilon}(t)\|_{L^2(R)}^2 + \frac{2\lambda}{p+1} \|u_{\nu,\varepsilon}(t)\|_{L^{p+1}(R)}^{p+1} \right\} + 2 \operatorname{Re}(\partial_t u_{\nu,\varepsilon}, \text{error}_{\nu,\varepsilon}) \\ \Rightarrow E_{\nu,\varepsilon}(t) &= E_{\nu,\varepsilon}(0) + \int_0^t \operatorname{Re}(\partial_t u_{\nu,\varepsilon}, \text{error}_{\nu,\varepsilon}) d\tau \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $E_{\nu,\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} \|\partial_x u_{\nu,\varepsilon}(t)\|_{L^2(R)}^2 + \frac{\lambda}{p+1} \|u_{\nu,\varepsilon}(t)\|_{L^{p+1}(R)}^{p+1}$ である。ここで $\nu \downarrow 0$, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば、エネルギーの保存を示すことができる。

さて、 $\lambda > 0$ のとき、電荷とエネルギーの保存から容易に $\|u(t)\|_{H^1(R)} \leq C$ となることがわかる。

従って、時間局所解をつなげて大域解を構成することができる。次に、 $\lambda < 0$ のときを考える。エネルギー

— $E(t)$ の非線形項部分に Gagliardo-Nirenberg の不等式:

$$\|u\|_{L^{p+1}(R)} \leq C \|u\|_{L^2(R)}^{1/2+1/(p+1)} \|\partial_x u\|_{L^2(R)}^{1/2-1/(p+1)}$$

を適用し, エネルギー保存則を用いると,

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \|\partial_x u(t)\|_{L^2(R)}^2 - C \|u(t)\|_{L^2(R)}^\alpha \|\partial_x u(t)\|_{L^2(R)}^\beta &\leq 2E(t) \\ &= 2E(0) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\alpha = 1 + (p+1)/2$, $\beta = (p+1)/2 - 1$ である. 今, 仮定から $1 < p < 5$ なので, $\beta < 2$ であることに注意. 故に, (2.7) に Young の不等式:

$$A^\beta \leq \frac{\beta}{2} \varepsilon A^2 + (1 - \frac{\beta}{2}) \varepsilon^{-\beta/(2-\beta)}, \quad (\varepsilon > 0)$$

を用いて ε を小さく選び, $\|u(t)\|_{L^2(R)}$ の保存を利用すれば $\|u(t)\|_{H^1(R)} \leq C$ を示すことができる. し

たがって, 時間大域解が存在する. $\square$

補足 2.1 — 解の爆発

Theorem 2.2 の仮定で $\lambda < 0$ かつ $5 \leq p$ の場合に時間大域解の存在は

どうなるのであろうか? 実は, $\|u_0\|_{H^1(R)}$ が十分小さい場合には, 保存量 (2.1) と (2.2) を利用したア

プリオリ評価から $\|u(t)\|_{H^1(R)} \leq C$ を示すことができるので, (NLS) の時間大域的な解が存在する. し

かし, $\|u_0\|_{H^1(R)}$ が大きくなると, 有限時間のうちに $\|\partial_x u(t)\|_{L^2(R)}$ が発散することが知られている

[11, 28, 33]. これを定理の形で紹介すると次のようになる.

Theorem 2.3 (解の爆発: Glassey [11])

$\lambda < 0, 5 \leq p$ とし, $u_0 \in H^1(R)$ かつ $xu_0 \in L^2(R)$ とする. このとき, 初期データのエネルギーが $E(0) < 0$ ならば, ある時刻 $T^* > 0$ が存在して,

$$\lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{H^1(R)} = \infty$$

となる.

Theorem 2.3 の仮定で $E(0) < 0$ という条件は, 初期データ u_0 がある程度大きいことを意味している (u_0 が小さいと $E(0)$ は正の値になることに注意). 光ファイバーの話題に絡めて Theorem 2.3 の結果を解釈してみよう. 非線形 Kerr 効果 ((1.4) を参照) では, 電束密度 D が電場の強さ E に対して非線形的に依存することを紹介したが, 屈折率の観点から説明すると, これは光 (= 電場) が強い所は弱い所に比

べて屈折率が高いことを意味する。つまり、振幅の大きな光は伝播速度が遅くなり、弱い光は伝播速度が速くなる。このように光の強弱によって伝播速度に違いが生じると何が起こるのであろうか？安直に考えて、光の強い部分に弱い光がどんどん積み重なり、光波はファイバーのどこかで非常に鋭いパルス型の形状になることが予想される（図2.1参照）。

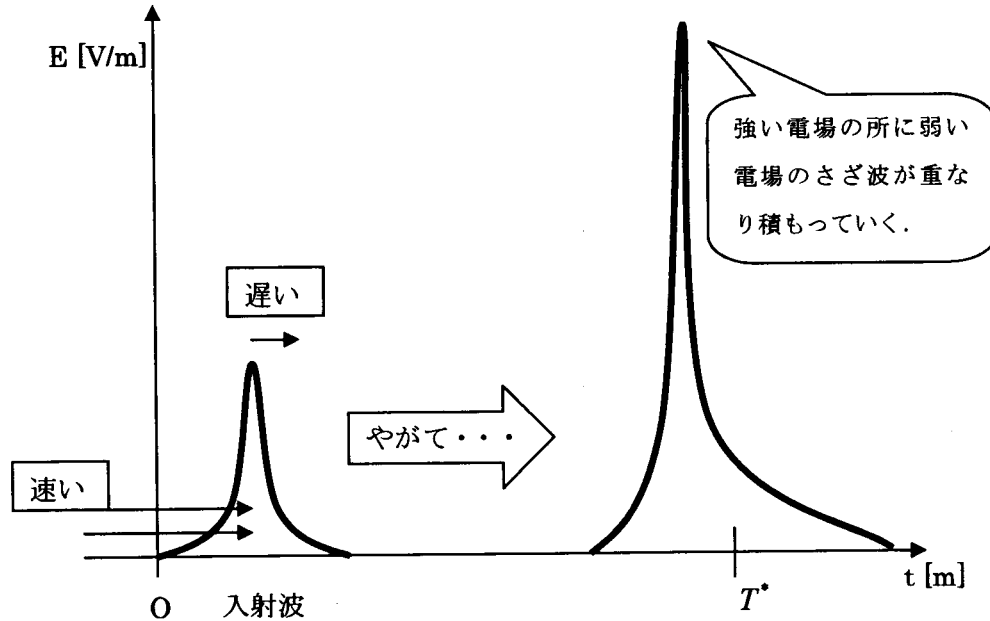


図 2.1 爆発のメカニズム

Theorem2.3 の証明で、波形がパルス状になることを示すために、 $|u(t, x)|^2$ を確率密度分布とみなし、その分散 $\int x^2 |u(t, x)|^2 dx = \|xu(t)\|_{L^2(R)}^2$ を評価する。実際、(NLS) の解 u に対して、2つの形式的な等式：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{d}{dt} \|xu(t)\|_{L^2(R)}^2 = 4 \operatorname{Im}(\partial_x u, xu), \\ \textcircled{2} \quad & \frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2(R)}^2 = 16E(t) + \frac{4(p-5)}{p+1} \lambda \|u(t)\|_{L^{p+1}(R)}^{p+1} \end{aligned}$$

を導き、これらの等式から解の爆発が証明できる。（なお、“形式的”というのは、 $\|xu(t)\|_{L^2(R)}^2$ が時

刻 t で微分できるほど滑らかではないにもかかわらず、 $\frac{d}{dt}$ を押し付けているからである。それゆえ、

正統な論文では上の関係式①と②を時刻に関する積分を用いて表現してあることが多い。）Theorem2.3 の証明について説明を続けよう。 $\lambda < 0, 5 \leq p$ のとき、②から

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2(R)}^2 &\leq 16E(t) = 16E(0) \quad (\leftarrow \text{エネルギー保存}) \\ \Leftrightarrow \|xu(t)\|_{L^2(R)}^2 &\leq \|xu_0\|_{L^2(R)}^2 + 4t \operatorname{Im}(\partial_x u_0, xu_0) + 8E(0)t^2 \end{aligned}$$

が得られる。今、 $E(0) < 0$ なので、仮に時間大域的な解が存在すると仮定しても、上の不等式から

$$\lim_{t \rightarrow T'} \|xu(t)\|_{L^2(R)}^2 = 0$$

となる時刻 $T' > 0$ が存在することになる。この結果と不等式：

$$\|u(t)\|_{L^2(R)}^2 = -2 \operatorname{Re}(xu(t), \partial_x u(t)) \leq 2 \|xu(t)\|_{L^2(R)} \|\partial_x u(t)\|_{L^2(R)}$$

を利用すれば、 $\|\partial_x u(t)\|_{L^2(R)}$ が $T' > 0$ 以前の時刻 $T^* > 0$ で ∞ に発散することが示され、時間大域解の存在が否定される。この爆発の結果は、工学における定性的な直感に数学的な裏付けを与えたものであるとも言えよう。

補足 2.2 — L^2 解

保存量を用いて時間大域解を構成することが、当面の目標になっているが、その際に保存量は (2.1) と (2.2) の2種類も必要であろうか？解の正則性が少なくて済む保存量 (2.1) だけを用いて時間大域的な解を構成することはできないであろうか？つまり、これは $L^2(R)$ の枠組みで解を構成する問題になる。この問題は、以下の定理に示されているように肯定的に解決されている。

Theorem 2.4 (L^2 解 : Y. Tsutsumi [35])

$1 < p < 5$ および $u_0 \in L^2(R)$ とする。このとき、積分方程式：

$$(2.8) \quad u(t) = U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)N(u(\tau))d\tau$$

の解 $u \in C(R; L^2(R)) \cap L_{loc}^r(R; L^{p+1}(R))$ が唯一つ存在する。ただし、 $2/r = 1/2 - 1/(p+1)$ であり、(2.8) の右辺にある時間積分は $H^{-1}(R)$ に値をとる関数に対する Bochner 積分である。

Theorem 2.4を証明する際に、今までのように非線形項を $\|N(u)\|_{L^2(R)} \leq \|u\|_{L^\infty(R)}^{p-1} \|u\|_{L^2(R)}$ と抑え込んだ

あと Sobolev の埋め込みで L^∞ ノルムを処理すると、高い正則性が必要になってしまうからうまくいかない。そこで、非線形項を一種の摂動だとみなして、線形 Schrödinger 方程式の解が持つ“良い性質”が (NLS) の解に反映していることを期待して評価を推し進めてみる。ここで言う“良い性質”とは Strichartz の不等式 [20,32,38]：

$$(2.9) \quad \|U(t)u_0\|_{L^r(R;L^q(R))} \leq C \|u_0\|_{L^2(R)},$$

$$(2.10) \quad \left\| \int_0^t U(t-\tau)F(\tau)d\tau \right\|_{L^r(R;L^q(R))} \leq C \|F\|_{L^{p'}(R;L^{\alpha'}(R))}$$

である。ここで、 $0 \leq 2/r = 1/2 - 1/q \leq 1/2$, $0 \leq 2/\beta = 1/2 - 1/\alpha \leq 1/2$ であり、 α', β' はそれぞれ α, β の Hölder 共役指数である。Strichartz の不等式は、線形 Schrödinger 方程式の解の正則性がほとんどすべての時刻に対して高くなること（＝平滑化効果）を意味している。このことは、(2.9) で指数 q の値が 2 よりも大きくなっていることからわかる。物理的に解釈すると、このような平滑化効果はラプラシアン $-\partial_x^2$ で記述される「分散性（波長の短い波ほど早く飛び去ってしまう性質）」に起因する。

補足 2.3 — 負の正則性を持つ解

負の正則性を持つ関数空間で解を構成することは可能だろうか？例えば、 $u \in C(I; H^s(R))$ （ただし、 $s < 0$ ）のような解を構成できるのだろうか？実は、負の正則性を持つ関数空間では、仮に解が存在しても一意性が崩れてしまったり、解の安定性（解作用素の広義一様連続性）が破綻したりすることが知られている[7,21]。ここでは、証明が楽な場合について、(NLS) の非適切性に関する結果を紹介しよう。以下の Theorem2.5 に登場する $S'(R)$ は、急減少関数 $S(R)$ の双対空間である。

Theorem2.5（特異なデータに対する非適切性：Kenig-Ponce-Vega [7]）

$3 \leq p$ とし、 $u_0(x) = \delta(x)$ （原点に台をもつデルタ関数）とする。このとき、関数空間 $C([0, T]; S'(R))$ において、(NLS) は解を持たないか、2 個以上の解を持つ。

（注意）Theorem2.5 の主張は、解を持つのか、持たないのかははっきりしないものになっている。果たしてどちらなのかについては今のところ未解決である。

《 Theorem2.5 の証明 》証明には「(NLS) の Galilei 変換対称性」を利用する。

$C([0, T]; S'(R))$ において、(NLS) の解が一意的に存在したと仮定する。この解を $u(t, x)$ とおく。この解に Galilei 変換を施したもの：

$$u_\xi(t, x) \equiv \exp(it\xi^2 + i\xi x) u(t, x - 2\xi t) \quad (\xi \in R)$$

もまた (NLS) の偏微分方程式を満たしていることに注意。さらに、

$$u_\xi(0, x) = \exp(i\xi x) u(0, x) = \exp(i\xi x) \delta(x) = \delta(x)$$

なので、解の一意性の仮定から、

$$(2.11) \quad u_\xi(t, x) = u(t, x) \quad (\xi \in R)$$

となる。(2.11) の両辺を ξ について微分したあとで、 $\xi = 0$ を代入すると、次の常微分方程式を得る。

$$\partial_x u(t, x) = (ix/2t)u(t, x)$$

この常微分方程式の一般解は、 $u(t, x) = C(t) \exp(ix^2/4t) = \tilde{C}(t)U(t)\delta$ である。ただし、

$\tilde{C}(t) = (4\pi it)^{1/2} C(t)$ とおいた。この解の表現を (NLS) に代入すると、

$$i\partial_t \tilde{C} = \lambda(4\pi t)^{-(p-1)/2} |\tilde{C}|^{p-1} \tilde{C}$$

なる常微分方程式が得られ、一般解は複素定数 $K \neq 0$ を用いて、

$$\tilde{C}(t) = \begin{cases} K \exp(2i(4\pi)^{-(p-1)/2} \lambda |K|^{p-1} (3-p)^{-1} t^{-(p-3)/2}) & \text{if } 3 < p, \\ K \exp(i(4\pi)^{-1} \lambda |K|^2 \log t) & \text{if } p = 3 \end{cases}$$

となる。しかし、この結果だと $\lim_{t \downarrow 0} \tilde{C}(t)$ が振動発散し、 $\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = \delta(x)$ に反するので矛盾。□

§ 3. 解の漸近挙動 — 小さなデータに対する諸結果

光ファイバーの中を光信号が伝播するにつれて — つまり $t \rightarrow \infty$ のとき — 波形はどのように変化していくのであろうか？ この報告集では初心者向けの入門的な内容を取り扱っているので、 $t \rightarrow \infty$ における解の漸近挙動を比較的楽に求められる状況下で議論を進めていこう。そのために“小さなデータ”に対する解の漸近挙動に焦点を絞りたい。大きなデータに対しては、定在波やソリトンのような非線形ならではの挙動（本当は工学的にはこちらの方が興味深いのだが・・・）が起こりうるので分類が煩雑になる恐れがある。この事情に加えて、大きなデータに対する解の漸近挙動の理論では、数学的な準備として特殊な等式(pseudo-conformal identity)や Morawetz 型の評価など様々な道具が必要になる [4,6,9,16,17,26,27,37] ので、ここでは立ち入らないことにする。

小さなデータの範疇で考えると、(NLS) の非線形項 $N(u)$ の効果はほとんど無視可能であるように思われる。したがって、(NLS) の解の挙動は線形の Schrödinger 方程式のそれに近いものと推測できる。そこで、まず線形 Schrödinger 方程式の解 $U(t)u_0$ が、 $t \rightarrow \infty$ のときにどのような振る舞いをするのかを見ておこう。光ファイバーの話題に絡めると、線形の Schrödinger 方程式はさしずめ Kerr 効果がまったく無い素材でできたファイバー中を伝播するような光波の様子を記述することになる。読者の皆さんにこのことを念頭においていただければ、解の数式表現が意味するところをイメージ豊かに把握できるであろう。

● 線形 Schrödinger 方程式の解

線形 Schrödinger 方程式：

$$(LS) \quad \begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u, \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の解 $u = U(t)\varphi$ が $t \rightarrow \infty$ のときにどのような振る舞いをするのかを見る。Fourier 変換

$Ff(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi x) f(x) dx$ を用いると, (LS) の解は次のように表現できる.

$$(3.1) \quad U(t)\varphi = F^{-1} \exp(it\xi^2) F\varphi = \frac{1}{(4\pi it)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y) dy$$

ただし, 上の積分核表現の中にある $(4\pi it)^{1/2}$ の分岐の選び方は,

$$(4\pi it)^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{4\pi t} \times e^{\pi i/4} & \text{if } t > 0, \\ \sqrt{4\pi |t|} \times e^{-\pi i/4} & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

である. (3.1) から次のことがわかる.

Proposition 3.1 (線形 Schrödinger 方程式の解の性質)

(i) ($L^{q'} - L^q$ 評価) $2 \leq q \leq \infty, 1/q + 1/q' = 1$ とする. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\|U(t)\varphi\|_{L^{q'}(R)} \leq C |t|^{-(1/2-1/q)} \|\varphi\|_{L^q(R)}$$

(ii) (Dollard 分解) $Mf(x) = \exp(ix^2/4t)f(x)$, $Df(x) = (2it)^{-1/2} f(x/2t)$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$U(t)\varphi = MDfM\varphi$$

(注意) Proposition 3.1 (ii) において, $t \rightarrow \infty$ のとき $M = \exp(ix^2/4t) \rightarrow 1$ に注意すると,

$$U(t)\varphi = MDf\varphi + o(t^{-1/2}) \quad \text{in } L^\infty(R) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

がわかる. ただし, $\varphi \in L^1(R)$ とする. Dollard 分解は非線形 Schrödinger 方程式の漸近解析で非常に重要な役割を果たすので, 以降の議論ではいつでも思い出せるようにしておきたい.

《Proposition 3.1 の証明 (概略)》

(i) $\varphi \in S(R)$ (Schwarz の急減少関数の集合) とする. (3.1) で Plancherell の等式を用いると

$$\|U(t)\varphi\|_{L^2(R)} = \|\varphi\|_{L^2(R)} \quad \text{が得られ, 積分核表現から } \|U(t)\varphi\|_{L^\infty(R)} \leq |4\pi t|^{-1/2} \|\varphi\|_{L^1(R)} \quad \text{が得ら}$$

れる. あとは Riesz-Thorin の補間不等式 [2] を利用すればよい.

(ii) (3.1) の積分核表現で $\exp$ の肩にある $|x-y|^2$ を展開してみると,

$$\begin{aligned} U(t)\varphi &= (4\pi it)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix^2/4t) \exp(-ixy/2t) \exp(iy^2/4t) \varphi(y) dy \\ &= \text{MDFM}\varphi \end{aligned}$$

□

以上の準備の下で, 非線形 Schrödinger 方程式の解が $t \rightarrow \infty$ のときにどのように振舞うのか調べよう. 目標は光ファイバー光学でよく登場する $p=3$ (critical case) の場合に解の挙動を調べることである. しかし, 唐突に新しい道具を持ち出すような議論はここでは極力避けたいので, 取り扱いやすい $p>3$ の場合 (super critical case) から始めて, そのつど生じる困難を解決するような流れで徐々に p を小さくしていこう. 非線形項のベキ p が大きいほど, $N(u)$ は減衰しやすくなるので, 解の漸近挙動を調べやすくなることは容易に推察できる. また, 非線形 Schrödinger 方程式の場合, 非線形熱方程式とは違って「比較定理」のような強力な道具が使えないので, 漸近挙動の解析では積分方程式やエネルギー評価式を利用しながらアプリオリな議論を展開していくことになる.

● 非線形 Schrödinger 方程式の解の漸近挙動 (small data の場合)

非線形項のベキが $4 < p$, $3 < p$, そして最後に $p=3$ の三つの場合にわけて考察していく. 特に $3 < p$ の場合を考察するときに作用素 $J = x + 2it\partial_x$ が登場するが, この作用素は解の漸近解析をする際に, 誤差項の評価で力を発揮する.

A. 初等的なアイデアによる考察 ($4 < p$ の場合 : super critical case)

非線形項のベキ p が十分大きいとき, (NLS) の解は線形 Schrödinger 方程式の解に漸近的に近づいていく. 数学的な定式化は以下のとおり.

Theorem 3.2 (small data, $4 < p$ の場合の漸近挙動)

$4 < p$ とし, $\|u_0\|_{H^1(R)} + \|u_0\|_{L^1(R)} < \rho_0 \ll 1$ を満たすものとする. このとき, (NLS) の時間大域解 u に対して次のことが成り立つ.

(i) $\langle t \rangle = (1+t^2)^{1/2}$ とおく. ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|u(t)\|_{L^\infty(R)} \leq C \langle t \rangle^{-1/2}$$

(ii) ある関数 $\varphi \in H^1(R)$ が存在して,

$$u(t) = U(t)\varphi + o(1) \text{ in } H^1(R) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

(注意) $\lambda < 0$ のとき, Theorem 3.2(i) のように解の時間減衰を期待するのであれば, データの小ささを仮定することは自然である. なぜなら, $\lambda < 0$ の場合には, “大きな” 解として孤立波 (standing wave) :

$$u(t, x) = \exp(i\omega t) \phi_\omega(x) \quad (\omega > 0)$$

のように減衰しない解が存在するからである. ここで, $\phi_\omega(x)$ は常微分方程式 $\phi'' - \lambda\phi^p - \omega\phi = 0$ の

正値解で指数減衰するものであり, $\omega > 0$ を調節しても $\phi_\omega(x)$ のサイズを $H^1(R) \cap L^1(R)$ の意

味で任意に小さくすることはできない. したがって, 大きなデータで解の時間減衰が期待できるのは

$\lambda > 0$ の場合である. しかし, $\lambda > 0$ の場合でも数学的な漸近解析がなされているのは, 現在のところ非線形項のベキ p がある程度大きい場合でしかない [4, 6, 9, 16, 17, 26, 27, 37]. 筆者が知る限り, 大きなデー

タで解の挙動が調べられている最良の結果は $p \geq (3 + \sqrt{17})/2 \approx 3.56$ の場合である [4, 6, 27].

《Theorem 3.2 の証明》

積分方程式に縮小写像の原理を適用して一気に $\|u(t)\|_{L^\infty(R)} \leq C\langle t \rangle^{-1/2}$ を導くことも可能だが, こ

では後々のことを考えて, アプリオリ評価による証明を行う.

(i) 十分大きな $C_0 > 0$ に対して, $T^* \equiv \sup\{T; \sup_{0 \leq t < T} \langle t \rangle^{1/2} \|u(t)\|_{L^\infty(R)} < 3C_0\rho_0\}$ とおき,

$T^* = \infty$ になることを示す. $t \in [0, T^*)$ に対して, 積分方程式 (2.3) の両辺に L^∞ ノルムをとり, Sobolev の埋め込み $H^1(R) \subset L^\infty(R)$ と $U(t)$ の $L^1 - L^\infty$ 評価 (Proposition 3.1(i)) を利用すると,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty(R)} &\leq C_0 \langle t \rangle^{-1/2} \rho_0 + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1/2} \|N(u(\tau))\|_{L^1(R) \cap H^1(R)} d\tau \\ (3.2) \quad &\leq C_0 \langle t \rangle^{-1/2} \rho_0 + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1/2} \|u(\tau)\|_{L^\infty(R)}^{p-2} \|u(\tau)\|_{H^1(R)}^2 d\tau \end{aligned}$$

となる. 小さいデータの場合, 保存則から (3.2) の右辺にある $\|u(\tau)\|_{H^1(R)}^2$ は定数 $\times \rho_0^2$ で抑えられる

ことに注意すると,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty(R)} &\leq C_0 \langle t \rangle^{-1/2} \rho_0 + C(3C_0)^{p-2} \rho_0^p \times \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1/2} \langle \tau \rangle^{-(p-2)/2} d\tau \\ (3.3) \quad &\leq 2C_0 \rho_0 \times \langle t \rangle^{-1/2} \quad (\leftarrow \rho_0 \text{ は小さい}) \end{aligned}$$

となる. ここで, (3.3) の最後の不等式の導出については, $4 < p$ のときに

$$\int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1/2} \langle \tau \rangle^{-(p-2)/2} d\tau \leq C \langle t \rangle^{-1/2}$$

が成り立つことを使っている. ここで, もし $T^* < \infty$ とすると, 不等式 (3.3) の両辺に $\langle t \rangle^{1/2}$ を掛け

て $t \uparrow T^*$ の極限をとることで, $3C_0\rho_0 \leq 2C_0\rho_0$ という矛盾が生じてしまう. ゆえに $T^* = \infty$, つ

まり (i) が証明できた.

(ii) $U(-t)u(t)$ が $t \rightarrow \infty$ のときに $H^1(R)$ の位相で, ある関数に収束することを示せばよい. 積分方程式 (2.3) から

$$(3.4) \quad U(-t)u(t) = u_0 - i\lambda \int_0^t U(-\tau) N(u(\tau)) d\tau$$

であること, および (i) の結果から

$$\begin{aligned} \|N(u(\tau))\|_{H^1(R)} &\leq C \|u(\tau)\|_{L^\infty(R)}^{p-1} \|u(\tau)\|_{H^1(R)} \\ &\leq C \langle \tau \rangle^{-(p-1)/2} \quad ((p-1)/2 > 1 \text{ に注意}) \end{aligned}$$

であることに気をつけると, (3.4) の右辺の積分は広義積分可能であることが分かる. したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)u(t) &= u_0 - i\lambda \int_0^\infty U(-\tau) N(u(\tau)) d\tau \quad \text{in } H^1(R) \\ &\equiv \varphi \end{aligned}$$

この $\varphi \in H^1(R)$ が (ii) の結論を与える. 実際,

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)(U(-t)u(t)) \\ &= U(t)\varphi + U(t)(U(-t)u(t) - \varphi) \\ &= U(t)\varphi + o(1) \quad \text{in } H^1(R) \text{ as } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \square$$

上の議論では $4 < p$ の場合を取り扱ったが, ファイバー工学の世界では $p = 3$ の場合がよく登場するので, 物理学者や工学者へのアピール度がまだまだ弱い. もっと p の値を下げて解の漸近挙動を調べる必要がある. Theorem 3.2 の証明で何がマズイのかというと, 非線形項の評価がまだまだ粗すぎる点である. そこで, 次の考察では, 期待される解の素性をもっと活かすような方向性で非線形項の評価を改良しよう.

B. 解の素性を丁寧にみることによる改良 ($3 < p$ の場合 : super critical case)

— 作用素 $J = U(t)xU(-t)$ の導入 —

(NLS) の解 $u(t)$ は t が大きいと線形 Schrödinger 方程式の解に近づくという期待のもとで考察を進めている. つまり, t が大きいとき $u(t) \approx U(t)\varphi$ もしくは $U(-t)u(t) \approx \varphi$ であることを期待している. そこで, $v(t) \equiv U(-t)u(t)$ とおいて,

$$u(t) = U(t)(U(t)v(t)) = U(t)v(t)$$

と書き換えて非線形項を評価してみよう. 鍵になる評価は,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty(R)} &\leq Ct^{-1/2} \|v(t)\|_{L^1(R)} \\ &\leq Ct^{-1/2} (\|v(t)\|_{L^2(R)} + \|xv(t)\|_{L^2(R)}) \end{aligned}$$

$$= Ct^{-1/2}(\|u(t)\|_{L^2(R)} + \|xv(t)\|_{L^2(R)})$$

である。したがって、 $\|u(t)\|_{L^\infty(R)}$ の減衰評価を得たいのであれば、 $\|xv(t)\|_{L^2(R)}$ が定数

で抑えられることを示せばよい。そこで、 $\|xv(t)\|_{L^2(R)} (= \|U(t)xv(t)\|_{L^2(R)})$ を評価するた

めに、 $J = U(t)xU(-t)$ で定義される作用素を用いる。この作用素 J は次のような便利な性質を持つ。読者は証明を試みられよ。

作用素 J の性質

$$\textcircled{1} \quad \|xv(t)\|_{L^2(R)} = \|Ju(t)\|_{L^2(R)},$$

$$\textcircled{2} \quad J = x + it\partial_x,$$

$$\textcircled{3} \quad J(i\partial_t + \partial_x^2) = (i\partial_t + \partial_x^2)J,$$

$$\textcircled{4} \quad JN(u) = \frac{p+1}{2}|u|^{p-1}Ju - \frac{p-1}{2}|u|^{p-3}u^2\overline{Ju}$$

上の性質で、②は作用素 J が「1次の重み」に相当していることを表す。また、③のように、線形の Schrödinger 作用素と J が交換する性質は非常に便利であり、この性質のお陰

で $\|xu(t)\|_{L^2(R)}$ を素朴に評価するよりも $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ の評価を考えたほうが、評価式の

右辺に煩わしい項を残さずに済む。④の性質は J があたかも微分作用素のように働くことを意味している。作用素 J を利用すると、Theorem 3.2 の場合よりも非線形項のべきを少しだけ下げて解の漸近挙動を調べることができる。

Theorem 3.3 (small data, $3 < p$ の場合の漸近挙動)

$3 < p$ とする。また、 $\|u_0\|_{H^1(R)} + \|xu_0\|_{L^2(R)} \leq \rho_0 \ll 1$ とする。このとき、(NLS) の時間大域解 $u \in C(R; H^1(R)) \cap C^1(R; H^{-1}(R))$ が唯一つ存在して、次の性質を満たす。

$$(i) \quad Ju \in C(R; L^2(R)), \quad \|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq C\rho_0,$$

$$(ii) \quad \|u(t)\|_{L^\infty(R)} \leq C\rho_0 \langle t \rangle^{-1/2}$$

$$(iii) \quad \text{関数 } \varphi \in H^1(R) \text{ が存在して, } u(t) = U(t)\varphi + o(1) \text{ in } H^1(R) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

《Theorem 3.3 の証明》

$v(t) = U(-t)u(t)$ おくと, $L^1 - L^\infty$ 評価 (Theorem 3.1 の (i)) より,

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty(R)} &= \|U(t)v(t)\|_{L^\infty(R)} \\ &\leq Ct^{-1/2} \|v(t)\|_{L^1(R)} \end{aligned}$$

となるので, (ii) を示すためには $\|v(t)\|_{L^1(R)}$ が定数で抑えられることを示せばよい. しかし, L^1 ノ

ルムは Fourier 変換 F や線形方程式の解作用素 $U(t)$ と相性が悪いので,

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \|v(t)\|_{L^1(R)} &\leq C(\|v(t)\|_{L^2(R)} + \|xv(t)\|_{L^2(R)}) \\ &= C(\|u(t)\|_{L^2(R)} + \|Ju(t)\|_{L^2(R)}) \end{aligned}$$

のように $\|v(t)\|_{L^1(R)}$ を Hölder の不等式を用いて L^2 ベースのノルムで押さえ込み, $\|Ju(t)\|_{L^1(R)}$

が時間大域的に定数で抑えられることを示す. アプリオリ評価によってこれを示そう. 十分大きな

$C_0 > 0$ に対して $T^* \equiv \sup\{T; \sup_{0 \leq t < T} \|Ju(t)\|_{L^2(R)} < 2C_0\rho_0\}$ とおく. 積分方程式 (2.3) の両辺に作

用素 $J = U(t)xU(-t)$ を適用すると,

$$Ju(t) = U(t)xu_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)JN(u(\tau))d\tau$$

となる. 「作用素 J の性質④」を適用すれば,

$$\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq \|xu_0\|_{L^2(R)} + C \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^\infty(R)}^{p-1} \|Ju(\tau)\|_{L^2(R)} d\tau$$

となる. ここで, (3.5) と (3.6) の不等式を被積分関数部分の L^∞ ノルムに適用すれば,

$$\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq \|xu_0\|_{L^2(R)} + C(2C_0\rho_0)^{p-1} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-(p-1)/2} \|Ju(\tau)\|_{L^2(R)} d\tau$$

これに Gronwall の不等式を適用すると,

$$\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq \|xu_0\|_{L^2(R)} \exp\left(C(2C_0\rho_0)^{p-1} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-(p-1)/2} d\tau\right)$$

今, $3 < p$ のときに $\langle \tau \rangle^{-(p-1)/2}$ が広義積分可能な程度に減衰していることと, ρ_0 が十分小さいこと

に注意すると,

$$\exp\left(C(2C_0\rho_0)^{p-1} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-(p-1)/2} d\tau\right) \leq C_0$$

となる. したがって, $\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq C_0\rho_0$ となる. ここで, $T^* < \infty$ とすれば, $t \rightarrow T^*$ の極限を

とすることで, $2C_0\rho_0 \leq C_0\rho_0$ という不等式が得られて矛盾が生ずる. 故に, $T^* = \infty$. つまり, (i) が

証明できた. この結果と (3.5), (3.6) より (ii) も得られる. (iii) については, Theorem 3.2 (ii) と同様に示せばよい. $\square$

これまで $3 < p$ の場合に (NLS) の解の漸近挙動を見てきたが, 物理学的に重要な $p = 3$ の場合については何も語っていない. Theorem 3.3 の証明を見返すと $p = 3$ になると, 要は $|u(t, x)|^{p-1}$ の減衰が広義積分可能ではなくなるので, 評価式の右辺には重い項が現れることになる. この重い項をうまく抑え込むことがこれからの課題になる. 以下では $p = 3$ の場合について解の挙動を調べるが, 非線形項のべきがここまで小さくなると解の漸近挙動が線形方程式の解のそれから外れて, 非線形特有の効果が見えるようになる. それ故, $p = 3$ の場合を **critical case** と呼ぶ.

C. より丁寧に解の素性を見ることによる改良 ($p = 3$ の場合 : critical case)

$p = 3$ の場合で初期値問題の解の漸近挙動を証明したのは, Hayashi-Naumkin [13] である. ちなみに, 終期値問題 ($t \rightarrow \pm\infty$ で事前に与えられた関数形に近づくような解の存在を示す問題) を解決した結果として, Ozawa [30] がある.

Theorem 3.4 (Hayashi-Naumkin [13] : small data, $p = 3$ の場合)

$p = 3$ とする. また, $\|u_0\|_{H^1(R)} + \|xu_0\|_{L^2(R)} \leq \rho_0 \ll 1$ を満たすものとする. このとき, (NLS) の時間大域解 $u \in C(R; H^1(R)) \cap C^1(R; H^{-1}(R))$ が存在して, 次の性質が成り立つ.

(i) $Ju \in C(R; L^2(R))$, $\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq C\rho_0 \langle t \rangle^{C\rho_0}$,

(ii) $\|u(t)\|_{L^\infty(R)} \leq C\rho_0 \langle t \rangle^{-1/2}$

(iii) $\varphi \in L^2(R)$ かつ $F\varphi \in L^\infty(R)$ を満たす関数 φ が存在して,

$$u(t) = U(t)F^{-1} \exp(-i(\lambda/2) |F\varphi(\xi)|^2 \log t) F\varphi + o(1) \text{ in } H^1(R) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

(注意その1) 光ファイバーの話題に絡めて Theorem 3.4 (ii) を解釈すると, ファイバーに入力する光信号が小さすぎると, その信号はファイバー内部を伝播中にどんどんつぶれてしまい, 情報がぼやけることになる. 従って, ソリトン波形のように形が崩れない信号を送るためには, ある程度 “大きな” 信号を入力しなければならないことがわかる.

(注意その2) Theorem 3.4 (iii) を見ると, Theorem 3.2 や 3.3 にあるような挙動とは異なり, 解の漸近形に $F^{-1} \exp(-i(\lambda/2) |F\varphi(\xi)|^2 \log t) F$ で表される修正因子が入っている. これは臨界べき特有の

効果である。また、(i)では $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ が増大する評価が記述されていて、今までのように定数で抑え込まれていない。しかし、その増大オーダーには初期データの大きさ ρ_0 が関与しているので、 ρ_0 を小さく選べば $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ の影響はあまり気にしなくてもよいことになる。従って、小さいデータを取り扱う分には誤差項をうまく評価できる。

【 Theorem 3.4 の証明 】

まず、解の漸近形(iii)を決める手立てから紹介しよう。鍵は、非線形項から減衰の弱い部分を抜き出すところにある。(NLS) から、 $v(t) = U(-t)u(t)$ が満たす関係式を導き、Dollard 分解 $U(t) = MDFM$ (Proposition 3.1(ii)参照)を用いる。すると、

$$\begin{aligned} i\partial_t v &= \lambda U(-t)N(U(t)v) \\ &= \lambda M^{-1}F^{-1}D^{-1}M^{-1}N(MDFMv) \\ &= \lambda |2t|^{-1} \overline{M}F^{-1}N(FMv) \quad (\leftarrow N(u)のゲージ不変性を利用) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t \rightarrow \infty$ のとき $M = \exp(ix^2/4t) \rightarrow 1$ に注意すると、

$$(3.7) \quad i\partial_t Fv = \lambda |2t|^{-1} N(Fv) + R(t)$$

と書ける。ここで、誤差項：

$$R(t) = \lambda |2t|^{-1} \left(F\overline{M}F^{-1}N(FMv) - N(Fv) \right)$$

は早く減衰することが期待される部分である。(3.7)の右辺にある第1項目が減衰の悪さを生み出す元凶なので、これを左辺に移して整理すると、

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \partial_t Fv + i\lambda |2t|^{-1} N(Fv) &= -iR(t) \\ \Rightarrow \partial_t (e^{i\lambda\Phi} Fv) &= -ie^{i\lambda\Phi} R(t) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Phi = \Phi(t, \xi) = \int_1^t |2\tau|^{-1} |Fv(\tau)|^2 d\tau$ である。(3.8)の右辺は十分早く減衰することとが期待できるので、

$$e^{i\lambda\Phi} Fv(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{i\lambda\Phi} Fv(1) - i \int_1^\infty e^{i\lambda\Phi} R(\tau) d\tau \equiv F\psi \quad \text{in } L^2(R) \cap L^\infty(R)$$

となる。これと $u(t) = U(t)F^{-1}e^{-i\lambda\Phi}(e^{i\lambda\Phi}Fv(t))$ から、 $u(t)$ の漸近形が決定できそうである。

以上の議論で要になることは $R(t)$ が広義積分可能な程度に減衰するのかどうかを調べることである。これについては次の Lemma がある。

Lemma 3.5 ($R(t)$ の評価)

(NLS) の解 $u(t)$ について, $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ が有限の値をとる時間区間を $[0, T)$ とする.

このとき, $t \in (0, T)$ に対して, 以下の不等式が成り立つ.

$$(i) \quad \|R(t)\|_{L^\infty(R)} \leq Ct^{-5/4} \|u(t)\|_{L^2(R)} \|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2.$$

$$(ii) \quad \|R(t)\|_{L^2(R)} \leq Ct^{-3/2} \|u(t)\|_{L^2(R)} \|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2$$

《 Lemma 3.5 の証明 》

(i) のみ証明する. $R(t)$ を次のように分解しておく.

$$\begin{aligned} R(t) &= \lambda |2t|^{-1} F(\overline{M}-1)F^{-1}N(FMv(t)) + \lambda |2t|^{-1} (N(FMv) - N(Fv)) \\ &\equiv I_1(t) + I_2(t) \end{aligned}$$

Gagliardo-Nirenberg の不等式より,

$$(3.9) \quad \|I_1(t)\|_{L^\infty(R)} \leq Ct^{-1} \|I_1(t)\|_{L^2(R)}^{1/2} \|\partial_x I_1(t)\|_{L^2(R)}^{1/2}$$

ここで, $|\overline{M}-1| \leq C|x|/\sqrt{t}$ に注意すると, Plancherell の等式から,

$$\begin{aligned} \|I_1(t)\|_{L^2(R)} &\leq Ct^{-1/2} \|xF^{-1}N(FMv(t))\|_{L^2(R)} \\ &= Ct^{-1/2} \|\partial_x N(FMv(t))\|_{L^2(R)} \\ &\leq Ct^{-1/2} \|FMv(t)\|_{L^\infty(R)}^2 \|xv(t)\|_{L^2(R)} \\ &\leq Ct^{-1/2} \|u(t)\|_{L^2(R)} \|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2 \quad (\leftarrow \text{再び Gagliardo-Nirenberg の不等式}) \end{aligned}$$

$\|\partial_x I_1(t)\|_{L^2(R)}$ については, 容易に

$$\|\partial_x I_1(t)\|_{L^2(R)} \leq C \|u(t)\|_{L^2(R)} \|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2$$

これらの不等式を (3.9) の右辺に当てはめると,

$$\|I_1(t)\|_{L^\infty(R)} \leq Ct^{-5/4} \|u(t)\|_{L^2(R)} \|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2$$

が得られる. $\|I_2(t)\|_{L^\infty(R)}$ についても同様にして,

$$\|I_2(t)\|_{L^\infty(R)} \leq Ct^{-5/4} \|u(t)\|_{L^2(R)} \|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2$$

が得られる. これから Lemma 3.5 (i) が証明された. $\square$

(Theorem 3.4 の証明の続き)

Lemma 3.5 から, $R(t)$ の減衰評価を得るために, 結局 $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ の時間大域的な評価が必要になることがわかる. じつは, アプリオリ評価から $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ は初期データのサイズに応じたオーダーで増大することが示せる. そのために次の Lemma 3.6 を用いる.

Lemma 3.6 ($Ju(t)$ の評価のために)

(NLS) の解 $u(t)$ について, $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ が有限の値をとる時間区間を $[0, T)$ とする. このとき, $t \in (0, T)$ に対して, 以下の不等式が成り立つ.

- (i) $\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq C_0 \rho_0 + C \int_1^t \|u(\tau)\|_{L^\infty(R)}^2 \|Ju(\tau)\|_{L^2(R)} d\tau,$
- (ii) $\|u(\tau)\|_{L^\infty(R)} \leq C \tau^{-1/2} \|Fv(\tau)\|_{L^\infty(R)} + C \tau^{-3/4} \|Ju(\tau)\|_{L^2(R)},$
- (iii) $\|Fv(\tau)\|_{L^\infty(R)} \leq C_0 \rho_0 + C \int_1^\tau \sigma^{-5/4} \|u(\sigma)\|_{L^2(R)} \|Ju(\sigma)\|_{L^2(R)}^2 d\sigma$

《 Lemma 3.6 の証明 (概略) 》

- (i) 積分方程式 (2.3) の両辺に作用素 J を適用し, L^2 ノルムを取ればよい.
- (ii) $u(t) = U(t)v(t) = MDFMv(t) = MDFv(t) + MDF(M-1)v(t)$ と書いて, L^∞ ノルムを取る. 右辺第2項の評価には Lemma 3.5 の証明で Gagliardo-Nirenberg の不等式を利用した議論を適用すればよい.
- (iii) 関係式 (3.8) の両辺を積分すると,

$$e^{i\lambda\Phi} Fv(t) = e^{i\lambda\Phi} Fv(1) - i \int_1^t e^{i\lambda\Phi} R(\tau) d\tau$$

が得られる. この等式の両辺に L^∞ ノルムを取る. 右辺の第1項の評価には, Sobolev の埋め込み

$H^1(R) \subset L^\infty(R)$ を用いる. 時間局所解の構成から, 右辺第1項は $C_0 \rho_0$ で抑え込むことができる. 右

辺第2項の評価については, Lemma 3.5(i) を利用すればよい. $\square$

(Theorem 3.4 の証明の続き)

Lemma 3.6 (i) (iii) の定数 $C_0 > 0$ に対して,

$$T^* \equiv \sup\{T; \sup_{0 \leq t < T} \langle t \rangle^{-C_0 \rho_0} \|Ju(t)\|_{L^2(R)} < 2C_0 \rho_0\}$$

とおく. $t \in (0, T^*)$ に対して, Lemma 3.6(iii) と解の L^2 ノルムの保存より,

$$\begin{aligned}\|Fv(\tau)\|_{L^\infty(R)} &\leq C_0\rho_0 + C(2C_0)^2\rho_0^3\int_1^\tau \sigma^{-5/4+2C_0\rho_0}d\sigma \\ &\leq 2C_0\rho_0 \quad (\leftarrow \rho_0 \text{を十分小さく選ぶ})\end{aligned}$$

が得られる。これと, Lemma 3.6(ii)より,

$$\begin{aligned}\|u(\tau)\|_{L^\infty(R)} &\leq 2CC_0\rho_0\tau^{-1/2} + 2CC_0\rho_0\tau^{-3/4+C_0\rho_0} \\ &\leq C\rho_0\tau^{-1/2}\end{aligned}$$

が得られる。この不等式を Lemma 3.6(i)の右辺に当てはめると,

$$\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq C_0\rho_0 + C\rho_0^2\int_1^t \tau^{-1}\|Ju(\tau)\|_{L^2(R)}d\tau$$

となる。次に, Gronwall の不等式を適用すれば,

$$\begin{aligned}\|Ju(t)\|_{L^2(R)} &\leq C_0\rho_0\langle t\rangle^{C\rho_0^2} \\ &\leq C_0\rho_0\langle t\rangle^{C_0\rho_0} \quad (\leftarrow \rho_0 \text{を十分小さく選んだ})\end{aligned}$$

ゆえに, $\langle t\rangle^{-C_0\rho_0}\|Ju(t)\|_{L^2(R)} \leq C_0\rho_0$ となる。ここでもし $T^* < \infty$ とすると, この不等式で $t \uparrow T^*$

とすれば, $2C_0\rho_0 \leq C_0\rho_0$ という矛盾が生ずる。従って, $T^* = \infty$ となるので, Theorem 3.4(i)が

証明できた。これと Lemma 3.6(ii), (iii) を組み合わせれば, 解の L^∞ ノルムの減衰評価が得られるので, Theorem 3.4(ii)が証明できる。最後に Theorem 3.4(iii)を示そう。Lemma 3.5に Theorem 3.4(i)の評価を適用すると, (3.8) の $R(t)$ は十分早く減衰することがわかるので,

$$e^{i\lambda\Phi}Fv(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{i\lambda\Phi}Fv(1) - i\int_1^\infty e^{i\lambda\Phi}R(\tau)d\tau \equiv F\psi \quad \text{in } L^2(R) \cap L^\infty(R)$$

となる。また, 非線形特有の修正因子 $\Phi(t) = \int_1^t |2\tau|^{-1}|Fv(\tau)|^2 d\tau$ の挙動については,

$$\begin{aligned}|Fv(\tau)|^2 &= |e^{i\lambda\Phi}Fv(\tau)|^2 \\ &= |F\psi|^2 + O(\tau^{-1/4+2C_0\rho_0}) \quad \text{in } L^\infty(R)\end{aligned}$$

に注意すると, ある $\Theta(\xi) \in L^\infty(R)$ が存在して,

$$\Phi(t) = 2^{-1}|F\psi|^2 \log t + \Theta + o(1) \quad \text{in } L^\infty(R)$$

となる。これらの漸近挙動を $u(t) = U(t)F^{-1}e^{-i\lambda\Phi}(e^{i\lambda\Phi}Fv(t))$ に適用し, $e^{-i\lambda\Phi}F\psi = F\varphi$ とおけば, Theorem 3.4(iii)が得られる。□

補足3.1 — λ が複素数の場合

以上では非線形項の係数 λ が実数の場合を扱ってきたが,

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in R)$$

の場合でも解の漸近挙動が調べられている。この場合, 虚部 $\lambda_2 (< 0)$ は, 光ファイバー内の不純物によ

るエネルギー損失 (非線形 Ohm の法則) の度合いを表している. Shimomura [31] によれば, $p = 3$, $\lambda_2 < 0$ のときに小さなデータに対して,

$$(3.10) \quad \|u(t)\|_{L^\infty(R)} \leq C\langle t \rangle^{-1/2} (\log(2+t))^{-1/2} \quad (t \geq 0)$$

という減衰を示すことが証明されており, (NLS) の解が線形方程式のそれよりも早く減衰する. これは, λ に負の虚部が入ると減衰オーダーに非線形項の影響が現れることを意味する. また, Kita-Shimomura [22]

によると, $p = 3, \lambda_2 < 0$ かつ $2|\lambda_1| \leq \sqrt{3}|\lambda_2|$ の条件を課せば, 大きなデータに対しても解の

L^∞ ノルムが (3.10) と同じオーダーで減衰することがわかっている. ここで, $2|\lambda_1| \leq \sqrt{3}|\lambda_2|$ という

付加条件は,

$$(3.11) \quad \frac{d\|Ju(t)\|_{L^2(R)}^2}{dt} \leq 0 \quad (\text{Liskevich-Pelermuter の不等式 [25]})$$

を示す際に用いられ, これによって, $\|Ju(t)\|_{L^2(R)}$ が時間大域的に定数で抑えられることがわかり, 解

の漸近形を決定する際に登場する誤差項の評価がかなり楽になる. 不等式 (3.11) は, 非線形 Schrödinger 方程式のみならず, 複素 Ginzburg-Lndau 方程式の時間大域解の解析でもよく利用されている [29].

参考文献

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, Inc. (1995).
- [2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.
- [3] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, American Mathematical Society (2003).
- [4] T. Cazenave, *Blow-up and scattering in nonlinear Schrödinger equation*, Textos de Metodos Matematicos 30, Instituto de Matematica, Rio de Janeiro, 1994
- [5] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford Science Publications (1998).
- [6] T. Cazenave and F. B. Weissler, Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Commun. Math. Phys.* 147 (1981) 75–100.
- [7] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, *Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations*, *Amer. J. Math.* 125 (2003), 1235–1293.
- [8] J. Ginibre, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, in “Nonlinear Waves,” (R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa, Eds.), GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications 10 (1997), 85–133.
- [9] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory*,

- general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33--71.
- [10] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1--32.
- [11] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), 1794--1797.
- [12] N. Hayashi, E. Kaikina and P. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999), 93--106.
- [13] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369--645.
- [14] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Modified wave operator for Schrödinger type equations with subcritical dissipative nonlinearities*, Inverse Problems and Imaging **1** (2007), 391-398.
- [15] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type*, SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 278--291.
- [16] N. Hayashi and M. Tsutsumi, *$L^\infty(R^n)$ -decay of classical solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **104** (1986), 309--327.
- [17] N. Hayashi and Y. Tsutsumi, *Remarks on the scattering problem for nonlinear Schrödinger equations*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin/Heidelberg/New York **1285** (1987) 162--168.
- [18] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, in "Schrödinger Operators," (H. Holden and A. Jensen Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer-Verlag (1989), 218--263.
- [19] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor., **46** (1986), 113--129.
- [20] M. Keel and T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., **120** (1998), 955--980.
- [21] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Math. J., **106** (2001), 627--633.
- [22] N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 39--64.
- [23] N. Kita and A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with a subcritical dissipative nonlinearity*, J. Differential Equations **242** (2007), 192--210.
- [24] J.E. Lin and W.A. Strauss, *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **30** (1978), 245--263.
- [25] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, *Analyticity of submarkovian semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097--1104.
- [26] K. Nakanishi, *Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2*, J. Funct. Anal. **169** (1999), 201--225.
- [27] K. Nakanishi and T. Ozawa, *Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations*,

- NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **9** (2002), 45--68.
- [28] H. Nawa and M. Tsutsumi, *On blow-up for the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation*, Funkcial. Ekvac. **32** (1989), 417--428.
- [29] N. Okazawa and T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p -Laplacian*, J. Differential Equations **182** (2002), 541--576.
- [30] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479--493.
- [31] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. P. D. E. **31** (2006), 1407--1423.
- [32] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of wave equation*, Duke Math. J., **44** (1977), 705--714.
- [33] M. Tsutsumi, *Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 357--366.
- [34] 堤誉志雄, 偏微分方程式論, 倍風館 (2004).
- [35] Y. Tsutsumi, *L^2 solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funk. Ekva., **30** (1987), 115--125.
- [36] Y. Tsutsumi, *Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. TMA, **11** (1987), 1143--1154.
- [37] Y. Tsutsumi, *Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Theorique **43** (1985) 321--347.
- [38] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415--426.

〒889-2192

宮崎市学園木花台西 1-1

宮崎大学教育文化学部

Email: nkita@cc.miyazaki-u.ac.jp

