

第28回 発展方程式若手セミナー
報告集

2007年1月

第28回 発展方程式若手セミナー 報告集

2006年8月7日(月)～10日(木)

於：六甲山Y M C A (神戸市灘区六甲山町)

報告集発刊にあたって

発展方程式若手セミナーは、「発展方程式およびその周辺分野の将来の方向を探るために、若手研究者の討論と情報交換の場を設けよう。」という趣旨で、1979年夏に発足した合宿形式のセミナーです。第28回を迎えた2006年度では、8月7日（月）から8月10日（木）の4日間、神戸は六甲山頂にある「六甲山YMCA」という施設を会場に開催されました。

はじめに、第28回発展方程式若手セミナーは、以下の補助金からの援助に支えられ開催された事をご報告いたします。

科学研究費 基盤研究 (S) (研究課題番号: 15104001)

研究代表者: 小藺 英雄 (東北大学大学院理学研究科・教授)

研究課題: 非線形偏微分方程式の大域的可解性と解の漸近挙動に関する統一理論

科学研究費 基盤研究 (A) (研究課題番号: 15204008)

研究代表者: 堤 誉志雄 (京都大学大学院理学研究科・教授)

研究課題: 非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の構造

科学研究費 萌芽研究 (研究課題番号: 17650235)

研究代表者: 剣持 信幸 (千葉大学教育学部・教授)

研究課題: 非線形解析学の新展開と科学教育学習プログラムの開発

その他2件^{a) b)}

上でご紹介いたしました小藺先生・堤先生・剣持先生は、今回に限らず常日頃より当セミナーの運営を力強く応援してくださっている先生方です。またご援助の際には、京都大学大学院理学研究科数学教室事務室の岡 栄子さんと東北大学大学院理学研究科数学専攻事務室の齊藤 浩子さんが、煩雑な事務手続きの一切を処理してくださいました。お世話になりました方々へ、この場をお借りしまして厚く御礼申し上げます。

今回のセミナーでは、幹事連名(2名)の体制で運営していたことから、その機動力を最大限に活かそうと、2人の招待講演者による2本立ての特別講演を企画いたしました。いうまでもなく、特別講演は当セミナーの看板企画ですが、今回はその講師を東京大学大学院数理科学研究科の儀我 美一先生と九州大学大学院数理学研究院の木村 正人先生のお二方をお願いし、セミナー初日(8月7日)と3日目(8月9日)にそれぞれ90分講演して頂きました。初日の儀我先生は「特異拡散方程式とその応用」というタイトルで、特異拡散方程式の導入から最先端の研究成果に至るまでの縦断的な内容を、要点を抑えつつ明解に解説してくださいました。続いて3日目の木村先生は「亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析」というタイトルで、破壊の力学系における亀裂進展の数学モデルとその解析手法について、入門的な内容を中心に懇切丁寧に解説してくださいました。

特別講演の他にも、セミナー開催中には31名の若手研究者・大学院生による一般講演および夕食後の大学院生・学部生を主役としたショートコミュニケーションなどを通し、若手セミナーならではの活発な研究交流が連日行われました。今回のセミナーがこのような盛大な盛り上がりを見せた事は、ひとえに参加者の皆様の暖かいご協力の賜物と感

^{a)} 科学研究費 若手研究 (B) (研究課題番号: 17740099) 研究代表者: 白川 健
研究課題: 自由境界を伴う非線形現象を記述する力学系の大域的安定性の研究

^{b)} 科学研究費 若手研究 (B) (研究課題番号: 18740095) 研究代表者: 深尾 武史
研究課題: 強い非線形性を拡散項に持つ偏微分方程式の可解性とその応用

謝の気持ちで一杯です。招待講演者・一般講演者の方々へはもちろんの事ながら、遠路はるばるお越しくださいましたすべての参加者の皆様方へ、幹事一同改めまして厚く厚く御礼申し上げます。

この報告集は、今回のセミナーでご講演くださいました皆様方をお願いしまして、ご自身の講演内容を書き下ろして頂いた原稿をまとめたものです。とりわけ特別講演に関しましては、前々回の報告集より新しい試みとして続けられている「座長による総括」を掲載しておりますので、そこから少しでもセミナーの雰囲気を感じ取っていただければと存じます。この冊子がセミナーに参加してくださいました方々や関連分野の研究者の皆様のお役に立てましたら幸いです。

資金面の他にも、今回のセミナーでは実に様々な方々からのご助力・ご助言があったことを忘れることが出来ません。特に代表が決断に迷ってしまった場面で相談に乗ってくださいました、岐阜大学教育学部の愛木 豊彦先生、近畿大学工学部の伊藤 昭夫先生（第24回若手セミナー幹事）、室蘭工業大学工学部の山崎 教昭先生、工学院大学工学部の竹内 慎吾先生（第26回若手セミナー幹事）、島根大学総合理工学部の町原 秀二先生（第27回若手セミナー幹事）には、何度も力強く背中を押してもらった事をよく覚えております。その節は、ご多忙中にも関わらず、迅速かつ的確なアドバイスをくださいまして、本当にありがとうございました。また、セミナー準備から当日までの間、六甲山YMCAの池田 勝一所長をはじめとするスタッフの皆様方には、代表のわがままで非常識なお願いを何度もきいてもらい、まことに申し訳ありませんでした。六甲山YMCAのスタッフの皆様のおかげで寛大なご厚意に深く感謝申し上げますとともに、ご迷惑をかけてしまいました事を心よりお詫び申し上げます。加えて、セミナー期間中に受付や会場の整備などの雑用を手伝ってくださいました神戸大学の大学院生・学部生スタッフの皆さんにも、代表の大雑把な指示を的確に汲み取って臨機応変な働きをしてくれました事に、大変感謝しております。

更に、会議などの催し物では常に悩みの種であるはずの「人集め」についても、今回のセミナーでは案内を数回出すだけで実に70名を超える方々が参加申し込みをしてくださいました。代表自身、幹事を務めるまではあまり意識したことはなかったのですが、このような安定した求心力は30年近くの永い時間をかけて蓄積された若手セミナーの「財産」ともいえるべきもので、そこに携わって来られた先輩方にはただただ頭が下がるばかりです。このような貴重な財産を持つセミナーは、非常に得がたい研究交流の機会であるばかりでなく、今後も是非とも存続させるべきものであると意を新たにしている次第です。

最後になりましたが、次回の第29回発展方程式若手セミナーの幹事は、宇部工業高等専門学校の大崎 浩一先生です。次回セミナーにおきましても、皆様のご理解とご支援をどうぞよろしくお願いいたします。これからも若手セミナーを通じた意義深い研究交流が末永く続くようお願いを込めて、序文の締めとしたいと思います。

2007年1月
第28回発展方程式若手セミナー開催本部
代表: 白川 健
副代表: 深尾 武史

第28回発展方程式若手セミナー 参加者名簿 (敬称略)

セミナー参加者 (71名) 敬称略・申込順・※印は講演者・*印は特別講演者

* 儀我 美一 (ぎが よしかず)	東京大学大学院 数理科学研究科 教授
* 木村 正人 (きむら まさと)	九州大学大学院 数理学研究院 助教授
角谷 敦 (かどや あつし)	広島修道大学 経済科学部 教授
高橋 勝雄 (たかはし かつお)	東京大学大学院 数理科学研究科 助手
※ 河内 一樹 (かわち かずき)	東京大学大学院 数理科学研究科 D1
※ 下條 昌彦 (しもじょうまさひこ)	東京大学大学院 数理科学研究科 D2
岩川 風 (いわかわ ふう)	熊本大学 理学部数理科学科 B4
加納 理成 (かのう りせい)	千葉大学大学院 自然科学研究科 D1
村瀬 勇介 (むらせ ゆうすけ)	千葉大学大学院 自然科学研究科 D1
熊崎 耕太 (くまざき こうた)	岐阜大学大学院 教育学研究科 M2
※ 大塚 岳 (おおつか たけし)	東京大学大学院 数理科学研究科 研究拠点形成特任研究員
※ 五十嵐 威文 (いがらしたけふみ)	日本大学 理工学部・日本工業大学 非常勤講師
※ 澤田 宙広 (さわだ おきひろ)	早稲田大学理工学術院 数理科学科 日本学術振興会特別研究員
愛木 豊彦 (あいき とよひこ)	岐阜大学 教育学部 助教授
三瓶 恵美 (さんぺい えみ)	東海大学大学院 理学研究科 M1
※ 松澤 寛 (まつざわ ひろし)	沼津工業高等専門学校 教養科 講師
※ 山岸 弘幸 (やまぎし ひろゆき)	大阪大学大学院 基礎工学研究科 D3
※ 加藤 正和 (かとう まさかず)	大阪大学大学院 理学研究科 D2
土井 一幸 (どい かずゆき)	大阪大学大学院 理学研究科 M1
※ 川上 竜樹 (かわかみ たつき)	東北大学大学院 理学研究科 D1
瀬片 純市 (せがた じゅんいち)	福岡教育大学 教育学部 講師
※ 関 行宏 (せき ゆきひろ)	東京大学大学院 数理科学研究科 D1
※ 池田 幸太 (いけだ こうた)	東北大学大学院 理学研究科 D2
※ 佐藤 典弘 (さとう のりひろ)	早稲田大学大学院 理工学研究科 D4
※ 久保 隆徹 (くぼ たかゆき)	早稲田大学理工学術院 客員講師
※ 水野 将司 (みずの まさし)	東北大学大学院 理学研究科 M2
横田 智巳 (よこた ともみ)	東京理科大学 理学部 講師
石渡 哲哉 (いしわた てつや)	岐阜大学 教育学部 助教授
岩渕 司 (いわぶち つかさ)	東北大学大学院 理学研究科 M1
※ 大屋 博一 (おおや ひろかず)	早稲田大学 理工学部 助手
原田 潤一 (はらだ じゅんいち)	早稲田大学大学院 理工学研究科 M3
Gutierrez Michael (グッチェレス マイケル)	早稲田大学大学院 理工学研究科 M2
猪奥 倫左 (いおく のりすけ)	東北大学大学院 理学研究科 M1
※ 永安 聖 (ながやす せい)	北海道大学大学院 理学研究院 日本学術振興会特別研究員
※ 米田 剛 (よねだ つよし)	東京大学大学院 数理科学研究科 D1
※ 竹田 寛志 (たけだ ひろし)	東北大学大学院 理学研究科 M2
※ 中口 悦史 (なかぐち えつし)	大阪大学大学院 情報科学研究科 助手
※ 井手健太郎 (いで けんたろう)	九州大学大学院 数理学府 M2
※ 山本 征法 (やまもとまさかず)	東北大学大学院 理学研究科 M2
※ 村上 尊広 (むらかみたかひろ)	大阪大学大学院 基礎工学研究科 D1
※ 山崎 教昭 (やまざきのりあき)	室蘭工業大学 共通講座 助教授
※ 小林 遼 (こばやし りょう)	九州大学大学院 数理学府 M2
久保 竹清 (くぼ たけきよ)	九州大学大学院 数理学府 M1
紀平 大樹 (きひら ひろき)	早稲田大学大学院 理工学研究科 M1

- ※ 森山 繁 (もりやま しげる) 首都大学東京大学院 理工学研究科 D3
 ※ 佐藤 翔大 (さとう しょうた) 東北大学大学院 理学研究科 D1
 ※ 内藤 由香 (ないとう ゆか) 早稲田大学大学院 理工学研究科 D1
 渡辺めぐみ (わたなべ めぐみ) 早稲田大学大学院 理工学研究科 M1
 平林 由梨 (ひらばやし ゆり) 早稲田大学大学院 理工学研究科 M1
 中川 和重 (なかがわ かずしげ) 埼玉大学大学院 理工学研究科 D1
 小野寺有紹 (おのでら みちあき) 東北大学大学院 理学研究科 M2
 山口 範和 (やまぐち のりかず) 早稲田大学理工学術院 助手
 ※ 中村 能久 (なかむら よしひさ) 熊本大学大学院 自然科学研究科 研究生
 ※ 若狭 徹 (わかさ とおる) 早稲田大学大学院 理工学研究科 D4
 伊藤 昭夫 (いとう あきお) 近畿大学 工学部 助教授
 服部 仁実 (はっとり ひとみ) 東海大学大学院 理工学研究科 D1
 Wongsawasdi Jaipong (ウォンサワスディ ジャイポン) 東海大学大学院 理学研究科 D3
 ※ 大塚 厚二 (おおつか こうじ) 広島国際学院大学 情報学部 教授
 大枝 和浩 (おおえだ かずひろ) 早稲田大学大学院 理工学研究科 M2
 塩見 崇史 (しおみ たかふみ) 早稲田大学大学院 理工学研究科 M1
 呉 穎穎 (ご えいえい) 首都大学東京大学院 理工学研究科 D1
 ※ 新國 裕昭 (にいくに ひろあき) 首都大学東京大学院 理工学研究科 D1
 赤木 剛朗 (あかぎ ごろう) 芝浦工業大学 講師
 石渡 通徳 (いしわた みちのり) 東北大学大学院 理学研究科 助手
 大崎 浩一 (おおさき こういち) 宇部工業高等専門学校 経営情報学科 助教授
 吉實 雄紀 (よしざね ゆうき) 早稲田大学大学院 理工学研究科 M2
 剣持 信幸 (けんもち のぶゆき) 千葉大学 教育学部 教授
 中桐 信一 (なかぎり しんいち) 神戸大学 工学部応用数学教室 教授
 内藤 雄基 (ないとう ゆうき) 神戸大学 工学部応用数学教室 助教授
 石井 克幸 (いしい かつゆき) 神戸大学 海事科学部 助教授
 桑村 雅隆 (くわむら まさたか) 神戸大学 発達科学部 助教授

スタッフ (6名)

- 白川 健 (しらかわ けん) 神戸大学 工学部応用数学教室 講師
 深尾 武史 (ふかお たけし) 岐阜工業高等専門学校 一般(自然) 講師
 水野 元 (みずの はじめ) 神戸大学大学院 工学研究科 M1
 正司龍一郎 (しょうじ たついちろう) 神戸大学 工学部情報知能工学科 B4
 永田 怜子 (ながた れいこ) 神戸大学 工学部情報知能工学科 B4
 佐藤 由梨 (さとう ゆり) 神戸大学 工学部情報知能工学科 B4

第 28 回発展方程式若手セミナー プログラム

平成 18 年 8 月 7 日 (月) 15 時 ~ 平成 18 年 8 月 10 日 (木) 12 時

特別講演 2 件, 一般講演 33 件

開催本部 代表: 白川 健 (神戸大), 副代表: 深尾 武史 (岐阜高専)

8 月 7 日 (月)

15:00-15:15 自己紹介

座長 澤田 宙広 (早大)

15:25-15:50 山崎 教昭 (室蘭工大)

楢円・放物型変分不等式に対する最適制御問題について

15:50-16:20 新國 裕昭 (首都大)

Identification of the absent spectral gaps in a class of generalized Kronig-Penney Hamiltonians

16:20-16:40 佐藤 翔大 (東北大)

Life span of solutions of superlinear heat equation

20 分休憩

座長 山崎 教昭 (室蘭工大)

17:00-18:30 【特別講演】 儀我 美一 (東大)

特異拡散方程式とその応用

18:30-20:00 夕食

座長 赤木 剛朗 (芝浦工大)

20:00-21:30 ショート・コミュニケーション

8 月 8 日 (火)

8:00-9:00 朝食

座長 中村 能久 (熊本大)

9:30-10:00 山岸 弘幸 (阪大)

リーマンゼータ関数, ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数

10:00-10:25 大屋 博一 (早大)

拡散項を伴う 3 種 population model の解析について

10 分休憩

座長 大塚 岳 (東大)

10:35-11:05 佐藤 典弘 (早大)

有界領域における Gray-Scott モデルの定常解構造について

- 11:05-11:30 松澤 寛 (沼津高専)
双安定反応拡散方程式の遷移層を持つ定常解について
- 11:30-12:00 米田 剛 (東大)
Functional differential equations of a type similar to $f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$ and its application to Poisson's equation
- 12:00-12:30 昼食
座長 大屋 博一 (早大)
- 12:30-13:00 若狭 徹 (早大)
振り子の方程式の線形化問題に対するすべての固有値・固有関数について
- 13:00-13:30 竹田 寛志 (東北大)
消散項付き非線形波動方程式の外部問題の解について
- 13:30-14:00 中村 能久 (熊本大)
Asymptotic behavior of solutions for nonlinear Schrödinger equations with Stark potential
- 15 分休憩
座長 久保 隆徹 (早大)
- 14:00-14:30 山本 征法 (東北大)
半導体デバイスモデルに由来する Drift-diffusion 方程式系の解の減衰評価について
- 14:30-15:00 小林 遼 (九大)
Drift-diffusion 型モデルの解の減衰評価と漸近挙動について
- 15:00-15:30 井出 健太郎 (九大)
消散的 Timoshenko 系の解の減衰評価と漸近挙動について
- 15 分休憩
座長 中口 悦史 (阪大)
- 15:30-16:00 川上 竜樹 (東北大)
Asymptotic behavior of the solutions for the semilinear heat equations in $\mathbb{R}^N$
- 16:00-16:30 加藤 正和 (阪大)
Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations
- 16:30-17:00 森山 繁 (首都大)
Asymptotics for variational problem with critical growth and slightly positive Dirichlet data
- 17:00-17:30 夕食
座長 赤木 剛朗 (芝浦工大)
- 17:30-18:00 ショート・コミュニケーション

8月9日 (水)

8:00-9:00 朝食

座長 松澤 寛 (沼津高専)

9:20-9:35 内藤 由香 (早大)

L^p - L^q estimates for Cauchy problems of linear thermoelastic with second sound and classical thermoelasticity in 3-D

9:35-10:00 中口 悦史 (阪大)

走化性・増殖方程式とその有限要素近似系のグローバルアトラクタの次元評価

10 分休憩

座長 山口 範和 (早大)

10:10-10:35 澤田 宙広 (早大)

リップシッツ関数を初期値とした場合のナビエ・ストークス方程式の可解性

10:35-11:00 村上 尊広 (阪大)

圧縮性流体力学モデルの解の漸近挙動について

11:00-11:20 久保 隆徹 (早大)

On the Navier-Stokes flows with a nontrivial flux condition in an aperture domain

12:00-13:30 昼食

座長 石渡 通徳 (東北大)

13:30-14:00 池田 幸太 (東北大)

微小重力環境でのすす燃焼パターンの反応拡散モデルについて

14:00-14:30 水野 将司 (東北大)

退化準線形放物型方程式に対する正則性評価について

10 分休憩

座長 石渡 通徳 (東北大)

14:40-15:05 大塚 岳 (東大)

多重井戸型ポテンシャルによる Allen-Cahn 型の方程式の特異極限について

15:05-15:30 五十嵐 威文 (日大)

反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

10 分休憩

座長 伊藤 昭夫 (近畿大)

15:40-16:05 永安 聖 (北大)

多層からなる棒状媒体に対する非破壊検査の逆問題

- 16:05-16:30 大塚 厚二 (広島国際学院大)
破壊現象の数値モデル
- 20分休憩
- 座長 横田 智巳 (東京理科大)
- 16:50-18:20 【特別講演】 木村 正人 (九大)
亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析
- 18:30-21:00 夕食会

8月10日(木)

- 8:00-9:00 朝食
- 座長 瀬片 純市 (福岡教育大)
- 9:30-10:00 下條 昌彦 (東大)
半線形熱方程式の空間無限遠での爆発とそのプロファイル
- 10:00-10:30 関 行宏 (東大)
Blow-up directions for quasilinear parabolic equations
- 10分休憩
- 座長 大崎 浩一 (宇部高専)
- 10:40-11:10 河内 一樹 (東大)
年齢構造を考慮した流言伝播の数値モデル
- 11:10-11:30 報告集について・次年度セミナー引継ぎ

目次

山崎 教昭 (室蘭工業大学 工学部 共通講座) 特別講演の総括.....	1
特別講演	
儀我 美一 (東大 数理) 特異拡散方程式とその応用	3-4
横田 智巳 (東京理科大・理) 特別講演の総括.....	5
特別講演	
木村 正人 (九州大学 大学院数理学研究院) 亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析	7-13
山崎 教昭 (室蘭工業大学 工学部 共通講座) 楕円-放物型変分不等式に対する最適制御問題について	15-24
新國 裕昭 (首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 D1) Identification of the absent spectral gaps in a class of generalized Kronig-Penney Hamiltonians	25-29
佐藤 翔大 (東北大学大学院理学研究科数学専攻) 半線型熱方程式の解の Life Span	31-35
亀高 惟倫, 山岸 弘幸 (阪大基礎工 D3), 渡辺 宏太郎 (防衛大), 永井 敦 (日大生産工), 武村 一雄 (東京工科大) リーマンゼータ関数, ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数	37-43
大屋 博一 (佐世保工業高等専門学校 一般科目), 関岡 直樹 (早稲田大学大学院理工学研究科) 拡散項を伴う 3 種 population model の解析について	45-54
佐藤 典弘 (早稲田大学大学院理工学研究科) 有界領域における Gray-Scott モデルの定常解構造について	55-62
松澤 寛 (沼津工業高等専門学校 (教養科)) 双安定反応拡散方程式の遷移層を持つ定常解について	63-73
米田 剛 (東大) A solution to the equation $f'(x) = \lambda^2 f(\lambda x)$, $\lambda > 1$	75-83
若狭 徹 (早稲田大学大学院理工学研究科), 四ツ谷 晶二 (龍谷大学理工学部) 振り子の方程式の線形化問題に対するすべての固有値・固有関数について	85-91
竹田 寛志 (東北大学大学院理学研究科数学専攻 修士 2 年) 消散項付き非線形波動方程式の外部問題の解について	93-98

中村 能久 (熊本大学大学院 自然科学研究科 研究生)	
Asymptotic behavior of solutions for nonlinear Schrödinger equations with Stark potential	99–104
山本 征法 (東北大学大学院理学研究科数学専攻 M2)	
半導体デバイスモデルに由来する Drift-diffusion 方程式系の解の減衰評価について	105–109
小林 遼 (九州大学大学院数理学府), 川島 秀一 (九州大学大学院数理学研究院)	
Drift-diffusion 型モデルの解の減衰評価と漸近挙動について	111–116
井手 健太郎 (九州大学大学院数理学府), 川島 秀一 (九州大学大学院数理学研究院)	
消散的 Timoshenko 系の解の減衰評価と漸近挙動について	117–122
川上 竜樹 (東北大学大学院理学研究科 D1)	
半線形熱方程式の解の L^q 空間における漸近挙動	123–128
加藤 正和 (阪大)	
Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations	129–135
森山 繁 (首都大院理工学研究科)	
Asymptotics for variational problem with critical growth and slightly positive Dirichlet data	137–141
内藤 由香 (早稲田大学大学院 D1)	
$L^p - L^q$ Estimates for Cauchy Problems of Linear Thermoelastic with second sound and Classical thermoelasticity in 3-D	143–148
中口 悦史 (大阪大学 大学院情報科学研究科)	
走化性・増殖方程式とその有限要素近似系のグローバルアトラクタの次元評価	149–158
澤田 宙広 (早大理工、学振 P D)	
非有界な初期値に対するナビエ・ストークス方程式の局所可解性について ..	159–168
久保 隆徹 (早稲田大学理工学部)	
On the Navier-Stokes flows with a nontrivial flux condition in an aperture domain	169–174
池田 幸太 (東北大学大学院理学研究科数学専攻), 三村 昌泰 (明治大学理工学部数学科)	
微小重力環境でのすす燃焼パターンの反応拡散モデルについて	175–180
水野 将司 (東北大学大学院 理学研究科 M2)	
退化準線型放物型方程式に対する正則性評価について	181–186
大塚 岳 (東京大学大学院数理科学研究科)	
多重井戸型ポテンシャルによる Allen-Cahn 型の方程式の特異極限について ..	187–193

永安 聖 (北海道大学大学院理学研究院), 中村 玄 (北海道大学大学院理学研究院)	
多層からなる棒状媒体に対する非破壊検査の逆問題	195–203
大塚 厚二 (広島国際学院大学 情報学部)	
破壊現象の数値モデル	205–215
下條 昌彦, 俣野 博 (東大・数理)	
The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations ..	217–222
関 行宏 (東京大学大学院数理科学研究科 D1)	
Blow-up directions for quasilinear parabolic equations	223–229
河内 一樹 (東京大学数理科学研究科 D1)	
年齢構造を考慮した流言伝播の数値モデル	231–238
松村 昭孝 (大阪大学大学院情報科学研究科), 村上 尊広 (大阪大学大学院基礎工学研究科)	
半導体を記述するある流体力学モデルの解の漸近挙動について	239–245
五十嵐 威文 (日本大学理工学部・非常勤講師 日本工業大学工学部・非常勤講師)	
反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について	247–261

特別講演の総括

講演者： 儀我 美一（東京大学大学院 数理科学研究科 教授）
（北海道大学 COE プログラム 東京分室代表）

講演題目： 特異拡散方程式とその応用

日時： 8月7日（第1日目） 17:00 ~ 18:30

1. はじめに. 今回の発展方程式若手セミナーでは、特別講演が2つありました。1つは、儀我美一先生（東京大学大学院 数理科学研究科）による特別講演『特異拡散方程式とその応用』, もう1つは、木村正人先生（九州大学大学院 数理学研究院）による特別講演『亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析』でした。

私は、儀我美一先生による特別講演の座長を務めさせて頂きました。そこで、簡単ではありますが、儀我美一先生による特別講演を振り返ってみたいと思います。

2. 特別講演について. 特別講演の講師である儀我美一先生は、流体問題、解の爆発問題、粘性解理論、結晶成長問題など幅広く研究されています。その中でも今回は、『特異拡散方程式とその応用』について特別講演して頂きました。

現在、様々な分野で、また多岐にわたり、『特異拡散方程式』が登場します。その分類を特別講演の始めにして頂いたので、私を含めて、多くの研究者や院生にとって、とてもわかりやすい『特異拡散方程式の紹介』でした。『特異拡散方程式』は、その名の通り『特異』であるため、その実体やイメージをつかむのが難しいです。特別講演では、空間1次元の場合を考え、初歩的な微分や積分のみを使って、丁寧に『特異拡散方程式』の説明をして頂いたので、『特異拡散方程式』に興味を持った、または、より深く理解した若手研究者や院生が数多くいたと思います。

講演の後半は、儀我先生の最新の研究結果についてでしたので、少々、若手研究者や院生にとっては、難しかったかなという印象を受けました。しかし、『どこまで結果が得られていて、何が未解決問題なのか』を明確に講演して頂いたので、研究ネタを見つけた方も数多くいたと思います。

特別講演全体を通じて、儀我先生の研究パワーを随所に感じました。最近、大学は研究よりも教育や地域貢献重視になってきました。『そのような状況でも、研究に時間を十分に費やすことができない現状でも、頑張って数学を研究・勉強しなさい』という儀我先生のメッセージが込められた特別講演だったと感じております。

3. 若手セミナーについて. 発展方程式若手セミナーの開催主旨は、『若手研究者が討論・情報交換する事を通じ、発展方程式とその周辺分野の将来の方向性を探る』です。院生の方々には、積極的に特別講演や一般講演で質問をしてほしいと思っています。質問することも大切な勉強ですが、『質問する勇気がない』方は、『休憩時間』、『食事中』や『夜の会』等の時間を利用し、講演者に直に質問してみてもはどうでしょうか？質問に花が咲き、『数学を語り合い、夜があける』こともあるかと思います。（実際、私たちは、今回も夜を明かしてしまいました…）発展方程式若手セミナーを有効利用して、他大学・他分野の方々との交流を深めながら、新たな数学分野の開拓などに取り組んで頂ければ幸いです。その事により、本セミナーの開催意義が達成されると思います。

最後に、セミナー開催中に終始お世話になった第28回発展方程式若手セミナーの幹事である神戸大学の白川健先生、岐阜工業高等専門学校の深尾武史先生の両先生に心から深く感謝申し上げます。

室蘭工業大学 工学部 共通講座
山崎 教昭

特異拡散方程式とその応用

儀我 美一 (東大 数理)

特異拡散方程式は、拡散係数が無限大になりうる拡散方程式を表す総称である。例えば p -ラプラシアン $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ による熱方程式は $1 \leq p < 2$ のとき特異拡散方程式である。本講演で考える方程式はこの $p = 1$ に対応するクラスであり、形式的には偏微分方程式であるが、未知関数の時間微分が空間の無限小の量だけでは決まらない、非局所性を持つものである。問題の起源をいくつか述べる。

- (i) **結晶成長の問題から**： Γ_t の時刻 t をパラメーターとする。 Γ_t の単位ベクトル $\mathbf{n}$ 方向の成長速度を V とする。 Γ_t は例えば結晶表面を表すとする。界面支配モデルの例として曲率流方程式

$$(1.1) \quad V = -M(\mathbf{n})(\operatorname{div}_{\Gamma_t} \nabla \gamma(\mathbf{n}) + C(x, t))$$

は $C = 0$ の場合、金属の antiphase 粒界の運動の記述によく用いられる。ここで γ は表面エネルギーを表し、 $\mathbf{R}^n$ 上の正斉次1次の凸関数とする。この量は結晶構造により定められているので既知とする。 M は動的係数で正とし、既知とする。 C は結晶を成長させる駆動力である。 div は Γ_t 上での発散を表す。 γ が C^2 級で M が連続かつ C が連続かつ x についての微分 $\nabla_x C$ が局所有界であれば、(1.1) の初期値関数は少なくとも時間大域的に広義解（等高面法による解 $\{\Gamma_t\}$ ）を持つことが知られている [5]。しかし J. Taylor [16] や S. Angenent-M. Gurtin [2] が提唱したクリスタラインエネルギーの場合は γ は区分的1次であり C^1 ですらない。この時 (1.1) は（非局所的）特異拡散方程式である。今のところ C が定ベクトルで空間次元 $n = 2$ の時のみ等高面法による解が一意存在することが知られているだけで [3]、一般の場合はまだ未解決である。最近3次元の場合 G. Bellettini らのグループにより $M = \gamma$ で $C \equiv 0$ の場合、初期曲面が凸の場合に解の存在が示された。論文 [3] のアプローチは粘性解論を用いるもので Bellettini らのは変分法を用いるものである。

- (ii) **画像処理の問題**：画像のノイズを取る問題で全変動流方程式つまり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(f - u) \quad \lambda > 0$$

が用いられることがある。 f は既知関数とする。 u は画像の濃淡を表す関数である。もともと L. I. Rudin-S. Osher-E. Fatemi [13] により提唱された。この種の問題は劣微分方程式論や非線形半群論を用いることによって存在、一意性等が研究されている。例えば [1]、[11]。ここでもし u がベクトル値で $|u| = 1$ という束縛をつけると全変動流方程式は1-調和写像流方程式となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + |\nabla u|u$$

となる。こちらはカラー画像の色調からノイズを取る一方式である [15]。この方程式については定義域が1次元の場合 [7] に時間大域解の存在が区分的定数の初期値について示されているが、高次元の場合は局所解の存在が初期エネルギーが小さく、初期値自身滑らかな場合に示すだけである [6]。その離散モデルの研究も行われている [8]。

- (iii) **多結晶の金属粒の平均的な方向場の動きについて**：これは小林氏ら [12] によって提唱されたモデルで、全変動流が用いられている。ここでも値域は $\mathbf{R}$ よりも $\mathbf{S}^1$ であったりするので 1- 調和写像流の研究が欠かせない。その他、白川氏 [14] により別のタイプの束縛のついた全変動流も研究されている [10]。
- (iv) **衝撃波の等高面法による計算**：バーガーズ方程式の解 $y = u(x, t)$ のグラフをそのまま xy 平面での曲面の運動と思って変形させると、関数のグラフとはみなせなくなってしまう。垂直方向 y だけの特異拡散を導入することにより等高面法により不連続解をとらえることが可能になった。本講演ではこの点を [4] や [17] にそって主に述べる。
- (v) **雪結晶成長を記述するステファン問題への応用**：これは P. Rybka と著者との一連の共同研究による。例えばサーベイ論文 [9] を参照。(1.1) が外場と連立されているモデルである。本講演ではこれについても簡単にふれる。

REFERENCES

- [1] F. Andrew-Vaillo, V. Caselles and J. M. Mázon, Existence and uniqueness of a solution for a parabolic quasilinear problem for linear growth functionals with L^1 -data, *Math. Ann.*, **322**, (2002), 139-206.
- [2] S. B. Angenent and M. E. Gurtin, Multiphase thermomechanics with interfacial structure 2, Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **108**, (1989), 323-391.
- [3] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane, *Arch Rational Mech. Anal.*, **159**, (2001), 295-333.
- [4] M.-H. Giga and Y. Giga, Minimal vertical singular diffusion preventing overturing for the Burgers equation, *Recent Advances in Scientific Computing and Partial Differential Equations*, *Contemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence*, **330**, (2003), 73-88.
- [5] Y. Giga, Surface Evolution Equations - a level set approach, *Birkhauser*, (2006).
- [6] Y. Giga, Y. Kashima and N. Yamazaki, Local solvability of a constrained gradient system of total variation, *Abstract and Applied Analysis*, **8**, (2004), 651-682.
- [7] Y. Giga and R. Kobayashi, On constrained equations with singular diffusivity, *Methods and Applications of Analysis*, **10**, (2003), 253-278.
- [8] Y. Giga, H. Kuroda and N. Yamazaki, An existence result for a discretized constrained gradient system of total variation flow in color image processing, *Interdisciplinary Information Sciences*, **11**, (2005), 199-204.
- [9] Y. Giga and P. Rybka, Faceted crystals grown from solution - a Stefan type problem with a singular interfacial energy, *Hokkaido Univ. Preprint Series in Math.*, **#753**, (2005).
<http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/>
- [10] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation function with constraint, *Nonlinear Anal.*, **46**, (2001), 435-455.
- [11] R. Kobayashi and Y. Giga, Equations with singular diffusivity, *J. Stat. Phys.*, **95**, (1999), 1187-1220.
- [12] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, A continuum model of grain boundaries, *Physica D*, **140**, (2000), 141-150.
- [13] L. I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, **60**, (1992), 259-268.
- [14] K. Shirakawa, Parabolic variational inequality associated with the total variation functional, *Nonlinear Anal.*, **47**, (2001), 3195-3206.
- [15] B. Tang, G. Sapiro and V. Caselles, Color image enhancement via chromaticity diffusion, *IEEE Trans on Image Processing*, **10**, (2001), 701-707.
- [16] J. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, in *Differential Geometry*, B. Lawson and K. Tanenblat, eds., *Proceedings of the Conference on Differential Geometry*, Rio de Janeiro, *Pitman Monograph Surveys Pure Appl. Math.*, **52**, (1991), 321-336.
- [17] Y.-H. R. Tsai, Y. Giga and S. Osher, A level set approach for computing discontinuous solutions of a class of Hamilton-Jacobi equations, *Math. Comp.*, **72**, (2003), 159-181.

特別講演の総括

講演者： 木村 正人（九州大学大学院 数理学研究院 助教授）
講演題目： 亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析
日時： 8月9日（第3日目） 16:50 ~ 18:20

横田 智巳（東京理科大・理）

第28回発展方程式若手セミナーにて、2つ目の特別講演の座長を務めました横田と申します。幹事からの依頼により、特別講演の総括をさせて頂くことになりました。

本年度の特別講演は、九州大学大学院数理学研究院の木村正人先生を講師として「亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析」というタイトルで行われました。特別講演ということもあり、講演前には、参加者の楽しみに待つ様子がうかがえました。木村先生は、パラメータ付き抽象的変分問題の一般論を展開し、亀裂進展におけるエネルギー解放率に関する結果を大変わかりやすく解説して下さいました。エネルギー解放率の領域積分表現が、パラメータによるエネルギーの1階 Fréchet 微分として“見通しよく”得られるということだけでも美しいと思いましたが、さらに従来の結果の改良にもなっていることが凄いと思いました。導入、抽象論、主結果及びその証明の全てにおいて、丁寧でわかりやすい説明をされたので、学部生や院生でも十分理解していたと思います。特に、準備として展開された抽象論が、Banach 空間における陰関数定理と Lax-Milgram の定理の応用として簡潔に得られるということが、聴衆にうけていたようです。実際、講演後に何人かの学部生や院生が「抽象論がわかりやすくて楽しめた」という感想を述べていました。

さて、前回（第27回）及び前々回（第26回）の発展方程式若手セミナーの特別講演総括でも話題となっていました、「学部生や院生の積極的な質問」及び「座長によるその環境作り」は今回の特別講演では十分には達成できませんでした。特に、後者は座長の責任であり反省しています。しかしながら、木村先生の特別講演によって思い出したことがありますので、最後に少しだけ書かせて頂きます。

約6年前、座長は「TULKA-Internet Seminar」¹の一環として行われているワークショップに参加しました。世界各国からの若手（ほとんど学部生や院生）が参加しており、ちょうど「発展方程式若手セミナー」と同じような雰囲気で行われていました。講演中心の「発展方程式若手セミナー」と大きく違っていた点は、各分野の予備知識を解説した入門的講義がセミナーの前半や午前中に行われていたことです。第23回の発展方程式若手セミナーでは、各講演の中でそのような試みが行われていました。木村先生のように入門的講義を取り入れた講演をすることは、一般には難しいと思いますが、今後の発展方程式若手セミナーを企画する際の参考になればと思い、このようなことを書かせて頂きました。

余計なことまで書かせて頂きましたが、特別講演をして下さった木村先生と、幹事である白川氏及び深尾氏に心から感謝申し上げて総括を終わりとさせて頂きます。

¹<http://giotto.mathematik.uni-tuebingen.de/tulka/isem/index.html> で詳細を見ることができます。

亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析

木村 正人 (九州大学 大学院数理学研究院)

1. 亀裂進展におけるエネルギー解放率

弾性体内部を進展する亀裂の挙動を理解するための試みは Griffith [5] に始まったとされ、現在に至るまで、工学・物理・数学などの分野において非常に多くの研究が様々な角度から行われている。破壊力学での Griffith 理論は、亀裂進展力となるエネルギー解放率 G を中心に一般化の試みを経つつ、今でも破壊力学、亀裂進展の数理モデリングとその解析において重要な役割を果たしている (例えば、[4] や [7]–[11] とその参考文献)。

慣性項が無視できる範囲で負荷を徐々に変化させたとき、弾性板における直線形状の亀裂が同じ方向に進展するとき、亀裂進展長さに対する解放エネルギーの比率 G が新しい亀裂面を作るための仕事 G_c を越すとき、すなわち $G \geq G_c$ を Griffith [5] は脆性破壊の発生条件とした。そのため、亀裂形状や負荷との関連が明確になる G の数学的表現が必要となる。

エネルギー解放率とは次のように定義される量である。今、 $\mathbb{R}^n$ 内の (亀裂のない) 有界な弾性体 Ω_* に、 $n-1$ 次元亀裂 Σ が入っているものとする。 $0 \leq t < T$ をパラメータとする仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える。ここで、 $\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2 < T$) である。

慣性が無視できる範囲での遅い亀裂進展においては、 $\Omega_* \setminus \Sigma(t)$ における弾性エネルギー $E(t)$ は

$$(1) \quad E(t) := \min_v \int_{\Omega_* \setminus \Sigma(t)} W(x, v(x), \nabla v(x)) dx,$$

で与えられる。ここで、 v は与えられた境界条件を満たす変位場であり、 $W(x, v(x), \nabla v(x))$ は静弾性エネルギー (外力がある場合はそれを含むポテンシャルエネルギー) 密度である。

そのとき、仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \leq t < T}$ に伴う、 $t = 0$ におけるエネルギー解放率 G は、

$$(2) \quad G := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{E(0) - E(t)}{|\Sigma(t) \setminus \Sigma|},$$

で与えられる。 $E(t) \leq E(0)$ であることから、もし、この極限が存在すれば、 $G \geq 0$ である。

Rice[14] と Cherepanov[2] によるエネルギー解放率の表現 (J 積分) は、等方な定数係数線形 2 次元弾性体における直線亀裂の場合の研究で、後に続く研究も 2 次元問題が主であった。 Ohtsuka [7]–[10] や Ohtsuka-Khludnev [11] は、弱い非線形楕円型方程式 (系) を含む一般次元の曲面亀裂の場合に数学的定式化を行い、エネルギー解放率の存在とその領域積分表現、及び一般 J 積分理論の展開を行った。そこで使われた手法は、形状感度解析のアイデアを用いて仮想亀裂進展を表現し (注意 3.5 を参照)、エネルギー最小原理 (1) に基づいて、(2) の右辺に現れる差分を丁寧に評価するものであった。

エネルギー解放率の数学的取り扱いの難しさは、亀裂の先端 (縁) における変位場や応力場の解の持つ特異性にある。2 次元問題ではこの特異項の係数は応力拡大係数と呼ばれ、エネルギー解放率は応力拡大係数のみに依存することが証明されている。3 次元問題や変数係数 2 次元問題などでの応力拡大係数に関する数学解析は、現在でも研究が続いて

おり未解決な部分も多く残されている。それについては、上記文献や [15], [16] などを参照されたい。

本稿では、[8] における数学的定式化をもとに Lipschitz 連続な領域写像を用いて、その精密化を図り、更に、Fréchet 微分を用いたエネルギー解放率の計算を行い、その領域積分表現を得る。そのための準備として、Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を陰関数定理と Lax-Milgram の定理の応用として展開する。それにより、[8] によるエネルギー解放率の領域積分表現が、パラメータによるエネルギーの 1 階 Fréchet 微分として見通しよく得られるとともに、より弱い条件への精密化・高階エネルギー微分への拡張が得られる。特に、[11] では、領域摂動 $t \rightarrow \varphi(t)$ が $C^2([0, T], W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$ のとき、エネルギー解放率の領域積分表現 (5) が証明されているが、ここでは、 $C^1([0, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$ のとき示されたことになり、従来の結果の改良になっている。

本講演は、[12] および [13] の結果に基づくものである。

2. パラメータ付き抽象的変分問題

本節では、Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を展開する。証明は省略し、結果のみ述べる。最小エネルギーのパラメータ微分については、次の定理が基本となる。

定理 2.1. X と M を実 Banach 空間とする。 X の部分集合 $\mathcal{U}_0$ と M の開部分集合 $\mathcal{O}_0$ 上で定義された汎関数 $J: \mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。各 $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し、ある $u(\mu) \in \mathcal{U}_0$ があって $J(\cdot, \mu)$ の最小値 $J_*(\mu)$ を与えるものとする。すなわち、

$$J_*(\mu) := \min_{v \in \mathcal{U}_0} J(v, \mu) = J(u(\mu), \mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

ここで、 $u \in C^0(\mathcal{O}_0, X)$ で、 $J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ かつ、任意の $v \in \mathcal{U}_0$ に対し $J(v, \cdot) \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で、 $\partial_M J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ であるものと仮定すると、そのとき、 $J_* \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で、次が成り立つ。

$$(1) \quad J'_*(\mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

更にもし、 $\mathcal{U}_0$ も開集合で、 $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $\partial_M J \in C^k(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ 及び $u \in C^k(\mathcal{O}_0, X)$ であるならば、 $J_* \in C^{k+1}(\mathcal{O}_0)$ が成り立つ。

注意 2.2. もし $\mathcal{U}_0$ が開集合で、 $J \in C^1(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ 及び $u \in C^1(\mathcal{O}_0, X)$ であるとする、公式 (1) は次のように簡単に得られる。

$$J'_*(\mu) = D_\mu[J(u(\mu), \mu)] = \partial_X J(u(\mu), \mu)[u'(\mu)] + \partial_M J(u(\mu), \mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu),$$

ここで D_μ は、 $\mu \in M$ に関する Fréchet 微分を表す。最後の等式は、最小値を与える $u(\mu)$ において、 $J(\cdot, \mu)$ の第一変分 $\partial_X J(u(\mu), \mu) \in X'$ が 0 であることから従う。

次の定理は、 $\partial_X J(u, \mu) = 0$ に対する陰関数定理と、Lax-Milgram の定理から従う。

定理 2.3. X と M を実 Banach 空間とし、 $\mathcal{U}, \mathcal{O}$ をそれぞれ X, M の開集合とする。 $u_0 \in \mathcal{U}$ および $\mu_0 \in \mathcal{O}$ と汎関数 $J: \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ について、次の条件を仮定する。

- (1) $J(\cdot, \mu) \in C^2(\mathcal{U})$ ($\mu \in \mathcal{O}$) かつ $\partial_X J \in C^0(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$.
- (2) $\partial_X J(u_0, \mu_0) = 0$.
- (3) $\partial_X^2 J(w, \mu)$ は $(w, \mu) = (u_0, \mu_0)$ において連続。

(4) ある $\alpha > 0$ があって, $\partial_X^2 J(u_0, \mu_0)[w, w] \geq \alpha \|w\|_X^2$ ($w \in X$) を満たす.

そのとき, (u_0, μ_0) の凸開近傍 $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{U} \times \mathcal{O}$ と, $u \in C^0(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ が存在し, $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し, 次の3つの条件は同値になる.

- a. $J(\cdot, \mu)$ は $w \in \mathcal{U}_0$ において極小値を取る.
- b. $w \in \mathcal{U}_0$ は $\partial_X J(w, \mu) = 0$ を満たす.
- c. $w = u(\mu)$.

更に, このとき, $J(\cdot, \mu)$ は $u(\mu)$ において $\mathcal{U}_0$ における最小値を取る.

定理 2.4. 定理 2.3 の条件のもとで, 更に $\partial_X J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$ がある $k \in \mathbb{N}$ について成り立つと仮定する. そのとき, $u \in C^k(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ である.

定理 2.5. 定理 2.3 の条件のもとで, 更に, ある $k \in \mathbb{N}$ について $J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O})$ であると仮定する. そのとき, $J_* \in C^k(\mathcal{O}_0)$ で, かつ (1) が成り立つ.

Lax-Milgram の定理から, 定理 2.3 の条件のもとでは, $\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)$ は X から X' への線形位相同型写像 (すなわち, X から X' への全単射な有界線形作用素) とみなせることがわかるので, $\Lambda(\mu) \in B(X', X)$ をその逆写像として次をみたすように定義する.

$$\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)[\Lambda(\mu)h, w] = h[w] \quad (\forall w \in X, \forall h \in X').$$

この $\Lambda(\mu)$ は次節での楕円型偏微分方程式への応用においては, 考えている境界条件のもとでの楕円型作用素の逆写像に相当する.

定理 2.6. 定理 2.4 で $k = 1$ としたとき,

$$(2) \quad u'(\mu) = -\Lambda(\mu)h_0(\mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0),$$

が成り立つ. 但し, $h_0(\mu) := \partial_M \partial_X J(u(\mu), \mu) \in B(M, X')$ である.

3. エネルギー最小化問題とエネルギー解放率

以下, $\mathbb{R}^n$ の有界凸領域 Ω_0 ($n \geq 2$) を一つ固定して, $W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n) \cong C^{0,1}(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n)$ に属する領域写像 φ について考える. また, $u \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対し,

$$|u|_{\text{Lip}, \Omega_0} := \sup_{x, y \in \Omega_0, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|},$$

とおく. ここで, $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$ を満たす開集合 Ω を一つ固定する. φ によるその変形 $\varphi(\Omega)$ を, 以後 $\Omega(\varphi)$ と表すことにする.

$\mathbb{R}^n$ 上の恒等写像を $\varphi_0(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^n$) とおき, $W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ の開部分集合

$$\mathcal{O}(\Omega) := \left\{ \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n); |\varphi - \varphi_0|_{\text{Lip}, \Omega_0} < 1, \overline{\Omega(\varphi)} \subset \Omega_0 \right\},$$

を定義しておく. 以下, φ はこの $\mathcal{O}(\Omega)$ に属するものとする. 縮小写像の原理から, φ は Ω_0 から $\varphi(\Omega_0)$ への bi-Lipschitz 変換になることがわかる.

また, Ω 上で定義された関数 v に対し, $\Omega(\varphi)$ 上の関数を $\varphi_* v := v \circ \varphi^{-1}$ によって定義する. この φ_* はいわゆる, φ に伴う押し出し作用素 (pushforward operator) である. φ

に伴う Jacobi 行列や Jacobi 行列式を

$$\nabla \varphi^T(x) := \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \right)_{i,j \rightarrow} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (x \in \Omega_0),$$

$$A(\varphi) := (\nabla \varphi^T)^{-1} \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n \times n}), \quad \kappa(\varphi) := \det \nabla \varphi^T \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}),$$

と定義すると, $\Omega(\varphi)$ 上の微分や積分の Ω への引き戻しは, 次のように表現される.

$$(1) \quad [\nabla(\varphi_* v)] \circ \varphi = A(\varphi) \nabla v \text{ a.e in } \Omega \quad (v \in W^{1,1}(\Omega)),$$

$$(2) \quad \int_{\Omega(\varphi)} (\varphi_* v)(y) dy = \int_{\Omega} v(x) \kappa(\varphi)(x) dx \quad (v \in L^1(\Omega))$$

φ が C^1 級の場合によく知られたこれらの公式は, Lipschitz 級の φ についても成り立つ. 例えば, [3] や [17] 等を参照のこと.

命題 3.1. 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ に対し, 次が成り立つ.

1. $\kappa \in C^\infty(W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n), L^\infty(\Omega_0))$ で, 特に, $\kappa'(\varphi_0)[\mu] = \operatorname{div} \mu$ である.
2. $A \in C^\infty(\mathcal{O}(\Omega), L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n \times n}))$ で, 特に, $A'(\varphi_0)[\mu] = -\nabla \mu^T$ である.

写像 φ_* は $L^p(\Omega)$ から $L^p(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型かつ, $W^{1,p}(\Omega)$ から $W^{1,p}(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型になる.

記述の簡単のため, 次の仮定をおく. より一般の状況への拡張性については, 後の注意を参照のこと. $v \in H^1(\Omega(\varphi))$ を $\Omega(\varphi) \subset \mathbb{R}^n$ における状態を表す何らかのスカラー量とする. そのときの考えている系のエネルギーを

$$E(v, \Omega(\varphi)) := \int_{\Omega(\varphi)} W(x, v(x), \nabla v(x)) dx,$$

とする. ここで, $W(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}$ は $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ について定義されたエネルギー密度関数とする. 本稿では, 煩雑さをさけるため, 線形楕円型問題に対応する次の形に限ることとする (注意 3.3, 3.4 参照).

$$(3) \quad W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\zeta^T B(\xi) \zeta + b(\xi) \eta^2) - f(\xi) \eta,$$

ここで, $B(\xi)$ は n 次対称行列 ($\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ と表す) で, $B \in C^k(\Omega_0, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n})$ かつ, ある $\beta_0 > 0$ があって,

$$\zeta^T B(\xi) \zeta \geq \beta_0 |\zeta|^2 \quad (\forall \xi \in \Omega_0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n),$$

を満たすものとする. ここで, k は 0 以上の整数とする. 同様に, b は $b \in W^{k,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R})$ かつ $b(\xi) \geq 0$ ($\forall \xi \in \Omega_0$) を満たし, f は $f \in W^{k,2}(\Omega_0, \mathbb{R})$ を満たすものとする. このエネルギーの最小化問題は, 形式的に次の楕円型方程式に対応する.

$$-\operatorname{div}(B(x) \nabla u) + b(x) u = f(x) \text{ in } \Omega(\varphi).$$

このエネルギーの最小化問題を, 次のような非斉次 Dirichlet 境界条件と斉次 Neumann 境界条件をもつ混合境界条件のもとで考える.

まず, Γ_D を摂動されていない領域 Ω の境界の空でない Lipschitz 連続な部分集合とする (いくつかの部分に分かれていても良い). 正確には有界なトレース作用素 $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_D)$ (但し, $R(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega)) \neq \{0\}$ とする) が定義されていれば良い. $g \in H^1(\Omega)$ を一つ固定し, $v \in H^1(\Omega)$ に対する Γ_D 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_0(v - g) = 0$ を考える. また, Ω の境界の Γ_D 以外の部分では, 零 Neumann 境界条件 (上記線形問題の場合は, $B \nabla u$ の法線成分が 0 に相当) が課されるものとする.

次に、摂動された領域 $\Omega(\varphi)$ における境界条件を述べる。 Γ_D に対応する境界を $\Gamma_D(\varphi) := \varphi(\Gamma_D)$ と書く。 $H^1(\Omega(\varphi))$ から $L^2(\Gamma_D(\varphi))$ へのトレース作用素を γ_φ とするとき、 $v \in H^1(\Omega(\varphi))$ に対する $\Gamma_D(\varphi)$ 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_\varphi(v - \varphi_*g) = 0$ を考える。 また、 $\Omega(\varphi)$ の境界の $\Gamma_D(\varphi)$ 以外の部分では、同様に零 Neumann 境界条件が課されるものとする。

対応する $H^1(\Omega(\varphi))$ のアフィン部分空間は次のようになる。

$$\begin{aligned} V(\varphi, g) &:= \{v \in H^1(\Omega(\varphi)); \gamma_\varphi(v - \varphi_*g) = 0\} \\ &= \{v \in H^1(\Omega(\varphi)); v = \varphi_*g \text{ on } \Gamma_D(\varphi)\}. \end{aligned}$$

ここで、 $V(g) = V(\varphi_0, g) \subset H^1(\Omega)$ とおくと、 $\varphi_*(V(g)) = V(\varphi, g)$ であることに注意しておく。 摂動された領域における、次のエネルギー最小化問題を考える。

問題 3.2. 上記の仮定のもとで、 $V(\varphi, g)$ において $E(\cdot, \Omega(\varphi))$ を最小にする $u(\varphi) \in V(\varphi, g)$ を求めよ。 すなわち、

$$E(u(\varphi), \Omega(\varphi)) \leq E(v, \Omega(\varphi)) \quad (\forall v \in V(\varphi, g)).$$

また、このとき、

$$E_*(\varphi) := \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = E(u(\varphi), \Omega(\varphi)),$$

と定義する。これは $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ をパラメータとするパラメータ付き変分問題とみなせる。

ここで、Ohtsuka [8] による定式化についていくつか注意を述べておく。

注意 3.3. 弾性体の亀裂問題では通常、空間次元 $n = 2$ または 3 で、 n ベクトル値の変位場が状態を表す v に対応するが、[8] ではスカラー値の場合とベクトル値の場合では、以下の議論に本質的な差はないことが示されている。そのため、本論文では煩雑さを避けるため、単独楕円型方程式の場合について記述することとしたが、もちろん以下の結果は弾性体方程式を含むベクトル値の場合に容易に拡張可能である。

注意 3.4. [8] で扱われているように、 W は必ずしも (3) のような線形問題に対応している必要はなく、半線形などある種の弱い非線形問題にも以下の議論は適用可能である。大雑把に言って、 H^1 の枠組みで取り扱える非線形性ならば大丈夫だが、そのような W の満たすべき仮定をすべて書き連ねることは本稿では避け、[8] の取り扱いを参考に挙げるにとどめる。

注意 3.5. エネルギー解放率の計算において必要な仮想亀裂進展は、本論文の枠組みでは次のように取り扱われる。 Ω_* を亀裂の入っていない領域とし、そこに初期亀裂 $\Sigma \subset \bar{\Omega}_*$ が入った領域を $\Omega := \Omega_* \setminus \Sigma$ とする。 $0 \leq t < T$ をパラメータとする滑らかな仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える。ここで、 $\Sigma(t)$ は閉集合とし、

$$\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2) \quad (0 \leq t_1 \leq t_2 < T),$$

である。 $\varphi(t) \in \mathcal{O}(\Omega)$ を $\varphi(0) = \varphi_0$ 、 $\varphi(t)(\Sigma) = \Sigma(t)$ かつ $\partial\Omega_*$ の近傍では $\varphi(t)(x) = x$ となるように取る。パラメータ t として特に、 $t = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma(t) \setminus \Sigma)$ となるように選ぶ。ここで、 $\mathcal{H}^{n-1}$ は $n-1$ 次元 Hausdorff 測度を表す。仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \leq t < T}$ に伴う、 $t = 0$ におけるエネルギー解放率 G は、 E_* の φ に関する Fréchet 微分 E'_* を用いて、

$$G = E'_*(\varphi_0)[\dot{\varphi}(0)],$$

で与えられる。ここで、 $\dot{\varphi}$ は t 微分を表し、 $\dot{\varphi}(0) \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ の台は亀裂先端部の小さな近傍に含まれるように出来る。そのような $\varphi(t)$ の構成については、やはり [8] を参照

のこと. すなわち, エネルギー解放率を求めることは, E_* の Fréchet 微分 $E'_*(\varphi_0)$ を求めることに帰着される.

注意 3.6. また, [8] ではそこで提案されている枠組みが, 亀裂進展問題だけではなく, 他の領域変形や混合境界条件の摂動などへ, 様々な応用を持つことが指摘されているが, それらの指摘は本稿へも直接当てはまる.

以下, W の ξ, η, ζ に関する微分をそれぞれ $\nabla_\xi W = (\frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_n})^T$, $W_\eta = \frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\nabla_\zeta W = (\frac{\partial W}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \zeta_n})^T$ と書く. 更に, 記述の簡略化のために, $W(v(x)) = W(x, v(x), \nabla v(x))$, $\nabla_\xi W(v(x)) = \nabla_\xi W(x, v(x), \nabla v(x))$ などと省略して表すこととする. 今,

$$E_*(\varphi) = \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = \min_{v \in V(g)} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) = \min_{w \in V(0)} E(\varphi_*(w + g), \Omega(\varphi)),$$

であることに注意する. $\mathcal{E}(w, \varphi) := E(\varphi_*(w + g), \Omega(\varphi))$ 及び $\mathcal{E}_*(\varphi) := \min_{w \in V(0)} \mathcal{E}(w, \varphi)$ とおくと, $\mathcal{E}_*(\varphi) = E_*(\varphi)$ である. また, 変数変換公式から,

$$\begin{aligned} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) &= \int_{\Omega(\varphi)} W(y, \varphi_* v(y), \nabla_y(\varphi_* v)(y)) dy \\ (4) \quad &= \int_{\Omega} W(\varphi(x), v(x), [A(\varphi)(x)] \nabla v(x)) \kappa(\varphi)(x) dx, \end{aligned}$$

であることがわかる. 2節で考えたパラメータ付き抽象的変分問題の枠組みを $X = V(0)$ 及び $M = W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ として, $J = \mathcal{E}$ に適用できる. 例えば定理 2.1 が適用出来たとすると, 公式 (1) は次の形になる. $u = u(\varphi_0)$ とおくと, 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\begin{aligned} E'_*(\varphi_0)[\mu] &= \mathcal{E}'_*(\varphi_0)[\mu] = \mathcal{E}_\varphi(u - g, \varphi_0)[\mu] \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u - g, \varphi_0 + \varepsilon \mu) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} E((\varphi_0 + \varepsilon \mu)_* u, \Omega(\varphi_0 + \varepsilon \mu)) \right|_{\varepsilon=0}, \end{aligned}$$

である. こうして, (4) より, $E'_*(\varphi_0)$ は, 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対し,

$$(5) \quad E'_*(\varphi_0)[\mu] = \int_{\Omega} (\nabla_\xi W(u) \cdot \mu - (\nabla_\zeta W(u))^T (\nabla \mu^T) \nabla u + W(u) \operatorname{div} \mu) dx,$$

と, 領域積分によって表現される. この公式は, [8] によって得られたエネルギー解放率の領域積分表現と全く同じものである.

特に線形の場合, (3) とその後に述べた仮定から, 定理 2.5 が適用でき, 次の定理が得られる.

定理 3.7. W が (3) で与えられるとき, $k \in \mathbb{N}$ ならば, $\mathcal{E} \in C^k(V(0) \times \mathcal{O}(\Omega))$ 及び $E_* \in C^k(\mathcal{O}(\Omega))$ で公式 (5) が成り立つ.

REFERENCES

- [1] Berger, M. S., Nonlinearity and Functional Analysis. Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London, 1977.
- [2] Cherepanov, G. P., On Crack propagation in continuous media, Prikl. Math. Mekh. Vol.31, No.3 (1967), 476-493.
- [3] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [4] Francfort, G. A. and Marigo, J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids, Vol.46 (1998), 1319-1342.
- [5] Griffith, A. A., The phenomenon of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Royal Soc. London, A221 (1920), 163-198.

- [6] Henry, D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer Verlag, 1981.
- [7] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., Vol.11 (1981), 21-52.
- [8] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and its applications I – Basic theory –, Japan J. Appl. Math. Vol.2, No.2 (1985), 329-350.
- [9] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics II, Hiroshima Math. J., Vol.16 (1986), 327-352.
- [10] 大塚厚二, J 積分の一般化とその応用, 応用力学論文集, Vol.1, 土木学会, (1998), 35-44.
- [11] Ohtsuka, K. and Khludnev, A., Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design, Control & Cybernetics, Vol.29 (2000), 513-533.
- [12] 木村正人, 若野功, 亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察, 日本応用数理学会論文誌, (to appear).
- [13] Kimura, M. and Wakano, I., Parameter variation formulas and application to the energy release rate in crack extension, (in preparation).
- [14] Rice, J. R., A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol.35 (1968), 379-386.
- [15] Wakano, I., Analysis for stress intensity factors in two dimensional elasticity, Proc. Japan Acad., Vol.73, Ser.A, No.5 (1997), 86-88.
- [16] 若野 功, 二次元曲線亀裂の数学解析と数値解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.13, No.1 (2003), 59-80.
- [17] W. P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions, Sobolev spaces and functions of bounded variation, Graduate Texts in Mathematics, 120, Springer-Verlag, New York (1989).

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

E-mail address: masato@math.kyushu-u.ac.jp

