第３０回発展方程式若手セミナー

報告集

２００８年１２月

報告集発刊にあたって

第３０回発展方程式若手セミナーは，２００８年9月1日から9月4日までの4日間，山梨県笛吹市の石和・春日居温泉郷「春日居びゅーほてる」にて開催されました．記念すべき３０回目を迎えた今年のセミナーでは，特別講演者として静岡大学理学部の田中直樹先生をお招きし,「リプシッツ作用素半群入門（解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系への応用を目指して)」という題目で講演して頂いた他，３０名の方々による一般講演，大学院生によるショート・コミュニケーション（勉強・研究内容の紹介），新企画のディスカッションが行われました．特に今回は，参加者全員に満足していただけるように，修士課程の大学院生にもよく理解できるような分かり易い講演をお願いしたこともあり，活発な討論・情報交換が行われました．新しい試みのディスカッションでは,講演者の方々に講演とは別の時間に待機して頂くことで，講演内容についての質問や意見交換が自由に行われました．

本報告集は，特別講演及び一般講演の内容を講演者の方々に書き下ろして頂いたものをまとめたものです．多くの講演者の方々が，通常の論文では省略されるような部分を載せることで,若手向きの分かり易い原稿を作成して欲しいという幹事の勝手な要望に応えてくれました．この冊子がセミナーに参加された方々や関連分野の研究者の皆様にお役に立てれば幸いです．

本セミナーは下記の科学研究費補助金（代表者名の五十音順で記載）の援助の下で開催されました．特に，小薗英雄先生（東北大）と堤誉志雄先生（京都大）は，参加者の旅費及び会議室使用料等の心配をしてくださり，両先生から幹事に対して援助の話を持ちかけてくださいました．ここに深く感謝いたします．

科学研究費補助金　基盤研究（S）研究課題番号: 20224013
「非線形偏微分方程式の大域的適切性」
研究代表者　小薗　英雄　先生

科学研究費補助金　基盤研究 (A)　課題番号: 19204012
「非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の構造」
研究代表者　堤　誉志雄　先生

科学研究費補助金　若手研究 (B)　研究課題番号: 20740079
「複素ギンツブルク・ランダウ型方程式」
研究代表者　横田　智巳

また,セミナーの開催に関するご助言をくださった前幹事の大崎浩一先生（宇部高専），会場探しをしてくださった京王観光の林孝彦さん，セミナー開催の準備及び期間中の運営を手伝ってくれた松元久明君，石田祥子さん，埜口博司君，松永浩介君，他の東京理科大学の学生諸氏に，この場をお借りしてお礼申し上げます．特に，松元久明君にはプログラム・予稿集・報告集等の作成と多くお世話になりました．

最後に，来年度の第３１回発展方程式若手セミナーの幹事は，芝浦工業大学システム工学部の赤木剛朗先生です．発展方程式若手セミナーは，この分野における勉強及び研究交流の場として大変重要なものであり，永久に不滅であると信じています．皆様の変わらぬご支援とご協力をお願いいたします．

２００８年１２月
第３０回発展方程式若手セミナー幹事
東京理科大学　横田智巳

参加者名簿

氏名	学年・職	所属
こぞの ひでお 小薗 英雄	教授	東北大学大学院理学研究科
おのでら みちあき 小野寺 有紹	D2	東北大学大学院理学研究科
たけだ ひろし 竹田 寛志	D2	東北大学大学院理学研究科
みずの まさし 水野 将司	D2	東北大学大学院理学研究科
やまもと まさかず 山本 征法	D2	東北大学大学院理学研究科
いおく のりすけ 猪奥 倫左	D1	東北大学大学院理学研究科
いわぶち つかさ 岩渕 司	D1	東北大学大学院理学研究科
おかべ たかひろ 岡部 考宏	D1	東北大学大学院理学研究科
ものべ はるのり 物部 治徳	D1	東北大学大学院理学研究科
かん とおる 菅 徹	M2	東北大学大学院理学研究科
すずき けんいち 鈴木 謙一	M1	東北大学大学院理学研究科
なかがわ かずしげ 中川 和重	D3	埼玉大学大学院理工学研究科
くぼた だいすけ 久保田 大介	M2	埼玉大学大学院理工学研究科
かのう りせい 加納 理成	D3	千葉大学自然科学研究科
むらせ ゆうすけ 村瀬 勇介	D3	千葉大学自然科学研究科
たけうち しんご 竹内 慎吾	准教授	工学院大学工学部
あかぎ ごろう 赤木 剛朗	講師	芝浦工業大学システム工学部
わたなべ たつや 渡辺 達也	学振 PD	早稲田大学理工学術院
ないとう ゆか 内藤 由香	D3	早稲田大学大学院基幹理工学研究科
おおえだ かずひろ 大枝 和浩	D2	早稲田大学大学院基幹理工学研究科
いこま のりひさ 生駒 典久	D1	早稲田大学大学院基幹理工学研究科
しみず よしひろ 清水 義弘	M1	早稲田大学大学院基幹理工学研究科
もりた たかやす 守田 高泰	M1	早稲田大学大学院基幹理工学研究科
わたなべ ひろし 渡邉 紘	D2	中央大学大学院理工学研究科
おおつか たけし 大塚 岳	研究推進員	明治大学先端数理科学インスティチュート
ほしかわ こうすけ 星川 洸輔	M2	明治大学大学院理工学研究科
にしかわ しえ 西川 史恵	D3	お茶の水女子大学大学院人間文化研究科
いがらし たけふみ 五十嵐 威文	助教	日本大学理工学部
ますだ しげる 増田 茂	D4	首都大学東京大学院理学研究科
いとう しんご 伊藤 真吾	D5	東京理科大学大学院理学研究科
たむら ひろし 田村 博志	D1	東京理科大学大学院理学研究科
よしい けんたろう 吉井 健太郎	D1	東京理科大学大学院理学研究科

氏名	学年・職	所属
まつもと ひさあき 松元 久明	M2	東京理科大学大学院理学研究科
まえだ よしき 前田 佳紀	M2	東京理科大学大学院理学研究科
すずき としゆき 鈴木 敏行	M1	東京理科大学大学院理学研究科
そばじま もとひろ 側島 基宏	M1	東京理科大学大学院理学研究科
ながとも ひろき 長友 宏樹	M1	東京理科大学大学院理学研究科
もがみ けい 最上 桂	M1	東京理科大学大学院理学研究科
いしだ さちこ 石田 祥子	B4	東京理科大学理学部
のぐち ひろし 埜口 博司	B4	東京理科大学理学部
まつなが こうすけ 松永 浩介	B4	東京理科大学理学部
たなか なおき 田中 直樹	教授	静岡大学理学部
あいき とよひこ 愛木 豊彦	准教授	岐阜大学教育学部
ふかお たけし 深尾 武史	講師	岐阜高専一般自然
つがわ こうたろう 津川 光太郎	准教授	名古屋大学大学院多元数理科学研究科
かとう たかもり 加藤 孝盛	D1	名古屋大学大学院多元数理科学研究科
ひらやま ひろゆき 平山 浩之	M1	名古屋大学大学院多元数理科学研究科
くまざき こうた 熊崎 耕太	D2	名古屋工業大学大学院工学研究科
まさき さとし 眞崎 聡	D3 学振	京都大学大学院理学研究科
きしもと のぶ 岸本 展	D1 学振	京都大学大学院理学研究科
まえだ まさや 前田 昌也	D1	京都大学大学院理学研究科
いとう あきお 伊藤 昭夫	准教授	近畿大学工学部
しらかわ けん 白川 健	講師	神戸大学大学院工学研究科
かどや あつし 角谷 敦	教授	広島修道大学経済科学部
うえだ よしひろ 上田 好寛	D3 学振	九州大学大学院数理学府
まえかわ やすのり 前川 泰則	助教	九州大学大学院数理学研究院
あさい たかし 浅井 隆志	M2	九州大学大学院数理学府
すぎたに ようすけ 杉谷 陽介	M2	九州大学大学院数理学府
いしもと としお 石本 登志男	M2	九州大学大学院数理学府
すどう たけし 須藤 毅	M2	九州大学大学院数理学府
だるまわるだね まへし ダルマワルダネ マヘシ	M1	九州大学大学院数理学府
やまもと ゆうじ 山本 佑治	M1	福岡大学大学院、理学研究科
なかむら よしひさ 中村 能久	助教	熊本大学大学院自然科学研究科
よこた ともみ 横田 智巳	講師	東京理科大学理学部

第30回発展方程式若手セミナー　プログラム

日時　平成20年9月1日(月) 14:30 〜 平成20年9月4日(木) 12:00
会場　春日居びゅーほてる　〒406-0015 山梨県笛吹市春日居町鎮目178　Tel 0553-26-3811
内容　特別講演1件, 一般講演30件, ショート・コミュニケーション, ディスカッション等
幹事　横田 智巳 (東京理大)
E-mail: yokota@rs.kagu.tus.ac.jp
Web: http://www.rs.kagu.tus.ac.jp/~yokota/wakate2008.html

9月1日(月) 〜 first day 〜

14:30–15:10　**開会, 連絡事項, 自己紹介**

セッション1　座長　**五十嵐 威文** (日大)

15:20–15:45　**伊藤 真吾** (東京理大)
Propagation of singularities for a system of semilinear wave equations with null condition

15:50–16:15　**吉井 健太郎** (東京理大)
Abstract approach to Schrödinger evolution equations

16:20–16:45　**田村 博志** (東京理大)
$L^2(\mathbb{R}^N)$ における特異な potential つき4階の楕円型作用素の自己共役性について

16:45–17:15　**ティー ブレイク**

セッション2　座長　**渡辺 達也** (早大)

17:15–17:40　**内藤 由香** (早大)
On the L_p–L_q maximal regularity for linear thermoelastic plate equation in a bounded domain

17:45–18:10　**加納 理成** (千葉大)
放物型仮似変分不等式の応用における解の存在について

18:15–18:40　**村瀬 勇介** (千葉大)
ある楕円型仮似変分問題の可解性について

18:40–20:00　**夕食**

ショート・C.　座長　**水野 将司** (東北大)　**大枝 和浩** (早大)

20:00–21:30　**ショート・コミュニケーション (勉強内容の紹介)**

菅 徹 (東北大)	鈴木 謙一 (東北大)	久保田 大介 (埼玉大)
清水 義弘 (早大)	守田 高泰 (早大)	星川 洸輔 (明大)
松元 久明 (東京理大)	前田 佳紀 (東京理大)	鈴木 敏行 (東京理大)
側島 基宏 (東京理大)	長友 宏樹 (東京理大)	最上 桂 (東京理大)
平山 浩之 (名古屋大)	石本 登志男 (九大)	須藤 毅 (九大)
ダルマワルダネマヘシ (九大)	山本 佑治 (福岡大)	

9月2日(火) ～ second day ～

8:00 – 9:00 **朝食**

セッション 3 座長 **津川 光太郎** (名古屋大)

9:00 – 9:25 **加藤 孝盛** (名古屋大)
Hölder stability in inverse problems for the Schrödinger equtaion

9:30 – 9:55 **眞崎 聡** (京大)
半古典ハートリー方程式の WKB 解析

10:00–10:25 **岸本 展** (京大)
実数直線上の KdV 方程式の初期値問題の適切性

10:25–10:55 **ティー ブレイク**

10:55–11:20 **前田 昌也** (京大)
非線形シュレディンガー方程式の定在波解について

11:25–11:50 **生駒 典久** (早大)
非線型シュレディンガー方程式系に対する定在波解

11:55–12:20 **中村 能久** (熊本大)
シュタルクポテンシャルを伴った非線形シュレディンガー方程式の時間大域解について

12:20–13:30 **昼食**

セッション 4 座長 **大塚 岳** (明大)

13:30–13:55 **渡邊 紘** (中央大)
有界領域における強退化移流拡散方程式

14:00–14:30 **西川 史恵** (お茶の水女子大)
Critical Exponent for Logarithmic Nonlinearity of Nonlinear Heat Equation

14:30–14:50 **ティー ブレイク**

特別講演 座長 **竹内 慎吾** (工学院大)

14:50–18:40 **田中 直樹** (静岡大)
リプシッツ作用素半群入門 (解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系への応用を目指して)

18:40–20:00 **夕食**

20:00–21:30 **ディスカッション**

(講演内容, アブストラクト等について質問やコメントをするコーナーです.
講演者及び講演予定者は指定した席に待機していただく予定です.)

9月3日(水) ～ third day ～

8:00 – 9:00 **朝食**

セッション5 座長 **前川 泰則** (九大)

9:00 – 9:25 **浅井 隆志** (九大)
ある放物型方程式系の自己相似解のまわりの解の漸近挙動について

9:30 – 9:55 **杉谷 陽介** (九大)
dissipative plate equation の解の減衰評価

10:00–10:25 **上田 好寛** (九大)
多次元半空間における非線形移流項付き消散型波動方程式に現れる平面定常波の安定性

10:25–10:55 **ティー ブレイク**

10:55–11:20 **竹田 寛志** (東北大)
二次元における非線形消散型波動方程式系の時間大域解の存在について

11:25–11:50 **山本 征法** (東北大)
荷電粒子の密度解析に由来する半線形拡散方程式系の解の漸近評価について

11:55–12:20 **小野寺 有紹** (東北大)
Schwarz 函数の構成による Hele-Shaw 流の漸近挙動

12:20–13:30 **昼食**

13:30–16:00 **フリータイム**

セッション6 座長 **深尾 武史** (岐阜高専)

16:00–16:25 **物部 治徳** (東北大)
粘菌運動を記述する自由境界問題の解の存在について

16:30–17:00 **岩渕 司** (東北大)
非線形熱方程式と Navier-Stokes 方程式に対する Modulation 空間を用いた解の存在定理について

17:00–17:30 **猪奥 倫左** (東北大)
Lorentz-Zygmund 空間における Brezis-Merle 型不等式と N-Laplace 方程式への応用

17:30–17:45 **ティー ブレイク**

17:45–18:15 **中川 和重** (埼玉大)
Maximum principle for L^p-viscosity solutions of fully nonlinear equations

18:15–18:40 **増田 茂** (首都大)
Exact differential as the decisive criteria of equilibrium/motion and irrotation/rotation

18:40–21:00 **夕食会**

9月4日(木) 〜 last day 〜

8:00 – 9:00　**朝食**

セッション 7　座長　**赤木 剛朗**（芝浦工大）

9:00 – 9:25　**熊崎 耕太**（名古屋工大）
粘性項の消えた Penrose-Fife 型の相転移モデルについて

9:30 – 9:55　**深尾 武史**（岐阜高専）
熱水力学に現れる障害物問題について

10:00–10:25　**伊藤 昭夫**（近畿大）
熱ストレス応答タンパク質合成プロセスの数理モデル化と数値シミュレーション

10:25–10:45　**ティー ブレイク**

10:45–11:10　**岡部 考宏**（東北大）
Navier-Stokes 方程式の弱解におけるエネルギー局在について

11:15–11:40　**五十嵐 威文**（日大）
cone 領域における反応拡散方程式系の時間大域解の非存在について

11:40–12:00　**連絡事項, 閉会**

目次

第 30 回 発展方程式 若手セミナー 報告集
(2008), pp.1–33

リプシッツ作用素半群入門

— 解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系への応用を目指して —

田中 直樹
(静岡大学 理学部 数学教室)

§1. 序論

本論説の目的は, 微分方程式系に関する適切性の問題を位相解析的な立場から考察することである. ここでいう適切性とは, 解の存在と一意性, 及び, 解の初期値に関するリプシッツ連続的依存性を意味する. 微分方程式系に対する適切性の問題を考察するための位相解析的手法として, 与えられた微分方程式系を, バナッハ空間 X における作用素 A に対する抽象的コーシー問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0), \qquad u(0) = x \in D\ (\subset X) \tag{ACP; A, x}$$

に書き直して調べる方法ー作用素半群の理論ーがある. 文献 [53], [15], [24] に述べられている考え方をもとに, 本研究に適した作用素半群のクラスを導出することから始める. このコーシー問題が, 上述の意味で適切である, すなわち, 各 $x \in D$ に対して, ある意味の解 $u(t;x)$ が時間大域的に存在し一意であり, その解が初期値にリプシッツ連続的に依存するとすれば,

$$S(t)x = u(t;x) \quad (t \geq 0, x \in D)$$

により定まる, D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ は次の性質をもつ[1].

(S1) $S(0)x = x \quad (x \in D), \qquad S(t+s)x = S(t)S(s)x \quad (s,\ t \geq 0,\ \ x \in D)$.

(S2) 各 $x \in D$ に対して, $S(\cdot)x : [0,\infty) \to X$ は連続である.

(S3) 各 $\tau > 0$ に対して, $L_\tau > 0$ が存在して

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq L_\tau \|x - y\| \quad (x,\ y \in D,\ \ t \in [0,\tau]).$$

条件 (S1), (S2), (S3) を満たす D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を D **上のリプシッツ作用素半群**といい, つぎで定義される作用素 A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の**無限小生成作用素**という.

$$\begin{cases} A_0 x = \lim_{h\downarrow 0}(S(h)x - x)/h \quad (x \in D(A_0)), \\ D(A_0) = \{x \in D;\ \lim_{h\downarrow 0}(S(h)x - x)/h \text{ が存在する }\}. \end{cases}$$

[1] 作用素半群の理論を解の初期値へのリプシッツ連続的依存性に着目して展開するという考え方は, 小林良和氏（中央大学・理工）によるもので, 本研究もその流れに沿うものである.

もし, リプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が, $x \in D$ に対して $S(\cdot)x \in C^1([0,\infty); X)$ を満たすならば, $(d/dt)S(t)x = A_0 S(t)x \quad (t \geq 0)$ である, すなわち, $u(t) = S(t)x$ は (ACP;A_0, x) の解である. いま述べたことは特殊な場合ではあるが, このことから, 与えられた作用素 A に対する抽象的コーシー問題 (ACP) が本論説の意味で適切であるかどうかを考察するためには, 作用素 A がリプシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるかどうかを考察すればよい. (命題 2.7 も参照.) このように, 微分方程式系に対する適切性の問題は, 抽象的コーシー問題 (ACP) の適切性の問題へ, さらに, 『リプシッツ作用素半群の無限小生成作用素の特徴づけ』の問題に翻訳される. そこで, つぎの節では, リプシッツ作用素半群の諸性質を調べ, さらに, リプシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるための必要条件を与えることにする.

§2. リプシッツ作用素半群の諸性質

X をバナッハ空間とし, D を X の部分集合とする. まず, リプシッツ作用素半群の無限小生成作用素の性質を導出するために必要となる命題を紹介する. つぎの命題は, (C_0) 半群に対する Feller の定理 ([13]) の非線形版と考えられる.

命題 2.1. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群とする. このとき, 定数 $M_X > 0$, $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ が存在して, つぎの条件をみたす.

(i) $|\Phi(x,y) - \Phi(\hat{x},\hat{y})| \leq M_X(\|x-\hat{x}\| + \|y-\hat{y}\|) \quad ((x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in X \times X)$.

(ii) $\|x-y\| \leq \Phi(x,y) \leq M_X\|x-y\| \quad ((x,y) \in D \times D)$.

(iii) Φ は D 上の距離である.

(iv) $\Phi(S(t)x, S(t)y) \leq e^{\omega_0 t}\Phi(x,y) \quad (t \geq 0, (x,y) \in D \times D)$.

(証明) まず, 定数 $M_X \geq 1$, $\omega_0 \geq 0$ が存在して,

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq M_X e^{\omega_0 t}\|x-y\| \qquad (x,y \in D, t \geq 0) \tag{2.1}$$

が成立することを示す. そのために, $x, y \in D$, $t \geq 0$ とする. $\tau > 0$ とし, $t = [t/\tau]\tau + \sigma$, $\sigma \in [0,\tau)$ と表す. 但し, $[a]$ は a の整数部分である. このとき, 条件 (S3) により,

$$\|S(t)x - S(t)y\| = \|S(\tau)^{[t/\tau]}S(\sigma)x - S(\tau)^{[t/\tau]}S(\sigma)y\| \leq L_\tau^{[t/\tau]+1}\|x-y\|.$$

$M_X = \max(L_\tau, 1)$, $\omega_0 = \tau^{-1}\log M_X$ と定めれば, $L_\tau^{[t/\tau]} \leq e^{\omega_0 t}$ であるから, 所要の評価 (2.1) を得る. さて, 汎関数 $\Phi_0 : D \times D \to \mathbb{R}_+$ を

$$\Phi_0(x,y) = \sup\{e^{-\omega_0 t}\|S(t)x - S(t)y\|; t \geq 0\} \qquad ((x,y) \in D \times D)$$

により定める. (2.1) により, Φ_0 の定義は意味を持ち, 明らかに, Φ_0 は D 上の距離であり, $\|x-y\| \leq \Phi_0(x,y) \leq M_X\|x-y\|$ $(x, y \in D)$ を満たす. さらに, $t \geq 0, x, y \in D$ に対して, $e^{-\omega_0 s}\|S(s)S(t)x - S(s)S(t)y\| = e^{\omega_0 t}e^{-\omega_0(s+t)}\|S(s+t)x - S(s+t)y\| \leq e^{\omega_0 t}\Phi_0(x,y)$ $(s \geq 0)$ であるから, $\Phi_0(S(t)x, S(t)y) \leq e^{\omega_0 t}\Phi_0(x,y)$ $(x, y \in D, t \geq 0)$ が成り立つ. よって, この Φ_0 を

$$\Phi(x,y) = \Phi_0(x,y) \qquad (x, y \in D) \tag{2.2}$$

となるように $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ へ拡張することができれば, 条件 (ii), (iii), (iv) が満たされる. このことを実行するために, $x, y \in X$ とする. このとき, $u, v \in D$ に対して, $\Phi_0(u,v) - M_X(\|x-u\| + \|y-v\|) \le M_X\|u-v\| - M_X(\|x-u\| + \|y-v\|) \le M_X\|x-y\|$ であるから, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ を

$$\Phi(x,y) = \max(\sup\{\Phi_0(u,v) - M_X(\|x-u\| + \|y-v\|);\ u,v \in D\},\ 0)$$

により定義できる. $(x,y), (\hat{x},\hat{y}) \in X \times X$ とするとき, $u, v \in D$ に対して, $\Phi_0(u,v) - M_X(\|x - u\| + \|y-v\|) - (\Phi_0(u,v) - M_X(\|\hat{x}-u\| + \|\hat{y}-v\|)) \le M_X(\|x-\hat{x}\| + \|y-\hat{y}\|)$ であるから, $\Phi(x,y) \le \Phi(\hat{x},\hat{y}) + M_X(\|x-\hat{x}\| + \|y-\hat{y}\|)$ を得る. よって, 条件 (i) が成り立つ. (2.2) を示す. Φ の定義から, 明らかに, $\Phi(x,y) \ge \Phi_0(x,y)$ $(x, y \in D)$ である. 逆向きの不等式を示すために, $x, y \in D$ とする. Φ_0 は D 上の距離であるから, $u, v \in D$ に対して, $\Phi_0(u,v) \le \Phi_0(u,x) + \Phi_0(x,y) + \Phi_0(y,v) \le M_X(\|x-u\| + \|y-v\|) + \Phi_0(x,y)$ が成り立つ. よって, $\Phi(x,y) \le \Phi_0(x,y)$ である. したがって, (2.2) が成り立つ. □

D 上の縮小作用素半群 $\{S(t); t \ge 0\}$ について, 関数 $t \to S(t)x$ の微分可能性を考察する際に, 重要な役割を果たす集合として,

$$\widehat{D} = \{x \in D;\ \liminf_{h\downarrow 0} \|S(h)x - x\|/h < \infty\}$$

が導入されている. この定義は, D 上のリプシッツ作用素半群に対しても意味をもつ. つぎのような微分方程式系の混合問題などの解のア・プリオリ評価の抽象版が成立する.

命題 2.2. $\{S(t); t \ge 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群とする. このとき, 定数 $a_0 \in \mathbb{R}$, 下半連続汎関数 $\psi : X \to [0,\infty]$ が存在して, つぎの条件をみたす.

(a) $D(\psi) = \widehat{D}$, 但し, $D(\psi)$ は ψ の有効域である.

(b) 各 $x \in D(\psi)$, $t \ge 0$ に対して, $S(t)x \in D(\psi)$ かつ $\psi(S(t)x) \le e^{a_0 t}\psi(x)$.

(c) $\|S(t+h)x - S(t)x\| \le h e^{a_0(t+h)}\psi(x) \quad (x \in D(\psi),\ t, h \ge 0)$.

(証明) 定数 $\omega_0 \ge 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ を命題 2.1 の条件 (i) から (iv) をみたすものとする. 汎関数 $\psi : X \to [0,\infty]$ を

$$\psi(x) = \begin{cases} \liminf_{h\downarrow 0} \Phi(S(h)x, x)/h & (x \in D(\psi)), \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.3}$$

により定義する. 但し $D(\psi)$ は $\liminf_{h\downarrow 0} \Phi(S(h)x,x)/h < \infty$ をみたす $x \in D$ 全体の集合とする. 命題 2.1 の条件 (ii) により, 条件 (a) が成り立つ. 汎関数 ψ の下半連続性を示すために,

$$\Phi(S(t+s)x, S(t)x) \le \psi(x) \int_0^s e^{\omega_0(t+\xi)}\, d\xi \qquad (x \in D(\psi),\ t, s \ge 0) \tag{2.4}$$

を示す. そのために, $x \in D(\psi)$, $t \ge 0$ とし, $f \in C([0,\infty); \mathbb{R})$ を $f(s) = \Phi(S(t+s)x, S(t)x)$ $(s \ge 0)$ により定める. このとき, 命題 2.1 の条件 (iii), (iv) により

$$(f(s+h) - f(s))/h \le \Phi(S(t+s+h)x, S(t+s)x)/h \le e^{\omega_0(t+s)}\Phi(S(h)x, x)/h \quad (h > 0)$$

であるから, $D_+f(s) \le e^{\omega_0(t+s)}\psi(x)$ $(s \ge 0)$ である. 但し, D_+f は f のディニー微分を表す. よって, 所要の不等式 (2.4) を得る. さて, $x \in X$, $r > 0$, $\psi(x_n) \le r$ $(n \ge 1)$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ とする. このとき, 不等式 (2.4) で $(t,s,x) = (0,h,x_n)$ とし, $n \to \infty$ とすれば, $\Phi(S(h)x,x)/h \le rh^{-1}\int_0^h e^{\omega_0\xi}\,d\xi$ $(h > 0)$ を得る. 右辺は $h \downarrow 0$ のとき, 有界であるから, $x \in D(\psi)$ かつ $\psi(x) \le r$ である. したがって, ψ は下半連続である. 条件 (b), (c) は, 不等式 (2.4) より示せる. □

これらの命題から, 理論的には, 時間大域的な解が存在し, その解が初期値に関してリプシッツ連続的に依存する微分方程式系については, その解作用素は, 適当な距離に似た汎関数に関して準縮小的になり, さらに, 適当な汎関数に関して指数的成長評価式を満たす. 逆に, このような性質を持つ距離に似た汎関数の構成, 及び, 指数的成長評価式が得られれば, 時間大域的な解が存在し, その解が初期値にリプシッツ連続的に依存することを示すことができると考えられる. これについて, 次節で考察する. それでは, 実用上, このような性質を持つ距離に似た汎関数をどのように構成すればよいのだろうか. また, 指数的成長評価はどのようにすれば得られるのであろうか. このことについて, 以下の例 2.3 で簡単に触れる.

まず, 距離に似た汎関数の抽象的な構成法を述べる. そこで, 抽象的コーシー問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \ge 0), \qquad u(0) = x \in D$$

は一意な解をもつと仮定する. このとき, D 上の作用素半群 $\{S(t); t \ge 0\}$ を定義できる. 各 $(x,y) \in D \times D$ に対して, $c \in C^1([0,1];D)$ が存在して $c(0) = x$, $c(1) = y$ を満たすと仮定する.

さて, $(x,y) \in D \times D$ とする. このとき, $c \in C^1([0,1];D)$ が存在して $c(0) = x$, $c(1) = y$ とできる. 可解性の仮定より, $u(t;\theta)$ が存在して

$$(d/dt)u(t;\theta) = Au(t;\theta) \quad (t \ge 0), \qquad u(0;\theta) = c(\theta)$$

をみたす. さらに, $u(t;\theta)$ は θ に関して滑らかであると仮定すると,

$$(d/dt)\dot{u}(t;\theta) = (dA)(u(t;\theta))\dot{u}(t;\theta) \quad (t \ge 0), \qquad \dot{u}(0;\theta) = c'(\theta)$$

が成り立つ. 但し dA は 作用素 A のある意味の微分を表し, $\dot{u}(t;\theta) = (\partial/\partial\theta)u(t;\theta)$ とする. もし, X におけるノルムの族 $\{\|\cdot\|_u; u \in D\}$ が存在して

$$(d/dt)\|\dot{u}(t;\theta)\|_{u(t;\theta)} \le \omega\|\dot{u}(t;\theta)\|_{u(t;\theta)} \quad (t \ge 0)$$

が成り立つと仮定すると, $\|\dot{u}(t;\theta)\|_{u(t;\theta)} \le e^{\omega t}\|c'(\theta)\|_{c(\theta)}$ $(t \ge 0)$ である. $D \times D$ 上の汎関数 d を

$$d(x,y) = \inf\left\{\int_0^1 \|c'(\theta)\|_{c(\theta)}\,d\theta;\ c \in C^1([0,1];D),\ c(0) = x,\ c(1) = y\right\}$$

により定める. このとき, d は D 上の距離であり,

$$d(S(t)x, S(t)y) \le e^{\omega t}d(x,y) \quad (t \ge 0).$$

例 2.3. $\beta \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$, $\beta(0)=0$, $\beta'(s)>0$ $(s\in\mathbb{R}_+)$, $\gamma>0$ とする. このとき,

$$\begin{cases} u_{tt} = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma u_t & ((x,t)\in\Omega\times(0,\infty)) \\ u=0 & ((x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty)) \end{cases}$$

を例にとり, 指数的成長評価 (ア・プリオリ評価) の導出を考えてみる. 但し, Ω は有界領域であり, $\|v\|$ により v の標準的な L^2 ノルムを表す.

$X = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ における作用素 $\mathcal{A}$ を

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u,v) = (v,\ \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v) & ((u,v)\in D(\mathcal{A})), \\ D(\mathcal{A}) = \{(u,v)\in X;\ v\in H_0^1(\Omega),\ \Delta u\in L^2(\Omega)\} \end{cases} \tag{2.5}$$

により定める. 形式的な計算を行うために, $v=u_t, w=v_t$ とおく. このとき, $u_{tt}=\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u-\gamma u_t$ と u_t との L^2 内積を考えれば,

$$(d/dt)(\beta(\|\nabla u(t)\|^2)+\|v(t)\|^2) = -2\gamma\|v(t)\|^2 \tag{2.6}$$

を得る. $v_t = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v$ の両辺を t で微分して得られる式

$$w_t = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta v - \gamma w + (d/dt)\beta'(\|\nabla u\|^2)\cdot\Delta u$$

と v_t との L^2 内積を考えれば,

$$\begin{aligned} &(d/dt)(\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2) \\ &\quad = -2\gamma\|w(t)\|^2 - 2\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)^{-1}\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla v(t)\|^2\langle\gamma v(t)+w(t), v(t)\rangle \\ &\qquad + 4\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)^{-1}\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\langle\nabla u(t),\nabla v(t)\rangle\langle\gamma v(t)+w(t), w(t)\rangle \end{aligned} \tag{2.7}$$

を得る. そこで, 汎関数 $H: D(\mathcal{A})\to\mathbb{R}_+$ を

$$H(u,v) = \beta(\|\nabla u\|^2) + \|v\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2 + \|\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v\|^2 \tag{2.8}$$

により定めると, $\rho(0)=0$ をみたす $\rho\in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ が存在して,

$$(d/dt)H(u(t),v(t)) + (2\gamma - \rho(H(u(t),v(t))))(\|v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2) \le 0 \quad (t\in[0,\tau_{\max})).$$

但し, $\tau_{\max}$ は解が存在する最大時間である. $c_0>0$ を $\rho(s)<2\gamma$ $(s\in[0,c_0])$ をみたすように選ぶとき, これまでの考察から, 集合 D, 汎関数 $\varphi: X\to[0,\infty]$ を次のように定めれば, 解作用素族 $\{S(t); t\ge 0\}$ は $S(t)(D)\subset D$ $(t\ge0)$ をみたし, さらに, $a=0$, $\psi=\varphi$ として, 指数的成長評価をみたす.

$$D = \{(u,v)\in D(\mathcal{A});\ H(u,v)\le c_0\}, \tag{2.9}$$

$$\varphi((u,v)) = \begin{cases} H(u,v) & ((u,v)\in D), \\ \infty & (\text{その他}). \end{cases} \tag{2.10}$$

さらに, この考察から, 与えられた微分方程式の混合問題を議論するためには, つぎにより定義される作用素 $A: D\to X$ に対する抽象的コーシ問題 (ACP) が適切であることを調べればよいことが分かる. (命題 2.7 も参照)

$$A(u,v) = \mathcal{A}(u,v) \qquad ((u,v)\in D) \tag{2.11}$$

つぎに, 前述の抽象的な考え方にしたがって, この方程式を題材に, 距離に似た汎関数をどのように構成すればよいのか, について述べる.

$v=u_t, w=v_t$ とおく. 方程式 $v_t=\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u-\gamma v$ について変分をとると,

$$\dot{v}_t=\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta\dot{u}-\gamma\dot{v}+2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle\nabla u,\nabla\dot{u}\rangle\Delta u$$

である. 但し, $\dot{u}(x,t;\theta)=\partial u(x,t;\theta)/\partial\theta$ を表す. 上で得られた式と $\dot{v}$ との L^2 内積をとると, $F\in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ が存在して,

$$\begin{aligned}&(d/dt)(\|\dot{v}(t)\|^2+\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla\dot{u}(t)\|^2)\\&\quad=-2\gamma\|\dot{v}(t)\|^2+2\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\langle\nabla u(t),\nabla v(t)\rangle\|\nabla\dot{u}(t)\|^2\\&\qquad+4\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)^{-1}\langle\nabla u(t),\nabla\dot{u}(t)\rangle\langle w(t)+\gamma v(t),\dot{v}(t)\rangle\\&\quad\le F(H(u(t),v(t)))(\|\dot{v}(t)\|^2+\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla\dot{u}(t)\|^2)\end{aligned}$$

である. そこで, 汎関数 $V:X\times X\to\mathbb{R}_+$ を

$$V((u,v),(\hat{u},\hat{v}))=(\|v-\hat{v}\|^2+\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla(u-\hat{u})\|^2)^{1/2} \tag{2.12}$$

により定める. 上述の考察により, 定数 $\omega_0\ge 0$ が存在して,

$$(d/dt)V((u(t),v(t)),(\hat{u}(t),\hat{v}(t)))\le\omega_0V((u(t),v(t)),(\hat{u}(t),\hat{v}(t)))\qquad(t\ge 0)$$

を得る. よって, $\Phi=V$ として, 条件 (iv) が成り立つ.

注意 2.4. (2.10) で定義される汎関数 φ の選び方は一意的ではなく, H の代わりに

$$\mathcal{H}(u,v)=\beta(\|\nabla u\|^2)+\|v\|^2+\|\Delta u\|^2+\beta'(\|\nabla u\|^2)^{-1}\|\nabla v\|^2$$

を用いてもよい. 方程式 $u_{tt}=\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u-\gamma u_t$ と $2\Delta u_t$ との L^2 内積をとると,

$$(d/dt)\|\nabla u_t\|^2+\beta'(\|\nabla u\|^2)(d/dt)\|\Delta u\|^2+2\gamma\|\nabla u_t\|^2=0$$

をえる. よって, (2.6) と組み合わせると, $\hat{\rho}(0)=0$ をみたす $\hat{\rho}\in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ が存在して,

$$(d/dt)\mathcal{H}(u,v)+2\beta'(\|\nabla u\|^2)^{-1}\|\nabla v\|^2(\gamma-\hat{\rho}(\mathcal{H}(u,v)))\le 0$$

が成り立つ. また, これをもとに, 前述と同じようにして, 集合 D を定めることができる. 本論説で, (2.8) により定義される汎関数 H を用いる 1 つの理由は, H が命題 2.2 における (2.3) により定義される汎関数 ψ と同様な役割を果たすと考えられるからである. 実際, (2.12) により定まる V を Φ とするとき, $(u,v)\in D$ ならば, $\lim_{h\downarrow 0}\|(S(h)(u,v)-(u,v))/h-A(u,v)\|=0$ であるから,

$$\begin{aligned}\psi(u,v)&=\liminf_{h\downarrow 0}(\Phi(S(h)(u,v),(u,v))/h\\&=\liminf_{h\downarrow 0}(\Phi((u,v)+hA(u,v),(u,v))/h\\&=(\|\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u-\gamma v\|^2+\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

が成り立つ.

偏微分方程式の混合問題の適切性の問題は, 1 つの方法として, 2 つの解の差を測るための汎関数を選び, この汎関数に関して解の差が初期値の差に縮小的に依存することを示すことで解決できると考えられる. しかし, 2 つの解の差を測るものとして, ノルムが用いられることが多く, その方法に対応する理論が単調作用素, 縮小作用素半群の理論である. (文献 [4], [10], [11], [17], [18], [23], [32], [33] を参照. 特に, 文献 [19] では, 単独保存則への応用を中心に縮小半群の理論が整理されており, 縮小作用素半群の理論を知りたい方にお勧めである.) この意味において, 縮小作用素半群に代わり『リプシッツ作用素半群』の研究が重要になるのではないだろうか. そこで, リプシッツ作用素半群の特徴づけを目指して, まず, D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であるための必要条件を述べる.

命題 2.5. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群とし, A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする. このとき, 定数 $M_X > 0$, $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ 及び 下半連続汎関数 $\psi : X \to [0, \infty]$ が存在して, つぎの条件をみたす.

(P1) $|\Phi(x,y) - \Phi(\hat{x},\hat{y})| \leq M_X(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x,y), (\hat{x},\hat{y}) \in X \times X)$.

(P2) $\|x - y\| \leq \Phi(x,y) \leq M_X\|x - y\| \quad ((x,y) \in D \times D)$.

(P3) $\liminf_{h\downarrow 0}(\Phi(x + hA_0x, y + hA_0y) - \Phi(x,y))/h \leq \omega_0\Phi(x,y) \quad (x, y \in D(A_0))$.

(P4) 任意の $\varepsilon > 0$, $x \in D(A_0)$ に対して, $\delta \in (0, \varepsilon]$, $x_\delta \in D$ が存在して,

$$\|x + \delta A_0x - x_\delta\| \leq \delta\varepsilon, \qquad (\psi(x_\delta) - \psi(x))/\delta \leq \omega_0\psi(x) + \varepsilon.$$

(証明) 命題 2.1 により, 定数 $M_X > 0$, $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ 及び 下半連続汎関数 $\psi : X \to [0, \infty]$ が存在して, 命題 2.1 の条件 (i) から (iv), 命題 2.2 の条件 (a) から (c) が成り立つ. よって, 条件 (P1), (P2) は満たされる. さて, $x, y \in D(A_0)$ とする. このとき, $h > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
&(\Phi(x + hA_0x, y + hA_0y) - \Phi(x,y))/h \\
&\quad \leq (\Phi(S(h)x, S(h)y) - \Phi(x,y))/h \\
&\qquad + M_X(\|x + hA_0x - S(h)x\|/h + \|y + hA_0y - S(h)y\|/h)
\end{aligned}$$

であるから, 条件 (P3) が成り立つ. 条件 (P4) は $x_\delta = S(\delta)x$ として成り立つ. □

逆に, A_0 が条件 (P1) から (P4) を満たすとき, A_0 は D 上のリプシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるか, という問題を次の節から考察する.

この節の最後に, 抽象的コーシー問題に関する結果を述べておく.

命題 2.6. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群とし, A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする. このとき, つぎが成り立つ.

(i) 各 $t \geq 0$ に対して, $S(t)(\widehat{D}) \subset \widehat{D}$.

(ii) X が回帰的なバナッハ空間ならば, 各 $x \in \widehat{D}$ に対して

$$S(t)x \in D(A_0), \qquad (d/dt)S(t)x = A_0S(t)x \quad (\text{a.a. } t > 0).$$

(証明) 条件 (i) は, 命題 2.2 (b) そのものである. 条件 (ii) を示すために, $x \in \widehat{D}$ とする. 命題 2.2 (c) により, 関数 $t \to S(t)x$ は $[0,\infty)$ の任意の有界区間上リプシッツ連続である. X が回帰的なので, 関数 $t \to S(t)x$ は, 殆んどすべての $t > 0$ に対して, 微分可能である. そこで, t_0 を関数 $t \to S(t)x$ が微分可能である点とする. このとき, $(S(h)S(t_0)x - S(t_0)x)/h = (S(t_0+h)x - S(t_0)x)/h \to (d/dt)S(t_0)x$ $(h \downarrow 0)$ であるから, 無限小生成作用素の定義により, $S(t_0)x \in D(A_0)$, $A_0S(t_0)x = (d/dt)S(t_0)x$ が成り立つ. □

(C_0) 半群に対する Phillips の定理の非線形版と考えられる, 抽象的コーシー問題の適切性の言葉を利用したリプシッツ作用素半群の無限小生成作用素の特徴づけを与える.

命題 2.7. $A : D \to X$ を作用素とする. このとき, つぎは同値である.

(i) 各 $x \in D$ に対して, 右微分可能な連続関数 $u : [0,\infty) \to D$ が存在し, $(d/dt)^+u(t) = Au(t)$ $(t \geq 0)$, $u(0) = x$ を満たす. さらに, 各 $\tau > 0$ に対して, 定数 $L_\tau > 0$ が存在して, u, v を前述のような条件を持つ 2 つの関数とすれば,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L_\tau \|u(0) - v(0)\| \qquad (t \in [0,\tau]). \tag{2.13}$$

(ii) A は D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素である.

(証明) (i) ⇒ (ii) を証明する. 各 $x \in D$ に対して, 条件 (i) で存在が保証される関数を $u(t;x)$ と表す. このとき, D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を $S(t)x = u(t;x)$ $(x \in D, t \geq 0)$ により定める. 明らかに, 条件 (S2) を満たし, $S(0)x = x$ である. さて, 半群性を示すために, $s \geq 0$, $x \in D$ とし, $v(t) := S(t+s)x$ $(= u(t+s;x))$ $(t \geq 0)$ と定める. このとき, $(v(t+h) - v(t))/h = (u(t+s+h;x) - u(t+s;x))/h \to (d/dt)^+u(t+s;x) = Au(t+s;x) = Av(t)$ $(h \downarrow 0)$ である. $v(0) = S(s)x$ であるから, (2.13) により, $v(t) = S(t)S(s)x$ を得る. 即ち, $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ $(t, s \geq 0, x \in D)$ である. よって, 条件 (S1) は満たされる. 条件 (S3) は (2.13) により満たされる. よって, $\{S(t); t \geq 0\}$ は D 上のリプシッツ作用素半群である. A が $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であることを示すために, B を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であるとする. 明らかに, $D(B) \subset D = D(A)$ である. そこで, $x \in D(A) = D$ とする. このとき, $(S(h)x - x)/h = (u(h;x) - u(0;x))/h \to Au(0;x) = Ax$ $(h \downarrow 0)$ であるから, $x \in D(B)$ かつ $Bx = Ax$ を得る. よって, $A = B$ である.

(ii) ⇒ (i) を示す. $x \in D$ とし, 連続関数 $u : [0,\infty) \to D$ を $u(t) = S(t)x$ $(t \geq 0)$ により定める. このとき, A が $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であることと $S(t)x \in D = D(A)$ $(t \geq 0)$ であることより, $t \geq 0$ に対して, $(u(t+h) - u(t))/h = (S(t+h)x - S(t)x)/h = (S(h)S(t)x - S(t)x)/h \to AS(t)x$ $(h \downarrow 0)$ であるから, $u : [0,\infty) \to D$ は右微分可能で, $(d/dt)^+u(t) = Au(t)$ $(t \geq 0)$ である.

$x \in D$ とする. 上述のように, 右微分可能な連続関数 $u : [0,\infty) \to D$ が存在して, $(d/dt)^+u(t) = Au(t)$ $(t \geq 0)$, $u(0) = x$ を満たすことが示された. $v : [0,\infty) \to D$ をこのような条件を満たす任意の関数とするとき, $v(t) = S(t)v(0)$ $(t \geq 0)$ を示すことができれば, 不等式 (2.13) は条件 (S3) から得られる. さて, $v : [0,\infty) \to D$ をこのような条件を満たす任意の関数とする. $t \geq 0$ とし, $f \in C([0,t];\mathbb{R})$ を $f(s) := \|S(t-s)v(s) - S(t)v(0)\|$ $(s \in [0,t])$ により定める. $s \in [0,t)$ とする. このとき, $s + h \leq t$ を満たす $h > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}(f(s+h) - f(s))/h &\leq \|S(t-s-h)v(s+h) - S(t-s-h)S(h)v(s)\|/h \\ &\leq L_t \|(v(s+h) - v(s))/h - (S(h)v(s) - v(s))/h\|\end{aligned}$$

であり, 右辺は $h \downarrow 0$ のとき 0 に収束する. よって, $D_+ f(s) \le 0$ $(s \in [0,t))$ が成り立つ, 但し, D_+ は Dini 微分を表す. ゆえに, $f(t) \le f(0)$, 即ち, $v(t) = S(t)v(0)$ $(t \ge 0)$ が成り立つ.

§3. リプシッツ作用素半群の生成定理

この節の目的は, リプシッツ作用素半群の生成定理について述べることである. 命題 2.7 により, 右微分可能な解をもつような微分方程式系への応用を目指すには, いかなる条件の下で, 作用素 $A : D \to X$ が D 上のリプシッツ作用素半群の無限小生成作用素となるかを調べればよい. すなわち, 一般的には, 作用素 A の定義域 $D(A)$ とそれから生成される作用素半群の定義域 D との関係は, $D(A) \subset D \subset \overline{D(A)}$ であるが, 右微分可能な解をもつような微分方程式系への応用を目指すには, 作用素 A が与えられたとき, その定義域上のリプシッツ作用素半群を構成せよ, という問題設定となる.

そこで, 作用素 $A : D \to X$ が連続作用素である場合から考察する.

定理 3.1. D を X の閉集合とし, 作用素 $A : D \to X$ は連続であると仮定する. 作用素 A が D 上のリプシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるための必要十分条件は, 定数 $L > 0$, $M \ge m > 0$, $\omega \ge 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 V が存在して, つぎの条件がみたされることである.

(A1) $|V(x,y) - V(\hat{x},\hat{y})| \le L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x,y), (\hat{x},\hat{y}) \in X \times X)$.

(A2) $m\|x - y\| \le V(x,y) \le M\|x - y\| \quad ((x,y) \in D \times D)$.

(A3) $\liminf_{h\downarrow 0}(V(x + hAx, y + hAy) - V(x,y))/h \le \omega V(x,y) \quad (x, y \in D)$.

(A4) $\liminf_{h\downarrow 0} d(x + hAx, D)/h = 0 \quad (x \in D)$.

注目すべきは, 線形微分作用素が連続作用素でないことが, 連続作用素に関する生成定理の無効さを連想させてしまうが, 連続作用素に関する生成定理は非線形微分方程式に関する適切性の問題に有効である. 実際, この定理は, すでに文献 [30], [49], [36], [3], [41] のなかで, 他の方法で研究のあった非線形波動方程式 $u_{tt} = \sigma(u_x)_x - \gamma u_t$ の時間大域的適切性の問題, 及び, 実解析的な初期値に対する Kirhhoff 方程式 $u_{tt} = \beta'(\|u_x\|^2)u_{xx}$ の時間大域的適切性の問題に応用された. (文献 [21], [20] を参照.) 条件 (A3) のような汎関数に関する消散条件の概念は, 常微分方程式の初期値問題の一意性の問題に関連して, 文献 [38], [52], [35] などで導入されている.

しかし, この定理は, 例 2.3 で取り扱った方程式に関する時間大域的適切性の問題へ応用できない. 実際, 例 2.3 で取り扱った方程式に関する時間大域的適切性の問題は, (2.9), (2.10), (2.12), (2.11) により定められる D, φ, V, A を用いて, A に対する抽象的コーシー問題の適切性問題へ翻訳できる. 先の考察により, 条件 (A1) から (A4) が満たされることは期待されるが, $A : D \to X$ の連続性が成り立たないことに原因がある.

そこで, (2.11) により定義される作用素 $A : D \to X$ の性質を調べてみると, 以下に述べるような弱い意味の連続性条件 (C1), (C2) が成り立つ.

(C1) $(u,v) \in D$, $(u_n, v_n) \in D$ $(n \ge 1)$, $(u_n, v_n) \to (u,v)$ $(n \to \infty)$ ならば, $A(u_n, v_n) \rightharpoonup A(u,v)$ $(n \to \infty)$ である.

実際, $(u,v)\in D$, $(u_n,v_n)\in D\ \ (n\geq 1)$, $(u_n,v_n)\to(u,v)\ (n\to\infty)$ とする. $(v_n,w_n)=A(u_n,v_n)$ $(n\geq 1)$ とおく. $\{(v_{n(k)},w_{n(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{(v_n,w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列とする. $(u_n,v_n)\in D$ $(n\geq 1)$ であるから $\{(v_{n(k)},w_{n(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ は X における有界点列である. X はヒルベルト空間であるから, $\{(v_{n(k)},w_{n(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ は弱収束部分列 $\{(v_{n(k(i))},w_{n(k(i))})\}_{i=1}^{\infty}$ をもつ. $(u_n,v_n)\to(u,v)$ $(n\to\infty)$ であるから, 適当な $w\in L^2(\Omega)$ を用いて, $\{(v_{n(k(i))},w_{n(k(i))})\}_{i=1}^{\infty}$ の弱極限を (v,w) により表すことができる. 任意の $\phi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ に対して, $\langle w_n,\phi\rangle=\langle\beta'(\|\nabla u_n\|^2)\Delta u_n-\gamma v_n,\phi\rangle=-\beta'(\|\nabla u_n\|^2)\langle\nabla u_n,\nabla\phi\rangle-\gamma\langle v_n,\phi\rangle$ であるから, $n\to\infty$ とすれば, $\langle w,\phi\rangle=-\beta'(\|\nabla u\|^2)\langle\nabla u,\nabla\phi\rangle-\gamma\langle v,\phi\rangle$ を得る. よって, $(u,v)\in D(\mathcal{A})$ であり, $(v,w)=\mathcal{A}(u,v)=A(u,v)$ を得る. 弱極限が部分列によらないので, $A(u_n,v_n)\rightharpoonup A(u,v)\ \ (n\to\infty)$ である.

(C2) $(u,v)\in D,(u_n,v_n)\in D\ \ (n\geq 1)$, $(u_n,v_n)\to(u,v)\ \ (n\to\infty)$,
$\limsup_{n\to\infty}\varphi((u_n,v_n))\leq\varphi((u,v))$ ならば, $A(u_n,v_n)\to A(u,v)\ \ (n\to\infty)$ である.

実際, $(u,v)\in D,(u_n,v_n)\in D\ \ (n\geq 1)$, $(u_n,v_n)\to(u,v)$, $\limsup_{n\to\infty}\varphi((u_n,v_n))\leq\varphi((u,v))$ とする. $(v,w)=A(u,v)$, $(v_n,w_n)=A(u_n,v_n)\ \ (n\geq 1)$ とおく. このとき, 上で調べた A の性質から, $(v_n,w_n)\rightharpoonup(v,w)\ \ (n\to\infty)$ である. さらに, $(u_n,v_n)\to(u,v)$, $\limsup_{n\to\infty}\varphi((u_n,v_n))\leq\varphi((u,v))$,

$$\varphi((u,v))=\beta(\|\nabla u\|^2)+\|v\|^2+\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2+\|\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u-\gamma v\|^2$$

であるから, $\{\|\nabla v_n\|\}$ が有界列であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}&\beta(\|\nabla u\|^2)+\|v\|^2+\limsup_{n\to\infty}(\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v_n\|^2+\|w_n\|^2)\\&\leq\beta(\|\nabla u\|^2)+\|v\|^2+\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2+\|w\|^2\end{aligned}$$

である. $\langle\!\langle(v,w),(\hat v,\hat w)\rangle\!\rangle:=\beta'(\|\nabla u\|^2)\langle\nabla v,\nabla\hat v\rangle+\langle w,\hat w\rangle$ が X における内積であることに注意すれば, $(v_n,w_n)\rightharpoonup(v,w)\ \ (n\to\infty)$, $\limsup_{n\to\infty}(\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v_n\|^2+\|w_n\|^2)\leq\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2+\|w\|^2$ が成立しているので, $(v_n,w_n)\to(v,w)\ \ (n\to\infty)$ が成り立つ.

そこで, $A:D\to X$ の連続性の代わりに, 上述のような条件のもとで, A に対する抽象的コーシー問題を考察することを考える. 条件を正確に述べることから始める.

条件設定 (H) X をバナッハ空間とし, D を X の部分集合とする. φ は $D(\varphi)=D$ を満たす適正な下半連続関数とする. $A:D\to X$ は次の条件を満たす作用素とする.

(*) $x_n\in D\ (n\geq 1)$, $x\in D$, $x_n\to x\ (n\to\infty)$, $\limsup_{n\to\infty}\varphi(x_n)\leq\varphi(x)$ ならば $Ax_n\to Ax\ (n\to\infty)$ である.

このような条件の下で, A に対する抽象的コーシー問題を考察することを正当化してくれる例をもう 1 つ紹介する. X をヒルベルト空間とし, A をつぎの条件を満たす作用素とする, 即ち, $-A$ を極大単調作用素とする.

値域条件	$R(I-\lambda A)=X\quad(\lambda>0)$,
消散条件	$\langle x-y,\xi-\eta\rangle\leq 0\quad(x,y\in D(A),\ \xi\in Ax,\eta\in Ay)$.

A^0 を A の標準的制限とする, 即ち, $|||Ax||| = \inf\{\|\eta\|;\ \eta \in Ax\}$ とするとき,

$$A^0x = \{\xi \in Ax;\ \|\xi\| = |||Ax|||\} \quad (x \in D(A^0)),$$
$$D(A^0) = \{x \in D(A);\ \|\xi\| = |||Ax||| \text{ を満たす } \xi \in Ax \text{ が存在する }\}$$

により定められる作用素とする. このとき, A^0 は, 一価作用素であり, つぎの条件を満たすことが知られている.

$$x_n \in D(A^0), \quad x \in D(A^0), \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \limsup_{n\to\infty} \|A^0x_n\| \le \|A^0x\|$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} A^0x_n = A^0x.$$

定理 3.2. 条件設定 (H) を仮定する. $a \in \mathbb{R}$ とする. このとき, A が指数的成長条件

$$\varphi(S(t)x) \le e^{at}\varphi(x) \qquad (x \in D, t \ge 0)$$

を満たす D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \ge 0\}$ の無限小生成作用素であるための必要十分条件は, 定数 $L > 0$, $M \ge m > 0$, $\omega \ge 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 V が存在して, つぎの条件 (i) から (iv) が成立することである.

(i) $|V(x,y) - V(\hat{x},\hat{y})| \le L(\|x-\hat{x}\| + \|y-\hat{y}\|) \quad ((x,y), (\hat{x},\hat{y}) \in X \times X)$.

(ii) $m\|x-y\| \le V(x,y) \le M\|x-y\| \quad ((x,y) \in D \times D)$.

(iii) $D_+V(x,y)(Ax,Ay) \le \omega V(x,y) \quad (x,y \in D)$. 但し,

$$D_+V(x,y)(\xi,\eta) = \liminf_{h\downarrow 0}(V(x+h\xi, y+h\eta) - V(x,y))/h \quad ((x,y),(\xi,\eta) \in X \times X).$$

(iv) 任意の $\varepsilon > 0$, $x \in D$ に対して, $\delta \in (0,\varepsilon]$, $x_\delta \in D$ が存在して,

$$\|x + \delta Ax - x_\delta\| \le \delta\varepsilon, \qquad (\varphi(x_\delta) - \varphi(x))/\delta \le a\varphi(x) + \varepsilon.$$

このとき, 抽象的コーシー問題に関してつぎが成り立つ.

(a) 各 $x \in D$ に対して, $S(t)x : [0,\infty) \to X$ は局所リプシッツ連続, 右微分可能で, 右微係数 $(d/dt)^+S(t)x : [0,\infty) \to X$ は右連続であり, $(d/dt)^+S(t)x = AS(t)x$ $(t \ge 0)$ が成り立つ.

(b) X が回帰的なバナッハ空間ならば, 各 $x \in D$ に対して, $S(t)x : [0,\infty) \to X$ は殆ど到る所微分可能で, $(d/dt)S(t)x = AS(t)x$ (a.a. $t > 0$) が成り立つ.

(c) X_w を弱位相を備えたバナッハ空間 X とする. このとき, $A : D \to X_w$ が連続ならば, 各 $x \in D$ に対して, $S(t)x \in C^1([0,\infty); X_w)$ であり, $w-(d/dt)S(t)x = AS(t)x$ $(t \ge 0)$ が成り立つ. ただし, $w-(d/dt)$ は弱微分を表す.

注意 3.3. 条件設定 (H) のもとで, 条件 (iv) はつぎの条件 (v) と同値である.

(v) 任意の $\varepsilon > 0$, $x \in D$ に対して, $\delta \in (0,\varepsilon]$, $x_\delta \in D$ が存在して,

$$\|x_\delta - x\| \le \varepsilon, \qquad \|x_\delta - \delta Ax_\delta - x\| \le \delta\varepsilon, \qquad (\varphi(x_\delta) - \varphi(x))/\delta \le a\varphi(x_\delta) + \varepsilon.$$

実際, 条件 (iv) ならば条件 (v) を示すために, $x \in D$ とする. 条件 (iv) より, 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して, $x_n \in D$, $\delta_n \in (0, 1/n]$ が存在して,

$$\|x + \delta_n Ax - x_n\| \le \delta_n(1/n), \qquad (\varphi(x_n) - \varphi(x))/\delta_n \le a\varphi(x) + 1/n$$

が成り立つ. よって, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, $\limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \le \varphi(x)$ が成り立つ. 条件設定 (H) により, $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$ が成り立つ. また, φ は下半連続であるから, $\varphi(x) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ である. よって, $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ が成り立つ. $\delta_n^{-1}\|x_n - \delta_n Ax_n - x\| \le \delta_n^{-1}(\|x + \delta_n Ax - x_n\| + \delta_n\|Ax_n - Ax\|) \le 1/n + \|Ax_n - Ax\| \to 0$ $(n \to \infty)$ であり, $(\varphi(x_n) - \varphi(x))/\delta_n - a\varphi(x_n) \le a(\varphi(x) - \varphi(x_n)) + 1/n \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ. よって, 条件 (v) が成り立つ.
一方, 条件 (v) を仮定する. このとき, 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して, $x_n \in D$, $\delta_n \in (0, 1/n]$ が存在して,

$$\|x_n - x\| \le 1/n, \quad \|x_n - \delta_n Ax_n - x\| \le \delta_n(1/n), \quad (\varphi(x_n) - \varphi(x))/\delta_n \le a\varphi(x_n) + 1/n$$

が成り立つ. 上で述べた証明と同様にして, 条件 (iv) を導くことができる.

注意 3.4. $-A$ をヒルベルト空間 X における極大単調作用素とする. 前述のように, A^0 は, $D = D(A^0)$, $\varphi(x) = \|A^0 x\|$ $(x \in D(A^0))$, $\varphi(x) = \infty$ $(x \in X \setminus D(A^0))$ により定まる下半連続汎関数 φ により, 条件 (H) を満たす. $x \in D(A^0)$ とする. 値域条件より, 各 $\lambda > 0$ に対して, $x_\lambda \in D(A)$, $\xi_\lambda \in Ax_\lambda$ が存在して $x_\lambda - \lambda\xi_\lambda = x$ である. 消散条件より $\langle x_\lambda - x, \xi_\lambda - A^0 x\rangle \le 0$ $(\lambda > 0)$ が成り立つので,

$$\|\xi_\lambda\| \le \|A^0 x\| \quad (\lambda > 0) \tag{3.1}$$

である. $\{\xi_\lambda\}$ が $A^0 x$ に弱収束することを示すために, $\{\lambda_n\}$ を 0 に収束する任意の正数列とする. $\{\xi_{\lambda_n}\}$ は有界点列だから, 弱収束部分列 $\{\xi_{\lambda_{n(k)}}\}$ をもつ. その極限を ξ と表す. $x_{\lambda_{n(k)}} \to x$ $(k \to \infty)$, A は強・弱閉であるから, $\xi \in Ax$ である. よって, (3.1) より

$$|||Ax||| \le \|\xi\| \le \liminf_{k\to\infty} \|\xi_{\lambda_{n(k)}}\| \le \|A^0 x\| = |||Ax|||$$

が成り立つので, $\xi \in A^0 x$ である. A^0 は 1 価作用素であるから $\xi = A^0 x$ となり, 極限が部分列によらないことが示せたので, $\{\xi_\lambda\}$ は $A^0 x$ に弱収束する. また, 消散条件 $\langle x - y, A^0 x - A^0 y\rangle \le 0$ $(x, y \in D(A^0))$ が成り立つので, 条件 (iii) が $V(x, y) = \|x - y\|$ $(x, y \in X)$, $\omega = 0$ で満たされる. $\{\xi_\lambda\}$ が $A^0 x$ に弱収束することと (3.1) より $\xi_\lambda \to A^0 x$ $(\lambda \downarrow 0)$ が成り立つ. よって

$$\lambda^{-1}\|x + \lambda A^0 x - x_\lambda\| = \|\xi_\lambda - A^0 x\| \to 0 \quad (\lambda \downarrow 0)$$
$$\varphi(x_\lambda) = \|A^0 x_\lambda\| = |||Ax_\lambda||| \le \|\xi_\lambda\| \le \|A^0 x\| = \varphi(x)$$

が成り立つ. 定理 3.2 により, A^0 は $D(A^0)$ 上の縮小作用素半群の無限小生成作用素である. このように, 高村による生成定理 ([23]) を定理 3.2 から導くことができる.

注意 3.5. 前述のように, 例 2.3 で定義された作用素 A は条件 (C1) を満たす. つまり, この作用素 A は, 主張 (c) に現れる『$A : D \to X_w$ は連続である』という条件を満たす作用素の 1 つの例である.

定理 3.2 を例 2.3 で取り上げた Kirchhoff 方程式

$$
\begin{cases} u_{tt} - \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \gamma u_t = 0 & ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)) \\ u = 0 & ((x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)) \end{cases} \tag{3.2}
$$

に対する適切性の問題に適用しよう. 初期値が小さいときに, つぎの関数クラスに属する時間大域的な解 u を見つけることが目的である.

$$
C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C_w^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C_w^2([0,\infty); L^2(\Omega))
$$

このような関数クラスの解に対して, (2.6) が成り立つので, $\beta(\|\nabla u(t)\|^2) + \|v(t)\|^2 \le \beta(\|\nabla u_0\|^2) + \|v_0\|^2$ $(t \ge 0)$ が成り立つ. 初期値が小さいときに, 時間大域的な解が存在することを示すことが目的であるから, 一般性を失うことなく, 関数 β はつぎの条件を満たすと仮定してよい. 定数 $M_\beta \ge m_\beta > 0$ が存在して,

$$
m_\beta \le \beta'(s) \le M_\beta \quad (s \in \mathbb{R}_+), \qquad |\beta''(s)| \le M_\beta \quad (s \in \mathbb{R}_+).
$$

定理 3.6. 定数 $r_0 > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{H^2}^2 + \|v_0\|_{H^1}^2 \le r_0$ をみたす $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して, u が一意に存在し,

$$
u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C_w^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C_w^2([0,\infty); L^2(\Omega))
$$

であり, 初期条件 $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = v_0(x)$, および, (3.2) をみたす.

さらに, 解 $(u(\cdot,t), u_t(\cdot,t))$ は, 初期値 (u_0, v_0) に関して $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ の位相でリプシッツ連続的に依存する.

この定理はすでに文献 [50] などで得られている. ここでは, 定理 3.2 を応用して, いくつかの命題を組む合わせることにより証明してみる.

$W = H_0^1(\Omega)$ とする. W はノルム $\|v\|_W = \|\nabla v\|$ $(v \in W)$ を備えた回帰的なバナッハ空間である. $X = W \times L^2(\Omega)$ とし, X における作用素 $\mathcal{A}$ を (2.5) により定める. まず, 注意 3.3 の条件 (v) が満たされることを示すために, つぎを証明する.

命題 3.7. 各 $\lambda > 0$ に対して, $R(I - \lambda\mathcal{A}) = X$.

この命題は, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in X$ が与えられたとき, $(u_\lambda, v_\lambda) \in D(\mathcal{A})$ が存在して,

$$
((u_\lambda, v_\lambda) - (u_0, v_0))/\lambda = \mathcal{A}(u_\lambda, v_\lambda), \tag{3.3}
$$

すなわち,

$$
\begin{cases} (u_\lambda - u_0)/\lambda = v_\lambda, \\ (v_\lambda - v_0)/\lambda = \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)\Delta u_\lambda - \gamma v_\lambda \end{cases} \tag{3.4}
$$

をみたすことを主張するものである. このことは, Kirchhoff 方程式 (3.2) に対する後退差分方程式の解の存在を保証するものである. 後退差分を採用する理由に, 凸性との相性のよさがある. ノルムの凸性, 関数の凸性と後退差分の相性のよさを実感するために, さらに, β が凸関数であることを仮定し, 定理を証明する.

(命題 3.7 の証明) $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in X$ とし, W からその共役空間 W^* への作用素 Ψ を

$$\langle \Psi(v), \phi \rangle_{W^*,W} = \lambda\beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v)\|^2)\langle \nabla(u_0 + \lambda v), \nabla\phi \rangle + (1 + \lambda\gamma)\langle v, \phi \rangle \qquad (v,\ \phi \in W)$$

により定める. 明らかに, Ψ は有界である. Ψ の定義により,

$$\begin{aligned}\langle \Psi(v), v \rangle_{W^*,W} &= \lambda\beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v)\|^2)(\langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \lambda\|\nabla v\|^2) + (1 + \lambda\gamma)\|v\|^2 \\ &\geq -\lambda M_\beta \|\nabla u_0\|\|\nabla v\| + \lambda^2 m_\beta \|\nabla v\|^2\end{aligned}$$

であるから, Ψ は強圧的である. 擬単調であること, 即ち,
$v_n \in W \to v \in W$ (弱), $\limsup_{n\to\infty}\langle \Psi v_n, v_n - v \rangle_{W^*,W} \leq 0$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty}\langle \Psi v_n, v_n - w \rangle_{W^*,W} \geq \langle \Psi v, v - w \rangle_{W^*,W} \qquad (w \in W) \tag{3.5}$$

を示す. そのために, $v_n \in W \to v \in W$ (弱), $\limsup_{n\to\infty}\langle \Psi v_n, v_n - v \rangle_{W^*,W} \leq 0$ を仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}\langle \Psi v_n, v_n - v \rangle_{W^*,W} =& \lambda\beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v_n)\|^2)(\langle \nabla(u_0 + \lambda v), \nabla(v_n - v) \rangle + \lambda\|\nabla(v_n - v)\|^2) \\ &+ (1 + \lambda\gamma)(\langle v, v_n - v \rangle + \|v_n - v\|^2)\end{aligned}$$

であるから, $H^1(\Omega)$ の位相で $v_n \to v$ $(n \to \infty)$ が成り立つ. このことから, 容易に, (3.5) が成り立つ. よって, Lax-Milgram の定理の非線形版である Brezis の定理 ([5]) により, 任意の $f \in W^*$ に対して, $v \in W$ が存在して $\Psi v = f$ が成り立つ.

そこで, $\langle f, \phi \rangle_{W^*,W} = \langle v_0, \phi \rangle$ $(\phi \in W)$ により定義される $f \in W^*$ に対して, $v_\lambda \in W$ が存在して $\Psi v_\lambda = f$ が成り立つ. 即ち,

$$\lambda\beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v_\lambda)\|^2)\langle \nabla(u_0 + \lambda v_\lambda), \nabla\phi \rangle + (1 + \lambda\gamma)\langle v_\lambda, \phi \rangle = \langle v_0, \phi \rangle \quad (\phi \in W).$$

このとき, $u_\lambda = u_0 + \lambda v_\lambda \in W$ を定めれば, (3.4) が満たされる.

命題 3.8. $(u_0, v_0) \in D(\mathcal{A})$ とし, $\{(u_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda>0} \subset D(\mathcal{A})$ は (3.4) を満たすとする. $H : D(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ を (2.8) により定まる汎関数とする. このとき, つぎが成り立つ.

(i) $\lim_{\lambda\downarrow 0}(\|u_\lambda - u_0\|_{H^2} + \|v_\lambda - v_0\|_{H^1}) = 0$.

(ii) 定数 $r_0 > 0$ が存在して, $H(u_0, v_0) \leq r_0$ ならば, $\lambda_0 > 0$ が存在して $H(u_\lambda, v_\lambda) \leq r_0$ $(\lambda \in (0, \lambda_0])$ が成り立つ.

この命題の証明方法は, 先に述べたように, 解のエネルギー評価, ア・プリオリ評価, 解の減衰評価などを得るときに用いる手法に対応する.

(証明) (2.6) に対応する評価式を得ることから始める. (3.4) と $2v_\lambda$ $(= 2(u_\lambda - u_0)/\lambda)$ の L^2 内積をとると,

$$2\langle v_\lambda - v_0, v_\lambda \rangle/\lambda + 2\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)\langle \nabla u_\lambda, \nabla(u_\lambda - u_0) \rangle/\lambda + 2\gamma\|v_\lambda\|^2 = 0$$

である. ノルムの凸性から導出される不等式

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 \leq 2\langle u, u - v \rangle \quad (u, v \in L^2(\Omega))$$

を用いると,

$$(\|v_\lambda\|^2-\|v_0\|^2)/\lambda+\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)(\|\nabla u_\lambda\|^2-\|\nabla u_0\|^2)/\lambda+2\gamma\|v_\lambda\|^2\le 0 \tag{3.6}$$

が成り立つ. β は凸関数であるから, $\beta(t)-\beta(s)\le\beta'(t)(t-s)$ $(t,s\ge 0)$ が成り立つので, (2.6) に対応する評価式

$$(\|v_\lambda\|^2-\|v_0\|^2)/\lambda+(\beta(\|\nabla u_\lambda\|^2)-\beta(\|\nabla u_0\|^2))/\lambda+2\gamma\|v_\lambda\|^2\le 0 \tag{3.7}$$

をえる. つぎに, (2.7) に対応する評価式を得るために

$$\begin{aligned} w_\lambda &= \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)\Delta u_\lambda-\gamma v_\lambda,\\ w_0 &= \beta'(\|\nabla u_0\|^2)\Delta u_0-\gamma v_0 \end{aligned}$$

とおく. このとき, $(v_\lambda-v_0)/\lambda=w_\lambda$ であり,

$$(w_\lambda-w_0)/\lambda=\beta'(\|\nabla u_0\|^2)\Delta v_\lambda-\gamma w_\lambda+\lambda^{-1}(\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)-\beta'(\|\nabla u_0\|^2))\Delta u_\lambda$$

である. この式と $2w_\lambda$ $(=2(v_\lambda-v_0)/\lambda)$ の L^2 内積を考えれば,

$$\begin{aligned} &(\|w_\lambda\|^2-\|w_0\|^2)/\lambda+\beta'(\|\nabla u_0\|^2)(\|\nabla v_\lambda\|^2-\|\nabla v_0\|^2)/\lambda+2\gamma\|w_\lambda\|^2\\ &\quad\le 2\lambda^{-1}(\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)-\beta'(\|\nabla u_0\|^2))\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1}\langle w_\lambda+\gamma v_\lambda,w_\lambda\rangle \end{aligned}\tag{3.8}$$

をえる. (3.6), (3.8) より, $\|\nabla u_\lambda\|$, $\|v_\lambda\|$, $\|w_\lambda\|$, $\|\nabla v_\lambda\|$ の有界性を導くことができる. 『回帰的なバナッハ空間の有界集合は弱相対コンパクトである』, 『一様凸なバナッハ空間において $x_n\to x$ (弱), $\limsup_{n\to\infty}\|x_n\|\le\|x\|$ ならば $x_n\to x$ である』という関数解析学の基本的な定理を用いることにより, 主張 (i) を証明できる.

$$\begin{aligned} &(d/d\theta)\beta'(\|\nabla(\theta u_\lambda+(1-\theta)u_0)\|^2)\\ &\quad=2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda+(1-\theta)u_0)\|^2)(\langle\nabla u_\lambda,\nabla(u_\lambda-u_0)\rangle-(1-\theta)\|\nabla(u_\lambda-u_0)\|^2) \end{aligned}$$

であるから, $\beta''(s)\ge 0$ $(s\ge 0)$ を用いて

$$\begin{aligned} &\lambda^{-1}(\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)-\beta'(\|\nabla u_0\|^2))\|\nabla v_\lambda\|^2\\ &\quad\le -2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda+(1-\theta)u_0)\|^2)\langle\Delta u_\lambda,v_\lambda\rangle\|\nabla v_\lambda\|^2\\ &\quad= -2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda+(1-\theta)u_0)\|^2)\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1}\langle w_\lambda+\gamma v_\lambda,v_\lambda\rangle\|\nabla v_\lambda\|^2 \end{aligned}$$

をえる. これと (3.8) を組み合わせると, (2.7) に対応する評価式

$$\begin{aligned} &(\|w_\lambda\|^2+\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)\|\nabla v_\lambda\|^2)-(\|w_0\|^2+\beta'(\|\nabla u_0\|^2)\|\nabla v_0\|^2))/\lambda+2\gamma\|w_\lambda\|^2\\ &\quad\le 2\lambda^{-1}(\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)-\beta'(\|\nabla u_0\|^2))\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1}\langle w_\lambda+\gamma v_\lambda,w_\lambda\rangle\\ &\qquad-2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda+(1-\theta)u_0)\|^2)\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1}\langle w_\lambda+\gamma v_\lambda,v_\lambda\rangle\|\nabla v_\lambda\|^2 \end{aligned}$$

をえる. よって, $\rho\in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ が存在して, $\rho(0)=0$,

$$H(u_\lambda,v_\lambda)-H(u_0,v_0))/\lambda+(2\gamma-\rho(H(u_0,v_0)+H(u_\lambda,v_\lambda)))(\|v_\lambda\|^2+\|w_\lambda\|^2)\le 0$$

をえる. これと主張 (i) から, 命題の正しさが証明される.

集合 D を

$$D = \{(u,v) \in D(\mathcal{A});\ H(u,v) \le r_0\}$$

により定め, 作用素 $A : D \to X$ を

$$A(u,v) = \mathcal{A}(u,v) \qquad ((u,v) \in D)$$

により定める. 汎関数 $\varphi : X \to [0,\infty]$ を

$$\varphi(u,v) = H(u,v) \quad ((u,v) \in D), \qquad \varphi(u,v) = \infty \quad ((u,v) \in X \setminus D)$$

により定める. このとき, 命題 3.7, 3.8 により, 注意 3.3 の条件 (v) が満たされる.

命題 3.9. $R_0 > 0$ を

$$H(u,v) \le r_0 \text{ ならば } \|\nabla u\| < R_0/2$$

を満たす定数とし, 汎関数 $V : X \times X \to \mathbb{R}_+$ を

$$V(z,\hat{z}) = \big(\|v-\hat{v}\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)(\|\nabla(u-\hat{u})\| \wedge R_0)^2\big)^{1/2} \quad (z=(u,v), \hat{z}=(\hat{u},\hat{v}) \in X)$$

により定める. このとき, 定理 3.2 の条件 (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(証明) 条件 (i) はミンコフスキーの不等式により満たされる. 条件 (ii) は, 条件 $m_\beta \le \beta'(s) \le M_\beta$ $(s \in \mathbb{R}_+)$ より満たされる. 条件 (iii) を示すために,

$$\begin{aligned} &D_+V((u,v),(\hat{u},\hat{v}))((\xi,\eta),(\hat{\xi},\hat{\eta})) \cdot V((u,v),(\hat{u},\hat{v})) \\ &\quad = 2\langle v-\hat{v}, \eta-\hat{\eta}\rangle + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla\xi\rangle \|\nabla(u-\hat{u})\|^2 \\ &\qquad + 2\beta'(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla(u-\hat{u}), \nabla(\xi-\hat{\xi})\rangle \qquad ((u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in D) \end{aligned}$$

であることに注意する. このとき,

$$\begin{aligned} &D_+V((u,v),(\hat{u},\hat{v}))(A(u,v), A(\hat{u},\hat{v})) \cdot V((u,v),(\hat{u},\hat{v})) \\ &\quad = 2\langle v-\hat{v}, \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v - (\beta'(\|\nabla \hat{u}\|^2)\Delta\hat{u} - \gamma\hat{v})\rangle \\ &\qquad + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla v\rangle \|\nabla(u-\hat{u})\|^2 + 2\beta'(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla(u-\hat{u}), \nabla(v-\hat{v})\rangle \\ &\quad \le 2\beta'(\|\nabla\hat{u}\|^2)^{-1}(\beta'(\|\nabla u\|^2) - \beta'(\|\nabla\hat{u}\|^2))\langle v-\hat{v}, \hat{w}+\gamma\hat{v}\rangle \\ &\qquad + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla v\rangle \|\nabla(u-\hat{u})\|^2 \qquad ((u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in D) \end{aligned}$$

が成り立つ. 集合 D の定義により, $r_0 > 0$ に依存する定数 $C(r_0) > 0$ が存在して $\|\nabla u\| + \|v\| + \|w\| + \|\nabla v\| \le C(r_0)$ であるから, 条件 (iii) が満たされる.

命題 3.10. 作用素 A は条件 (H) を満たす. さらに, $A : D \to X_w$ は連続である.

この命題の主張は, 例 2.3 を題材に成り立つことを示した条件 (C1), (C2) に他ならない. よって, 定理 3.2 を適用して, 定理 3.6 を証明できる.

今後の課題 右微分可能な解をもつような微分方程式系へ応用可能な抽象的結果は定理 3.2 で与えられた. 作用素の多価性を許容する方向性の部分的な結果は文献 [22] にある. 今後は, それらの結果を包括するような, そして, Bressan 氏 を中心として展開された保存則系に対する初期値問題へ応用可能な, 抽象論の構築が求められる. この節で設定された条件 (H) は, 保存則系への応用を目指すには, 取り除かれなければならない条件である.

§4. リプシッツ作用素半群に対する積公式

この節では, リプシッツ作用素半群の積公式について考察する. まず, 一般的に, 作用素半群に対する積公式がいかなる問題を解決するために利用されているのかを説明するために, 1 次元の Kirchhoff 方程式

$$w_{tt} - \beta'(\|w_x\|^2)w_{xx} + \gamma w_t = 0 \qquad ((x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty))$$

において, $u = w_x, v = w_t$ とおいて得られる偏微分方程式系

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = \beta'(\|u\|^2)u_x - \nu v \end{cases}$$

を例に, 2 種類の近似解法ついて述べることから始める.

(1) Lax-Friedrichs 差分による近似解法

空間と時間を次のように差分化したものを考える.

$$\begin{cases} \dfrac{u(x,t+h) - \frac{u(x+k,t)+u(x-k,t)}{2}}{h} = \dfrac{v(x+k,t) - v(x-k,t)}{2k}, \\ \dfrac{v(x,t+h) - \frac{v(x+k,t)+v(x-k,t)}{2}}{h} \\ \quad = \beta'(\|u(\cdot,t+h)\|^2)\dfrac{u(x+k,t) - u(x-k,t)}{2k} - \nu\dfrac{v(x+k,t) + v(x-k,t)}{2} \end{cases}$$

これを, $u(x+k,t)$ および $v(x+k,t)$ で解くと,

$$\begin{cases} u(x,t+h) = \dfrac{u(x+k,t) + u(x-k,t)}{2} + r\dfrac{v(x+k,t) - v(x-k,t)}{2}, \\ v(x,t+h) = (1-h\nu)\dfrac{v(x+k,t) + v(x-k,t)}{2} \\ \qquad\qquad + r\beta'(\|u(\cdot,t+h)\|^2)\dfrac{u(x+k,t) - u(x-k,t)}{2} \end{cases}$$

を得る. 但し, $r = h/k$ である. さて, $r > 0$ を適切に選んで固定しておき, 各 $h > 0$ に対して, 作用素 C_h を次により定める.

$$C_h(u,v) = (w,z)$$
$$\iff \begin{cases} w(x) = \dfrac{u(x+k) + u(x-k)}{2} + r\dfrac{v(x+k) - v(x-k)}{2}, \\ z(x) = (1-h\nu)\dfrac{v(x+k) + v(x-k)}{2} + r\beta'(\|w\|^2)\dfrac{u(x+k) - u(x-k)}{2} \end{cases}$$

但し, $k>0$ は $r=h/k$ を満たすものとする. 初期条件 $u(x,0)=u_0(x)$, $v(x,0)=v_0(x)$ のもとに, $C_h^i(u_0,v_0)=(u(x,ih),v(x,ih))$ $(i=1,2,\ldots)$ が成り立つことに注意すれば, 極限 $\lim_{h\downarrow 0}C_h^{[t/h]}(u_0,v_0)$ が存在すれば, それがある意味の解になることが期待される.

(2) Rothe の方法による近似解法

時間を差分化して, 空間変数に関する楕円型方程式を解くことで近似解を導く.

$$\begin{cases} (u(x,t+h)-u(x,t))/h = v_x(x,t+h) \\ (v(x,t+h)-v(x,t))/h = \beta'(\|u(\cdot,t)\|^2)u_x(x,t+h)-\nu v(x,t+h) \end{cases}$$

u,v を与えたとき, 楕円型方程式

$$\begin{cases} (w-u)/h = z_x \\ (z-v)/h = \beta'(\|u\|^2)w_x-\nu z \end{cases}$$

の解 w,z の存在と一意性が保障されれば, 各 $h>0$ に対して, 作用素 C_h を次のように定義することができる:

$$C_h(u,v)=(w,z) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} (w-u)/h = z_x \\ (z-v)/h = \beta'(\|u\|^2)w_x-\nu z \end{cases}$$

(1) の場合と同様に, 初期条件 $u(x,0)=u_0(x)$, $v(x,0)=v_0(x)$ が与えられたとき, $C_h^i(u_0,v_0)=(u(x,ih),v(x,ih))$ $(i=1,2,\ldots)$ が成り立つことに注意すれば, 極限 $\lim_{h\downarrow 0}C_h^{[t/h]}(u_0,v_0)$ が存在すれば, それがある意味の解になることが期待される.

そこで, 作用素族 $\{C_h; h>0\}$ がどのような条件を満たすとき, 極限 $\lim_{h\downarrow 0}C_h^{[t/h]}(u_0,v_0)$ は存在するかという数学的な問題が生じる. 今考えている偏微分方程式系について, 初期値 (u_0,v_0) に対する解 $(u(\cdot,t),v(\cdot,t))$ の連続的依存性は, 次のように表現される. 各 $\tau>0$ に対して, $L_\tau>0$ が存在して,

$$\|(u(\cdot,t),v(\cdot,t))-(\hat{u}(\cdot,t),\hat{v}(\cdot,t))\|_{L^2\times L^2}\le L_\tau\|(u_0,v_0)-(\hat{u}_0,\hat{v}_0)\|_{L^2\times L^2} \qquad (t\in[0,\tau])$$

即ち,

$$S(t)(u_0,v_0)=(u(\cdot,t),v(\cdot,t))$$

により定められる作用素族 $\{S(t); t\ge 0\}$ は, 通常の $L^2\times L^2$ ノルムに関して, リプシッツ作用素半群になり, 従来よく調べられてきた縮小作用素半群にはならない. よって, 上記の問題は, D からそれ自身への作用素族 $\{C_h; h\in(0,h_0]\}$ がどのような条件を満たすとき, 極限

$$S(t)x=\lim_{h\downarrow 0}C_h^{[t/h]}x \qquad (x\in D,\ t\ge 0)$$

は存在し, 作用素族 $\{S(t); t\ge 0\}$ は D 上のリプシッツ作用素半群になるかという問題へ翻訳される.

この種の問題は, 作用素半群の積公式として知られ, (C_0) 半群に対する積公式 ([7], [16], [25], [46]) 及び縮小作用素半群に対する積公式 ([6], [34], [42, 43]) が多くの研究者により得られている. (C_0) 半群に対する典型的な積公式に関する定理を述べる.

(C_0) 縮小作用素半群の積公式 $\{C_h; h\in(0,h_0]\}$ を X からそれ自身への有界線形作用素の族とし, つぎの条件を満たすと仮定する.

(i) 定数 $\omega \geq 0$ が存在して, $\|C_h\| \leq e^{\omega h} \quad (h \in (0, h_0])$.

(ii) X において稠密に定義される閉線形作用素 A が存在して,

$$\lim_{h\downarrow 0}(C_h x - x)/h = Ax \qquad (x \in D(A)).$$

(iii) ある $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0\omega < 1$ が存在して, $R(I - \lambda_0 A) = X$ である.

このとき, A は X 上の (C_0) 縮小作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であり,

$$\lim_{h\downarrow 0} C_h^{[t/h]} x = S(t)x \quad (x \in X,\ t \geq 0).$$

ただし, 収束は $[0, \infty)$ の任意の有界区間上一様である.

条件 (i) を**安定性条件**, (ii) を **整合性条件**, (iii) を **値域条件**という.

本節の目的は, リプシッツ作用素半群の積公式を得ようというものであり, [8], [31] によるリプシッツ作用素半群の積公式を改良することである.

定理 4.1. D を X の閉集合とする. $\{C_h; h \in (0, h_0]\}$ は D からそれ自身へのリプシッツ作用素族とし, 次の条件を満たすと仮定する.

(H1) 各 $x \in D$ に対して, $C_h x : (0, h_0] \to X$ は h に関して連続である.

(H2) 各 $x \in D$ に対して, $\lim_{\lambda\downarrow 0}(\limsup_{h\downarrow 0} \|C_{\lambda+h}x - C_h C_\lambda x\|/h) = 0$.

(H3) 定数 $M_A \geq 0$ が存在して, $\|C_h x - x\| \leq M_A h \quad (x \in D,\, h \in (0, h_0])$.

(H4) リプシッツ連続汎関数 $V : D \times D \to [0, \infty)$, 定数 $M \geq m > 0$, $\omega \geq 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \qquad &(x, y \in D), \\ V(C_h x, C_h y) \leq e^{\omega h} V(x, y) \qquad &(x, y \in D,\, h \in (0, h_0]). \end{aligned}$$

このとき, D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在して,

$$\begin{aligned} S(t)x = \lim_{h\downarrow 0} C_h^{[t/h]} x \qquad &(x \in D,\ t \geq 0), \\ \lim_{h\downarrow 0} \|S(h)x - C_h x\|/h = 0 \qquad &(x \in D). \end{aligned}$$

さらに, $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素は, 次で与えられる作用素 A である.

$$\begin{cases} Ax = \lim_{h\downarrow 0}(C_h x - x)/h \qquad (x \in D(A)) \\ D(A) = \{x \in D;\ \lim_{h\downarrow 0}(C_h x - x)/h \text{ が存在する }\} \end{cases}$$

注意 4.2. (i) Marsden の結果 ([31]) は, 時間局所的な適切性に関するものであり, 定理 4.1 と正確に比較することは難しいが, 条件 (H2) の代わりに, 定数 $L>0$ が存在して,

$$\|C_{\lambda+h}x - C_hC_\lambda x\| \le L\lambda h \qquad (x\in D,\ \lambda, h, \lambda+h\in(0,h_0])$$

であることが仮定されていると考えられる. この条件の下で, 彼らの証明方法を利用して, 定理 4.1 を証明することができる. この条件と条件 (H2) を比較する. $0<r\le 1$ とし $D\subset H^1(\mathbb{R})$ とする. このとき,

$$(C_hu)(x) = (1/2)((1+r)u(x+h/r) + (1-r)u(x-h/r)) \quad (u\in D,\ h>0)$$

により定義される作用素族 $\{C_h; h>0\}$ は条件

$$\lim_{h\downarrow 0}\|C_{\lambda+h}u - C_hC_\lambda u\|_{L^2}/h = (1/2r)(1-r^2)\|u'(\cdot+\lambda/r) - u'(\cdot-\lambda/r)\|_{L^2} \quad (u\in D)$$

をみたす. $\|u'(\cdot+\lambda/r)-u'(\cdot-\lambda/r)\|_{L^2}\le K\lambda$ $(u\in D)$ であるための必要十分条件は $u\in H^2(\mathbb{R})$, $\|u''\|_{L^2}\le K_0$ である. よって, 彼らの議論を用いるためには, 集合 D として, 適当な定数 $r_0>0$ に対して $\{u\in H^2(\mathbb{R}); \|u\|_{H^2}\le r_0\}$ なるものをとる必要がある. 一方, 集合 D として, 適当な定数 $r_0>0$ に対して $\{u\in H^1(\mathbb{R}); \|u\|_{H^1}\le r_0\}$ な形の集合をとれば, 条件 (H2) は満たされる.
(ii) $\{S(t); t\ge 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群とする. このとき, Lax の意味の整合性条件とは, 次が成り立つことである ([27]). 各 $\tau>0$ に対して,

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{t\in[0,\tau]}\|C_hS(t)x - S(t+h)x\|/h = 0 \qquad (x\in D).$$

この意味の整合性条件と条件 (H4) のもとに, 次が成り立つ.

$$S(t)x = \lim_{h\downarrow 0} C_h^{[t/h]}x \qquad (x\in D,\ t\ge 0).$$

(iii) 定理 4.1 の特徴は, ある種の楕円型方程式の可解性を意味する, (C_0) 縮小作用素半群の積公式を導出するために仮定される値域条件, 及び, 与えられた微分方程式系の可解性を意味する, Lax の積公式を導出するために仮定される作用素半群の存在, これらを仮定することなく, 積公式が導き出されることである.

<u>Lax-Friedrichs 差分法による近似解法について</u>

$X=L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R}), Y=H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ とする. $r>0$ を $r^2M_\beta<1$ を満たす定数とし, $h_0>0$ を

$$r^2M_\beta + \nu h_0 \le 1 \tag{4.1}$$

を満たすように選ぶ. 作用素 $A: D\to X$, 作用素族 $\{C_h; h\in(0,h_0]\}$ を次のように定め, それらが定理 4.1 の条件 (H1) から (H4) を満たすように閉集合 D を決定する必要がある.

$$A(u,v) = (v_x,\ \beta'(\|u\|^2)u_x - \nu v) \quad ((u,v)\in D).$$

$$C_h(u,v) = (u_h, v_h)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_h(x) = \dfrac{u(x+h/r)+u(x-h/r)}{2} + r\dfrac{v(x+h/r)-v(x-h/r)}{2}, \\ v_h(x) = (1-h\nu)\dfrac{v(x+h/r)+v(x-h/r)}{2} + r\beta'(\|u_h\|^2)\dfrac{u(x+h/r)-u(x-h/r)}{2} \end{cases}$$

補題 4.3. $a>0$, $\lambda>0$, $a\lambda^2\le 1$ とする. このとき,

$$\begin{cases} w(x)=\dfrac{u(x+k)+u(x-k)}{2}+\lambda\dfrac{v(x+k)-v(x-k)}{2}, \\ z(x)=\dfrac{v(x+k)+v(x-k)}{2}+a\lambda\dfrac{u(x+k)-u(x-k)}{2} \end{cases}$$

ならば,

$$a\|w\|^2+\|z\|^2\le a\|u\|^2+\|v\|^2.$$

(証明) $\hat{w}$ により w のフーリエ変換を表す. 与えられた式のフーリエ変換を考えると

$$\hat{w}(\xi)=\cos(k\xi)\hat{u}(\xi)+i\lambda\sin(k\xi)\hat{v}(\xi),$$
$$\hat{z}(\xi)=\cos(k\xi)\hat{v}(\xi)+ia\lambda\sin(k\xi)\hat{u}(\xi)$$

をえる. よって, $a\lambda^2\le 1$ を用いると,

$$\begin{aligned} a|\hat{w}(\xi)|^2+|\hat{z}(\xi)|^2 &= a\cos^2(k\xi)|\hat{u}(\xi)|^2+a\lambda^2\sin^2(k\xi)|\hat{v}(\xi)|^2 \\ &\quad+\cos^2(k\xi)|\hat{v}(\xi)|^2+a^2\lambda^2\sin^2(k\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 \\ &\le(\cos^2(k\xi)+\sin^2(k\xi))(a|\hat{u}(\xi)|^2+|\hat{v}(\xi)|^2)=a|\hat{u}(\xi)|^2+|\hat{v}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

である. プランシェレルの定理により, この補題が成立する.

条件 (H1) から (H4) を満たすように閉集合 D を定めるために, $(u_h,v_h)=C_h(u,v)$ とおき, 補題 4.3 を $\lambda=r(1-\nu h)^{-1}$, $a=(1-\nu h)\beta'(\|u_h\|^2)$ として用いれば, 条件 (4.1) により,

(4.2) $$\beta'(\|u_h\|^2)\|u_h\|^2+\|v_h\|^2\le\beta'(\|u_h\|^2)\|u\|^2+\|v\|^2(1-\nu h)$$

を得る. よって,

$$\|u_h\|^2+\frac{\|v_h\|^2}{\beta'(\|u_h\|^2)}\le\|u\|^2+\frac{\|v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)}+\frac{h}{\beta'(\|u_h\|^2)}\left(\frac{\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|u_h\|^2)}{\beta'(\|u\|^2)h}-\nu\right)\|v\|^2.$$

同様にして,

$$\|\partial_x u_h\|^2+\frac{\|\partial_x v_h\|^2}{\beta'(\|u_h\|^2)}\le\|\partial_x u\|^2+\frac{\|\partial_x v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)}+\frac{h}{\beta'(\|u_h\|^2)}\left(\frac{\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|u_h\|^2)}{\beta'(\|u\|^2)h}-\nu\right)\|\partial_x v\|^2.$$

そこで,

$$H(u,v)=\|u\|^2+\|\partial_x u\|^2+\frac{\|v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)}+\frac{\|\partial_x v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)}\quad((u,v)\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))$$

により定める. 作用素 C_h の定義により, $\|u_h\|\le\|u\|+r\|v\|$ である. さらに,

$$\begin{aligned} h^{-1}(u_h(x)-u(x)) =&(2k)^{-1}(u(x+k)-u(x)-(u(x)-u(x-k)))(1/r) \\ &+(2k)^{-1}(v(x+k)-v(x-k)) \end{aligned}$$

であるから

(4.3) $$h^{-1}\|u_h-u\|\le(1/r)\|\partial_x u\|+\|\partial_x v\|$$

である．よって，$r_0>0$ を適当に選べば，

$$H(u,v)\le r_0 \quad \text{ならば} \quad \frac{|\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|u_h\|^2)|}{\beta'(\|u\|^2)h}\le\nu \tag{4.4}$$

が成り立つ．よって，

$$D=\{(u,v)\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}); H(u,v)\le r_0\}$$

と定めれば，$C_h:D\to D$ であり，明らかに，条件 (H1) が成り立つ．

安定性条件 (H4) を調べるために，$(\hat u_h,\hat v_h)=C_h(\hat u,\hat v)$, $k=h/r$ とおく．このとき，

$$\begin{cases} (u_h-\hat u_h)(x)=\dfrac{(u-\hat u)(x+k)+(u-\hat u)(x-k)}{2}+r\dfrac{(v-\hat v)(x+k)-(v-\hat v)(x-k)}{2}, \\ (v_h-\hat v_h)(x)=(1-h\nu)\dfrac{(v-\hat v)(x+k)+(v-\hat v)(x-k)}{2} \\ \qquad +r\beta'(\|u_h\|^2)\dfrac{(u-\hat u)(x+k)-(u-\hat u)(x-k)}{2} \\ \qquad +h(\beta'(\|u_h\|^2)-\beta'(\|\hat u_h\|^2))\dfrac{\hat u(x+k)-\hat u(x-k)}{2k} \end{cases}$$

をみたすので，補題 4.3 により，

$$\begin{aligned} &\beta'(\|u_h\|^2)\|u_h-\hat u_h\|^2+\|v_h-\hat v_h-h(\beta'(\|u_h\|^2)-\beta'(\|\hat u_h\|^2))(2k)^{-1}(\hat u(\cdot+k)-\hat u(\cdot-k))\|^2 \\ &\quad\le\beta'(\|u_h\|^2)\|u-\hat u\|^2+\|v-\hat v\|^2 \end{aligned}$$

を得る．そこで，$V:D\times D\to[0,\infty)$ を

$$V((u,v),(\hat u,\hat v))=(\beta'(\|u\|^2)\|u-\hat u\|^2+\|z-\hat z\|^2)^{1/2}$$

により定めれば，ミンコフスキーの不等式により，

$$\begin{aligned} &V((u_h,v_h),(\hat u_h,\hat v_h))\le V((u,v),(\hat u,\hat v)) \\ &\quad+h\left(\frac{|\sqrt{\beta'(\|u_h\|^2)}-\sqrt{\beta'(\|u\|^2)}|}{\sqrt{\beta'(\|u\|^2)}h}\sqrt{\beta'(\|u\|^2)}\|u-\hat u\|+|\beta'(\|u_h\|^2)-\beta'(\|\hat u_h\|^2)|\|\partial_x\hat u\|\right) \end{aligned}$$

である．よって，(4.3) により，定数 $a\ge0$, $b\ge0$ が存在して $(1-ah)V((u_h,v_h),(\hat u_h,\hat v_h))\le(1+bh)V((u,v),(\hat u,\hat v))$ が成り立つので，適当な $\omega\ge0, h_0>0$ を選べば，条件 (H4) が成り立つ．(4.3) の導出と同様にして，$h^{-1}\|v_h-v\|\le(1/r)\|\partial_x v\|+\nu\|v\|+M_\beta\|\partial_x u\|$ である．よって，条件 (H3) が成り立つ．直接的な計算により，条件 (H2) は満たされる．

Rothe 法による近似解法について

$u,v\in L^2(\mathbb{R})$ を与えたとき，各 $h>0$ に対して楕円型方程式

$$\begin{cases} (u_h-u)/h=\partial_x v_h \\ (v_h-v)/h=\beta'(\|u\|^2)\partial_x u_h-\nu v_h \end{cases}$$

が一意な解 $u_h,v_h\in H^1(\mathbb{R})$ をもつことに注意する．さらに，$u,v\in H^1(\mathbb{R})$ ならば，基本的な評価法により，

$$\begin{aligned} &\beta'(\|u\|^2)\|u_h\|^2+\|v_h\|^2-(\beta'(\|u\|^2)\|u\|^2+\|v\|^2)\le-2h\nu\|v_h\|^2, \\ &\beta'(\|u\|^2)\|\partial_x u_h\|^2+\|\partial_x v_h\|^2-(\beta'(\|u\|^2)\|\partial_x u\|^2+\|\partial_x v\|^2)\le-2h\nu\|\partial_x v_h\|^2 \end{aligned}$$

を得る．そこで，

$$H(u,v)=\|u\|^2+\|\partial_x u\|^2+\frac{\|v\|^2+\|\partial_x v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)}\qquad ((u,v)\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))$$

と定めれば，

$$H(u_h,v_h)\le H(u,v)+\frac{h}{\beta'(\|u\|^2)}\left(\frac{\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|u_h\|^2)}{\beta'(\|u_h\|^2)h}-2\nu\right)(\|v_h\|^2+\|\partial_x v_h\|^2)$$

を得る．ある $r_0>0$ を適当に選べば，

$$H(u,v)\le r_0 \quad \text{ならば}\quad \frac{|\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|u_h\|^2)|}{\beta'(\|u_h\|^2)h}\le 2\nu$$

が成立する．そこで，

$$D=\{(u,v)\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}); H(u,v)\le r_0\}$$

と定める．各 $h>0$ に対して，作用素 $C_h:D\to X$ を次のように定義する．

$$C_h(u,v)=(u_h,v_h)\quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}(u_h-u)/h=\partial_x v_h\\ (v_h-v)/h=\beta'(\|u\|^2)\partial_x u_h-\nu v_h\end{cases}$$

D の定め方から，$C_h:D\to D$ である．安定性条件 (H4) を調べるために，$\hat{u},\hat{v},\hat{u}_h,\hat{v}_h$ は，

$$(\hat{u}_h-\hat{u})/h=\partial_x\hat{v}_h,\qquad (\hat{v}_h-\hat{v})/h=\beta'(\|\hat{u}\|^2)\partial_x\hat{u}_h-\nu\hat{v}_h$$

をみたすとする．このとき，

$$\begin{aligned}&((u_h-\hat{u}_h)-(u-\hat{u}))/h=\partial_x(v_h-\hat{v}_h),\\ &((v_h-\hat{v}_h)-(v-\hat{v}))/h=\beta'(\|u\|^2)\partial_x(u_h-\hat{u}_h)-\nu(v_h-\hat{v}_h)+(\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|\hat{u}\|^2))\partial_x\hat{u}_h\end{aligned}$$

をみたすので，基本的な評価により，

$$\begin{aligned}&\beta'(\|u\|^2)(\|u_h-\hat{u}_h\|^2-\|u-\hat{u}\|^2)+\|v_h-\hat{v}_h\|^2-\|v-\hat{v}\|^2\\ &\quad\le -2h\nu\|v_h-\hat{v}_h\|^2+2h(\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|\hat{u}\|^2))\langle\partial_x\hat{u}_h,v_h-\hat{v}_h\rangle\end{aligned}$$

を得る．そこで，$V:D\times D\to[0,\infty)$ を

$$V((u,v),(\hat{u},\hat{v}))=(\beta'(\|u\|^2)\|u-\hat{u}\|^2+\|z-\hat{z}\|^2)^{1/2}\qquad ((u,v),\ (\hat{u},\hat{v})\in D)$$

により定めれば，

$$\begin{aligned}&V((u_h,v_h),(\hat{u}_h,\hat{v}_h))^2\le V((u,v),(\hat{u},\hat{v}))^2\\ &\quad+h\left(\frac{\beta'(\|u_h\|^2)-\beta'(\|u\|^2)}{\beta'(\|u_h\|^2)h}\beta'(\|u_h\|^2)\|u_h-\hat{u}_h\|^2+2(\beta'(\|u\|^2)-\beta'(\|\hat{u}\|^2))\langle\partial_x\hat{u}_h,v_h-\hat{v}_h\rangle\right)\end{aligned}$$

であるから，適当な $\omega\ge 0, h_0>0$ を選べば，条件 (H4) が成り立つ．

最後に，(H1), (H2), (H3) を示すために，X における作用素 $A:D\to X$ を

$$A(u,v)=(\partial_x v,\ \beta'(\|u\|^2)\partial_x u-\nu v)\qquad ((u,v)\in D)$$

により定め, X における閉線形作用素の族 $\{A((w,z)); (w,z) \in D\}$ を

$$A((w,z))(u,v) = (\partial_x v,\ \beta'(\|w\|^2)\partial_x u - \nu v) \qquad ((u,v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}))$$

により定めると, 各 $h \in (0, h_0]$ に対して, $(I - hA((u,v)))^{-1}$ が X 上の有界線形作用素として存在して, C_h は次のように書ける.

$$C_h(u,v) = (I - hA((u,v)))^{-1}(u,v)$$

この表現から, (H1) は成り立ち, さらに,

$$\begin{aligned}
&(d/d\lambda)C_\lambda(u,v) = (I - \lambda A((u,v)))^{-2}A((u,v))(u,v),\\
&AC_\lambda(u,v) = (A(C_\lambda(u,v)) - A((u,v)))C_\lambda(u,v) + (I - \lambda A((u,v)))^{-1}A((u,v))(u,v)
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, (H2), (H3) が成り立つ.

注意 4.4. Rothe の方法による近似解法について, 上述の半陰的な差分方程式の代わりに, 完全陰的な差分方程式

$$\begin{cases} (u(x,t+h) - u(x,t))/h = v_x(x,t+h) \\ (v(x,t+h) - v(x,t))/h = \beta'(\|u(\cdot,t+h)\|^2)u_x(x,t+h) - \nu v(x,t+h) \end{cases}$$

を用いる場合が多い. (例 2.3 を参照.) u, v を与えたとき, 楕円型方程式

$$\begin{cases} (w-u)/h = z_x \\ (z-v)/h = \beta'(\|w\|^2)w_x - \nu z \end{cases}$$

の解 w, z の存在と一意性が保障されれば, 各 $h > 0$ に対して, 作用素 C_h を次のように定義することができる.

$$C_h(u,v) = (w,z) \iff \begin{cases} (w-u)/h = z_x \\ (z-v)/h = \beta'(\|w\|^2)w_x - \nu z \end{cases}$$

上述の楕円型方程式の存在問題については, 例 2.3 を題材に示したように, Brezis による擬単調作用素 $T: V \to V^*$, 即ち, $z_n \in V \to z \in V$ (弱), $\limsup_{n\to\infty}\langle Tz_n, z_n - z\rangle \le 0$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Tz_n, z_n - w\rangle \ge \langle Tz, z - w\rangle \qquad (w \in V)$$

をみたす作用素 T に関する存在定理を利用すればよい. この完全陰的な場合は, (H2) を調べることに関して, 先に述べた半陰的方法より手間がかかる. しかしながら, 完全陰的な差分法は, dynamical boundary condition を付加した方程式などに応用可能という点で有利である.

$$\begin{cases} u_{tt} = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma u_t & ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)) \\ u = 0 & ((x,t) \in \Gamma_0 \times (0,\infty)) \\ u_t + \beta'(\|\nabla u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 & ((x,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty)) \end{cases}$$

§5. 放物型半線形発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群の特徴づけ

この節では,『平滑性を引き起こす作用素の導入とそれにより生成されるリプシッツ作用素半群の理論構築』を目指して, 解析的半群の非線形摂動の問題に焦点を当て, その解作用素族がリプシッツ作用素半群になるための必要十分条件を調べる. さらに, 得られる特徴づけを応用して, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題が時間大域的な C^1 級の解をもつことを示す.

このような目的を達成するために, X をバナッハ空間とし, D を X の閉集合とし, X における半線形発展方程式の初期値問題

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t) \quad (t > 0), \qquad u(0) = u_0 \qquad (\mathrm{SP};\, u_0)$$

を考える. この種の方程式に関する適切性の問題は, 条件設定に相違はあるが, 文献 [1, 2], [12], [28], [29], [37], [40], [44], [45] などで調べられている. (準線形の場合については, 文献 [48] を参照)

この節では, A は, 定数 $M \geq 1$, $\omega_A < 0$ が存在して $\|T(t)\| \leq Me^{\omega_A t}$ $(t \geq 0)$ をみたす, X 上の (C_0) 級の解析的半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする. $\alpha \in (0,1)$ は定数とし, バナッハ空間 Y を $Y = D((-A)^\alpha)$, そのノルムを $\|v\|_Y := \|(-A)^\alpha v\|$ $(v \in Y)$ により定める. Y の部分集合 C を $C = D \cap Y$ により定め, B は C から X への非線形作用素とする.

この節の目的は, (SP; u_0) の時間大域的軟解を与える解作用素の族がリプシッツ作用素半群となるための必要十分条件について考察することである[2].

作用素 B に関して, つぎの条件 (B1), (B2), (B3) を仮定する.

(B1) C は D において稠密である.

(B2) B は C から X への作用素として連続である.

(B3) 定数 $M_B > 0$ が存在して $\|Bv\| \leq M_B(1 + \|v\|_Y)$ $(v \in C)$.

定理 5.1. つぎの (i), (ii) は同値である.

(i) D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在して, $BS(\cdot)x \in C([0,\infty); X)$ $(x \in C)$, $BS(\cdot)x \in C((0,\infty); X) \cap L^1_{loc}(0,\infty; X)$ $(x \in D)$, および, つぎの積分方程式をみたす.

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x\, ds \quad (x \in D,\ t \geq 0).$$

(ii) 以下の 3 条件 (ii-1), (ii-2), (ii-3) がみたされる.

(ii-1) 定数 $L > 0$, $M \geq m > 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 V が存在して, つぎの条件が成立する.

(V1) $|V(x,y) - V(\hat{x},\hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|)$ $((x,y), (\hat{x},\hat{y}) \in X \times X)$.

(V2) $m\|x - y\| \leq V(x,y) \leq M\|x - y\|$ $((x,y) \in D \times D)$.

(ii-2) 定数 $\omega \geq 0$ が存在して,

$$\liminf_{h \downarrow 0}(V(J_h x, J_h y) - V(x,y))/h \leq \omega V(x,y) \quad ((x,y) \in C \times C).$$

但し, $J_t w = T(t)w + \int_0^t T(s)Bw\, ds$ $(t \geq 0,\ w \in C)$ とする.

[2]本研究は, 松本敏隆氏 (広島大・理) との共同研究である.

(ii-3) 定数 $\beta \in (0,1)$ が存在して, 各 $x \in C$, $\varepsilon > 0$ に対して $\delta \in (0,\varepsilon]$, $x_\delta \in C$, $z_\delta \in Y$ が存在して,

$$x_\delta = J_\delta x + z_\delta, \quad \|z_\delta\| \le \varepsilon\delta, \quad \|z_\delta\|_Y \le \varepsilon\delta^\beta.$$

この場合, さらに, 各 $\rho > 0$ に対して, $L_B(\rho) > 0$ が存在して

$$\|Bu - Bv\| \le L_B(\rho)\|u - v\|_Y \qquad (u, v \in C,\ \|u\|_Y \le \rho,\ \|v\|_Y \le \rho) \tag{5.1}$$

が満たされるならば, 各 $x \in D$ に対して, 抽象的コーシー問題 (SP; x) は, 一意解 $u(t) = S(t)x \in C([0,\infty); X) \cap C^1((0,\infty); X) \cap C((0,\infty); [D(A)])$ をもつ.

(**必要性の証明の概略**) 命題 2.1 の条件 (i), (ii) が成り立つ. 条件 (ii-1) は, 命題 2.1 の条件 (i) に他ならない. 条件 (ii-2) をチェックするために, $(x,y) \in C \times C$ とする. 命題 2.1 の条件 (ii) を用いると, $\omega \ge 0$ が存在して,

$$\liminf_{h\downarrow 0}(V(J_hx, J_hy) - V(x,y))/h \le \omega V(x,y) + L\limsup_{h\downarrow 0}(\|J_hx - S(h)x\| + \|J_hy - S(h)y\|)/h$$

である. $BS(\cdot)x : [0,\infty) \to X$ は連続であるから,

$$h^{-1}(J_hx - S(h)x) = h^{-1}\int_0^h T(h-s)(Bx - BS(s)x)\,ds \to 0 \quad (h \downarrow 0)$$

である. よって, 条件 (ii-2) が成り立つ. 条件 (ii-3) をチェックするために, $x \in C$ とする. このとき, $BS(\cdot)x \in C([0,\infty); X)$ である. $J_hx - S(h)x \in D((-A)^\alpha)$ であり,

$$\begin{aligned}\|(-A)^\alpha(J_hx - S(h)x)\| &\le \int_0^h \|(-A)^\alpha T(h-s)(Bx - BS(s)x)\|\,ds \\ &\le (1-\alpha)^{-1}M_\alpha \sup_{0\le s\le h}\|Bx - BS(s)x\| \cdot h^{1-\alpha} \quad (h > 0)\end{aligned}$$

である. $S(h)x \in C$ $(h > 0)$ であるから, 条件 (ii-3) は $\beta = 1 - \alpha$, $x_\delta = S(\delta)x$ で満たされる.

<u>解の初期値に関する連続的依存性の導出方法</u>

複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題の解作用素がリプシッツ連続であることをどのように導出するかを, Okazawa-Yokota のアイデア ([39], [51]) をもとに, 述べる. これは, 定理 5.1 の中に出てくる汎関数 V の構成方法を示すものでもあることに注意する.

複素 Ginzburg-Landau 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u = 0 \tag{5.2}$$

について, 変分をとることができるかなどの微妙な問題点は無視し, 形式的な計算をもとに変分をとると,

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta\dot{u} + (\kappa + i\nu)\{(q-2)|u|^{q-4}\mathrm{Re}(u,\dot{u})u + |u|^{q-2}\dot{u}\} = 0 \tag{5.3}$$

が成り立つ. $2\mathrm{Re}\langle(5.3),\dot{u}\rangle$ とすると,

$$\begin{aligned}&(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2+2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2\\ &\quad+2\mathrm{Re}(\kappa+i\nu)\int_\Omega(q-2)|u|^{q-4}\mathrm{Re}(u,\dot{u})(u,\dot{u})+|u|^{q-2}|\dot{u}|^2\,dx=0\end{aligned}\tag{5.4}$$

である. これより,

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2+2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2\le 2(\kappa^2+\nu^2)^{1/2}(q-1)\int_\Omega|u|^{q-2}|\dot{u}|^2\,dx.$$

Hölder の不等式と Gagliardo-Nirenberg の不等式を用いると,

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u|^{q-2}|\dot{u}|^2\,dx&\le\|u\|_{L^q}^{q-2}\|\dot{u}\|_{L^q}^2\le c_1\|u\|_{L^q}^{q-2}\|\dot{u}\|_{L^2}^{2(1-\sigma)}\|\dot{u}\|_{H^1}^{2\sigma}\\ &\le c_2\|u\|_{L^q}^{q-2}\|\dot{u}\|_{L^2}^{2(1-\sigma)}(\|\dot{u}\|_{L^2}^{2\sigma}+\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^{2\sigma}),\end{aligned}$$

但し, $\sigma=N(1/2-1/q)$ である. Young の不等式を用いて,

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2+2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2\le c_3\|u\|_{L^q}^{(q-2)/(1-\sigma)}\|\dot{u}\|_{L^2}^2+2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2+c_4\|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

そこで, もし

$$(q-2)/(1-\sigma)\le q\quad\text{すなわち}\quad 2\le q\le 2+4/N$$

ならば, $(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2\le 2(a+b\|u\|_{L^q}^q)\|\dot{u}\|_{L^2}^2$ であるから,

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}\le(a+b\|u\|_{L^q}^q)\|\dot{u}\|_{L^2}.\tag{5.5}$$

つぎに, $2\mathrm{Re}\langle(5.2),u\rangle$ とすると

$$(d/dt)\|u\|_{L^2}^2+2\lambda\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\kappa\|u\|_{L^q}^q=0\tag{5.6}$$

であるから,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\le\|u_0\|_{L^2}\quad(t\ge 0)\tag{5.7}$$

が成立する. $(5.5)+(b/2\kappa)\|\dot{u}\|_{L^2}\times$ (5.6) とすると,

$$\begin{aligned}&(d/dt)\exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)\|\dot{u}\|_{L^2}\\ &=\exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)((d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}+(b/2\kappa)((d/dt)\|u\|_{L^2}^2)\|\dot{u}\|_{L^2})\\ &\le a\exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)\|\dot{u}\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

$r_0>0$ とし, d をつぎにより定義される Riemann metric とする.

$$d(f,g)=\inf\left\{\int_0^1\exp((b/2\kappa)\|u(\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot{u}(\theta)\|_{L^2}\,d\theta;\|u(\theta)\|_{L^2}^2\le r_0,\ u(0)=f,u(1)=g\right\}.$$

この定義が意味をもつと仮定して議論を進める. $f,g\in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2\le r_0,\|g\|_{L^2}^2\le r_0$ とする. $\varepsilon>0$ とする. このとき, $u_0(\theta)$ が存在して, $\|u_0(\theta)\|_{L^2}^2\le r_0$, $u_0(0)=f$, $u_0(1)=g$,

$$\int_0^1\exp((b/2\kappa)\|u_0(\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot{u}_0(\theta)\|_{L^2}\,d\theta<d(f,g)+\varepsilon.$$

$t \geq 0$ とする. このとき, (5.7) により, $\|u(t,\theta)\|_{L^2}^2 \leq r_0$. (5.8) により,

$$\int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u(t,\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot{u}(t,\theta)\|_{L^2}\,d\theta \leq e^{at}(d(f,g)+\varepsilon)$$

であるから,

$$d(S(t)f, S(t)g) \leq e^{at}d(f,g) \qquad (t \geq 0).$$

$M_0 \geq 1$ が存在して, $\|u(\theta)\|_{L^2}^2 \leq r_0$ ならば

$$\|\dot{u}(\theta)\|_{L^2} \leq \exp((b/2\kappa)\|u(\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot{u}(\theta)\|_{L^2} \leq M_0\|\dot{u}(\theta)\|_{L^2}$$

であるから, $f,g \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2 \leq r_0, \|g\|_{L^2}^2 \leq r_0$ に対して

$$\|f-g\|_{L^2} \leq d(f,g) \leq M_0\|f-g\|_{L^2}.$$

したがって, 各 $\tau > 0$ に対して, $L_\tau > 0$ が存在して

$$\|S(t)f - S(t)g\|_{L^2} \leq L_\tau\|f-g\|_{L^2} \quad (t \in [0,\tau], f,g \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2}^2 \leq r_0, \|g\|_{L^2}^2 \leq r_0).$$

Riemann metric d を決定することは難しいが, 上の考察により,

(5.9)

$$V(u,v) = \exp((b/2\kappa)((\|u\|_{L^2} \wedge \sqrt{r_0})^2 + (\|v\|_{L^2} \wedge \sqrt{r_0})^2))(\|u-v\|_{L^2} \wedge (2\sqrt{r_0})) \quad (u,v \in L^2(\Omega))$$

を用いれば, $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, $\|u_0\|_{L^2}^2 \leq r_0$, $\|v_0\|_{L^2}^2 \leq r_0$ のとき,

$$(d/dt)V(S(t)u_0, S(t)v_0) \leq \omega V(S(t)u_0, S(t)v_0) \qquad (t \geq 0)$$

を得ることができる. この考察は, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題に応用するためには, 定理 5.1 の中に現れる V として (5.9) により定義されるものを選べばよいことを示唆している.

上述の考察をもとに, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題

$$\text{(CGL)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u = 0 & ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)), \\ u(x,t) = 0 & ((x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)), \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \Omega) \end{cases}$$

を考える. 但し, $\partial\Omega$ は $\mathbb{R}^N$ の領域 Ω の滑らかな境界を表し, $\lambda > 0$, $\kappa > 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ とする. さらに, q はつぎの条件を満たすと仮定する.

$$2 \leq q \leq 2 + 4/N.$$

定理 5.2. 任意の初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して, (CGL) はつぎのクラスの解 u を一意的にもつ.

$$C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

さらに, 次のような解の初期値に関する連続的依存性が成り立つ.

u, v をそれぞれ初期値が $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ である上述のクラスの解とする. このとき, 各 $\tau, r > 0$ に対して $M(\tau, r) > 0$ が存在して

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} \leq M(\tau,r)\|u_0 - v_0\|_{L^2} \quad (t \in [0,\tau],\ u_0, v_0 \in L^2(\Omega),\ \|u_0\|_{L^2} \leq r, \|v_0\|_{L^2} \leq r).$$

(**定理の証明の概略**) $X = L^2(\Omega)$ とし, X における作用素 A を

$$Au = (\lambda + i\mu)(\Delta u - u) \qquad (u \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{5.10}$$

により定める. このとき, A は X 上の (C_0) 級の解析的半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であり, 評価 $\|T(t)\| \leq e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$ が成り立つ.

もし抽象的設定に現れる D, $\alpha \in (0,1)$ を

$$Bu = -(\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u + (\lambda + i\mu)u \qquad (u \in C := D \cap Y) \tag{5.11}$$

により定められる作用素 B が C から X への作用素であり, 条件 (B3) を満たすように決定できれば, (CGL) は半線形発展方程式の初期値問題 (SP) に翻訳され, 定理 5.1 を適用できる. これを実行するために, つぎの 2 つの場合に分けて考察する.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \qquad 2 \leq q < 2 + 4/N, \\ &(\mathrm{II}) \qquad q = 2 + 4/N. \end{aligned} \tag{5.12}$$

ここでは, (I) の場合についてのみ紹介する. $r_0 > 0$ とし, $D = \{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2}^2 \leq r_0\}$ と定め, $\alpha \in (0,1)$ をつぎのように選ぶ.

$$(q-1)\theta < \alpha < 1. \tag{5.13}$$

但し $\theta = (N/2)\,(1/2 - 1/2(q-1))$ である. (5.12) により $0 \leq (q-1)\theta < 1$ であるから, 上のように α を選ぶことは可能である. 条件 (B3) を調べるために, つぎの補題を必要とする.

補題 5.3. Z をバナッハ空間とする. $\theta \in [0,1)$, $K_0 > 0$ とし, F をつぎの条件を満たす $D(A)$ から Z への線形作用素とする.

$$\|Fx\|_Z \leq K_0 \|x\|^{1-\theta} \|Ax\|^{\theta} \qquad (x \in D(A)). \tag{5.14}$$

このとき, $\theta < \sigma < 1$ ならば, 線形作用素 $\widetilde{F} : D((-A)^\sigma) \to Z$ が存在して,

$$\begin{cases} \widetilde{F}x = Fx \qquad (x \in D(A)), \\ \|\widetilde{F}x\|_Z \leq K_{\sigma,\theta} \|x\|^{1-\theta/\sigma} \|(-A)^\sigma x\|^{\theta/\sigma} \quad (x \in D((-A)^\sigma)). \end{cases}$$

この補題の証明は, 文献 [14], [24] にある考え方を利用して行われる.

条件 (B3) の確認に移る. Gagliardo-Nirenberg 不等式により, $H^2(\Omega) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$ であり

$$\|u\|_{L^{2(q-1)}} \leq K_0 \|u\|^{1-\theta} \|u\|_{H^2}^{\theta} \leq K_0 \|u\|^{1-\theta} \|Au\|^{\theta} \quad (u \in D(A)).$$

(5.13) であるから, 補題 5.3 を $Z = L^{2(q-1)}(\Omega)$, $\sigma = \alpha$ で用いることができるので, $Y := D((-A)^\alpha) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^{2(q-1)}} \leq K_0 \|u\|^{1-\theta/\alpha} \|(-A)^\alpha u\|^{\theta/\alpha} \qquad (u \in Y). \tag{5.15}$$

よって, (5.11) により定義される作用素 B は C を X に写す.

$$\left| |\xi|^{q-2}\xi - |\eta|^{q-2}\eta \right| \leq K_0 \left(\int_0^1 |\theta\xi + (1-\theta)\eta|^{q-2}\, d\theta \right) |\xi - \eta| \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{C}) \tag{5.16}$$

であるから, $u, v \in C$ に対して

$$\|Bu\| \le (\kappa^2+\nu^2)^{1/2}\|u\|_{L^{2(q-1)}}^{q-1} + (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}\|u\|, \tag{5.17}$$

$$\|Bu-Bv\| \le K_0(\|u\|_{L^{2(q-1)}} \vee \|v\|_{L^{2(q-1)}})^{q-2}\|u-v\|_{L^{2(q-1)}} + (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}\|u-v\| \tag{5.18}$$

が成り立つ. (5.17), (5.15), (5.13) により,

$$\begin{aligned}\|Bu\| &\le K_0\|u\|^{(1-\theta/\alpha)(q-1)}\|(-A)^\alpha u\|^{(q-1)\theta/\alpha} + (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}\|u\| \\ &\le K_0\|u\|^{(1-\theta/\alpha)(q-1)}(1+\|(-A)^\alpha u\|) + (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}\|u\| \qquad (u \in C)\end{aligned} \tag{5.19}$$

であり, 作用素 B は条件 (B3) を満たし, (5.18) より, 局所リプシッツ条件 (5.1) を満たす.

さて, 定理 5.1 の条件 (ii) を調べるために, 先の考察をもとに, 汎関数 $V : X \times X \to \mathbb{R}_+$ を

$$V(u,v) = \exp((b/2\kappa)((\|u\| \wedge \sqrt{r_0})^2 + (\|v\| \wedge \sqrt{r_0})^2))(\|u-v\| \wedge (2\sqrt{r_0})) \tag{5.20}$$

により定める. 条件 (ii-1) が満たされることは容易に確かめられる. 条件 (ii-2) を調べるために, $u_0 \in C$ とする. $t > 0$ に関して $J_t u_0$ は微分可能であり, $J_t u_0 \in D(A)$, $(d/dt)J_t u_0 = AJ_t u_0 + Bu_0$ $(t > 0)$ が成り立つ. $f(t) = Bu_0 - B(J_t u_0)$ $(t > 0)$ とおけば, $\lim_{t\downarrow 0}\|f(t)\| = 0$, $\lim_{t\downarrow 0}\|(-A)^\alpha(J_t u_0 - u_0)\| = 0$ であり,

$$(d/dt)J_t u_0 = AJ_t u_0 + B(J_t u_0) + f(t) \qquad (t > 0)$$

が成り立つ. この $J_t u_0$ について, 解の初期値に関する連続的依存性の導出と同様の議論をすれば, 条件 (ii-2) が満たされる. もし $J_t u_0 \in C$ $(t > 0)$ ならば, 条件 (ii-3) は自動的に満たされる. 残念ながら, いまの場合はそうでない. 条件 (ii-3) を調べるために, $u_0 \in C$ とする. $B_0 \in B(Y, X)$ を

$$B_0 u = -(\kappa + i\nu)|u_0|^{q-2}u + (\lambda + i\mu)u \qquad (u \in Y)$$

により定める. このとき, $v \in C([0,\infty); Y) \cap C^1((0,\infty); X)$ が存在して

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)B_0 v(s)\,ds \quad (t \ge 0)$$

である. よって, $v'(t) = Av(t) + B_0 v(t)$ $(t \ge 0)$, $v(0) = u_0$ を満たすので,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta v + (\kappa + i\nu)|u_0|^{q-2}v = 0$$

である. (5.6) の導出と同様にして,

$$(d/dt)\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + 2\kappa\int_\Omega |u_0(x)|^{q-2}|v(x,t)|^2\,dx = 0$$

が得られるので, $(d/dt)\|v(t)\|_{L^2}^2 \le 0$ $(t \ge 0)$ が成り立つ. よって, $v(t) \in C$ $(t \ge 0)$ である. $v \in C([0,\infty); Y)$, $B_0 v(0) = B_0 u_0 = Bu_0$, $B_0 \in B(Y, X)$ であるから, $\rho(h) = \sup_{0\le t\le h}\|B_0 v(t) - Bu_0\|$ $(h > 0)$ と置けば, $\rho(h) \to 0$ $(h \downarrow 0)$ である.

$$v(h) - J_h u_0 = \int_0^h T(h-s)(B_0 v(s) - Bu_0)\,ds \quad (h > 0)$$

であるから, $\|v(h) - J_h u_0\| \leq h\rho(h)$ $(h > 0)$ が成り立つ. さらに, 評価 $\|(-A)^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha}$ $(t > 0)$ を用いると, $\|(-A)^\alpha (v(h) - J_h u_0)\| \leq M_\alpha h^{1-\alpha}\rho(h)$ $(h > 0)$ が成り立つ. このようにして定理 5.1 の条件 (ii) を確認できるので, 定理 5.1 により所要の結果を得る.

謝辞 リプシッツ作用素半群に関する研究内容を講演する機会を得ることができ, 本研究会世話役の横田先生（東京理科大学・理学部）に大変感謝申し上げます. この論説は十分に整理されているとはいえませんが, 少しでも多くの方々に, リプシッツ作用素半群に興味を持っていただければと願っています.

参考文献

[1] H. Amann, Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems, J. Math. Anal. Appl. **65** (1978) 432–467.

[2] H. Amann, Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Vol. **1**, Birkhäuser Verlag, 1995.

[3] A. Arosio and S. Spagnolo, Global solutions to the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation, Res. Notes in Math. **109** (1984), 1-26.

[4] H. Brezis, Opérateurs maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. Studies **5** North-Holland, 1973.

[5] H. Brezis, Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier **18** (1968) 115–175.

[6] H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Functional Analysis **9** (1972) 63–74.

[7] P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, J. Functional Analysis **2** (1968) 238–242.

[8] P. R. A. J. Chorin, T. J. R. Hughes, M. F. McCracken and J. E. Marsden, Product formulas and numerical algorithms, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 205–256.

[9] J. T. Chambers and S. Oharu, Semi-groups of local Lipschitzians in a Banach space, Pacific J. Math. **39** (1971) 89–112.

[10] M. G. Crandall, Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators, Proc. Sympos. Pure Math., **45**, Part 1, pp. 305–337, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[11] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math. **93** (1971) 265–298.

[12] Z-M. Chen, A remark on flow invariance for semilinear parabolic equations, Israel J. Math. **74** (1991) 257–266.

[13] W. Feller, On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, Ann. of Math. **58** (1953) 166–174.

[14] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. **840**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[15] E. Hille and R. Phillips, Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.

[16] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1984.

[17] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan **19** (1967) 508–520.

[18] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan **27** (1975) 640–665.

[19] Y. Kobayashi, 非線形半群入門 – 単独保存則への応用を中心に – (集中講義ノート)

[20] Y. Kobayashi, T. Matsumoto and N. Tanaka, Semigroups of locally Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007) 1042–1067.

[21] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Semigroups of Lipschitz operators, Adv. Differential Equations **6** (2001) 613–640.

[22] Y. Kobayashi and N. Tanaka, An application of semigroups of locally Lipschitz operators to Carrier equations with acoustic boundary conditions, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 852–872.

[23] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan **19** (1967) 493–507.

[24] S. G. Krein, Linear differential equations in Banach space, Translations of Mathematical Monographs, Vol. **29**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971.

[25] T. G. Kurtz, Extension of Trotter's operator semigroup approximation theorems, J. Funct. Anal. **3** (1969) 354–375.

[26] V. Lakshmikantham and S. Leela, Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[27] P. D. Lax and R. D. Richtmyer, Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956) 267–293.

[28] J. H. Lightbourne III and R. H. Martin, Jr., Relatively continuous nonlinear perturbations of analytic semigroups, Nonlinear Anal., TMA **1** (1977) 277–292.

[29] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **16**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[30] A. Majda, Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables, Springer-Verlag, New York, 1984.

[31] J. E. Marsden, On product formulas for nonlinear semigroups, J. Functional Analysis **13** (1973) 51–72.

[32] R. H. Martin, Jr., Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Wiley-Interscience, New York, 1976.

[33] I. Miyadera, Nonlinear semigroups, Translations of Mathematical Monographs, **109**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[34] I. Miyadera and Y. Kobayashi, Convergence and approximation of nonlinear semigroups, Proceedings of Japan-France Seminar on Functional Analysis and Numerical Analysis (1978), 277-295.

[35] H. Murakami, On non-linear ordinary and evolution equations, Funkcial. Ekvac. **9** (1966) 151–162.

[36] K. Nishihara, On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation, Tokyo J. Math. **7** (1984), 437–459.

[37] S. Oharu and D. Tebbs, Locally relatively continuous perturbations of analytic semigroups and their associated evolution equations, Japan J. Math. **31** (2005) 97–129.

[38] H. Okamura, Condition necessaire et suffisante remplie par les equations differentielles ordinaires sans points de Peano, (French) Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ. Ser. A. **24** (1942) 21–28.

[39] N. Okazawa and T. Yokota, Non-contraction semigroups generated by the complex Ginzburg-Landau equation, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **20** (2004) 490–504.

[40] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[41] S. I. Pohozaev, A certain class of quasilinear hyperbolic equations, Mat. Sb. **96 (138)** (1975), 152–166.

[42] S. Reich, Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators, J. Functional Analysis **36** (1980) 147–168.

[43] S. Reich, Convergence, resolvent consistency, and the fixed point property for nonexpansive mappings, Contemp. Math. **18** Amer. Math. Soc., Providence, RI (1983), 167–174.

[44] J. Prüss, On semilinear parabolic evolution equations on closed sets, J. Math. Anal. Appl. **77** (1980) 513–538.

[45] H. Tanabe, Equations of evolution, Monographs and Studies in Mathematics, **6** Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1979.

[46] H. F. Trotter, Approximation of semi-groups of operators, Pacific J. Math. **8** (1958) 887–919.

[47] J. A. Walker, Some results on Liapunov functions and generated dynamical systems, J. Differential Equations **30** (1978) 424–440.

[48] A. Yagi, Quasilinear abstract parabolic evolution equations with applications, pp. 381–397, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **50**, Birkhauser, Basel, 2002.

[49] Y. Yamada, Quasilinear wave equations and related nonlinear evolution equations, Nagoya Math. J., **84** (1981), 31–83.

[50] Y. Yamada, On some quasilinear wave equations with dissipative terms, Nagoya Math. J., **87** (1982), 17–39.

[51] T. Yokota and N. Okazawa, Smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation (general case), Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **13B** (2006) suppl., 305–316.

[52] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. **9** The Mathematical Society of Japan, Tokyo 1966

[53] K. Yosida, Functional analysis, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band **123**, Springer-Verlag, New York, 1978.

422-8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学 理学部 数学教室
E-mail: `sntanak@ipc.shizuoka.ac.jp`