

第 27 回
発展方程式若手セミナー
報告集

2006年2月

第27回 発展方程式若手セミナー

報告集

2005 年 8 月 22 日 ～ 2005 年 8 月 25 日

於: 夕景湖畔 すいてんかく (島根県松江市千鳥町)

序

町原 秀二 (島根大学総合理工学部)

毎年夏の恒例「発展方程式若手セミナー」2005年の今回は第27回を数えました。会場を島根県松江市の宍道湖ほとりのホテル「すいてんかく」とし、その畳張りの会議室で裸足(or靴下)スタイルで行われました。日程は当初8月22~25日で予定していましたが、2003年大宰府での回を思い起こさせる、台風の接近により1日早い繰上げ解散となってしまいました。そんな中でも参加者は総勢65名で、30の一般講演と柴田徹太郎先生(広島大学)による特別講演、そしてこれまた恒例の、若い学生達によるショートコミュニケーションが行われセミナーは大いに盛り上がりました。この報告集はその連日の雰囲気伝えるのに十分な内容となっています。

今回の第27回若手セミナーはたくさんの方の協力・援助を戴きました。小蘭英雄先生(東北大学)により科研費¹にて学生の旅費の援助をして頂きました。このときに東北大学数学事務の斎藤浩子さんに事務処理をして頂きました。心よりお礼申し上げます。さらに島根県と松江市より「研究集会開催費」として援助金²を戴きました。また前年度幹事の竹内信吾氏(工学院大学)を始めとする北直泰氏(宮崎大学)、中村能久氏(熊本大学)、小澤徹先生(北海道大学)にはセミナー開催・運営に関するたくさんの有益なアドバイスをして頂きました。この場を借りてお礼申し上げます。そしてこの報告集作成作業を含めた多方面に渡る仕事で協力して頂いた堤裕之氏(大阪体育大学)に感謝の意を表したいと思います。

最後に、2006年度の若手セミナーの幹事は白川健氏(神戸大学)と深尾武史氏(岐阜高専)です。第28回の成功、そして50回、100回と若手セミナーが続くことをお祈りして序文の締めとしたいと思います。

¹基盤研究S「非線形偏微分方程式の大域的可解性と解の漸近挙動に関する統一理論」課題番号:15104001, 研究代表者:小蘭英雄

²松江市コンベンションビューロー

第27回発展方程式若手セミナー 参加者名簿 (敬称略)

愛木 豊彦	岐阜大	高橋 勝雄	東大
阿曾 雅泰	千葉市教育センター	高橋 晶子	早大 M1
五十嵐 威文	日本工大	竹内 慎吾	工学院大
池田 幸太	東北大 D1	竹田 寛志	東北大 M1
井手 健太郎	九大 M1	津川 光太郎	名大
伊藤 昭夫	近畿大	鳥居 秀隆	早大 M1
植田 憲二	早大 M2	中村 元	松江高専
上田 好寛	九大 M2	中村 誠	東北大
薄井 敏臣	名大 M2	中村 能久	熊大
浦野 道雄	早大 D3	西川 史恵	お茶大 D2
大枝 和浩	早大 M1	布 央	早大 M2
大崎 浩一	宇部高専	橋本 伊都子	阪大 D1
大塚 岳	東大	林田 和也	福井工大
大沼 正樹	徳島大	平田 賢太郎	北大
重親 孝行	島根大 M2	深尾 武史	岐阜高専
角谷 敦	広島修道大	細野 敬史	九大 D3
加納 理成	岐阜大 M2	本多 泰理	慶大 D1
川上 竜樹	東北大 M2	増田 茂	首都大東京 D1
川原 雄一郎	阪大 D2	町原 秀二	島根大
北 直泰	宮崎大	松浦 啓	早大
久保 隆徹	早大	三澤 健司	早大 M1
小林 遼	九大 M1	水野 将司	東北大 M1
小松 涼	名大 M1	三竹 大寿	早大 M1
佐々木 太郎	名大 M2	宮下 鋭也	阪大 D3
佐藤 友彦	阪大 D2	村瀬 勇介	岐阜大 M2
佐藤 由香	早大 M2	山内 雄介	北大 D2
佐藤 洋平	早大 D2	山口 範和	早大
澤田 宙広	早大	山田 哲也	広大 M2
塩川 英	広大 M2	山本 征法	東北大 M1
柴田 徹太郎	広大	横田 智巳	東京理大
島田 理恵子	早大 D1	吉實 雄紀	早大 M1
白川 健	神戸大	若狭 徹	早大 D3
瀬片 純市	東北大	渡邊 良	島根大 B4
妹尾 祐紀	島根大 B4		

以上67名

目次

セミナープログラム	1-4
白川 健:	
特別講演の総括	5
特別講演 柴田 徹太郎 (広大):	
ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS TO NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS	7-13
8 月 22 日プログラム	15
中村 誠 (東北大):	
1 日目夕方セッション総括	17
津川 光太郎 (名古屋大):	
フーリエ制限法の KdV 型の方程式への応用	19-23
川原 雄一郎 (大阪大):	
非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動について	25-28
瀬片 純市 (東北大):	
冪乗型相互作用を持つ 4 階非線形 SCHRÖDINGER 型方程式の 長距離型散乱について	29-34
中村 能久 (熊本大):	
REMARK ON THE SCATTERING THEORY FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH STARK POTENTIAL	35-40
本多 泰理 (慶応大):	
PRIMITIVE EQUATIONS の局所解の存在について	41-46

8 月 23 日プログラム.....	47-48
大沼 正樹 (徳島大):	
2 日目午前セッション総括	49-50
細野 敬史 (九大):	
ある双曲放物型系の解の減衰評価とその応用	51-56
島田 理恵子 (早大):	
ROBIN 境界条件下での STOKES 方程式について	57-62
阿曾 雅泰 (千葉市教育センター):	
仮似変分型常微分方程式の解の存在と一意性について	63-68
久保 隆徹 (早大):	
ON THE STOKES AND NAVIER-STOKES FLOWS IN AN APERTURE DOMAIN	69-74
澤田 宙広 (早大):	
減衰しない初期条件下での 2 次元流体の運動	75-81
伊藤 昭夫 (近畿大):	
2 日目午後セッション総括	83
白川 健 (神戸大):	
地域経済の数理モデリングとその可解性	85-90
山口 範和 (早大):	
マイクロポーラ流体方程式系に対する L^3 解の存在と その減衰について	91-95

重親 孝行 (島根大):	
非線形 DIRAC 方程式の初期値問題	97-101
竹内 慎吾 (工学院大):	
2 日目夕方セッション総括	103
深尾 武史 (岐阜高専):	
PHASE FIELD 方程式と NAVIER-STOKES 方程式の システムについて	105-110
上田 好寛 (九大):	
非線型緩和型双曲系の解の漸近挙動	111-116
増田 茂 (首都大学東京):	
J.LERAY と E.HOPF の弱解の証明方法の相違について (論文紹介)	117-123
伊藤 昭夫 (近畿大):	
相転移モデルに対する解の力学的安定性について	125-131
堤 裕之 (大阪体育大):	
保型関数と微分方程式の係り-保型微分方程式紹介-	133-137
浦野 道雄 (早大):	
双安定型反応拡散方程式に現れる遷移層解のモース指数 について	139-142
若狭 徹 (早大):	
CHAFEE-INFANTE 問題の線形化問題における固有値及び 固有関数の公式	143-148

8 月 24 日プログラム	149
大崎 浩一 (宇部高専):	
3 日目午前セッション総括	151
五十嵐 威文 (日本工大):	
反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について	153-157
西川 史恵 (お茶大):	
BLOWUP AND NON-BLOWUP OF NON-LINEAR HEAT EQUATION IN PARABOLOIDAL DOMAIN	159-164
池田 幸太 (東北大):	
GIERER-MEINHARDT SYSTEM におけるストライプパターンの 不安定性	165-170
宮下 鋭也 (大阪大):	
MEAN FIELD PARABOLIC EQUATION AND ITS ATTRACTOR	171-176
松浦 啓 (早大):	
放物型方程式のアトラクターについて	177-182
深尾 武史 (岐阜高専):	
3 日目午後セッション総括	183
林田 和也 (福井工業大):	
浸透媒質方程式の解の台の形状について	185-189
佐藤 友彦 (阪大):	
ASYMPTOTIC NON-DEGENERACY OF THE SOLUTION TO THE LIOUVILLE EQUATION	191-196

三竹 大寿 (早大):

A REPRESENTATION FORMULA FOR SOLUTIONS
OF HAMILTON-JACOBI EQUATIONS 197–201

佐藤 洋平 (早大):

微分方程式に対応する汎関数に関するサードの定理とその応用 203–209

平田 賢太郎 (北大):

ある非線形楕円型方程式の無限遠点に極をもつ正值解の存在
—ポテンシャル論的観点より— 211–214

第 27 回発展方程式若手セミナー プログラム

2005 年 8 月 22 日 (月)15 時 ~ 25 日 (木)12 時 (一般講演 31 件 特別講演 1 件)

8 月 22 日 (月)

15:00-15:20 自己紹介

座長 中村 誠 (東北大)

15:30-16:00 津川 光太郎 (名古屋大)

フーリエ制限法の KdV 型の方程式への応用

16:00-16:30 川原 雄一朗 (大阪大)

非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動について

10 分休憩

16:40-17:10 瀬片 純市 (東北大)

霧乗型相互作用を持つ 4 階非線形 Schrödinger 型方程式の長距離型散乱について

17:10-17:40 中村 能久 (熊本大)

Remark on the scattering theory for the nonlinear Schrödinger equations with Stark potential

17:40-18:00 本多 泰理 (慶応大)

Primitive Equations の局所解の存在について

18:00-19:30 夕食

座長 松浦 啓 (早大), 久保 隆徹 (早大)

19:30-21:00 ショート・コミュニケーション

8 月 23 日 (火)

8:00-9:00 朝食

座長 大沼 正樹 (徳島大)

9:30-10:00 細野 敬史 (九大)

ある双曲放物型系の解の減衰評価とその応用

10:00-10:30 島田 理恵子 (早大)

Robin 境界条件下での Stokes 方程式について

- 10:30-11:55 阿曾 雅泰 (千葉市教育センター)
 仮似変分型常微分方程式の解の存在と一意性について
 15 分休憩
- 11:10-11:30 久保 隆徹 (早大)
 On the Stokes and Navier-Stokes flows in an aperture domain
- 11:30-12:00 澤田 宙広 (早大)
 減衰しない初期条件下での 2 次元流体の運動
- 12:00-13:00 昼食
 座長 伊藤 昭夫 (近畿大)
- 13:30-14:00 白川 健 (神戸大)
 地域経済の数理モデリングとその可解性
- 14:00-14:30 山口 範和 (早大)
 マイクロポーラ流体方程式系に対する L^3 解の存在とその減衰について
- 14:30-14:50 重親 孝行 (島根大)
 非線形 Dirac 方程式の初期値問題
 10 分休憩
 座長 竹内 慎吾 (工学院大)
- 15:00-15:30 深尾 武史 (岐阜高専)
 phase field 方程式と Navier-Stokes 方程式のシステムについて
- 15:30-16:00 上田 好寛 (九大)
 非線形緩和型双曲系の解の漸近挙動
 15 分休憩
- 16:15-16:45 増田 茂 (首都大学東京)
 J.Leray と E.Hopf の弱解の証明方法の相違について (論文紹介)
- 16:45-17:05 伊藤 昭夫 (近畿大)
 相転移モデルに対する解の力学的安定性について
 15 分休憩
- 17:20-17:50 堤 裕之 (大阪体育大)
 保型関数と微分方程式の係り-保型微分方程式紹介-
- 18:00-19:30 夕食
 座長 中村 能久 (熊本大), 津川 光太郎 (名古屋大)
- 19:30-19:50 浦野 道雄 (早大)
 双安定型反応拡散方程式に現れる遷移層解のモース指数について

19:50-20:20 若狭 徹 (早大)

Chafee-Infante 問題の線形化問題における固有値及び固有関数の公式

20:30-22:00 ショート・コミュニケーション

8 月 24 日 (水)

8:00-9:00 朝食

座長 大崎 浩一 (宇部高専)

9:30-10:00 五十嵐 威文 (日本工大)

反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

10:00-10:15 西川 史恵 (お茶大)

Blowup and Non-blowup of Non-linear Heat Equation in Paraboloidal Domain

10:15-10:45 池田 幸太 (東北大)

Gierer-Meinhardt system におけるストライプパターンの不安定性

15 分休憩

11:00-11:30 宮下 鋭也 (大阪大)

Mean field parabolic equation and its attractor

11:30-12:00 松浦 啓 (早大)

放物型方程式のアトラクターについて

12:00-13:00 昼食

座長 深尾 武史 (岐阜高専)

13:30-14:00 林田 和也 (福井工業大)

浸透媒質方程式の解の台の形状について

14:00-14:30 佐藤 友彦 (阪大)

Asymptotic non-degeneracy of the solution to the Liouville equation

14:30-15:00 三竹 大寿 (早大)

A representation formula for solutions of Hamilton-Jacobi equations

10 分休憩

15:10-15:40 佐藤 洋平 (早大)

微分方程式に対応する汎関数に関するサードの定理とその応用

15:40–16:10 平田 賢太郎 (北大)

ある非線形楕円型方程式の無限遠点に極をもつ正值解の存在 —ポテンシャル論的観点より—

20 分休憩

座長 白川 健 (神戸大)

16:30–18:00 特別講演 柴田 徹太郎 (広大)

Asymptotic properties of solutions to nonlinear eigenvalue problems

18:00 解散 (台風のため)

8 月 25 日 (木)

8:00 撤収作業

特別講演総括

白川 健 (神戸大学工学部)

1. 筆者挨拶. 第 27 回発展方程式若手セミナーにて, 特別講演の座長を務めました白川と申します. この総括は前回 (第 26 回) 若手セミナー幹事の竹内氏の発案で始められた企画で, そのコンセプトは講演内容の要約よりも, セッション全体の雰囲気を読者に伝える事にあると伺っております. 前回の報告集では, 石渡 通徳氏 (津田塾大学数学計算機科学研究所) が特別講演の総括を担当され, 上記のコンセプトにのっとりた親しみやすい総括原稿を執筆して下さいました. 石渡氏の後任にあたる私も その前例に倣い, なるべく堅い表現を避けながら, 今年の特別講演を振り返ってみたいと思います.

2. 講演内容の総括. 本年度の特別講演は, 広島大学大学院工学研究科の柴田 徹太郎先生を講師としてお招きし, “Asymptotic properties of solutions to nonlinear eigenvalue problems” というタイトルで行われました. タイトルにある通り, 柴田先生は様々な非線形方程式を取り上げられ, それぞれの方程式に対する固有値問題と, 固有値と関連したパラメータに関する解の漸近挙動について, 懇切丁寧に解説して下さいました. 私の中のイメージでは「解の漸近挙動」とは, 解の収束先の確定 (存在・一意性) だったのですが, 講演の内容はそのイメージの更に先を行くもので, 解の収束オーダーにまで言及した緻密な結果が数多く紹介されました. こういった精密な議論は第 3 者にとって難解になる事がしばしばなのですが, その点柴田先生は 問題の着想から結論に至るまでの経緯を 1 つ 1 つ噛み砕きながらゆっくりとお話して下さいたため, 一言で「わかりやすかった」という印象が 私の中では強く残っています. しかしいずれにせよ, 数学的な部分の詳細に関しては 柴田先生の報告集原稿をご覧ください. として, この総括ではむしろ報告集に載っていないような話をする事にしましょう. 講演中の柴田先生の話し方は始終穏やかなものでしたが, 途中しばしば見え隠れしていた計算の OHP シートなどを見ていると, その全く逆の熱く煮えたぎったものを感じずにはおれません. こういったパワフルな活動の軌跡を見せられると, 私などは「頑張っていればいつか何とかなる」と励まされたようで, 何だか元気になってしまいます. また, 時折話して下さいた「失敗談」や「集中講義先の院生からの質問を受けて計算し直したエピソード」からは, 先生が持つ忍耐力に裏づけされた強靱なバイタリティーが伝わってきます. そこへいくと「係数が 3, 4, 5 と上手いこと揃って感動した」というお話などは非常に強く心に響くものがあります. 長い我慢あるのみの研究活動の中では, こうした感動は ささやかかも知れませんが 結構大事なのではないでしょうか. この様に, 今回の特別講演では 数学的な面だけでなく「研究者としての姿勢」という面からも 多くの事を教わったような気がします.

3. 講演中の雰囲気を振り返って. 「学生はどんどん質問すべし」とは前回の総括で指摘された反省点の 1 つでしたが, これが効いたのかどうかはともかく, 今回の特別講演では 例年よりも院生の質問が多かった気がします. 座長としては誠に喜ばしい限りで「セミナーを盛り上げるためにも総括を残す事はとっても大事なのでは?」などと現在都合よく再認識しています. 一方, 前回の総括では「学生が質問しやすい環境づくり」も座長への課題として指摘されていましたが, 今回の私はその事を意識するあまり業務に入れ込み過ぎてしまったと後悔しています. 後で人から聞いた話によると, 開始直前の挨拶に 5 分もかけてしまったようで, あのような出しゃばった真似は座長としては失格ものと深く反省しております. 改めて, 講演中に柴田先生が示して下さいた「講演はクールだが数学は熱い」という外柔内剛のバランス感覚を見習おう, と固く誓いを立てる今日この頃です.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS TO NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

柴田 徹太郎 (広島大学大学院工学研究科)

1. 単振り子型方程式の解の漸近挙動

次の非線形固有値問題を考える:

$$(1) \quad \begin{aligned} -u''(t) + g(u(t)) &= \lambda \sin u(t), \quad t \in I := (0, 1), \\ u(t) &> 0, \quad t \in I, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

ここで $\lambda > 0$: パラメーターで g は次の条件 (A.1)–(A.3) を満たす.

(A.1) $g \in C^m(\mathbf{R})$ であり, $g(-u) = -g(u)$. さらに $g(u) > 0 (u > 0)$.

(A.2) $g(0) = g'(0) = 0$.

(A.3) $g(u)/u$ は $0 \leq u \leq \pi$ で狭義単調増加.

この方程式の解は $\lambda \gg 1$ で内部ではほとんど平ら. よって境界層を持つ解が現れる. 実際,

(P.1) (1) は $\lambda > \pi^2$ のときのみ, ただ一つの解 $u_\lambda \in C^2(\bar{I})$ をもつ.

(P.2) $\|u_\lambda\|_\infty < \pi$ であり, $\lambda \rightarrow \infty$ で広義一様に $u_\lambda \rightarrow \pi$.

従って, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき, u_λ は内部ではほとんど平らで, 境界層が現れることがわかる. そこで $\lambda \gg 1$ のときの, λ と u_λ の内部の平らさや, 境界層の傾きを様々な視点から調べる.

例. $g \equiv 0$ とする. このとき

$$\frac{\lambda}{4} = K \left(\sin \left(\frac{\|u_\lambda\|_\infty}{2} \right) \right)^2$$

が成り立つ. ここで,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (k^2 < 1)$$

である. すると,

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left(K(k) - \log \left(\frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \right) = 0$$

であるので, $\lambda \gg 1$ のとき,

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \sim \log \left(\frac{4}{\cos(\|u_\lambda\|_\infty/2)} \right).$$

すなわち

$$\cos \frac{\|u_\lambda\|_\infty}{2} = \sin \frac{\pi - \|u_\lambda\|_\infty}{2} = 4(1 + o(1))e^{-\sqrt{\lambda}(1+o(1))/2}.$$

よって

$$\pi - \|u_\lambda\|_\infty = 8(1 + o(1))e^{-\sqrt{\lambda}(1+o(1))/2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_\infty &= \pi - 8(1 + o(1))e^{-\sqrt{\lambda}(1+o(1))/2}, \\ u'_\lambda(0)^2 &= u'_\lambda(1)^2 = 4\lambda(1 - 16e^{-(1+o(1))\sqrt{\lambda}}) \end{aligned}$$

が成り立つ. そこでまず第一に, 摂動項 $g(u) \not\equiv 0$ のとき, $\|u_\lambda\|_\infty, u'_\lambda(0)$ などの漸近挙動を調べる.

Theorem 1. (A.1)–(A.3) を仮定する. このとき $\lambda \rightarrow \infty$ で次の漸近公式が成り立つ:

$$\|u_\lambda\|_\infty = \pi - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{b_k}{\lambda^k} + o\left(\frac{1}{\lambda^{m+1}}\right).$$

ここで $b_k (k = 1, 2, \dots, m+1)$ は $\{g^{(j)}(\pi)\}_{j=0}^{k-1}$ により決定される定数. たとえば

$$\begin{aligned} b_1 &= g(\pi), \\ b_2 &= -g(\pi)g'(\pi), \\ b_3 &= \frac{1}{6}g(\pi)^3 + g(\pi)^2g'(\pi) + \frac{1}{2}g(\pi)^2g^{(2)}(\pi). \end{aligned}$$

Theorem 2. (A.1)–(A.3) を仮定する. $G(u) := \int_0^u g(s)ds$ とする. このとき $\lambda \rightarrow \infty$ で次の漸近公式が成り立つ:

$$u'_\lambda(0)^2 = 4\lambda - 2G(\pi) + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{\lambda^k} + o\left(\frac{1}{\lambda^{m+1}}\right).$$

ここで $a_k (k = 1, 2, \dots, m+1)$ は $\{g^{(j)}(\pi)\}_{j=0}^{k-1}$ により決定される定数. たとえば

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\pi)^2, \\ a_2 &= -g(\pi)^2g'(\pi), \\ a_3 &= \frac{1}{12}g(\pi)^4 + g(\pi)^2g'(\pi)^2 + \frac{1}{3}g(\pi)^3g^{(2)}(\pi). \end{aligned}$$

さらに, $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geq 2)$ を適当になめらかな有界領域とし,

$$\begin{aligned} -\Delta u + g(u) &= \lambda \sin u \quad \text{in } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

を考える.

Theorem 3. $x \in \Omega$ を固定する. (A.1)–(A.3) を仮定し, さらに $g \in C^{m,\gamma}(R)$ ($m \geq 1, 0 < \gamma < 1$) であるとする. このとき $\lambda \rightarrow \infty$ で

$$u_\lambda(x) = \pi - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{b_k}{\lambda^k} + o\left(\frac{1}{\lambda^{m+1}}\right).$$

ここで $b_k (k = 1, 2, \dots, m+1)$ は Theorem 1 と同じ定数.

Theorem 1 と Theorem 2 の証明の方針 (cf. [18]).

Lemma A. $0 < t_0 \ll 1$ を任意に固定する. このとき $\lambda \rightarrow \infty$ で

$$\lambda \sin \|u_\lambda\|_\infty - g(\|u_\lambda\|_\infty) = o(\lambda e^{-\sqrt{\lambda}t_0})$$

が成り立つ.

Lemma A の証明は [18] を参照されたい. Lemma A が示されたとする. まず,

$$r_{0,\lambda} := \pi - \|u_\lambda\|_\infty$$

とおく. Lemma A と (P.2) により, $\lambda \gg 1$ で

$$\begin{aligned} \lambda \sin \|u_\lambda\|_\infty &= \lambda \sin(\pi - r_{0,\lambda}) = \lambda \sin r_{0,\lambda} = \lambda(1 + o(1))r_{0,\lambda} \\ &= g(\|u_\lambda\|_\infty) + o(\lambda e^{-\sqrt{\lambda}t_0}) \\ &= g(\pi) + o(1). \end{aligned}$$

したがって $\lambda \gg 1$ のとき

$$r_{0,\lambda} = g(\pi)/\lambda + o(1/\lambda)$$

であるから,

$$\|u_\lambda\|_\infty = \pi - \frac{b_1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

ここで $b_1 = g(\pi)$. 以下帰納法により Theorem 2 が示される. Theorem 1 は Theorem 2 と次の等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u'_\lambda(t)^2 - \lambda \cos u_\lambda(t) - G(u_\lambda(t)) &\equiv \text{constant} \\ &= -\lambda \cos \|u_\lambda\|_\infty - G(\|u_\lambda\|_\infty) \quad (\text{put } t = 1/2) \\ &= \frac{1}{2}u'_\lambda(0)^2 - \lambda \quad (\text{put } t = 0) \end{aligned}$$

を用いて示される. □

Theorem 3 の証明のアイデア.

(1) $\Omega = B_R = \{|x| < R\}$ のときに方程式は $I_1 := (0, R)$ で

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) - g(u(r)) + \lambda \sin u(r) &= 0, \\ u(r) &> 0, \quad r \in I_1, \\ u'(0) = u(R) &= 0. \end{aligned}$$

となるので, Theorem 1 のアイデアを使い, $\frac{N-1}{r}u'(r)$ の項の影響を考慮しながら, 漸近公式が半径 R によらないことを示す.

(2) $x \in \Omega$ を固定し, $B_{x,r_0} \subset \Omega \subset B_{x,R_0}$ となる球を考える. それぞれに対応する解を $u_\lambda(x, r_0), u_\lambda(x, R_0)$ とするとき,

$$u_\lambda(x, r_0) \leq u_\lambda(x) \leq u_\lambda(x, R_0)$$

を示す. 詳しくは [20] を参照されたい. □

次に Non-local な視点からの考察を行う.

Theorem 4. $N = 1$ とする. (A.1)–(A.3) を仮定する. このとき $\lambda \rightarrow \infty$ で次の漸近公式が成り立つ:

$$\|u_\lambda\|_1 = \pi - C_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{g(\pi)}{\lambda} + O\left(\frac{\log \lambda}{\lambda \sqrt{\lambda}}\right).$$

が成り立つ. ここで

$$C_1 = 8 \int_0^{\pi/4} \log(\cot \theta) d\theta.$$

Theorem 4 の証明のあらすじ. $0 \leq t \leq 1/2$ に対して

$$u'_\lambda(t) = \sqrt{2\lambda(\cos u_\lambda(t) - \cos \|u_\lambda\|_\infty) + 2(G(u_\lambda(t)) - G(\|u_\lambda\|_\infty))}$$

$\lambda \rightarrow \infty$ のとき

$$r_1(\lambda) := \|u_\lambda\|_\infty - \|u_\lambda\|_1 \rightarrow 0.$$

Theorem 1 より $r_1(\lambda)$ の $\lambda \rightarrow \infty$ での漸近挙動を調べればよい. $\lambda \gg 1$ に対して

$$\begin{aligned} r_1(\lambda) &= 2 \int_0^{1/2} (\|u_\lambda\|_\infty - u_\lambda(t)) dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} \frac{(\|u_\lambda\|_\infty - u_\lambda(t)) u'_\lambda(t) dt}{\sqrt{2\lambda(\cos u_\lambda(t) - \cos \|u_\lambda\|_\infty) + 2(G(u_\lambda(t)) - G(\|u_\lambda\|_\infty))}} \\ &= 2 \int_0^{\|u_\lambda\|_\infty} \frac{(\|u_\lambda\|_\infty - \theta) d\theta}{\sqrt{2\lambda(\cos \theta - \cos \|u_\lambda\|_\infty) + 2(G(\theta) - G(\|u_\lambda\|_\infty))}} \\ &= K_1(\lambda) + K_2(\lambda). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} K_1(\lambda) &:= 2 \int_{\|u_\lambda\|_\infty - 1/\lambda}^{\|u_\lambda\|_\infty} \frac{(\|u_\lambda\|_\infty - \theta) d\theta}{\sqrt{2\lambda(\cos \theta - \cos \|u_\lambda\|_\infty) + 2(G(\theta) - G(\|u_\lambda\|_\infty))}}, \\ K_2(\lambda) &:= 2 \int_0^{\|u_\lambda\|_\infty - 1/\lambda} \frac{(\|u_\lambda\|_\infty - \theta) d\theta}{\sqrt{2\lambda(\cos \theta - \cos \|u_\lambda\|_\infty) + 2(G(\theta) - G(\|u_\lambda\|_\infty))}}. \end{aligned}$$

Lemma B. $K_1(\lambda) = O(\lambda^{-3/2})$ for $\lambda \gg 1$.

Lemma C. As $\lambda \gg 1$

$$K_2(\lambda) = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{\log \lambda}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Lemma B と Lemma C により Theorem 4 を得る. 詳しくは [19] を参照されたい.

2. 非線形 STURM-LIOUVILLE 問題

次の方程式を考える.

$$(2) \quad -u''(t) + u(t)^p = \lambda u(t), \quad t \in I := (0, 1),$$

$$(3) \quad u(t) > 0, \quad t \in I,$$

$$(4) \quad u(0) = u(1) = 0.$$

ここで $p > 1$ は定数, $\lambda > 0$ はパラメーターである. この方程式に対しては, 次のことが知られている.

事実 1. 任意の $\alpha > 0$ に対して, (2)–(4) の解 $(\lambda, u) = (\lambda(\alpha), u_\alpha) \in \mathbf{R}_+ \times C^2(\bar{I})$ で $\|u_\alpha\|_2 = \alpha$ を満たすものがただひとつ存在する.

事実 2. 集合 $\{(\lambda(\alpha), u_\alpha), \alpha > 0\}$ は, (2)–(4) のすべての解を与える. またそれは $(\pi^2, 0)$ から分岐する $\mathbf{R}_+ \times L^2(I)$ における C^1 の非有界な曲線である. さらに $\lambda(\alpha)$ は C^1 で $\alpha > 0$ で狭義単調増加.

そこでこのセクションでは, この $\mathbf{R}_+ \times L^2(I)$ における分岐曲線を詳しく調べることを目標にする.

事実 3. 任意の $\lambda > \pi^2$ に対して, ただ一つ, 解 $u_\lambda \in C^2(\bar{I})$ が定まる. さらに

$$(5) \quad (\lambda - \pi^2)^{1/(p-1)} \sin \pi x \leq u_\lambda \leq \lambda^{1/(p-1)}.$$

を満たす. このことから, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき

$$(6) \quad \lambda = \|u_\lambda\|_\infty^{p-1} + O(1).$$

事実 4. 任意の $t \in I$ に対して, $\lambda \rightarrow \infty$ で

$$(7) \quad \frac{u_\lambda}{\lambda^{1/(p-1)}} \rightarrow 1.$$

したがって

$$(8) \quad \lambda(\alpha) = \alpha^{p-1} + o(\alpha^{p-1}).$$

そこで, この漸近公式をもっと精密化することを目標とする.

Theorem 5 ([15]). $\alpha \rightarrow \infty$ のとき

$$\lambda(\alpha) = \alpha^{p-1} + O(\alpha^{(p-1)/2}).$$

ここでの残余項の評価は optimal なものであるが, この定理は次のように拡張される.

Theorem 6. 任意の $n \in \mathbf{N}_0$ に対して, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) = & \alpha^{p-1} + C_1 \alpha^{(p-1)/2} + \sum_{k=0}^n \frac{a_k(p)}{(p-1)^{k+1}} C_1^{k+2} \alpha^{k(1-p)/2} \\ & + o(\alpha^{n(1-p)/2}), \end{aligned}$$

ここで

$$C_1 = (p+3) \int_I \sqrt{\frac{p-1}{p+1} - s^2 + \frac{2}{p+1} s^{p+1}} ds$$

であり, $a_k(p)$ ($\deg a_k(p) \leq k+1$) は $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ によって決定される多項式である.

たとえば,

$$\begin{aligned} a_0(p) &= 1, \\ a_1(p) &= \frac{(5-p)(9-p)}{24}, \\ a_2(p) &= \frac{(3-p)(5-p)(7-p)}{24}. \end{aligned}$$

Theorem 7. 任意の $n \in \mathbf{N}_0$ に対して $\alpha \rightarrow \infty$ のとき:

$$\begin{aligned} u'_\alpha(0)^2 = u'_\alpha(1)^2 = & \frac{p-1}{p+1} \alpha^{p+1} + C_1 \alpha^{(p+3)/2} \\ & + \sum_{k=0}^n \frac{2A_k(p)}{(p-1)^{k+1}} C_1^{k+2} \alpha^{2+k(1-p)/2} \\ & + o(\alpha^{2+n(1-p)/2}), \end{aligned}$$

ここで $A_k(p)$ ($\deg A_k(p) \leq k+1$) は $a_1, \dots, a_{k-1}$ で決定される多項式である.

たとえば,

$$\begin{aligned} A_0(p) &= 1, \\ A_1(p) &= \frac{(9-p)(13-p)}{48}, \\ A_2(p) &= \frac{(5-p)(7-p)(9-p)}{48}. \end{aligned}$$

Theorem 8. 任意の $n \in \mathbf{N}_0$ にたいして $\alpha \rightarrow \infty$ のとき:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_\infty^{p-1} &= \alpha^{p-1} + C_1 \alpha^{(p-1)/2} + \sum_{k=0}^n \frac{a_k(p)}{(p-1)^{k+1}} C_1^{k+2} \alpha^{k(1-p)/2} \\ &\quad + o(\alpha^{n(1-p)/2}). \end{aligned}$$

Theorem 6 から Theorem 8 までの証明のポイントは, $\|u'_\alpha\|_2$ の漸近挙動を詳しく調べ, さらに固有値パラメータと解の critical value の関係を利用する. 詳しくは [17] を参照されたい.

REFERENCES

1. H. Berestycki, Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques, *J. Functional Analysis* **40** (1981), 1–29.
2. A. Bongers, H.-P. Heinz and T. Küpper, Existence and bifurcation theorems for nonlinear elliptic eigenvalue problems on unbounded domains, *J. Differential Equations* **47** (1983), 327–357.
3. J. Chabrowski, On nonlinear eigenvalue problems, *Forum Math.* **4** (1992), 359–375.
4. R. Chiappinelli, Remarks on bifurcation for elliptic operators with odd nonlinearity, *Israel J. Math.* **65** (1989), 285–292.
5. R. Chiappinelli, On spectral asymptotics and bifurcation for elliptic operators with odd superlinear term, *Nonlinear Anal. TMA* **13** (1989), 871–878.
6. R. Chiappinelli, Constrained critical points and eigenvalue approximation for semilinear elliptic operators, *Forum Math.* **11** (1999), 459–481.
7. P. Clément and G. Sweers, Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **14** (1987), 97–121.
8. D. G. Figueiredo, On the uniqueness of positive solutions of the Dirichlet problem $-\Delta u = \lambda \sin u$, *Pitman Res. Notes in Math.* **122** (1985), 80–83.
9. J. M. Fraile, J. López-Gómez and J. C. Sabina de Lis, On the global structure of the set of positive solutions of some semilinear elliptic boundary value problems, *J. Differential Equations* **123** (1995), 180–212.
10. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, series and products (fifth edition), Academic Press, San Diego, 1994.
11. H.-P. Heinz, Free Ljusternik–Schnirelman theory and the bifurcation diagrams of certain singular nonlinear problems, *J. Differential Equations* **66** (1987) 263–300.
12. H.-P. Heinz, Nodal properties and bifurcation from the essential spectrum for a class of nonlinear Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations* **64** (1986) 79–108.
13. H.-P. Heinz, Nodal properties and variational characterizations of solutions to nonlinear Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations* **62** (1986) 299–333.
14. R. E. O'Malley Jr., Singular perturbation methods for ordinary differential equations, Springer, New York, 1989.
15. T. Shibata, Asymptotic behavior of the variational eigenvalues for semilinear Sturm-Liouville problems, *Nonlinear Analysis* **18** (1992), 929–935.
16. T. Shibata, Precise spectral asymptotics for the Dirichlet problem $-u''(t) + g(u(t)) = \lambda \sin u(t)$, *J. Math. Anal. Appl.* **267** (2002), 576–598.
17. T. Shibata, Precise spectral asymptotics for nonlinear Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations* **180** (2002) 374–394.
18. T. Shibata, Asymptotic expansion of the boundary layers of the perturbed single pendulum problems, *J. Math. Anal. Appl.* **283** (2003), 431–439.

19. T. Shibata, Asymptotic shapes of solutions to nonlinear eigenvalue problems, *Electronic Journal of Differential Equations* **2005** (2005) No. 37, 1–16.
20. T. Shibata, Asymptotic expansion of solutions to nonlinear elliptic eigenvalue problems, *Proceedings of the American Mathematical Society* **133** (2005), 2597–2604.
21. D. R. Smith, *Singular-perturbation theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

