第 29 回発展方程式若手セミナー
報 告 集

2008 年 2 月

報告集発刊にあたって

朋自遠方来　不亦楽乎　　論語・学而第一

第２９回発展方程式若手セミナーが２００７年８月１９日から８月２２日の４日間の日程で開催されました. 発展方程式若手セミナーは, １９７９年夏に開催されて以来, 毎年２９年もの間続いている歴史あるセミナーです. 当初のセミナーのコンセプトは「発展方程式について若手の研究者達で情報交換と自由な討論をし, また活躍中の先輩の研究者を招き教育的な特別講演をしていただく」というものであり, 現在までこれが受け継がれています. 今年度は, これに加えて「学生が数学をさらに学びたくなるような会」にすることを目標に準備させていただきました. 特別講演には, 東北大学大学院理学研究科の石毛和弘先生にご講演いただきました. 熱方程式に対する解の最大点挙動や形状に関して, １次元熱方程式を用いた平易な例から, 具体例に基づく既存の結果や多くの未解決問題の紹介にいたるまで丁寧にお話をしていただき, 色々と勉強をさせていただきました. 本報告集にもその内容をまとめて下さっています. これを基に勉強したり, 未解決問題に挑戦しようという学生の方々がたくさん現れることを期待しております.

今年度の開催地には山口市の湯田温泉を選ばせていただきました. 明治維新の立役者となった維新の志士達がよく訪れたというこの地にて, 日本の未来を語った彼等若者のように, 若く斬新なアイディアを出し合い, 活発な議論をリラックスした雰囲気で行っていただけるよう, 場所を選択いたしました. 本州の最も西にある県での開催にも関わらず, ７４名の先生, 研究員および大学院生の方々にご参加いただきました. 一般講演は３２件行われ, 質問時間には活発な討論などあり, 大いに盛り上がりをみせました. また, 夕食後にはショートコミュニケーションにおいて, 講演をされなかった学生の方々の自己紹介や研究の近況報告が行われたり, さらにその後も各部屋で引き続き研究を含めたさまざまな討論が行われたりと, 有意義な時間を過ごしていただけたと聞いております.

現在の世の中は, サテライト講義があったりウェブカメラを用いた会議が行われたりと, 人と人とがわざわざ顔を合わさなくても済む時代になってまいりました. しかしながら, 本集会のように一同が会することには, そうすることによって私たちの間にいわば化学反応を起こし, その反応により, 反応拡散方程式で見られる自律的な美しいパターンかのごとく, 時空に亘る物質やエネルギーの伝播を促すという意義が１つにはあるのだと思います. 若手セミナーでいうとそれは「討論を契機とする成果」であったり「モチベーションの高まり」や「友人・知人の励まし」であったりするでしょう. 今後も, この分野にこういった健全な「パターン」が広がっていくこと, さらにはそれをきっかけとして社会に貢献できるような成果が生まれていくことを強く願っています. 朋あり遠方より来たる, また楽しからずや. 皆様にまたお会いできることを楽しみにしております.

本研究集会は下記の助成金（五十音・番号順）にご援助いただきました. ご協力いただきました機関, 財団ならびに先生方に対しまして, 参加者を代表し, ここに深く感謝いたします. 誠にありがとうございました.

科学研究費　基盤研究(S)　研究課題番号:15104001
「非線形偏微分方程式の大域的可解性と解の漸近挙動に関する統一理論」
研究代表者　小薗　英雄　先生
科学研究費　基盤研究(A)　研究課題番号:19204012
「非線形波動・分散型方程式の幾何学的対称性と解の構造」
研究代表者　堤　誉志雄　先生
科学研究費　若手研究(B)　研究課題番号:19740079
「形状記憶合金方程式の可解性及び解の性質に関する研究」
研究代表者　吉川　周二 先生
科学研究費　若手研究(B)　研究課題番号:19740093
「反応・拡散・移流系が生成する有限次元力学系と時空間パターン」
研究代表者　大﨑　浩一
住友財団基礎科学研究助成　助成番号:061071
「移流を伴う反応拡散場におけるパターン形成とその発生メカニズムの解析」
研究代表者　大﨑　浩一

本セミナーの開催および，報告書の作成には，宇部工業高等専門学校・経営情報学科の吉川周二先生の協力を受けました. 吉川先生とは何から何まで相談をさせていただき，先生が海外出張中にもメールで打ち合わせをしたりと，とことんまで付き合って下さいました. 吉川先生の協力がなければ，本セミナーをここまで円滑に開催することはできなかったと思います. 本当に感謝しております. 昨年度の幹事・副幹事でいらっしゃる白川健先生と深尾武史先生には頻繁にご助言いただきました. 誠にありがとうございました. セミナー開催中，座長や様々な雑用を快く引き受けて下さった山崎教昭先生ならびに中口悦史先生をはじめとする先生方や学生の方々にも深く感謝いたします. 東北大学の齋藤浩子さん，京都大学の田中紀子さん，JTB の東一芳さん，かめ福支配人でいらっしゃる白神史雄さん，宇部高専の恋河内敦さんをはじめとする職員の方々ならびに，大﨑研究室と吉川研究室の学生諸氏にも多くの協力をしていただきました. そして，学生の方々を参加させて下さった先生方，温かく見守り励ましのお言葉をかけて下さった先生方をはじめ全ての皆様に，この場をお借りしてお礼申し上げます. 本当にありがとうございました.

来年度の記念すべき第３０回発展方程式若手セミナーの幹事は，東京理科大学理学部の横田智巳先生でいらっしゃいます. 皆様方におかれましては，ご参加，ご協力の程，何卒よろしくお願い申し上げます. 来年度の若手セミナーがますます盛り上がることを期待しております.

どうぞ皆様お元気でお過ごしください.

第２９回発展方程式若手セミナー幹事
大﨑 浩一

第29回発展方程式若手セミナー参加者名簿(敬称略)

1	石毛 和弘	いしげ かずひろ	東北大学大学院理学研究科数学専攻 准教授
2	山崎 教昭	やまざき のりあき	室蘭工業大学 准教授
3	前川 泰則	まえかわ やすのり	北海道大学大学院理学研究科数学専攻 D3
4	石渡 通徳	いしわた みちのり	東北大学大学院理学研究科数学専攻 助教
5	星野 真樹	ほしの まさき	東北大学大学院理学研究科 数学専攻 D4
6	池田 幸太	いけだ こうた	東北大学大学院理学研究科数学専攻 D3
7	佐藤 翔大	さとう しょうた	東北大学大学院理学研究科数学専攻 D2
8	川上 竜樹	かわかみ たつき	東北大学大学院理学研究科 D2
9	竹田 寛志	たけだ ひろし	東北大学大学院理学研究科数学専攻 D1
10	水野 将司	みずの まさし	東北大学大学院理学研究科数学専攻 D1
11	山本 征法	やまもと まさかず	東北大学大学院理学研究科 D1
12	小野寺 有紹	おのでら みちあき	東北大学大学院理学研究科数学専攻 D1
13	猪奥 倫左	いおく のりすけ	東北大学理学研究科数学専攻 M2
14	村井 徳幸	むらい のりゆき	東北大学大学院理学研究科 M2
15	物部 治徳	ものべ はるのり	東北大学大学院理学研究科 M2
16	岩渕 司	いわぶち つかさ	東北大学大学院理学研究科数学専攻 M2
17	菅 徹	かん とおる	東北大学大学院理学研究科 M1
18	加納 理成	かのう りせい	千葉大学大学院自然科学研究科 D2
19	村瀬 勇介	むらせ ゆうすけ	千葉大学大学院自然科学研究科 D2
20	横田 智巳	よこた ともみ	東京理科大学理学部第一部数学科 講師
21	吉井 健太郎	よしい けんたろう	東京理科大学理学研究科数学専攻 M2
22	田村 博志	たむら ひろし	東京理科大学理学研究科 M2
23	松元 久明	まつもと ひさあき	東京理科大学理学研究科数学専攻 M1
24	王 言金	おう げんきん	東京大学大学院数理科学研究科 D3
25	西川 史恵	にしかわ しえ	お茶の水女子大学理学部 D3
26	久保 隆徹	くぼ たかゆき	早稲田大学理工学術院 客員講師
27	山口 範和	やまぐち のりかず	早稲田大学理工学術院 基幹理工学部 数学科 助手
28	若狭 徹	わかさ とおる	早稲田大学理工学術院・助手, 明治大学理工学部PD研究員
29	大枝 和浩	おおえだ かずひろ	早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻 D1
30	原田 潤一	はらだ じゅんいち	早稲田大学先進理工学研究科 D1
31	塩見 崇史	しおみ たかふみ	早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻 M2
32	紀平 大樹	きひら ひろき	早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻 M2
33	西山 博太	にしやま ひろた	中央大学大学院理工学研究科 D2
34	渡邉 紘	わたなべ ひろし	中央大学大学院理工学研究科 D1
35	野井 貴弘	のい たかひろ	中央大学大学院理工学研究科 D1
36	五十嵐 威文	いがらし たけふみ	日本工業大学 非常勤講師
37	増田 茂	ますだ しげる	首都大学東京大学院理学研究科 D3
38	服部 元史	はっとり もとふみ	神奈川工科大学情報メディア学科 准教授
39	松澤 寛	まつざわ ひろし	沼津工業高等専門学校教養科 講師
40	愛木 豊彦	あいき とよひこ	岐阜大学教育学部 准教授
41	深尾 武史	ふかお たけし	岐阜工業高等専門学校 一般(自然) 講師
42	加藤 淳	かとう じゅん	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 講師
43	三木 隆広	みき たかひろ	名古屋大学多元数理 M2
44	伊達 裕史	だて ゆうじ	名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 M1
45	熊崎 耕太	くまざき こうた	名古屋工業大学大学院工学研究科情報工学専攻 D1
46	三浦 英之	みうら ひでゆき	京都大学大学院理学研究科 学振PD
47	菊池 弘明	きくち ひろあき	京都大学理学研究科数学教室 D3
48	眞崎 聡	まさき さとし	京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 D2
49	前田 昌也	まえだ まさや	京都大学大学院理学研究科 M2
50	中口 悦史	なかぐち えつし	大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻 助教
51	橋本 伊都子	はしもと いつこ	大阪大学大学院情報科学研究科 D3
52	白川 健	しらかわ けん	神戸大学大学院工学研究科 講師
53	香山 洋佑	かやま ようすけ	神戸大学大学院自然科学研究科 D2
54	河備 浩司	かわび ひろし	岡山大学大学院自然科学研究科(理学部数学科) 准教授
55	出原 浩史	いずはら ひろふみ	広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻 D3
56	角谷 敦	かどや あつし	広島修道大学経済科学部 教授
57	妹尾 祐紀	せのお ゆき	島根大学大学院総合理工学研究科 M2
58	龍現寺 基洋	りゅうげんじ もとひろ	島根大学大学院総合理工学研究科 M1
59	幡谷 泰史	はたや やすし	山口大学理学部数理科学科 助教
60	上田 好寛	うえだ よしひろ	九州大学大学院数理学府 D2
61	小林 遼	こばやし りょう	九州大学大学院数理学府 M2
62	久保 竹清	くぼ たけきよ	九州大学大学院数理学府 M2
63	杉谷 陽介	すぎたに ようすけ	九州大学大学院数理学府 M1
64	Dharmawardane Priyanjana Mahesh Nishantha	だるまわるだな ぷりやんじゃな まへし にしゃんた	九州大学 日本語研修生
65	須藤 毅	すどう たけし	九州大学大学院数理学府 M1
66	浅井 隆志	あさい たかし	九州大学大学院数理学府 M1
67	瀬片 純市	せがた じゅんいち	福岡教育大学教育学部 講師
68	久藤 衡介	くとう こうすけ	福岡工業大学工学部 准教授
69	大屋 博一	おおや ひろかず	佐世保工業高等専門学校 講師
70	中村 能久	なかむら よしひさ	熊本大学大学院 自然科学研究科 情報電気電子工学専攻 応用数理講座・助教(工学部数理工学科・助教併任)
71	岩川 風	いわかわ ふう	熊本大学自然科学研究科 M1
72	岡村 晶子	おかむら しょうこ	熊本大学自然科学研究科 M1
73	吉川 周二	よしかわ しゅうじ	宇部工業高等専門学校経営情報学科 助教
74	大崎 浩一	おおさき こういち	宇部工業高等専門学校経営情報学科 准教授

第２９回発展方程式若手セミナー プログラム

日時　平成 19 年 8 月 19 日 (日) 15 時 ~ 平成 19 年 8 月 22 日 (水) 12 時

会場　かめ福: 〒 753-0056 山口県山口市湯田温泉 4-5, Tel 083-922-7000

内容　特別講演：1 件, 一般講演：32 件

8 月 19 日 (日)

15:00-15:20　開会，連絡事項，自己紹介

【セッション１】　座長　瀬片 純市（福岡教育大）

15:20-15:50　服部 元史（神奈川工科大）
　連続体力学の変分原理で導出される空間分布パラメーター Cloth Simulation 3DCG アニメーションの運動方程式

15:50-16:20　小林 遼（九大）
　Stationary solutions to the drift-diffusion model for semiconductors

16:20-16:50　久保 竹清（九大）
　ある双曲・楕円型方程式系の解の減衰評価

【特別講演】　座長　山崎 教昭（室蘭工大）

17:10-18:40　石毛 和弘（東北大）
　熱方程式の解の最大点挙動, 及び関連する話題について

18:40-20:00　夕食

【ショート C.】　座長　久保 隆徹（早大），山口 範和（早大），若狭 徹（早大・明治大）

20:00-21:30　ショート・コミュニケーション

8 月 20 日 (月)

7:00-9:00　朝食

【特別講演】　座長　山崎 教昭（室蘭工大）

9:00-10:30　石毛 和弘（東北大）
　熱方程式の解の最大点挙動, 及び関連する話題について

【セッション２】　座長　三浦 英之（京大）

10:50-11:20　眞崎 聡（京大）
　非線型 Schrodinger 方程式の解の漸近挙動

11:20-11:40　岩渕 司（東北大）
　非線形シュレディンガー方程式の解の存在定理について

11:40-12:00　妹尾 祐紀（島根大）
　非局所的非線形項をもつシュレディンガー方程式の解の存在

12:00-13:30　昼食

【セッション3】　座長　深尾 武史（岐阜高専）

13:30-13:55　川上 竜樹（東北大）
外部領域における半線形熱方程式の解の漸近挙動

13:55-14:25　佐藤 翔大（東北大）
半線型放物型方程式に対する動く特異点を持つ解の存在について

14:25-14:45　星野 真樹（東北大）
超臨界指数べきをもつ半線形熱方程式に対する解の収束の速さの最良評価

【セッション4】　座長　幡谷 泰史（山口大）

15:10-15:30　原田 潤一（早大）
非線型常微分方程式系に対する nodal solution の構成

15:30-16:00　上田 好寛（九大）
Asymptotic stability of traveling waves for a hyperbolic relaxation system

16:00-16:30　竹田 寛志（東北大）
ある非線形消散型波動方程式の解の爆発について

【セッション5】　座長　横田 智巳（東京理科大）

16:50-17:20　前川 泰則（北大）
On the stability of axisymmetric Burgers vortices

17:20-17:50　増田 茂（首都大）
Some reserved problems on the original Navier-Stokes equations

17:50-18:20　橋本 伊都子（阪大）
半空間における粘性保存則の初期値境界値問題について

———

18:30-20:00　夕食

【ショート C.】　座長　久保 隆徹（早大），山口 範和（早大），若狭 徹（早大・明治大）

20:00-21:30　ショート・コミュニケーション

8月21日(火)

7:00-9:00　朝食

【セッション6】　座長　白川 健（神戸大）

9:20-9:50　加納 理成（千葉大）
放物型仮似変分不等式の抽象定理に関する応用について

9:50-10:20　村瀬 勇介（千葉大）
楕円型仮似変分不等式の存在定理と応用

【セッション7】　座長　大屋 博一（佐世保高専）

10:40-11:00　深尾 武史（岐阜高専）
移流項を含むある発展変分不等式の解の存在について

11:00-11:30　大枝 和浩（早大）
非線形拡散項を含む2種の生物の共生系の定常解について

11:30-12:00　出原 浩史（広島大）
交差拡散・競合系に対する反応拡散系近似 -定常解の視点から-

———

12:00-13:30　昼食

【セッション８】	座長　加藤 淳（名大）
13:30-14:00	塩見 崇史（早大） 3 種生態モデルにおける空間非一様な分岐解とその安定性
14:00-14:30	王 言金（東大） Strong instability of standing waves for Hartree equation with harmonic potential
14:30-15:00	菊池 弘明（京大） Klein-Gordon-Schrodinger 方程式系の定在波解の安定性について
【セッション９】	座長　久藤 衡介（福岡工大）
15:30-15:55	前田 昌也（京大） シュレディンガー方程式の定在波解の安定性・不安定性について
15:55-16:15	松澤 寛（沼津高専） 双安定反応拡散方程式の遷移層をもつ定常解に関する考察 (形式的計算)
16:15-16:45	五十嵐 威文（日大・日本工業大） Existence and nonexistence of global solutions in time for a reaction-diffusion system with inhomogeneous terms
【セッション１０】	座長　松澤 寛（沼津高専）
17:10-17:40	小野寺 有紹（東北大） 求積領域の先験的評価と Hele-Shaw 問題の弱解の一意性について
17:40-18:10	池田 幸太（東北大） 微小重力環境でのすす燃焼パターーンの反応拡散モデルについて

18:45-21:00	夕食会

8 月 22 日 (水)

7:00-9:00	朝食
【セッション１１】	座長　中口 悦史（阪大）
9:20-9:50	猪奥 倫左（東北大） Brezis-Merle 型不等式の最良定数について
9:50-10:20	山本 征法（東北大） 拡散効果を一般化した移流拡散方程式系の解の漸近挙動について
【セッション１２】	座長　中口 悦史（阪大）
10:40-11:10	水野 将司（東北大） ある半線形放物型方程式の解に対する正則性評価について
11:10-11:35	渡邉 紘（中央大） 非線形退化放物型方程式に対する一意性定理

11:35-12:00	連絡事項，閉会

目次

特別講演

一般講演

特別講演の総括

特別講演題目：熱方程式の解の最大点挙動, 及び関連する話題について
特別講演者：石毛 和弘 氏 (東北大学大学院 理学研究科)
日時： 8月19日（日）（第1日目）　17：10～18：40
8月20日（月）（第2日目）　9：00～10：30

１．はじめに．第２９回発展方程式若手セミナーの特別講演は，東北大学大学院 理学研究科の石毛和弘先生を講師としてお招きし,『熱方程式の解の最大点挙動, 及び関連する話題について』という題目で行われました。ここで，簡単ではありますが，石毛和弘先生による特別講演を振り返ってみたいと思います。

２．特別講演について．今回，石毛先生に，第１日目と第２日目の２回にわたり，特別講演して頂きました。１日目は，熱方程式の解の最大点挙動，２日目は関連する話題についてでした。両日共に，丁寧に説明して頂いたので，初心者である私でもよく理解することができました。

２日間にわたる特別講演を通じて，とても不思議に思ったことは，また，興味深かったことは，熱方程式は線形偏微分方程式の典型例ですが，それから得られる情報というのは，非線形で，かつ，それらは数多くの未解決問題を含んでいる点でした。非線形現象から非線形の情報を得るのは当たり前です。線形の偏微分方程式から非線形情報を見い出し解析するという重要性を示唆している点が石毛先生の特別講演の奥深さであり，独創的なものであると感じました。実際，私を含めセミナー参加者全員，石毛先生の講演に自然に引き込まれ，あっという間の９０分×２でした。更に，他の研究分野の人にも特別講演の内容が大変刺激になったようでした。

また，特別講演中，石毛先生から数多くの未解決問題を紹介して頂きました。石毛先生が院生の方々に『どんどん研究してください』とおっしゃった際,「大学の先生は研究者であるだけでなく，教育者でもある」という大切さを再認識させられました。私はこれまで,「自分が楽しければいいや」という自己満足的な思いで研究をしてきました。今後は，態度を改めて，石毛先生のように，次世代の研究者の育成を念頭に置きながら，教育・研究をしなければいけないと考えさせられた特別講演でした。従いまして，座長を務めた自分自身にとっても，特別な講演でした。この場をお借りして，特別講演をして頂いた石毛先生に心から深く感謝申し上げます。

３．若手セミナーについて．発展方程式若手セミナーの参加者は９割近く大学院生や若手研究者の方々です。もちろん若手研究者の定義をしないといけないのですが，それはあえて定義しておかないこととします。今回，セミナー全体を通じて，積極的に質問したり意見を述べたり，また，議論し合ったりしている光景を数多く見ることができました。大変嬉しく思っております（多分，このような感想を持ってしまった瞬間，私はもう若手研究者ではないのかもしれませんが…）。今後も，発展方程式若手セミナーを有効利用して，他大学・他分野の方々との交流を深めながら，新たな数学分野の開拓などに取り組んで頂ければ幸いです。その事により，本セミナーの開催意義『若手研究者が討論・情報交換する事を通じ，発展方程式とその周辺分野の将来の方向性を探る』が達成されると思います。また，今回のセミナーも大成功に終わったと感じております。

最後に，セミナー開催中に終始お世話になった第２９回発展方程式若手セミナーの幹事である宇部工業高等専門学校の大崎浩一先生，吉川周二先生の両先生に心から深く感謝申し上げます。

室蘭工業大学 工学部 共通講座
山崎 教昭

熱方程式の解の最大点挙動, 及び関連する話題について

石毛　和弘　(東北大・理)

講演においては, 熱方程式について次の 3 つの問題

(1) 熱方程式の解の最大点挙動について

(2) 熱方程式の解の微分の減衰速度について

(3) 熱方程式と解 (のグラフとして) の凸性

について触れたが, 本報告書においては, 2 回の講演において最も時間を割いて話した (1), (3) の話題について扱うことにする.

1　熱方程式の解の最大点挙動について

$\mathbf{R}^N$ 上の領域 Ω における熱方程式の解 $u = u(x,t)$ の時刻 t における最大点集合 (Hot Spots)

$$H(t) = \left\{ x \in \overline{\Omega} \,:\, u(x,t) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y,t) \right\}$$

を考える. 特に, 時間が十分経った後の最大点集合の大域的挙動について考察していく. このような問題を考える動機としては色々とあると思うが, 解の最大点挙動を考察することは解の形状に関する基本的な情報を与えることから重要であると思われ, またこれらの解析を通して様々な解の形状に関する情報について得られるものと考えている. 以下, 領域が有界の場合, 非有界の場合に分け, 特に Neumann 境界条件の場合を中心に扱っていく.

1.1 有界領域における熱方程式の解の最大点挙動

$\mathbf{R}^N$ 上の (滑らかな境界を持つ) 有界領域 Ω において

$$
\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.1}
$$

を考える. ただし, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$, ν を $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトルとし, 初期条件 φ については簡単のため $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ としておく. このとき, 解の最大点集合 $H(t)$ は時間大域的にどのように振る舞うのだろうか, という問題について考察することにする. まず, Rauch [24] による考察について紹介することにする.

$\boxed{\textbf{Rauch's Observation}}$ $\Omega = (0,1)$ の場合, つまり,

$$
\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in} \quad (0,1) \times (0,\infty), \\ u_x = 0 & \text{on} \quad \{0,1\} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{in} \quad (0,1) \end{cases} \tag{1.2}
$$

において, もし初期値 φ の熱分布がある一点 $x = a \in [0,1]$ に集中しているならば, 十分時間が経過しても解の最大点は点 $x = a$ の周辺にあるのだろうか, という問題を考えてみる. このために, Neumann 境界条件の下での Δ の固有関数を用いて Fourier 展開することによって解表示すると

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \cos(k\pi x) \quad \text{in} \quad L^2(0,1)$$

と書ける. ただし, $a_k(t)$ はある定数 c_k を用いて

$$a_k(t) = c_k \int_0^1 u(x,t) \cos(k\pi x) dx$$

と書け, (1.2) より,

$$
\begin{aligned} a_k'(t) &= c_k \int_0^1 u_t \cos(k\pi x) dx = c_k \int_0^1 u_{xx} \cos(k\pi x) dx \\ &= -c_k (k\pi)^2 \int_0^1 u \cos(k\pi x) dx = -(k\pi)^2 a_k(t) \end{aligned}
$$

をみたす．よって，

$$a_k(t) = e^{-(k\pi)^2 t} a_k(0) = c_k e^{-(k\pi)^2 t} \int_0^1 \varphi(x) \cos(k\pi x) dx$$

となるので，(1.2) の解 u は

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(0) e^{-(k\pi)^2 t} \cos(k\pi x)$$

と書ける．特に，

$$u(x,t) = \int_0^1 \varphi(x) dx + a_1(0) e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + O(e^{-(2\pi)^2 t}) \tag{1.3}$$

となることがわかる．ここで，等号は $L^2(0,1)$ の意味で成立する．さらに，

$$u(x,t) - \int_0^1 \varphi(x) dx - a_1(0) e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

も 熱方程式と Neumann 境界条件をみたしているため，熱方程式の解の正則性定理を用いると，(1.3) は $C^2([0,1])$ で成立することもわかる．従って，例えば，$a_1(0) > 0$ ならば，十分大きい t に対して (1.3) より，

$$u_x(x,t) = -a_1(0) \pi e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)(1 + o(1)) > 0, \quad x \in (0,1) \tag{1.4}$$

となるため，「"ほとんど"の初期値 (正確には $a_1(0) \neq 0$ をみたす初期値) に対して，(1.2) の解の最大点集合 $H(t)$ は時間の経過とともに，境界 $\{0,1\}$ のいずれかにに近づいていく」ことがわかる．さらに，(1.4) と同様にして，十分大きい t に対して

$$u_{xx}(x,t) = -a_1(0) \pi^2 e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)(1 + o(1)) \neq 0, \quad x = 0, 1.$$

となるため，Neumann 境界条件を考慮することによって，十分時間が経過すると，境界上しか $H(t)$ は存在しないこともわかる．

次に，Kawohl [19] によって提唱された Hot Spots Conjecture について扱うことにする．

Hot Spots Conjecture

(1.1) に戻ることにする. Rauch's observation の後, Kawohl [19] は Hot Spots Conjecture と呼ばれる次を予想を与えた.

「有界凸集合 Ω における (1.1) の解の最大点集合 $H(t)$ は, "ほとんど" の初期値に対して, 時間の経過と伴い, 境界 $\partial\Omega$ に近づく」

一方, Neumann 固有値問題

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \partial_\nu\varphi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

の第一固有値は 0 であり, その固有関数は定数関数. よって, Rauch's observation と同様にして, $H(t)$ の大域的挙動において第二固有関数の形状が重要であることから, 上の予想は

「有界凸集合 Ω における第二 Neumann 固有関数の最大点 (最小点) は, 境界 $\partial\Omega$ にのみ存在する」

と同値な問題となる. しかし, 残念ながら, この予想が成立することが証明されているのは, 以下の限られた領域のみである.

- 長方形, 円など, 具体的に固有関数が計算できる場合;
- 2 次元における, ある種の対称性を持った非常に細長い凸領域 ([1], [2], [17] を参照);
- Hot Spots Conjecture が正しいと証明されている凸領域を台にした筒状領域 ([2], [19] を参照).

Hot Spots Conjecture についての詳しい歴史と経緯について知りたい場合は [2] を参照されると良いと思う. また, ある穴の空いた (よって, 凸ではない) 二次元領域において, 第二固有関数の最大点または最小点が領域の内部に存在する例も構成されている ([5], [6] を参照).

ここまで, Neumann 境界条件の場合にしか考えていなかったが, 「Dirichlet 条件の場合, (非負な初期値に対して) $H(t)$ は Dirichlet 第一固有関数の最大点に近づくが, その点はどのように特徴付けられるのだろうか?」という問題も考えられるが, これもまた不明である.

1.2 非有界領域における熱方程式の解の最大点挙動

$\mathbf{R}^N$ 上の非有界領域 Ω において (1.1) を考える. この場合, 問題の設定によっては, $H(t) = \emptyset$ となることがあるため, 初期値の正値性や空間無限大における減衰の速さ等の適当な条件を初期値に課す必要がある. さらに, 非有界領域においては一般に固有関数が存在しないことにより, 前節での考察は適用できない.

有界領域の場合同様, 非有界領域における熱方程式の解の最大点挙動はある特殊な非有界領域の場合しか, 詳しい情報は得られていない. ここでは, 全空間 $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合 (Chavel - Karp [8]), 半空間 $\Omega = \mathbf{R}^N_+$ の場合 (Jimbo - Sakaguchi [18]), 及び球の外部領域の場合 $\Omega = \{|x| > 1\}$ (Jimbo - Sakaguchi [18], Ishige [13]) による考察を述べることにする.

$\boxed{\Omega = \mathbf{R}^N \text{ の場合}}$

Chavel - Karp [8] に従って, $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合について考察する. ここでは, $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, $\varphi \geq 0\,(\not\equiv 0)$ in $\mathbf{R}^N$ を仮定する. このとき, 解 u の重心

$$C(t) \equiv \int_{\mathbf{R}^N} xu(x,t)dx \Big/ \int_{\mathbf{R}^N} u(x,t)dx \ \in \mathbf{R}^N.$$

は時間不変である. このとき, [8] より,

(1) 任意の $t > 0$ に対して, $H(t)$ は $\mathrm{supp}\,(\varphi)$ を含む最小閉凸集合に含まれる;

(2) $\mathbf{R}^N$ 上の滑らかな曲線 $x = x(t)$ $(0 < t < \infty)$ が存在し, 十分大きな t に対して, $H(t) = \{x(t)\}$;

(3) $\lim_{t\to\infty} x(t) = C(0)$

となることがわかる. (2), (3) は解が熱方程式の基本解を用いて表現できることを用いて, また (1) は半平面による折り返しと比較原理と用いて証明することができる. Chavel - Karp はこの他, 幾つかの典型的な non-compact リーマン多様体上での $H(t)$ の性質について, 特に (1) について調べているが, 今後の進展が望まれる.

$\boxed{\Omega = \mathbf{R}^N_+ \text{ の場合}}$

次に, Jimbo - Sakaguchi [18] に従い, $\Omega = \mathbf{R}^N_+ \equiv \{x_N > 0\}$ の場合について考察する. $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合と同様に, $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N_+)$, $\varphi \geq 0\,(\not\equiv 0)$ in $\mathbf{R}^N_+$ を

仮定しておく．この状況下において, $H(t)$ の挙動は境界条件の影響を強く受ける．例えば, Neumann 条件の場合, 解を折り返して $\mathbf{R}^N$ の場合に帰着可能なので, 十分時間が経つと, $H(t)$ は $\{x_N=0\}$ 上の一個の点 $x(t)$ からなり, 滑らかな曲線に沿って動く．さらに

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \int_{\mathbf{R}^N_+} x_i\varphi(x)dx \Big/ \int_{\mathbf{R}^N_+} \varphi(x)dx, \quad i=1,\dots,N-1$$

となることがわかる．その一方, Dirichlet 境界条件や Robin 境界条件の場合は, Green 関数による解の表示公式を用いて, $H(t)$ は $t\to\infty$ につれて, $(2t)^{1/2}$ の割合で境界から離れていくことがわかる．

$\boxed{\Omega = \{|x|>1\}}$ **の場合**

Jimbo - Sakaguchi [18] は $\Omega=\mathbf{R}^N_+$ の場合だけでなく, 球の外部領域 $\Omega=\{|x|>1\}$ の場合についても考察を行った．ただし, この場合, 熱方程式のグリーン関数を用いて解の微分の符号を調べることは困難であり, $\Omega=\mathbf{R}^N$ や $\Omega=\mathbf{R}^N_+$ の場合のようにはいかない．そこで, Jimbo - Sakaguchi [18] は初期値 φ の球対称性を仮定し研究を行い, Neumann 条件の場合は, 十分時間が経過すると

$$H(t)=\partial\Omega=\{|x|=1\} \tag{1.5}$$

となることを示した．さらに, Dirichlet 条件の場合は, $N=3$ の場合のみ, $H(t)$ は $t\to\infty$ につれて, $(2t)^{1/3}$ の割合で境界から離れていくことを示している．これらの結果は多分に示唆的で興味深いが, 1 次元熱方程式の解の零点に関する結果を用いて解析しているため, 初期値の球対称性を仮定しなければならないところに問題がある．

この結果を受けて, Ishige [13] は以下の考察を行った: $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N : |x|>1\}$, $N\ge 2$ とし, 問題 (1.1) を考察する．ただし,

$$\varphi\in L^2(\Omega, e^{|x|^2/4}dx), \qquad \int_\Omega \varphi dx>0. \tag{1.6}$$

とする．ここで, 初期値 φ に対して, 球対称性や非負値性の条件は仮定していないことに注意する．これらの条件の下, $\Omega=\mathbf{R}^N$ の場合に $H(t)$ の挙動を決定した解の重心 $C(t)$ は時間不変ではない．そこで, $C(t)$ を改良し,

$$C_m(t)=\int_\Omega x\left(1+\frac{|x|^{-N}}{N-1}\right)u(x,t)dx\Big/\int_\Omega u(x,t)dx$$

を考える．ここで, 関数

$$x_i\left(1+\frac{|x|^{-N}}{N-1}\right) \qquad (i=1,\dots,N)$$

は Neumann 境界条件をみたす Ω 上の調和関数であることから, 任意の $t>0$ に対して $C_m(t)=C_m(0)$ であることがわかる. また, この後の考察を経て, 結果として

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = C_m(0)$$

となることもここに記しておく. このとき, $C_m(0)$ が $C(0)$ にかわって $H(t)$ の大域的挙動の決定に重要な役割をはたす. 実際, [13] より, 以下の結果が得られる.

Theorem 1.1 球の外部領域 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N : |x|>1\}$ $(N\geq 2)$ において, 条件 (1.6) の下で, 問題 (1.1) の解 u の最大点集合 $H(t)$ を考える. このとき, 任意の $t>0$ に対して, $H(t)\neq\emptyset$ であり, 以下が成立する:

(i) $C_m(0)\notin\overline{\Omega}$ ならば, ある正定数 T が存在して,

$$H(t)\subset\partial\Omega=\{|x|=1\}, \qquad t\geq T.$$

(ii) $C_m(0)\neq 0$ ならば,

$$\lim_{t\to\infty}\sup\{|x-x_*| \,:\, x\in H(t)\}=0.$$

ただし,

$$x_*=\begin{cases} C_m(0) & \text{if} \quad C_m(0)\in\Omega, \\ \dfrac{C_m(0)}{|C_m(0)|} & \text{if} \quad C_m(0)\notin\Omega. \end{cases}$$

ここで, x_* とは, $C_m(0)$ に最も近い $\overline{\Omega}$ 上の点として特徴付けすることができる. また. この結果により一般的には, (1.5) が成立しないことをわかる.

また, Dirichlet 境界条件の下での $H(t)$ の大域挙動については, $H(t)$ が時間無限大で無限に発散する速度, その方向等が問題になるが, これらは [14] を参照されたい.

1.3 定理 1.1 の証明の概略

解の大域的挙動を調べるには, Green 関数や Layer Potential の議論を用いる手法があるが, [18] において指摘されているように, hot spots の大域的挙動を調べるには, 球の外部領域という最も単純な外部領域であっても効果的ではない. ここでは, Escobedo - Kavian [10] に従って, 解の自己相似性の自己相似性に着目した変換を行うというアイデアに基づくものの, 領域が全空間

でないことからくる正則性の欠損という問題が起こるが, 方程式の線形性と領域の球対称性を用いることによって困難点を解消する.

まず, Escobedo - Kavian [10] により, 線形作用素 $Lw \equiv \dfrac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(\rho\nabla_y w)$ (ただし $\rho(y)=e^{|y|^2/4}$) に対する固有値問題

$$-L\phi=\lambda\phi \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N, \qquad \phi\in H^1(\mathbf{R}^n,\rho dy)$$

に対して,

- 固有値は $(N+i)/2,\ i=0,1,2,\ldots;$
- 第一固有関数は $e^{-|y|^2/4};$
- その他の固有関数は $e^{-|y|^2/4}$ を微分して得られる. また, これらの固有関数は Ninomiya - Mizoguchi - Yanagida '98 [23] により, 球対称関数と球面調和関数の積として表現可能

が知られている. また, 固有値問題

$$-\Delta_{\mathbf{S}^{N-1}}Q=\omega Q \quad \text{on} \quad \mathbf{S}^{N-1}, \quad Q\in L^2(\mathbf{S}^{N-1})$$

に対して, 固有値は $\omega_k=k(N+k-2),\ k=0,1,2,\ldots$ であり, 対応する固有関数を $\{Q_{k,i}\}_{i=1}^{l_k}$ (l_k は次元) とし, 以下, 複数の段階を踏んで証明を行う.

1st Step

作用素 L の固有関数を用いて初期値を分解することによって,

$$\begin{aligned}(1.7)\quad \varphi(x) &= \varphi_{0,1}(|x|)Q_{0,1}\left(\frac{x}{|x|}\right)+\sum_{i=1}^{N}\varphi_{1,i}(|x|)Q_{1,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)+\cdots\\ &= c_0\varphi_{0,1}(|x|)+c_1\sum_{i=1}^{N}\varphi_{1,i}(|x|)\frac{x_i}{|x|}+\cdots \quad \text{in} \quad L^2(\Omega,\rho dy).\end{aligned}$$

と書くことができる. このとき,

$$\begin{cases}\partial_t u=\Delta u & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty),\\ u_\nu=0 & \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,0)=\varphi_{k,i}(|x|)Q_{k,i}(x/|x|) & \text{in} \quad \Omega\end{cases}$$

の解を $u_{k,i}$ とする. また,

$$
(1.8) \qquad \begin{cases} \partial_t v = \Delta v + \dfrac{\omega_k}{|x|^2} v & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ v_\nu = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ v(x,0) = \varphi_{k,i}(|x|) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}
$$

の解を $v_{k,i}$ とすると, $v_{k,i}$ は球対称解であり,

$$
(1.9) \qquad u_{k,i}(x,t) = v_{k,i}(|x|,t) Q_{k,i}(x/|x|).
$$

さらに, 任意の $t > 0$ に対して, (解の正則性定理も用いて)

$$
(1.10) \qquad u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{l_k} v_{k,i}(|x|,t) Q_{k,i}(x/|x|) \quad \text{in} \quad C^2(\Omega)
$$

となるので, 解 u の大域的漸近挙動を調べるためには, $v_{k,i}$ の大域的漸近挙動を調べれば良いことになる.

2nd Step

(1.8) の解 $v_{k,i}$ の大域的漸近挙動 を調べるために解の自己相似性に着目し,

$$
w_{k,i}(y,s) = (1+t)^{\frac{N+k}{2}} v(|x|,t), \;\; y = (1+t)^{-\frac{1}{2}} x, \;\; s = \log(1+t)
$$

とおく. このとき, $w_{k,i}$ は

$$
\begin{cases} \partial_s w_{k,i} = L w_{k,i} - \dfrac{\omega_k}{|y|^2} w_{k,i} + \dfrac{N+k}{2} w_{k,i} & \text{in} \quad W, \\ \partial_\nu w_{k,i} = 0 & \text{on} \quad \partial W, \\ w_{k,i}(y,0) = \varphi_{k,i}(|y|) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}
$$

をみたす. ただし,

$$
\Omega(s) = e^{-\frac{s}{2}} \Omega, \; W = \bigcup_{s>0} (\Omega(s) \times \{s\}), \; \partial W = \bigcup_{s>0} (\partial\Omega(s) \times \{s\}).
$$

ところで, 方程式の右辺から定まるの線形作用素の固有値は全空間 $\mathbf{R}^N$ の場合は 0 であり, 対応する第一固有関数は $|y|^k e^{-|y|^2/4}$ となる. よって, s が十分大きい場合は $\Omega(s)$ は $\mathbf{R}^N$ に近いとみなすことによって, $w_{k,i}$ も第一固有関

数 $|y|^k e^{-|y|^2/4}$ に強い影響を受けることがわかる. したがって, 若干の証明が必要であるが, Fourier 展開による解析を行うと, ある定数 $c_{k,i}$ が存在し,

$$w_{k,i}(y,s) = c_{k,i}(1+o(1))|y|^k e^{-|y|^2/4} + O(e^{-s/2}) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, \rho dy)$$

となることがわかる. さらに, 放物型方程式の解の正則性定理を用いることによって, 任意の $0 < \epsilon < L$ に対して, この収束は空間 $C^2(\{\epsilon \le |y| \le L\})$ のものとみなすこともできる. ここで, $s \to \infty$ に対して, $\partial\Omega(s)$ の曲率が発散することから, 放物型方程式の解の正則性定理を適応して上記収束を $C^2(\{|y| \le L\})$ とすることはできない.

3rd Step

ここでは, 簡単のために, $k=1$ のみ扱うこととし, $v_{k,i}$ の球対称性を用いて解析を行う. まず, Step 2 の議論より, $\sup_{s>0} \|w_{1,1}(s)\|_{L^2(\Omega(s),\rho dy)} < \infty$ となり,

$$\sup_{t>0}(1+t)^{\frac{N}{4}+\frac{1}{2}} \|v_{1,1}(t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty$$

を得る. ここで, 熱方程式の $L^p - L^q$ 評価等を用いて, このとき,

$$\sup_{t \ge 1} t^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}} \|v_{1,1}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \sup_{t \ge 1} t^{\frac{N}{2}+\frac{3}{2}} \|\partial_t v_{1,1}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$$

を得る. 一方, 任意の $t > 0$ に対して, $v = v_{1,1}(r,t)$ は, 常微分方程式

$$v_{rr} + \frac{N-1}{r} v_r - \frac{N-1}{r^2} v = v_t \quad \text{in} \quad (1,\infty), \quad v_r(1,t) = 0$$

の解であることから, ある関数 $\zeta = \zeta(t)$ が存在し,

$$\begin{aligned} (1.11) \quad v(r,t) &= \zeta(t) r \left(1 + \frac{r^{-N}}{N-1}\right) + r \int_1^r s^{-N-1} \left(\int_1^s \tau^N v_t(\tau,t) d\tau \right) ds \\ &= \zeta(t) r \left(1 + \frac{r^{-N}}{N-1}\right) + O(r^2) O(t^{-\frac{N}{2}-\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

と書ける. したがって, 十分小さい任意の $\epsilon > 0$ に対して $r = \epsilon(1+t)^{1/2}$ とおくと, 今までの計算を合わせることによって,

$$v(r,t) = C_1 \epsilon t^{-\frac{N+1}{2}}(1+o(1)) = \zeta(t)\epsilon t^{1/2} + \epsilon^2 O(t^{-\frac{N+1}{2}})$$

となることがわかる. ここで, C_1 は定数. したがって, ϵ の任意性より, ある定数 C_2 が存在して,

$$\zeta(t) = C_2 t^{-\frac{N+2}{2}}(1+o(1)) \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

となることがわかる．したがって，

$$
\begin{aligned}
v_{1,1}(r,t) &= v(r,t) \\
&= C_2 t^{-\frac{N+2}{2}}(1+o(1))r\left(1+\frac{r^{-N}}{N-1}\right)+O(r^2)O(t^{-\frac{N}{2}-\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
$$

この表現は等式なので，$v_r(r,t)$, $v_{rr}(r,t)$ の挙動も計算できる．

<u>4th Step</u>

3rd step 議論より，$v_{k,i}$ の微分を含めた挙動が計算可能になり，解 u 自身の微分を含めた解挙動が調べることが可能になる．後は，u, ∇u 等の大域的漸近挙動を調べれば，結果として定理 1.1 を得ることができる．

上で述べてきた解析手法の発展として，Dirichlet 境界条件の場合，potential 項などの低階項が熱方程式に加わった場合等の発展があるが，これらは方程式の正値調和関数の形状に注目することによって，どこか統一的な描像が見えつつあるように感じている．

また，これらの解析手法は，$H(t)$ の大域的挙動だけでなく，様々な情報をもたらしてくれると思われる．また，初期条件には空間的に指数関数的減衰を仮定しているが，問題によっては初期値を指数関数的減衰をもつ関数によって近似することによって上記の議論を応用し，様々な解の評価を得ることも可能である．実際，解の微分の減衰率に関する評価も得ることができる ([15] を参照)．

2 熱方程式と解 (のグラフとして) の凸性

解の形状に関するという意味では同じであるが，この章では，解のグラフ全体について凸性という概念を鍵として考察してみることにする．この章のほとんどは結果紹介という形になるが，多くの未解決問題を見出すことができると思われる．

まず，有界 (狭義) 凸領域 Ω に対して，

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0)=\varphi(x)\geq 0 & \text{in} \quad \Omega \end{cases}
$$

を考える (非線形方程式でも良い)．このとき，x の関数として，何時，解 $u(x,t)$ のグラフは上に凸になるのか？という問題を考えてみる．また，グラフとして

の上に凸という概念を拡張した α-concavity と解の関係について述べ, open problem を紹介すると共に, 若干の考察を与える.

2.1 Korevaar [21] による考察

Ω を滑らかな境界をもつ有界 (狭義) 凸開集合 ($N \geq 2$) とし,

$$a^{ij}(\nabla u)u_{ij} = b(u, \nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega$$

をみたす $u \in C^2(\Omega)$ を考える. ただし,

$$a^{ij} = a^{ji}, \quad [a^{ij}] > 0, \quad b_u > 0, \quad b_{uu} \leq 0$$

とする. このような条件をみたす方程式としては, 例えば, 毛細管現象 (Concus - Finn [9] を参照) と関連のある

$$\operatorname{div} Tu = \kappa u + M \quad \text{in} \quad \Omega.$$

ただし,

$$Tu = \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad \kappa \geq 0, \quad M = \text{定数}$$

という方程式などが含まれる.

ここで, Π_x を点 $x \in \overline{\Omega}$ における u のグラフの接平面とする. このとき, u のグラフは上に凸であるならば, 任意の点 $x \in \overline{\Omega}$ に対して, u のグラフは平面 Π_x の下になければならない. Korevaar [21] は u のグラフが上に凸であるための必要十分条件として,

(2.2) 「$\partial\Omega$ 上の任意の点 x に対して, u のグラフは Π_x の下にある」

を与えた. しかし, 残念ながら, 一般にこの条件を調べるのは困難であり, 使い勝手は良くない.

また, Dirichlet 第一固有関数, つまり

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

の第一固有関数を φ とする. このとき, 必要ならば -1 倍を考えることにより, この関数 φ は正値関数となるが, そのグラフは上に凸ではないことが簡単に証明できる. そこで, $\tilde{\varphi} = \log\varphi$ とおくと,

$$\Delta\tilde{\varphi} = -\lambda - |\nabla\tilde{\varphi}|^2 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \tilde{\varphi} = -\infty \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

となり, Ω の近似領域において (2.2) を確認することができ, $\tilde{\varphi}$ のグラフが は上に凸であることがわかる (このような関数の凸性を log-concave という). 結果として, 任意の $\lambda > 0$ に対して, φ の level set $\{x \in \Omega : \varphi(x) > \lambda\}$ は 凸集合であることがわかる (このような関数の凸性を quasi-concave という). また, Caffarelli - Spruck [7] により, Dirichlet 第一固有関数の level set の境界は解析的に滑らかであることが知られている.

これらの考察を通して, 解の上への凸性を調べる研究は, 解そのものよりも, 解の level set の凸性を中心に調べる方が有益であることを示唆している. また, ここまでの考察は, すべて比較原理を基に構成されているため, 熱方程式にもそのまま応用でき, (2.1) の解 u に対して, $\log \varphi$ が上に凸ならば, すべての $t > 0$ に対して, $\log u(t)$ は上に凸であることがわかる. つまり, 熱方程式においては log-concavity は保存されることがわかる. また, この log-concavity の保存について $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合も成立することはこれらの考察以前に Brascamp - Lieb [4] によって示されている.

2.2 α-Concavity と解

$\mathbf{R}^N$ 上の関数 f に対して, $\mathbf{R}^N$ 上のある凸集合 Ω 上で正値連続関数, その外では零となっていると仮定する. このとき, $\alpha \in [-\infty, \infty]$ に対して, f が α-concave であるとは,

$$\begin{cases} \alpha = \infty & \Rightarrow \quad f \text{ は } \Omega \text{ 上定数関数}, \\ 0 < \alpha < \infty & \Rightarrow \quad f^\alpha \text{ は } \Omega \text{ 上 concave}, \\ \alpha = 0 & \Rightarrow \quad \log f \text{ は } \Omega \text{ 上 concave}, \\ -\infty < \alpha < 0 & \Rightarrow \quad f^\alpha \text{ は } \Omega \text{ 上 convex}, \\ \alpha = -\infty & \Rightarrow \quad f \text{ は } \Omega \text{ 上 quasi-concave} \end{cases}$$

として定義する. ある凸開集合上でのみ定義されている非負値関数に対しては, 零拡張することによって, 同様に凸開集合上の関数について α-concavity を定義できる.

例： $e^{-|x|^2}$: 0-concave, $(1+|x|^2)^{-1}$: $(-1/2)$-concave

ここで, α-concavity について,

(1) f が α-concave ならば, 任意の $\beta \le \alpha$ に対して f は β-concave,

(2) f, g がそれぞれ α-concave, β-concave とする. ただし, $\alpha, \beta \in [0, \infty]$. このとき, f と g の合成積 $f * g$ は γ-concave となる. ただし, $\gamma^{-1} = N + \alpha^{-1} + \beta^{-1}$.

ということが知られている．これを用いると，$\mathbf{R}^N$ 上 φ が 0-concave ならば，$\mathbf{R}^N$ 上の熱方程式の解，

$$e^{t\Delta}\varphi = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|x-y|^2/4t}\varphi(y)dy.$$

も 0-concave であることがわかる．次に，解の α-concavity に関する結果を紹介する．

α-Concavity と楕円型方程式

Kennigton [20] は，$\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ 上の有界凸集合 Ω において

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \geq 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

を考え，f の α-concavity と解の凸性の関係を調べ，

$$f : \alpha\text{-concave},\ \alpha \in [1,\infty) \quad \Rightarrow \quad u : \frac{\alpha}{1+2\alpha}\text{-concave}$$

を得た．さらに，非線形楕円型方程式に応用し，$f = \lambda u^\gamma$, $\gamma \in [0,1]$, $\lambda > 0$ の場合，

$$u : \frac{1-\gamma}{2}\text{-concave}$$

例えば，

$$f(u) = \lambda u + 1, \qquad u^\gamma \quad (\gamma > 1)$$

等の場合には応用できない．また，この結果の熱方程式版は得られていない．

Log-Concavity と半線形熱方程式

熱方程式の log-concavity の保存についての一般化について Greco-Kawohl [11] で調べられている．例えば，$\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ 上の有界凸集合 Ω において

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - f(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x) \geq 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

を考える．ただし，$f \in C^2(\mathbf{R})$ とし，ある正定数 L が存在して

$$-L \leq f'(u) - \frac{f(u)}{u} \leq uf''(u), \qquad u > 0$$

をみたすとする. このとき,

φ が log-concave ならば, 任意の $t>0$ に対して, $u(t)$ も log-concave

が成立する. 上の条件をみたす f の典型例としては,

$$f(u)=\lambda u^p, \qquad \lambda>0,\ p>1$$

が挙げられる. しかし, 藤田型半線形熱方程式 $u_t=\Delta u+u^p$ といった方程式は上の f の条件をみたしていない.

2.3 Parabolic Quasi-Concavity と熱方程式

まず, quasi-concavity と熱方程式の解との関係について考察してみる. 有界凸領域 Ω において, (2.1) の解 u を考える. このとき, 任意の $t>0$ に対して, 解 u が quasi-concave になるための一つの十分条件は初期値 φ が log-concave である. では, より一般的な場合として, 初期値 φ が quasi-concave ならば, 任意の $t>0$ に対して解 u も quasi-concave となるか, という問題を考えてみる. 実際, $N=1$ の場合は, 熱方程式の零点の個数の非増加性より, φ が quasi-concave ならば, 任意の t に対して $u(t)$ も quasi-concave であることがわかる. しかし, $N\geq 2$ の場合は Ishige - Salani [16] によって否定的に解決された.

最後に, Borell [3] による興味深い結果を紹介して終わりたいと思う.

$$u_t=\Delta u \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N\times(0,\infty), \quad u(x,0)=\chi_\Omega(x) \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N$$

の解 $u=u(x,t)$ を考える. ただし, Ω は有界凸集合とする. χ_Ω が log-concave であるから, 任意の $t>0$ に対して $u(t)$ の level sets は凸である. そこで, 時空間の level set $E_\lambda\equiv\{(x,t)\,:\,u(x,t)>\lambda\}$ $(\lambda>0)$ はどのような性質を持つのであろうか?という問題を考えてみる. このとき, Borell [3] によると, E_λ そのものではなく,

$$\tilde{E_\lambda}\equiv\{(x,t^{1/2})\,:\,(x,t)\in E_\lambda\}$$

の凸性を示し, parabolic quasi-concavity という概念を導入している. この証明は確率論的手法によりなされており, これ以外に parabolic quasi-concavity を扱っている論文は今現在, ないと思われ, 今後, どのような進展がなされるのか興味深い.

References

[1] R. Atar and K. Burdzy, On Neumann eigenfunctions in lip domains, J. Amer. Math. Soc., **17** (2004), 243–265.

[2] R. Bañuelos and K. Burdzy, On the "Hot Spot Conjecture" of J. Rauch, Jour. Func. Anal. **164** (1999), 1-33.

[3] C. Borell, A note on parabolic convexity and heat conduction, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **32** (1996), 387–393.

[4] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation, J. Functional Analysis **22** (1976), 366–389.

[5] K. Burdzy, The hot spots problem in planar domains with one hole, Duke Math. J. **129** (2005), 481–502.

[6] K. Burdzy and W. Werner, A counterexample to the "hot spots" conjecture, Ann. of Math. **149** (1999), 309-317.

[7] L. A. Caffarelli and J. Spruck, Convexity properties of solutions to some classical variational problems, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 1337–1379.

[8] I. Chavel and L. Karp, Movement of hot spots in Riemannian manifolds, J. Analyse Math., **55** (1990), 271-286.

[9] P. Concus and R. Finn, On capillary free surfaces in a gravitational field, Acta Math. **132** (1974), 207–223.

[10] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103–1133.

[11] A. Greco and B. Kawohl, Log-concavity in some parabolic problems, Electron. J. Differential Equations, 1999 (1999), 1–12.

[12] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste, Dirichlet heat kernel in the exterior of a compact set, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 93–133.

[13] K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Neumann boundary condition, J. Differential Equations **212** (2005), 394-431.

[14] K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Dirichlet boundary condition, Adv. Differential Equations, 12 (2007), 1135-1166.

[15] K. Ishige and Y. Kabeya, On the decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 861-898.

[16] K. Ishige and P. Salani, Is quasi-concavity preserved by heat flow?, preprint.

[17] D. Jerison and N. Nadirashvili, The "hot spots" conjecture for domains with two axes of symmetry, J. Amer. Math. Soc., **13** (2000), 741-772.

[18] S. Jimbo and S. Sakaguchi, Movement of hot spots over unbounded domains in $\mathbf{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **182** (1994), 810-835.

[19] B. Kawohl, "Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE", Springer Lecture Notes in Math., Vol. 1150, Springer, New York, 1985.

[20] A. U. Kennington, Power concavity and boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 687–704.

[21] N. J. Korevaar, Capillary surface convexity above convex domains, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 73–81.

[22] N. J. Korevaar, Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 603–614.

[23] N. Mizoguchi, H. Ninomiya, and E. Yanagida, Critical exponent for the bipolar blowup in a semilinear parabolic equation, J. Math. Anal. Appl. **218** (1998), 495-518.

[24] J. Rauch, Five problems: An introduction to the qualitative theory of partial differential equations, in "Partial Differential Equations and Related Topics", Springer Lecture Notes in Math., Vol. 446, pp. 335-369, Springer, New York, 1975.