第２６回

発展方程式若手セミナー

報告集

2005年1月

報告集発刊にあたって

発展方程式若手セミナーは「発展方程式及びその周辺分野の将来の方向を探るための若手研究者の討論と情報交換の場」という主旨で1979年の夏に始まりました．場所は妙高高原，幹事は八木厚志先生（大阪大）と山田義雄先生（名古屋大・当時）であったと伺っております．四半世紀を経て第26回を迎えた今年は，平成16年度文部科学省科学研究費補助金[1]の援助の下，８月９日から１２日までの４日間，東京都青梅市の国民年金健康保養センター「おくたま路」にて開催されました．

今年は特別講演者として埼玉大学理学部の太田雅人先生をお招きし「エネルギーから観た非線形発展方程式」というタイトルで講演して頂いた他，31名の方々による一般講演，及び学生によるショート・コミュニケーションが行われ，若手セミナーならではの活発な討論ならびに研究交流が連日なされました．

この報告集は本セミナーにおける特別講演及び一般講演の内容をもとに，講演者の方々に書き下ろして頂いたものをまとめたものです．新しい試みとして，座長による担当セッションの総括を掲載しておりますので，そこでセミナーの雰囲気を感じ取って頂けるかと存じます．この冊子がセミナーに参加された方々や関連分野の研究者の皆様のお役に立てれば幸いです．

本セミナーを開催するにあたり，多くの方々に協力をして頂きました．特に科研費にて学生の旅費と会議室使用料の援助をお引き受け下さった堤誉志雄先生（京都大），相談に乗って頂くとともにセミナー開催に関する緻密な資料をマニュアル化して残して下さった前幹事の北直泰先生（宮崎大），開催準備を取り仕切って下さった久藤衡介先生（早稲田大）と実際の運営にご協力下さった早稲田大学の大学院生の皆様，外国人参加者が極力不自由なく過ごせるようご尽力下さり，その後も報告集作成に協力して下さった高木悟先生（早稲田大），そしてセミナー終了後もお忙しい中で各セッションの総括を綴って下さった座長の方々に，この場をお借りして御礼申し上げます．

私事で恐縮ですが，若手セミナーには特別な思い入れがあります．私が初めて若手セミナーに参加したのは修士課程１年のとき，岐阜・長良川で行われた第17回（幹事は壁谷喜継先生（神戸大・当時））でした．一連の講演が始まる前，参加されていた教員のお一人である田中和永先生（早稲田大）から，すべての講演について感想を書いてみることを勧められ，内容はほとんどわからないながらもそれを忠実に実行することで，何とか本質的な部分を汲み取ろうと努力した記憶があります．ショート・コミュニケーションでは，私の稚拙な話が諸先輩から格好の餌食とされ，しまいには，運悪く？参加されていた指導教員の山田義雄先生（早稲田大）に「彼は偏微分方程式を最近勉強し始めたので…」とフォローして頂く始末でした．先生はさぞ恥ずかしかったこととお察ししますが，当の私は開き直って逆に楽しかった

[1]基盤研究 (A)(2)「非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の構造」課題番号 15204008（研究代表者：堤誉志雄），若手研究 (B)「退化放物型方程式の力学系理論」課題番号 15740110（研究代表者：竹内慎吾）

ことを覚えています．若手ならではのことと余計懐かしく思い出されます．前述したように，山田先生は第１回の幹事のお一人で，四半世紀経った今回，その不肖の弟子が幹事を務めることになりどのような思いでいらっしゃるのか，興味のあるところです．さてその後の若手セミナーには，講演することと，出来るだけ多くの講演について疑問を感じ質問することを課題として毎年参加してまいりました．他の方の質問に触発され新たな問題が生まれることもありますし，何よりも質問が飛び交うとセミナーが活発に感じられる気がするので，セミナーが複数の人々で行われる以上，その場で質問することは大切なことだと私は思っています．最初のうちはわけがわからずWhat？の類の質問でしたが（しかしWhat？は若手セミナーでは大いに歓迎されるべき疑問形だと思います），こうして質問する「度胸」が少しずつ付き，年と勉強を重ねるうちに内容の面白みをなんとか自分なりに見出せるようになり，Why？ How？の類の疑問を投げかけられるようになってきました．この（無理にでも）疑問を抱こうとする訓練は，まったくわからない講演でも，要するに何をしたくてその後どういう発展が考えられるのかを，自分なりに想像するときに役立っているように思います．こうして今振り返ると，若手セミナーでは本当に多くの事を学んだものだとひしひしと感じます．

最後に，来年度の発展方程式若手セミナーの幹事は，島根大学の町原秀二先生です．皆様の変わらぬご支援とご協力をお願いして序文の言葉を締めくくらせて頂きます．

2005年1月
第26回発展方程式若手セミナー幹事
工学院大学　竹内 慎吾

第26回発展方程式若手セミナー
参加者名簿（敬称略）

愛木 豊彦（岐阜大）
赤木 剛朗（早大）
阿曽 雅泰（千葉大・Ｄ３）
足達 慎二（静岡大）
五十嵐 威文（日大・Ｄ４）
石渡 通徳（早大）
伊藤 昭夫（近畿大）
伊藤 直子（東京理大・Ｄ３）
内田 英建（東京理大）
浦野 道雄（早大・Ｄ２）
Emil Minchev（早大・学振ＰＤ）
大崎 浩一（宇部高専）
太田 雅人（埼玉大）
大塚 岳（北大）
大屋 博一（早大・Ｄ４）
岡崎 貴宣（千葉大）
岡田 浩嗣（広島大・Ｄ３）
小栗 佳（東工大・Ｍ２）
重親 孝行（島根大・Ｍ１）
加藤 正和（静岡大・Ｍ２）
角谷 敦（広島修道大）
加納 理成（岐阜大・Ｍ１）
菊池 弘明（東北大・Ｍ２）
北 直泰（宮崎大）
木本 恭子（島根大・Ｍ２）
久藤 衡介（早大）
久保 隆徹（早大・Ｄ２）
久保 英夫（阪大）
剣持 信幸（千葉大）
斉藤 修一（早大・Ｍ１）
佐々木 太郎（名古屋大・Ｍ１）
佐々木 浩宣（北大・Ｄ１）
笹山 智司（北大・Ｄ２）
佐藤 典弘（早大・Ｄ２）
佐藤 洋平（早大・Ｄ１）
澤田 宙広（早大・学振ＰＤ）
島田 理恵子（早大・Ｍ２）
Jaipong Wongsawasdi（東海大・Ｄ１）
白川 健（東京電機大）
鈴木 健二（東大・Ｄ１）
鈴木 友之（東北大・Ｄ１）
瀬片 純市（九州大・Ｄ３）
関岡 直樹（早大・Ｍ１）
高市 恭治（早大・Ｄ５）
高木 悟（早大）
竹内 慎吾（工学院大）
中村 能久（熊本大）
西川 史恵（お茶の水女大・Ｄ１）
布 央（早大・Ｍ１）
沼尾 秀範（早大・Ｍ１）
蓮見 純（都立大・Ｍ１）
林 英彦（九州大・Ｍ２）
原本 和夫（九州大・Ｍ２）
廣澤 史彦（日本工大）
深尾 武史（鳥羽商船高専）
福泉 麗佳（北大）
町原 秀二（島根大）
松浦 啓（早大）
松澤 寛（都立大・Ｄ３）
間庭 正明（都立大・Ｄ５）
水野 将司（埼玉大・Ｂ４）
宮崎 篤（早大・Ｍ１）
村瀬 勇介（岐阜大・Ｍ１）
山内 雄介（北大・Ｄ１）
山口 範和（早大・Ｄ２）
山崎 教昭（室蘭工大）
横田 智巳（東京理大）
吉川 周二（東北大・Ｄ２）
吉村 康宏（早大・Ｍ２）
若狭 徹（早大・Ｄ２）
渡邊 耕二（島根大・Ｍ２）
渡辺 達也（都立大・Ｄ２）

以上 72 名
（うち **一般講演者** 31 名，**特別講演者** 1 名）

目次

特別講演の総括

早稲田大学理工学術院　石渡 通徳

ご挨拶 2004 年度特別講演の座長を務めました石渡と申します. 幹事の竹内氏の発案により,「講演内容の要約というよりはむしろ, そのセッションの雰囲気が読者に伝わるような「感想」を」なる形で特別講演の総括をせよとのことです. 本稿のできは置いといて, このような形で総括が残されることは大変よいことではないかと思います.

講演内容の総括 本年度の特別講演は, 埼玉大学の太田雅人先生を講師として「エネルギーから観た非線形発展方程式」というタイトルで行われました. 非線形波動方程式 (Klein-Gordon 方程式含む) の解の漸近挙動について, 初日は potential well argument を中心に, 2 日めは大域解の有界性を中心として, 太田先生の冴えた料理の腕により, 未解決問題や既存の論文の間違いにも触れられながら[1] stylish に講義が展開されました. あ, stylish といっても太田先生の格好はラフでした. アロハ着ていらっしゃったような記憶が … 間違ってたらすみません. 詳しい内容は本報告集にある, 太田先生の原稿を参照してください. この分野の基本的なテクニックとその応用の, 本質的なところについてのよく書かれた案内になっており, 大変勉強になります.

講演中と終了後の皆さんの様子 一応書きますが, 残念ながら座長は最前列に座っており, 皆さんの様子が見えないのでした … まさか講演中しょっちゅう振り返るわけにもいかないし … というわけで, 皆さん行儀よく静かに聴いていらっしゃったことだけ書いておきましょう.

講演がすんでからは, これまた質問を振るのに必死で皆さんを一人ひとり見ることはできませんでしたが, 質問する人は何だか前の方にいた人ばっかりだった気が … しかもそんなに若くない人ばっか質問してなかったか?(べつにまあいいけど …) 学部や修士の皆さんが質問しやすい環境を用意し, うまく振ることができなかったのはひとえに座長の責任であり, 反省しております. しかしどうすればいいんでしょうねえ …

感想 (若手 $\overset{\text{def}}{=}$ 学部・修士の皆さんへ) 講演中も含め, 若手の皆さんの様子を見ていて思ったことを書きます. 若手セミナーっていつ, どういう人たちが, どうして始めたかご存知でしょうか?その昔, 解析学の community の中で, 非線形解析がまだ周辺分野と思われていた時代があり, そのころの若手の方々が一種の危機感を持って始められたと聞きます. その方々の努力のお陰でいまや非線形解析は解析学の community の一大勢力となり, 若手の人数も増えました. ところである分野が discipline に化すと, 問題意識が分化し拡大再生産されてゆく傾向にあるのはどこも同じ. 若手セミナーは, 始まりの理念からいって, discipline にとらわれないものであったはずのようですが, 皆さんの意識はどうでしょうか?ややこしく言いましたがつまり講演中, わかんないことあったら何でもばしばし質問していいんですよ. 変な質問すると恥ずかしいって?そんなときのために, 私が大昔にある先生から聞いたことを書いておきましょう. 「権利」であるとこがミソです.

学ぶ権利宣言

> 私には — どんな分野でも学ぶ力があると思う権利がある. どんな疑問でも質問する権利がある. 「わからない」とはっきりいう権利がある. 理解しない権利がある. ある分野を嫌う権利がある. 成功したかどうかを自分で決める権利がある.

学問の精神の根っこがプラトンにあるような「対話の精神」にあるのだとすれば, このような根性でいることは自然なことです.「かっこよく」とか考えずに, 遠慮せずに, 質問しましょう! (… しかし例えば阿部謹也著「世間とは何か」によると, 日本には「世間」というものがあり, また「知識」は芸能の一種として伝えられてきた伝統があるため, 西欧風の対話の精神は根付かないものらしく … 以下略 …)

[1] お, 論文のネタだ!若手の皆さん check!

エネルギーから観た非線形発展方程式

太田 雅人　(埼玉大学理学部)

mohta@rimath.saitama-u.ac.jp

§1. 序　一般に, 非線形発展方程式が与えられた場合,

1. 初期値問題の時間局所的な解の存在と一意性
2. 解の時間大域存在と爆発
3. 大域解の $t \to \infty$ としたときの漸近挙動

を調べることは, 最も基本的な問題と考えられる. 本稿では, 非線形波動方程式に対する初期・境界値問題 (1)–(3) を例にとり, 問題2, 3について基本的な結果を解説する. 基礎となるのは, エネルギー保存則 (4) と等式 (5) である. §2では, エネルギー空間における時間局所解の存在と一意性について, 結果のみ述べる. §3では, 解の大域存在と爆発のための十分条件について考える. §4では, Cazenave [1] による大域解の有界性に関する結果を紹介する. 1985年に出版された Cazenave の論文 [1] には, 大域解の有界性に関して先行する結果としては, 非線形熱方程式に対する Ôtani [9] (日本語による解説 [10] も参照のこと) が引用されているのみである. それから20年近く経った現在, 非線形熱方程式に対しては, 解の爆発率の研究との関連もあり, 著しい発展があった (例えば, 第25回発展方程式若手セミナー報告集における笹山智司氏と高市恭治氏の報告を参照のこと) が, 非線形波動方程式に対しては, この方面では, あまり進展がなかったように思われる. §5では, 非線形波動方程式の解の爆発率に関する Merle and Zaag による論文 [7] で用いられた方法を, 非線形 Klein-Gordon 方程式の大域解の有界性に応用して得られる結果について述べる.

幹事の竹内慎吾氏から特別講演の依頼を受けた際, 特定の方程式の型にとらわれず, エネルギーという観点から非線形発展方程式に関する入門的な講演をして欲しい, というの要請があった (上記の講演題目は, この要

請に基づく). 本稿で考察する内容は, 結果と手法の両面において, 非線形熱方程式と共通する部分があり, 非線形波動方程式と非線形熱方程式の両方を比較しながら解説することも考えたが, 筆者の力不足のため, 実現できなかった. この点について, お詫びすると共に, 特別講演の機会を与えて頂いたことに関して, 竹内氏に感謝の意を表したい.

§2. 時間局所解の存在と一意性　次の非線形波動方程式に対する初期・境界値問題について考える.

$$\partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

以下, §4 まで, 次の条件 (A1), (A2) を仮定する.

(A1)　Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で, その境界 $\partial\Omega$ は滑らか.

(A2)　$p > 1$ で, $N \geq 3$ のときは $p \leq N/(N-2)$.

また, 次の記号を用いる.

記号　$\|u\|_q = \|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_2, \quad X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\|v\|_2^2 + J(u), \quad J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1},$$
$$K(u) = \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

このとき, 次の局所解の一意存在定理が成り立つ.

定理 2　条件 (A1), (A2) を仮定をする. このとき, $\forall(u_0,u_1) \in X$ に対して, (1)–(3) の解 $\vec{u} := (u, \partial_t u) \in C([0,T_{\max}), X)$ が一意的に存在し,

$$E(\vec{u}(t)) = E(u_0,u_1), \quad t \in [0,T_{\max}), \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u(t)\|_2^2 = \|\partial_t u(t)\|_2^2 - K(u(t)), \quad t \in [0,T_{\max}) \tag{5}$$

をみたす. さらに, $T_{\max} < \infty$ ならば $\lim_{t\to T_{\max}} \|\vec{u}(t)\|_X = \infty$.

注意 2.1 (Poincaré, Sobolev の不等式) 仮定 (A1) より, $\exists C_0 = C_0(\Omega) > 0$ s.t. $\|u\|_2 \le C_0 \|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. また, $N=1$ のときは $2 \le q \le \infty$, $N=2$ のときは $2 \le q < \infty$, $N \ge 3$ のときは $2 \le q \le 2N/(N-2)$ を仮定すると, $\exists C = C(q,\Omega) > 0$ s.t. $\|u\|_q \le C\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

注意 2.2 エネルギー保存則 (4) は, 形式的には, 方程式 (1) に $\partial_t u$ をかけて部分積分することにより得られる. しかし, 定理 2 で得られる弱解に対しては, そのような計算は直接はできないので, 滑らかな解による近似を考える必要がある. 等式 (5) は (1) に u をかけて部分積分することにより得られる. 定理 2 の証明については, Cazenave and Haraux [2] の Chapter 6 に丁寧で分りやすい説明がある.

§3. 解の大域存在と爆発 定理 2 に基づいて, 解の大域存在と爆発について考える. やや天下り的である (後述の注意 3.3 を参照のこと) が,

$$
\begin{aligned}
d &= \inf\{J(u) : u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\},\ K(u) = 0\}, \\
\mathcal{W} &= \{(u,v) \in X : E(u,v) < d,\ K(u) \ge 0\}, \\
\mathcal{V} &= \{(u,v) \in X : E(u,v) < d,\ K(u) < 0\}
\end{aligned}
$$

とおくと, 次の十分条件が成り立つ.

定理 3 ([13, 15, 11, 6]) 定理 2 と同じ仮定をする.

(i) $(u_0, u_1) \in \mathcal{W}$ ならば $T_{\max} = \infty$.

(ii) $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}$ ならば $T_{\max} < \infty$.

まず, 定理 3(ii) を示すために, 次の補題を示す.

補題 3.1 (i) $d > 0$.

(ii) $u \in H_0^1(\Omega)$, $K(u) < 0$ ならば $\|\nabla u\|_2^2 > \dfrac{2(p+1)}{p-1} d$.

(iii) $\{(u,v) \in X : E(u,v) < 0\} \subset \mathcal{V}$.

(iv) $\mathcal{V}$ は (1)–(2) の流れに関して不変, すなわち,

$(u_0, u_1) \in \mathcal{V}$ ならば $\vec{u}(t) \in \mathcal{V}$ for $\forall t \in [0, T_{\max})$.

証明 (i) $J(u)-\dfrac{1}{p+1}K(u)=\dfrac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u\|_2^2$ より

$$d=\inf\{\frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u\|_2^2 : u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\},\ K(u)=0\}. \tag{6}$$

また, $K(u)=0$ なる $u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ を任意にとると, $K(u)=0$ と Sobolev の不等式より, $\|\nabla u\|_2^2=\|u\|_{p+1}^{p+1}\le C_1\|\nabla u\|_2^{p+1}$. ここで, $u\neq 0$ だから, $\|\nabla u\|_2^{p-1}\ge C_1^{-1}$. よって,

$$d\ge\frac{p-1}{2(p+1)}C_1^{-2/(p-1)}.$$

(ii) $\lambda>0$ に対し, $K(\lambda u)=\lambda^2\|\nabla u\|_2^2-\lambda^{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$. ここで, $K(u)<0$ だから, $\exists\lambda_1\in(0,1)$ s.t. $K(\lambda_1 u)=0$. また, $u\neq 0$ だから, (6) より,

$$\frac{2(p+1)}{p-1}d\le\|\nabla(\lambda_1 u)\|_2^2=\lambda_1^2\|\nabla u\|_2^2<\|\nabla u\|_2^2.$$

(iii) (i) より, $E(u,v)<0$ ならば $E(u,v)<d$. また

$$-K(u)=\frac{p+1}{2}\|v\|_2^2+\frac{p-1}{2}\|\nabla u\|_2^2-(p+1)E(u,v) \tag{7}$$

より, $E(u,v)<0$ ならば $K(u)<0$.

(iv) $\exists t_1\in(0,T_{\max})$ s.t. $K(u(t_1))=0$, $K(u(t))<0$ for $\forall t\in[0,t_1)$ と仮定すると, (ii) より, $\|\nabla u(t_1)\|_2^2\ge\dfrac{2(p+1)}{p-1}d$. よって, $d\le J(u(t_1))\le E(\vec{u}(t_1))<d$ となり, 矛盾. よって, $\forall t\in[0,T_{\max})$ に対して $K(u(t))<0$. また, E は保存量だから, $\forall t\in[0,T_{\max})$ に対して $E(\vec{u}(t))=E(\vec{u}(0))<d$. 故に, $\mathcal{V}$ は (1)–(2) の流れに関して不変であることが示された. □

定理 3(ii) の証明 $T_{\max}=\infty$ と仮定し, 矛盾を導く. $f(t)=\dfrac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$, $E_0=E(u_0,u_1)$ とおくと, (5), (7) より,

$$f''(t)=\frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2+\frac{p-1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2-(p+1)E_0,\quad t\ge 0. \tag{8}$$

また, 補題 3.1(ii), (iv) より,

$$f''(t)\ge\frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2+(p+1)(d-E_0),\quad t\ge 0.$$

ここで, $E_0 < d$ だから, $\exists t_1 > 0$ s.t. $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$ for $\forall t \geq t_1$. さらに, $\alpha = (p-1)/4$, $h(t) = f(t)^{-\alpha}$ とおくと, $h'(t) = -\alpha f(t)^{-\alpha-1} f'(t)$,

$$h''(t) = \alpha f(t)^{-\alpha-2}\{(\alpha+1)f'(t)^2 - f(t)f''(t)\} \leq 0, \quad t \geq t_1.$$

よって, $t \geq t_1$ のとき $h'(t) \leq h'(t_1) = -\alpha f(t_1)^{-\alpha-1} f'(t_1) < 0$ となり, $\exists t_2 \in (t_1, \infty)$ s.t. $h(t_2) = 0$. しかし, $f(t_2) < \infty$ だから, これは矛盾. 故に, $T_{\max} < \infty$. □

次に, 定理 3(i) を示すために, 次の補題を示す.

補題 3.2 (i) $\{(u,v) \in X : \|(u,v)\|_X^2 < 2d\} \subset \mathcal{W}$.

(ii) $(u,v) \in \mathcal{W}$ ならば $\|(u,v)\|_X^2 \leq \dfrac{2(p+1)}{p-1} E(u,v)$.

(iii) $\mathcal{W}$ は (1)–(2) の流れに関して不変である.

証明 (i) $\|(u,v)\|_X^2 < 2d$ とすると, $E(u,v) \leq \dfrac{1}{2}\|(u,v)\|_X^2 < d$. また,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|(u,v)\|_X^2 < 2d < \frac{2(p+1)}{p-1} d$$

だから, 補題 3.1(ii) より, $K(u) \geq 0$.

(ii) これは $K(u) \geq 0$ と (7) から従う.

(iii) $(u_0, u_1) \in \mathcal{W}$ とし, $\exists t_1 \in (0, T_{\max})$ s.t. $\vec{u}(t_1) \notin \mathcal{W}$ とすると, $\vec{u}(t_1) \in \mathcal{V}$. また, $\mathcal{V}$ は逆向きの時間に対しても不変だから, これは矛盾. よって, $\mathcal{W}$ は (1)–(2) の流れに関して不変である. □

定理 3(i) の証明 補題 3.2(ii), (iii) より, $\forall t \in [0, T_{\max})$ に対して,

$$\|\vec{u}(t)\|_X^2 \leq \frac{2(p+1)}{p-1} E(u_0, u_1).$$

よって, $T_{\max} = \infty$. □

注意 3.3 定理 3 と (1)–(2) の定常問題

$$\text{(9)} \qquad -\Delta u = |u|^{p-1} u, \quad x \in \Omega; \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

との関係について考える. $\varphi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ を (9) の解とすると, $K(\varphi)=0$ だから, $E(\varphi,0)=J(\varphi)\geq d$. また, (9) の解 $\phi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ で, $J(\phi)=d$, $K(\phi)=0$ をみたすもの (エネルギー最小定常解) が存在する. 任意の $\lambda>1$ に対し, $(\lambda\phi,0)\in\mathcal{V}$ だから, 定理 3(ii) より, $(\lambda\phi,0)$ を初期値とする (1)–(2) の解は有限時間で爆発する. これは, 定常解 ϕ の不安定性を示している. エネルギー最小定常解 ϕ 以外に, $J(\phi_k)\to\infty$ $(k\to\infty)$ をみたす (9) の解の列 $\{\phi_k\}\subset H_0^1(\Omega)$ が存在する. [14] において, ϕ_k の不安定性が考察されているが, 証明にギャップがあるようである.

注意 3.4 線形及び非線形の消散項が付いた非線形波動方程式に対しても, 定理 3 と同様な問題が考えられる ([3, 5, 8, 12, 16]).

§4. 大域解の有界性 この節では, Cazenave [1] 及び Cazenave and Haraux [2] の Chapter 8 に従って, 大域解の有界性について考える. 定理 3(i), 補題 3.2 より, 初期データ $(u_0,u_1)\in X$ が十分小さい $(\|(u_0,u_1)\|_X^2 < 2d)$ ならば, (1)–(3) の解 $u(t)$ は大域的に存在して, エネルギー空間 X において有界 $(\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty)$ であることは分るが, ここで考察するのは, (1)–(3) の任意の大域解は X で有界か, という問題である. この問題に関して, 非線形項の増大度 p に関して, これまでよりも強い仮定をして, (1)–(3) の大域解 $u(t)$ で $\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X=\infty$ をみたすもの (grow up solution) は存在しないことを示す.

定理 4 (Cazenave [1]) (A1), (A2) に加えて, $N=2$ のときは $p\leq 5$ を仮定する. このとき, $u(t)$ が (1)–(3) の大域解ならば, $\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$.

以下, $u(t)$ を (1)–(3) の大域解とし,

$$f(t)=\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2,\quad w(t)=\frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|_X^2,\quad E_0=E(u_0,u_1)$$

とおく. 定理 3(ii), 補題 3.1(iii) より, $E_0\geq 0$ である. また, (8) より

$$f''(t)\geq (p-1)w(t)-(p+1)E_0,\quad t\geq 0 \tag{10}$$

が成り立つ．以下で，C_0 は Poincaré の不等式，$\|u\|_2 \le C_0\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H_0^1(\Omega)$，に現われる正定数とする．

補題 4.1　$\forall t \ge 0$ に対して，$f(t) \le \max\{f(0), \dfrac{p+1}{p-1}C_0^2E_0\}$.

証明　(8) と Poincaré の不等式より，

$$f''(t) \ge \frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \frac{p-1}{C_0^2}f(t) - (p+1)E_0, \quad t \ge 0.$$

ここで，$g(t) = f(t) - \dfrac{p+1}{p-1}C_0^2E_0$ とおくと，

$$g''(t) \ge \frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \frac{p-1}{C_0^2}g(t), \quad t \ge 0.$$

ここで，$\exists t_1 \ge 0$ s.t. $g(t_1) > 0$, $g'(t_1) > 0$ と仮定すると，$\forall t \ge t_1$ に対し，$g(t) \ge g(t_1)$. このとき，定理 3(ii) の証明と同様にして，矛盾が生じる．よって，$\forall t \ge 0$ に対して，$g(t) \le 0$ または $g'(t) \le 0$. これから，望みの評価を得る．□

補題 4.2　$\forall t \ge 0$ に対して，$|f'(t)| \le \max\{|f'(0)|, \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0\}$.

証明　Poincaré の不等式より，

$$|f'(t)| \le \|u(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2 \le C_0\|\nabla u(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2 \le C_0 w(t).$$

これと (10) より，

$$f''(t) \ge \frac{p-1}{C_0}|f'(t)| - (p+1)E_0, \quad t \ge 0.$$

ここで，$g(t) = f'(t) - \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0$ とおくと，$g'(t) \ge \dfrac{p-1}{C_0}g(t)$. ここで，$\exists t_1 \ge 0$ s.t. $g(t_1) > 0$ と仮定すると，$t \to \infty$ のとき $g(t) \to \infty$. これから，$t \to \infty$ のとき $f(t) \to \infty$ となり，補題 4.1 に矛盾する．よって，$\forall t \ge 0$ に対し，$f'(t) \le \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0$. 次に，$h(t) = -f'(t) - \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0$ とおくと，$h'(t) \le -\dfrac{p-1}{C_0}h(t)$. これから，$\forall t \ge 0$ に対し，$h(t) \le \max\{h(0), 0\}$. よって，$\forall t \ge 0$ に対し，$-f'(t) \le \max\{-f'(0), \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0\}$. □

補題 4.3 $\displaystyle \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1} w(s)\,ds < \infty.$

証明 (10), 補題 4.2 より, $\forall t \geq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(p-1)\int_t^{t+1} w(s)\,ds \\
&\leq (p+1)E_0 + \int_t^{t+1} f''(s)\,ds = (p+1)E_0 + f'(t+1) - f'(t) \\
&\leq (p+1)E_0 + 2\max\{|f'(0)|, \frac{p+1}{p-1}C_0E_0\}.
\end{aligned}
$$

よって, 補題 4.3 が成り立つ. □

注意 4.4 補題 4.1, 4.2, 4.3 では, 局所解が一意的に存在すること, エネルギー等式 (4), (5) と Poincaré の不等式しか使っていない. 特に, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ や $N = 2$ のとき $p \leq 5$ という仮定は使っていない.

定理 4 の証明 エネルギー保存則 (4) より,

$$w(t) = E_0 + \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}.$$

仮定 (A2) より, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ で

$$w'(t) = \int_\Omega |u(t)|^{p-1}u(t)\partial_t u(t)\,dx \leq \|u(t)\|_{2p}^p\|\partial_t u(t)\|_2. \tag{11}$$

以下, 次元 N に関して場合分けして考える.

<u>$N \geq 3$ の場合</u>: この場合は, $1 < p \leq N/(N-2) \leq 3$ だから,

$$\|u\|_{2p}^p \leq C\|\nabla u\|_2^p \leq C(1 + \|\nabla u\|_2^2)\|\nabla u\|_2.$$

よって, (11) より,

$$w'(t) \leq C_1\{1 + w(t)\}w(t).$$

ここで, Gronwall の不等式より, $t \geq 1$, $t-1 \leq \tau \leq t$ に対して

$$w(t) \leq w(\tau)\exp\left(C_1\int_{t-1}^t \{1 + w(s)\}\,ds\right).$$

これを $\tau \in [t-1,t]$ で積分すると,

$$w(t) \le \left(\int_{t-1}^{t} w(\tau)\,d\tau\right) \exp\left(C_1 \int_{t-1}^{t} \{1+w(s)\}\,ds\right).$$

よって, 補題 4.3 より, $\sup_{t\ge1} w(t) < \infty$. 故に, $\sup_{t\ge0} w(t) < \infty$.

<u>$N=2$ の場合</u>: $p \le 3$ のときは $N \ge 3$ の場合と同様に証明できるから, $p > 3$ とする. Gagliardo-Nirenberg の不等式より

$$\|u\|_{2p}^{p} \le C\|u\|_{p+1}^{(p+1)/2}\|\nabla u\|_{2}^{(p-1)/2}.$$

仮定から, $p \le 5$ だから, (11) より,

$$w'(t) \le C\{1+\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}+\|\nabla u(t)\|_2^2\}w(t).$$

ここで, エネルギー保存則 (4) より,

$$1+\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}+\|\nabla u(t)\|_2^2 \le C\{1+w(t)\}.$$

よって, $w'(t) \le C_1\{1+w(t)\}w(t)$. これから, $N \ge 3$ の場合と同様にして, $\sup_{t\ge0} w(t) < \infty$ を得る.

<u>$N=1$ の場合</u>: $N=2$ の場合と同様だから, 省略する. □

注意 4.5 このような議論は, 解の爆発率を調べるときにも有効に使われる (Merle and Zaag [7]).

注意 4.6 $N=2$ のとき $p \le 5$ という仮定が必要かどうかは未解決である (次節 §5 も参照のこと). 注意 4.4 でも述べたが, $N=2, p>5$ のときにも, (1)–(3) の任意の大域解 $u(t)$ は, 補題 4.1, 4.2, 4.3 の評価をみたす. また, (10) と補題 4.2 より, $\liminf_{t\to\infty}\|\vec{u}(t)\|_X^2 \le 2(p+1)E_0/(p-1)$ をみたす. もし grow up solution が存在したとすると, $\limsup_{t\to\infty}\|\vec{u}(t)\|_X^2 = \infty$ だから, そのエネルギーノルム $\|\vec{u}(t)\|_X$ は $t \to \infty$ としたとき, 激しく振動することになる (補題 4.3 も参照のこと). そのため, grow up solution の存在を示すことは, 大変に難しい問題であると思う.

§5. 大域解の有界性 (続き)　この節では, 非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u + mu = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \geq 0, \tag{12}$$

に対する初期値問題の大域解の有界性について考える. ここで, $m > 0$, $p > 1$ とし, $N \geq 3$ のときは $p < 1 + 4/(N-2)$ を仮定する. このとき, (12) に対する初期値問題は, エネルギー空間 $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ で時間局所的に適切である ([4]). また, $\|u\|_q = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$,

$$\begin{aligned}
&\|(u,v)\|_X^2 = \|\nabla u\|_2^2 + m\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2, \\
&J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{m}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, \\
&K(u) = \|\nabla u\|_2^2 + m\|u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

と置き直せば, エネルギー保存則 (4) 及び等式 (5) が成り立つ. $\Omega = \mathbb{R}^N$ のときは, Poincaré の不等式, $\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, は成り立たないので, $m > 0$ は本質的な仮定である. $N \geq 3$, $p > N/(N-2)$ のとき, 埋め込み $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^N)$ は成り立たないので, 定理 4 の証明は使えないが, Merle and Zaag [7] による議論を用いると, $N \geq 2$, $p < 1+4/(N-1)$ のとき, (12) の大域解の有界性を示すことができる. $N = 2$ のとき $1+4/(N-1) = 5$, $N = 3$ のとき $1+4/(N-1) = N/(N-2) = 3$, $N \geq 4$ のとき $N/(N-2) < 1+4/(N-1)$ に注意する.

定理 5　$N \geq 2, 1 < p < 1+4/(N-1)$ とする. このとき, $\vec{u} \in C([0,\infty), X)$ が (12) の大域解ならば, $\sup_{t\geq 0} \|\vec{u}(t)\|_X < \infty$.

注意 5.1　定理 4 の証明と同様にして, $N = 2, 3$ のときは, $p = 1+4/(N-1)$ に対しても, 定理 5 の結論が成り立つことが分る. これから, $N \geq 4$, $p = 1+4/(N-1)$ のときも, 定理 5 の結論が成り立つことが期待されるが, 現時点では不明である. また, $1+4/(N-1) < p < 1+4/(N-2)$ の場合は, 全く未解決である (注意 4.6 も参照のこと).

定理 5 の証明　補題 4.1, 4.3 と同様にして, $1 < p < 1+4/(N-2)$ のとき

(13) $$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_2 < \infty, \quad \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|\vec{u}(s)\|_X^2\,ds < \infty$$

が成り立つ. また, エネルギー保存則 (4) と (13) の第 2 式より

(14) $$C_1 := \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{p+1}^{p+1}\,ds < \infty$$

が成り立つ. 以下, Merle and Zaag [7] に従う.

Step 1. $r = (p+3)/2$ に対して, $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_r < \infty$ が成り立つ.

実際, (14) と平均値の定理より, $\forall t \geq 0$ に対して $\exists \tau(t) \in [t, t+1]$ s.t.

$$\|u(\tau(t))\|_{p+1}^{p+1} = \int_t^{t+1}\|u(s)\|_{p+1}^{p+1}\,ds \leq C_1.$$

$2 < r < p+1$ だから, 上式と (13) の第 1 式より, $\sup_{t\geq 0}\|u(\tau(t))\|_r < \infty$.
また, $\forall t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_r^r - \|u(\tau(t))\|_r^r &= \int_{\tau(t)}^t \frac{d}{ds}\|u(s)\|_r^r\,ds \\ &\leq C\int_t^{t+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u(s,x)|^{r-1}|\partial_s u(s,x)|\,dx\,ds \\ &\leq C\int_t^{t+1}(\|u(s)\|_{2(r-1)}^{2(r-1)} + \|\partial_s u(s)\|_2^2)\,ds.\end{aligned}$$

ここで, $r = (p+3)/2$ より $2(r-1) = p+1$ だから, $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_r < \infty$.

Step 2. Gagliardo-Nirenberg の不等式より,

$$\|u(t)\|_{p+1} \leq C\|u(t)\|_r^{1-\theta}\|\nabla u(t)\|_2^\theta.$$

ここで

$$\frac{1}{p+1} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{r}$$

であり, $p < 1 + 4/(N-1)$ のとき $(p+1)\theta < 2$ だから, Step 1 より, $\exists C_2 > 0$ s.t.

$$\frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq C_2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2, \quad t \geq 0.$$

さらに, エネルギー保存則 (4) より, $\forall t \geq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}(t)\|_X^2 &= 2E(\vec{u}(0)) + \frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&\leq 2E(\vec{u}(0)) + C_2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

よって, $\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X < \infty$ が成り立つ. □

注意 5.2 $m = 0$ の場合は, これまでの $m > 0$ の場合と状況が本質的に異なる. $m = 0$ の場合に, (12) の grow up solution の存在と非存在について調べることも, 面白い問題ではないかと思う.

参考文献

[1] T. Cazenave, Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Funct. Anal. **60** (1985) 36–55.

[2] T. Cazenave and A. Haraux, An introduction to semilinear evolution equations, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 13, Clarendon Press, 1998.

[3] V. Georgiev and G. Todorova, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Differential Equations **109** (1994) 285–308.

[4] J. Ginibre and G. Velo, The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation, Math. Z. **189** (1985) 487-505.

[5] R. Ikehata, Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms, Nonlinear Anal. **27** (1996) 1165–1175.

[6] H. Ishii, Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations, J. Differential Equations **26** (1977), 291–319.

[7] F. Merle and H. Zaag, Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation, Amer. J. Math. **125** (2003) 1147–1164.

[8] M. Ohta, Remarks on blowup of solutions for nonlinear evolution equations of second order, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998) 901-910.

[9] M. Ôtani, Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Qualitative theory of differential equations, pp. 795–809, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 30, North Holland, 1981.

[10] M. Ôtani, 劣微分作用素の差の項をもつ発展方程式の解の漸近挙動について, 京都大学数理解析研究所講究録 386 (1980), 89–108.

[11] L. E. Payne and D. H. Sattinger, Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations, Israel J. Math. **22** (1975), 273–303.

[12] P. Pucci and J. Serrin, Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy, J. Differential Equations **150** (1998) 203–214.

[13] D. H. Sattinger, On global solution of nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **30** (1968), 148–172.

[14] N. Sternberg, Blow up near higher modes of nonlinear wave equations, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 315–325.

[15] M. Tsutsumi, On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, Math. Japon. **17** (1972), 173–193.

[16] E. Vitillaro, Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, Arch. Rational Mech. Anal. **149** (1999) 155–182.

8 月 9 日のセッション総括

座長・赤木 剛朗
(早大 メディアネットワークセンター)

1 修士の学生／門外漢にも魅力的な講演を

このセッションのスピーカー全員に, 「**若い学生や, 自分と異なる専門の人にも興味を持ってもらえるように**」と配慮している様子が伺えました.

例えば, 吉川周二さんや廣澤史彦さんの講演では, **問題意識, および証明の骨組みを明らかにし, ディテールよりも全体的な話の流れが参加者に伝わるような構成**になっていました. 専門の異なる聞き手には, 証明の technical な部分よりも, どのような問題意識が背景にあるか, またどのようなストーリーで証明が展開されるか, なぜそのようなストーリーになっているか, という話題の方が魅力的でしょう.

また, 阿曽雅泰さんや松浦啓さんは, 非専門家や若い学生に**馴染みの薄い数学の概念を, 単純な例などを用いて分かりやすく説明する**ように勤めていたようです. また, 話題となる分野の過去の研究が体系的にまとめられていたところも, 聞き手の興味を引いたと思います.

2 手書き OHP vs プロジェクター

このセッションでは, 手書きの OHP, PDF や PowerPoint (PPT) で作成した資料など, いろいろな手法を用いた発表を見る/聞くことができました. 最近は数学の研究集会でも, OHP ばかりでなく, プロジェクタを用いた発表がしばしば見受けられるようになっています. しかし, まだ思考錯誤の段階で, まだまだ OHP を用いた手法が主流です. 以下では, それぞれの手法の持つメリットとデメリットについて, 私見を表にまとめています (参考になれば幸いです). どちらの方法を用いるにしても, そのメリットを最大限に生かし, デメリットを補うような工夫をすることが重要と思います.

	OHP	プロジェクタ
メリット	(1) 使い慣れている (2) 書き込みできるので図が入れやすい, また説明が円滑に. さらに間違っている箇所をその場で訂正できる (3) 複数のページを同時に見せることが可能 (4) OHP 以外の機器が不要	(1) 見た目がきれい (2) アニメーションで話の流れを分かりやすく説明できる (主に PPT) (3) データをコピー・修正することで資料の再利用が容易 (4) 環境にやさしい
デメリット	(1) 資料の使い回すと, 記号や定理番号などに矛盾を起こす場合が多い (2) 字が汚かったりレイアウトが悪いと見にくい. 記号の書き方に個人の特徴が出るため, 分かりにくい	(1) PC 等の機器に不具合があると使えない (2) ソフトが複数のページを一度に見せないことを前提に設計されている (3) 図を入れるのに手間がかかる (4) 書き込みが難しい

3 座席と質問

(特に若い学生の方々は) なるべく前の方の座席に座りましょう. 後ろからだと資料も見にくいし, 何よりも大勢の人の背中を見てしまうと, 気負ってしまって質問がしにくくなります. **座席が前であれば前である程, 少人数のセミナーのような気軽な気分で質問できます.** 若手セミナーは専門知識のない若手研究者が対象ですから, **質問に良いも悪いもありません.** ちょっとでも気になったら, どんな質問でも気軽にしましょう. 上級生 (助手や先生方) も, **よりいっそう下級生が質問し易い雰囲気を作って**頂けると, 若手セミナーがますます有意義なものになると思われます.

形状記憶合金方程式の可解性について

吉川周二　　東北大学大学院理学研究科 D2

形状記憶合金の相転移現象を記述する方程式について考察したい．このような方程式はいくつか知られているが、ここでは特に，Falk により提唱されたものと，そこから派生した三次元の内部粘性付方程式の可解性について議論したい．方程式の物理的な背景や，導出については [3] を参考にされたい．また，これらの方程式の他に，形状記憶合金の Hysteresis 効果を，劣微分を用いて表した方程式が愛木, 剣持両先生により提唱され，研究が進められている．この視点からの研究も非常に興味深い話題である．

まずいくつかの記法，及び空間を導入する．u_y は y 変数についての u の偏微分, $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換を表す．発展作用素 $U(t)$ に対して，$\Gamma(U)f := \int_0^t U(t-s)f(s)ds$ と書く．また $Q_T := [0,T]\times\Omega$, $S_T := [0,T]\times\partial\Omega$.

- L^p は p 乗可積分な Lebesgue 空間, $L^p_T X := L^p(0,T;X)$ で特に $L^p_{T,x} := L^p_T L^p_x$,
- W^k_p は k 階弱微分まで p 乗可積分な Sobolev 空間, $H^k := W^k_2$, $W^{2l,l}_p(Q_T) := \cap_{0\le k\le l} W^k_p(0,T;W^{2(l-k)}_p(\Omega))$.
- $B^j_{p,q}$ は $B^j_{p,q} := [L^p, W^j_p]_{s/j,q}$ で定義される，Besov 空間，ただし $[X,Y]_{s/j,q}$ は X と Y の実補間空間とする．

1　1-D Model without viscosity (Falk's model)

次の初期値問題を考える．

$$
(1F)\begin{cases}
u_{tt} + u_{xxxx} = (f_1(u_x)\theta + f_2(u_x))_x, & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times[0,1]\\
\theta_t - \theta_{xx} = f_1(u_x)\theta u_{xt}, & \\
u(t,0) = u(t,1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = \theta_x(t,0) = \theta_x(t,1) = 0, & \\
u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x). &
\end{cases}
$$

これは形状記憶合金の Falk モデルと呼ばれる方程式系であり，長さ 1 の形状記憶合金製の針金の運動を記述しており，u は金属の変位，θ は温度を記述している．方程式のエネルギークラスでの解を求めることは，解の時間無限遠での漸近挙動を調べる上で役に立つことが期待される．この方程式系についての知られている結果を挙げる．[1] において初期値 $(u_0,u_1,\theta_0)\in H^3\times H^1\times H^1$ の仮定のもとで，時間大域解の存在と一意性が証明されている．ここでの f_1, f_2 の仮定は次のようなものである．

$$
f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}) \text{ and } F_2(r) \ge -C \text{ for } r\in\mathbb{R}. \tag{A}
$$

(ただし $F_2' = f_2$)

以下に今回の主結果を述べる．

定理 1.1 (Local existence and uniqueness). f_1, f_2 が条件 (A) を満たすとする．また $\epsilon\in(0,1/6)$ を任意に固定する．この時，任意の $(u_0,u_1,\theta_0)\in H^2\times L^2\times L^1$ に対して，$T = T(\|u_0\|_{H^2}, \|u_1\|_{L^2}, \|\theta_0\|_{L^1}) > 0$ が存在して，以下を満たす $(1F)$ の時間局所解 (u,θ) が唯一つ存在する．

$$
u\in C([0,T];H^2)\cap L^4(0,T;W^2_4),
$$

$$\theta \in C([0,T];L^1) \cap L^{\frac{4}{3}+\epsilon}(0,T;W^1_{\frac{4}{3}+\epsilon}).$$

定理 1.2 (Global existence). $\theta_0 \geq 0$ とする．この時，定理 1 の時間局所解は時間無限遠まで延長できる．

1.1 Outline of Proof.

証明の概略を述べる．詳しい証明，及び計算については [9] を参照されたい．簡単のため $F := f_1(u_x)\theta + f_2(u_x)$ と書く．$\widehat{F}(0)$ が x に依らないことに注意して，$\varepsilon := u_x$ について方程式 (1F) を書き直すと，次の方程式を得る．

$$(1F')\begin{cases} \varepsilon_{tt} + \varepsilon_{xxxx} = (F - \widehat{F}(0))_{xx}, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \\ \theta_t - \theta_{xx} = f_1(\varepsilon)\theta\varepsilon_t, \\ \varepsilon_x(t,0) = \varepsilon_x(t,1) = \varepsilon_{xxx}(t,0) = \varepsilon_{xxx}(t,1) = \theta_x(t,0) = \theta_x(t,1) = 0, \\ \varepsilon(0,x) = \partial_x u_0(x), \quad \varepsilon_t(0,x) = \partial_x u_1(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x). \end{cases}$$

作用素 A をノイマン条件付き二回微分作用素，すなわち

$$A = \partial_x^2, \quad \text{where} \quad D(A) = \{f \in H^2 |\, f_x(0) = f_x(1) = 0\}.$$

で定義する．$(1F')$ の解は $\varepsilon = \sum_{k\geq 1} \widehat{v}(k)\cos 2\pi kx$ と展開できることに注意する．また，任意の f で $\widehat{f}(0) = 0$ を満たすものについて，A の逆作用素は次で定義できる，

$$A^{-1}\varepsilon := -\sum_{k\geq 1} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}\widehat{\varepsilon}(k).$$

このような A を用いて更に，$\varepsilon := v^{\pm} := \varepsilon \pm iA^{-1}\varepsilon_t$ とおくと，方程式は

$$(1F'')\begin{cases} v^+ + i\partial_x^2 v^+ = i(F - \widehat{F}(0)), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \\ v^- - i\partial_x^2 v^- = -i(F - \widehat{F}(0)), \\ \theta_t - \theta_{xx} = f_1(\varepsilon)\theta\varepsilon_t, \\ v_x^{\pm}(t,0) = v_x^{\pm}(t,1) = \theta_x(t,0) = \theta_x(t,1) = 0, \\ v^{\pm}(0,x) = \varepsilon_0(x) \pm iA^{-1}\varepsilon_t, \quad \theta(0,x) = \theta_0(x), \end{cases}$$

と書き換えられる．ここで上の変換は，$\varepsilon = v^+ + v^-$ が成り立つので (1F') の解が得られることは勿論のこと，$\varepsilon_t = A(v^+ - v^-)$ となるため熱方程式の非線形項に含まれる ε_t を評価していく際にも役にたつことに注意したい．次にこの証明に用いる評価を紹介する．

補題 1.3 (Strichartz estimate). $V_{\pm}(t) := e^{\pm itA}$ に対して，次の評価が成り立つ，

$$\|V_{\pm}g : L^4_{T,x}\| \leq C\|g; L^2_x\|,$$
$$\|\Gamma(V_{\pm})f; L^4_{T,x}\| + \|\Gamma(V_{\pm})f; L^{\infty}_T L^2_x\| \leq \|f; L^{4/3}_{T,x}\|.$$

この評価は，空間がユークリッド空間における評価は Strichartz により最初に得られた．空間がトーラスの場合は Bourgain の方法を用いて得られる ([2])．

補題 1.4 (Maximal regularity and L^p-L^q estimates). $U(t) := e^{tA}$ に対して，次の評価が成り立つ，

$$\|\partial_x^2\Gamma(U)f; L^p_{T,x}\| \leq C\|f; L^p_{T,x}\|,$$

for any $p \in (1,\infty)$, *and*

$$\|\partial_x^j U(t)g; L_x^p\| \le \frac{C}{t^{\frac{j}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}\|g; L_x^q\|,$$

for any $1 \le q \le p \le \infty$ *and* $j = 0, 1, 2, \ldots$.

前半の評価は，古くから知られている評価で，例えば文献 [6] を参照されたい．後半の評価は q に 1 をとれることに注意したい．これは周期境界条件で直接熱核を用いて自由解を記述し，評価することで得られる．

あとは Duhamel の積分公式で書き直した方程式に対して，これらの評価を用いてエネルギークラスにおける時間局所解の存在を示す．熱方程式のクラスが $4/3+\varepsilon$ 乗可積分空間となっているのは Strichartz 評価に用いる空間が 4 乗可積分空間になっているため，その双対空間である 4/3 乗可積分が適当であるからである．ε は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式が端点では破綻するため少し余裕をとるのに必要となる．

ここで得られた解から直ちに (ε,θ) が求まる．はじめに第一方程式から F の Fourier 零成分を引いていることから一意的に (u,θ) も得られることに注意したい．

時間大域解を得るためには，よく知られているようにエネルギー保存則から延長をしていけばよいのだが，ここでまず必要になるのが最大値原理 ($\theta_0 \ge 0$ ならば $\theta(t) \ge 0$ a.e.) だが，これは十分滑らかな解と非線形項に対しての結果を近似することで得られる．詳細については [9] に委ねたい．

2 3-D Model with small viscosity

この節では次の三次元モデルを考えていく．

$$(3FV)\begin{cases} u_{tt} + QQu - \nu Qu_t = \nabla\cdot F_{/\epsilon}(\epsilon,\theta), & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\Omega \\ \theta_t - \Delta\theta = \theta F_{/\theta\epsilon}(\epsilon,\theta) + \nu(A\epsilon_t):\epsilon_t, \\ u = Qu = \nabla\theta\cdot n = 0 \qquad \text{on } \mathbb{R}^+\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x) \ge 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ただし，$u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\theta:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, n は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル, Ω は C^2 境界を持つ有界領域, $\epsilon = (\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i/j}+u_{j/i})$, $A = (A_{ijkl}) = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$, $Qu = \nabla\cdot(A\epsilon(u)) = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)$.
また自由エネルギー $F(\varepsilon,\theta) := F_1(\varepsilon,\theta) + F_2(\varepsilon)$ は次の形のものを考える．

(i) $F_1(\varepsilon,\theta)$ と $F_2(\varepsilon)\in C^3$ かつ $\theta\ge\theta_l$ ($\theta_l =$ 定数) に対して，

$$\begin{aligned} &|F_{1/\varepsilon\varepsilon}| \le C\theta^r|\varepsilon|^{q-1}, && |F_{2/\varepsilon\varepsilon}| \le C|\varepsilon|^{\bar q-1}, \\ &|F_{1/\varepsilon\theta}| \le C\theta^{r-1}|\varepsilon|^{q}, && |F_{1/\theta\theta}| \le C\theta^{r-2}|\varepsilon|^{q+1}, \\ &|F_{1/\varepsilon}| \le C\theta^r|\varepsilon|^{q}, && |F_{2/\varepsilon}| \le C|\varepsilon|^{\bar q}, \\ &c|\varepsilon|^{\bar q+1} - C \le F_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

上の条件から, F は次の条件を満たす．

$$|F_1(\varepsilon,\theta)| \le C + C\theta^r|\varepsilon|^{q+1}, \qquad |F_2(\varepsilon)| \le C + C|\varepsilon|^{\bar q+1},$$
$$c|\varepsilon|^{\bar q+1} - C \le F_2(\varepsilon).$$

(ii) F_1 は $[0,\theta_l)$ で θ について線形.

上の方程式 $(3FV)$ は，$(1F)$ を 3 次元化し粘性項 (係数 ν のかかった項) をつけた，3 次元における粘性付きの形状記憶合金方程式である．粘性をつけると第一方程式は放物化されるため十分な平滑化が得られ取り扱いやすくなる．

ここでは以下の仮定の下，時間大域解の存在と一意性を証明する，

$$\nu > 0, \qquad 0 < r < \frac{1}{2}, \qquad 1 < \bar{q} < 5 \quad \text{and} \quad 1 < q \leq (\bar{q}+1)(\frac{1}{2} - r). \tag{1}$$

一般に多次元の場合，ソボレフの埋め込みの指数が悪くなることから一次元の場合より扱いにくくなることは知られているが，その上，形状記憶合金方程式においては自由エネルギーも，一次元の時 ($r = 1$, $q = 1$, $\bar{q} = 5$) に比べて非線形性の強いもの ($r = 1$, $q = 3$, $\bar{q} = 5$) をとる必要があることが Falk-Konopka [5] により指摘されている．Pawlow-Zochowski [7] は，三次元の粘性付き方程式について時間大域解の一意存在を証明したが，そこでは $\nu \geq 2$(粘性大), $1 < \bar{q} \leq 5/2$ の条件が必要であった．粘性は十分小さいことが自然であり，$\bar{q}$ の条件も Falk-Konopka と比べると，かなり小さいためできるだけ大きくとれることが望ましい．しかし残念なことに条件 (1) も Falk-Konopka の条件は満たさない．

ところで $r \neq 1$ ととると，一般に熱方程式の方が準線形になるのだが，Pawlow-Zochowski と同様にこれを半線形と仮定して問題を考えた．そのため物理的に自然と考えられるエネルギーノルム ($(u, u_t, \theta) \in H^2 \times L^2 \times L^1$) は保存しないが，時間について増大を許せばある条件を満たす F について，これらのノルムを抑えることができる．このために必要になる仮定が，$0 < r < \frac{1}{2}$, $1 < q \leq (\bar{q}+1)(\frac{1}{2} - r)$ であり，$\bar{q}$ に対する仮定は必要としないことに注意する．

補題 2.1. $0 < r < \frac{1}{2}$, $1 < q \leq (\bar{q}+1)(\frac{1}{2} - r)$ を仮定する．この時，方程式 $(3F)$ の十分滑らかな解に対して，次の評価が成り立つ，

$$\|u(t)\|_{H^2} + \|u_t(t)\|_{L^2} + \|\theta(t)\|_{L^1} \leq C(T, \|u_0\|_{H^2}, \|u_1\|_{L^2}, \|\theta_0\|_{L^1}), \qquad \textit{for } 0 \leq t \leq T.$$

1 節における 1 次元のエネルギー不等式を導く方法と同じようにするが，この際には非線形項が打ち消しあってはくれないので，指数の仮定と Gronwall の不等式を用いることによって評価をえる．

証明だが，Pawlow-Zochowski は Schauder の不動点定理を用いて証明している．しかしここでは Banach の不動点定理で証明を行う．このことによって，証明の見通しがつきやすく，また多少簡略化できたと思われる．以下がこの節の主結果である．

定理 2.2. 条件 (1) を仮定する．$p > 2$ を任意に固定する．この時，任意の $(u_0, u_1, \theta_0) \in U(p) := B^{3-\frac{2}{p}}_{p,p} \times B^{1-\frac{2}{p}}_{p,p} \times B^{2-\frac{4}{p}}_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$ に対して，問題 $(3FV)$ の時間大域解で $(\varepsilon, \theta) \in V_{loc}(p) := W^{2,1}_{p,loc} \times W^{2,1}_{\frac{p}{2},loc}$. なるものが唯一つ存在する．

この定理において初期値は $B^{3-\frac{2}{p}}_{p,p} \times B^{1-\frac{2}{p}}_{p,p} \times B^{2-\frac{4}{p}}_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$ にとったがこれは形式的に $p = 2$ にとると $H^2 \times L^2 \times L_{1,1}$ となる．これは残念ながら一致はしてはいないがエネルギークラスに似た空間である．その意味でより自然なデータに対する結果であると言える．また解のクラスは変位の方が微分が足りないため，弱解を考えていることになるが，特に注意したいのは，熱の可積分性の指数 $(p/2)$ が変位のそれ (p) の半分となっていることである．これも実はエネルギーの形を見ると非常に自然な仮定である．一方 Pawlow-Zochowski の結果は初期値として $W^{4-2/p}_p \times W^{2-p/2}_p \times W^{2-p/2}_p$, 解のクラスは $W^{4,2}_p \times W^{2,1}_p$ を $p > 5$ をとるような十分滑らかなものについて考えている．これに対応する結果も同様にして得られる．

系 2.3. (1) を仮定する．任意に $p > \frac{5}{2}$ と $p' > \frac{5}{2}$ を次の条件を満たすように選ぶ，

$$\begin{cases} p' \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5p}{2(5-p)}\right] & \textit{if } p \in (5/2, 5), \\ p' \in \left[\frac{p}{2}, \infty\right) & \textit{if } p \in [5, \infty). \end{cases} \tag{2}$$

この時，任意の $(u_0, u_1, \theta_0) \in \widetilde{U}(p, p') := B^{4-\frac{2}{p}}_{p,p} \times B^{2-\frac{2}{p}}_{p,p} \times B^{2-\frac{2}{p'}}_{p',p'}$ に対して，問題 $(3FV)$ の時間大域解 (u, θ) で $(u, \theta) \in \widetilde{V}_{loc}(p, p') := W^{4,2}_{p,loc} \times W^{2,1}_{p',loc}$. なるものが唯一つ存在する．

Besov 空間の埋め込み ($W^j_p \hookrightarrow B^j_{p,p}$ for $p \geq 2$) が成り立つので，特に $p = p'$ ととると，この結果は Pawlow-Zochowski の結果を含んでいることがわかる．

2.1 Outline of Proof.

証明の概略を述べる．詳しい証明，及び計算については [8] を参照されたい．まず次の評価を示す．

補題 2.4. 次の線形方程式の解 u に対して，

$$\begin{cases} u_{tt} - \nu Q u_t + QQu = \nabla \cdot f, & in\ Q_T, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & in\ \Omega, \\ u = Qu = 0, & on\ S_T, \end{cases}$$

次の評価が任意の $p \in (1,\infty)$ について成り立つ，

$$\begin{aligned} \|u_{tt}\|_{L^p(Q_T)} + &\|Qu_t\|_{L^p(Q_T)} + \|QQu\|_{L^p(Q_T)} \leq \\ & C(\|u_0\|_{B^{4-\frac{2}{p}}_{p,p}} + \|u_1\|_{B^{2-\frac{2}{p}}_{p,p}}) + C\|\nabla \cdot f\|_{L^p(Q_T)}. \end{aligned} \tag{3}$$

これは $\alpha := \frac{\nu}{2} + i\sqrt{1-\frac{\nu^2}{4}}$ とかくと，次の二つの方程式

$$\begin{cases} u_t - \bar{\alpha} Q u = w, & \text{in } Q_T, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } S_T, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} w_t - \alpha Q w = \nabla \cdot f, & \text{in } Q_T, \\ w(0,x) = u_1(x) - \alpha Q u_0(x), & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{on } S_T, \end{cases} \tag{4}$$

に対しての，Maximal Regularity

$$\|u_t\|_{L^p} + \|Qu\|_{L^p} \leq C\|w\|_{L^p} + C\|u_0\|_{B^{2-\frac{2}{p}}_{p,p}},$$

$$\|w_t\|_{L^p} + \|Qw\|_{L^p} \leq C\|\nabla \cdot f\|_{L^p} + C\|u_1 - Qu_0\|_{B^{2-\frac{2}{p}}_{p,p}},$$

が得られればよい．この評価が成り立つための十分条件について述べる．次の抽象放物型方程式 (簡単の為初期値は 0 にとる) を考える．

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t), & t > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ただし，X を ζ-convex Banach 空間 ($L^p(\Omega)$ 空間は ζ-convex Banach 空間である)，A を X の非有界閉線形作用素で稠密な定義域 $D(A)$ を持つものとする．与えられた，$f : \mathbb{R}^+ \to X$ に対して，Maximal Regularity

$$\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^+;X)} + \|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^+;X)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+;X)}$$

が成り立つための必要十分条件は A が $\mathcal{RS}(X)$ というクラスに属し，かつ $\mathcal{R}$-angle が次の条件 $\phi^R_A < \pi/2$ を満たすことであることが知られている．定義などについては [4] を参照されたい．議論を方程式 (4) に戻すと，Dirichlet 境界条件付き αQ 及び $\bar{\alpha} Q$ は $\nu > 0$ である限り，このクラス (実際はより強いクラス) に属していることを示す事ができる．このことから (3) が得られる．

時間局所解の存在については先程述べた通り，Banach の不動点定理を用いる．すなわち Duhamel 公式による積分方程式から定義される写像が縮小写像になっていることを補題 2.4 を用いて示す．

最後に先験的評価について述べる．Trace Space への埋め込み $W^{2,1}_p(Q_T) \hookrightarrow C([0,T]; B^{2-2/p}_{p,p})$ に注意すると，ここで得られた時間局所解を大域的に延長するためには $\|\varepsilon\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}$ と $\|\theta\|_{W^{2,1}_{p/2}(Q_T)}$ が抑えられればよいことがわかる．簡単の為，非線形項の第一項を無視して評価をする，すなわち $u_{tt} - Qu_t + QQu = \nabla \cdot F_{2/\varepsilon}$ について考える．Gagliardo-Nirenberg の不等式とエネルギー評価 (補題 2.1) を用いると，

$$\|\varepsilon\|_{L^{5p}(Q_T)} \leq C\|\nabla\varepsilon\|^{4/5}_{L^\infty_T L^2} \|Q\varepsilon\|^{1/5}_{L^p(Q_T)} \leq C(T)\|Q\varepsilon\|^{1/5}_{L^p(Q_T)},$$

が得られる．これと $\bar{q} < 5$ の条件を用いることによって，

$$\|F_{2/\varepsilon}(\varepsilon)\|_{L^p} \leq C(T)\|Q\varepsilon\|_{L^p}^{1-}$$

Maximal Regularity と Young の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\|_{W_p^{2,1}} &\leq C\|(u_0, u_1, \theta_0)\|_{U(p)} + C(T)\|\varepsilon\|_{L^p}^{1-} \\ &\leq C\|(u_0, u_1, \theta_0)\|_{U(p)} + C(T) + \frac{1}{2}\|\varepsilon\|_{W_p^{2,1}}.\end{aligned}$$

右辺末項を左辺に移項すると $\|\varepsilon\|_{W_p^{2,1}}$ の大域的な評価がえられる．熱方程式に対しても同様にすると欲しい評価が得られる．また系 2.3 についても同様にする．

参考文献

[1] T. Aiki, *Weak solutions for Falk's model of shape memory alloys.* Math. Meth. Appl. Sci. 2000; **23**:299-319.

[2] Bourgain J. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I, II.* Geom. Funct. Anal. 1993; **3**:107-156, 209-262.

[3] M. Brokate and J. Sprekels, Hysteresis and phase transitions., Appl. Math. Sci., Springer; Berlin, 1996: Vol. 121.

[4] R. Denk, M. Hieber and J. Prüss, $\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. Mem. AMS. **166**(2003)Num. 788.

[5] F. Falk and P. Konopka, *Three-dimensional Landau theory describing the martensitic phase transformation of shape memory alloys.* J. Phys.: Condensed Matter **2**(1990),61-77.

[6] O. Ladyzenskaja, V. Solonnikov, N. Ural'ceva, Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Trans. Math. Monographs. AMS: Providence, Rhode Island; 1968:vol. 23.

[7] I. Pawlow and A. Zochowski, *Existence and uniqueness of solutions for a three-dimensional thermoelastic system* Dissert. Math., **406**(2002), 1-46.

[8] S. Yoshikawa *Unique global existence for a three dimensional thermoelastic system of shape memory alloys with small viscosity.* in preperation.

[9] S. Yoshikawa. *Weak solutions for the Falk model system of shape memory alloys in energy class.* Preprint.

マイクロポーラ電磁流体方程式の解の漸近挙動について

早稲田大学理工学部　松浦　啓
kino@otani.phys.waseda.ac.jp

1　はじめに

2次元有界領域における非圧縮性のマイクロポーラ電磁流体 (magneto-micropolar fluid) 方程式に関して指数アトラクターが存在することを示す．指数アトラクターの構成の手法は現在までに様々なものが知られている．ここでは [6] による抽象論を利用した構成法を述べる．

2　準備

2.1　マイクロポーラ電磁流体の方程式

滑らかな境界を持つ2次元の単連結な有界開集合 Ω を占めるマイクロポーラ電磁流体の方程式系は次のようなものである：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\mu+\chi)\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \nabla(p+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{f} + 2\chi\tilde{\nabla}\times\omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega + 4\chi\omega + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\omega = g + 2\chi\nabla\times\mathbf{u}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nu\tilde{\nabla}\times(\nabla\times\mathbf{b}) - \tilde{\nabla}\times(\mathbf{u}\tilde{\times}\mathbf{b}) = 0, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{b} = 0, \tag{4}$$

ただし，ここに微分作用素 $\nabla\times$，$\tilde{\nabla}\times$ ならびに「外積」 $\tilde{\times}$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{v} &= \frac{\partial v^2}{\partial x_1} - \frac{\partial v^1}{\partial x_2} &&\text{for all } \mathbf{v} = (v^1(x_1,x_2), v^2(x_1,x_2)),\\
\tilde{\nabla}\times\varphi &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) &&\text{for all } \varphi = \varphi(x_1,x_2),\\
\mathbf{a}\tilde{\times}\mathbf{b} &= a_1b_2 - a_2b_1 &&\text{for all } \mathbf{a} = (a_1,a_2),\ \mathbf{b} = (b_1,b_2).
\end{aligned}$$

未知関数は，流速ベクトル $\mathbf{u}$，微小回転速度場 ω，磁場ベクトル $\mathbf{b}$ および圧力 p である．外力は $\mathbf{f}, g$ 与えられたものとし，時間に依存しない定常場であると仮定する．物理的な定数 μ, χ, α, ν は正の数である．

上の方程式系に加え，次の境界条件を課す：

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{b}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

ただし，$\mathbf{n}$ は境界における外向き単位法線ベクトルを表す．

ここで，この方程式系の解の時間大域的な振る舞いに関する研究をいくつか紹介しておく．Łukaszewicz [7] は磁場の項がないマイクロポーラ流体（極性流体とも訳される）の2次元有界領域における方程式が定める力学系において global attractor が存在することを示した．また，Łukaszewicz and Sadowski [8] は非有界領域（ただし，川や運河のように一方向には有界であるような領域）の場合のマイクロポーラ電磁流体の方程式が定める力学系において uniform attractor が存在することを示した．

Navier-Stokes 方程式に関しては Eden ら [4] によって指数アトラクターの存在が示されている．マイクロポーラ電磁流体の方程式系のもつ非線形性は Navier-Stokes 方程式と同じであるから，同様の結果を得られると期待される．その予想が正しいことを示すのが本稿の目的である．

2.2 関数空間と作用素の設定

電磁流体 (MHD) の標準的な取り扱いを参考にし，以下のような関数空間および作用素を設定する．

まず，$\mathbf{C}_\sigma^\infty(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega); \nabla\cdot\mathbf{u} = 0\}$ とおき，$\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ および $\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ をそれぞれ $\mathbf{C}_\sigma^\infty(\Omega)$ の $\mathbf{L}^2(\Omega)$ における閉包，$\mathbf{H}^1(\Omega)$ における閉包とする．また $|\cdot|$ および $(\cdot,\cdot)$ で $\mathbf{L}^2(\Omega)$ におけるノルムと内積を表す．$\mathbf{H}_\sigma^2(\Omega) = \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$, $\mathbf{H}_n^1(\Omega) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \nabla\cdot\mathbf{b} = 0, \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}$ とし，$\mathbf{H}_n^2(\Omega) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_n^1(\Omega); \nabla\times\mathbf{b}|_{\partial\Omega} = 0\}$ とおく．よく知られているように，$\mathbf{b} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ に対し，$|\nabla \times \mathbf{b}|$ は通常の $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ノルムと同値である（[9] を参照）．方程式系 (1)–(5) を取り扱う Hilbert 空間 H を $H = \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ とおき，H の内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を次のように定義する：任意の $U_i = (\mathbf{u}_i, \omega_i, \mathbf{b}_i) \in H$ $(i = 1, 2)$ に対し，

$$(U_1, U_2)_H = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + (\omega_1, \omega_2)_{L^2} + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

H のノルムを $|\cdot|_H = (\cdot,\cdot)_H^{1/2}$ と定める．さらに，$V = \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ とおき，そのノルムを以下のように定める：

$$\|U\|_V = (|\nabla\mathbf{u}|^2 + \|\nabla\omega\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2}^2)^{1/2},$$

ここで

$$|\nabla\mathbf{v}|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left|\frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right|^2 dx \quad \text{for } \mathbf{v} = (v^1, v^2) \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

さて，$\mathbf{L}^2(\Omega)$ から $\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ への正射影を P で表し，3つの作用素 A_1, A_2 および

A_3 を以下のように定める：

$$
\begin{aligned}
D(A_1) &= \mathbf{H}^2_\sigma(\Omega) \times \mathbf{H}^2_n(\Omega),\\
A_1\mathbf{u} &= -(\mu+\chi)P\Delta\mathbf{u} \quad \text{for all } \mathbf{u} \in D(A_1),\\
D(A_2) &= H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega),\\
A_2\omega &= -\alpha\Delta\omega \quad \text{for all } \omega \in D(A_2),\\
D(A_3) &= \mathbf{H}^2_n(\Omega),\\
A_3\mathbf{u} &= \nu\widetilde{\nabla} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \quad \text{for all } \mathbf{b} \in D(A_3).
\end{aligned}
$$

よく知られているように，これらは全て自己共役かつ極大単調な線形作用素であり，次のような評価が成り立つ（[9] および [10] を参照）：

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2} \le C|A_1\mathbf{u}| && \text{for all } \mathbf{u} \in D(A_1),\\
&\|\omega\|_{H^2} \le C\|A_2\omega\|_{L^2} && \text{for all } \omega \in D(A_2),\\
&\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2} \le C|A_3\mathbf{b}| && \text{for all } \mathbf{b} \in D(A_3),
\end{aligned}
$$

本稿全体にわたり，C は Ω，μ, χ, α および ν にのみ依存する定数を表す．また，$\|\cdot\|_E$ で関数空間 E のノルムを表す．

以下ではこれら 3 つの作用素を一まとめにして取り扱う．そのため，作用素 A を

$$
\begin{aligned}
D(A) &= D(A_1) \times D(A_2) \times D(A_3),\\
AU &= (A_1\mathbf{u}, A_2\omega, A_3\mathbf{b}) \quad \text{for all } U = (\mathbf{u}, \omega, \mathbf{b}) \in D(A)
\end{aligned}
$$

と定義する．A は H 上の自己共役かつ極大単調な線形作用素である．

2.3 抽象発展方程式としての定式化

非圧縮性流体の通常の取り扱いと同様に，勾配項 $\nabla(p + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b})$ を消去するため，正射影 P を方程式 (1) に作用させる．その上で方程式系を次のような H 上の抽象発展方程式 (E) とみなす：

$$
(E)\begin{cases}
\dfrac{dU}{dt}(t) + AU(t) + B(U(t)) = F \quad \text{in } [0,T],\\
U(0) = U_0,
\end{cases}
$$

ここで $U = (\mathbf{u}, \omega, \mathbf{b})$, $U_0 = (\mathbf{u}_0, \omega_0, \mathbf{b}_0)$ であり，$B(U)$，F は

$$
\begin{aligned}
B(U) = (&P(-2\chi\widetilde{\nabla} \times \omega + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}),\\
&4\chi\omega + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\omega - 2\chi\nabla \times \mathbf{u}, -\widetilde{\nabla} \times (\mathbf{u}\widetilde{\times}\mathbf{b})),\\
F = (&\mathbf{f}, g, 0)
\end{aligned}
$$

である.

なお，ベクトル解析の公式により，$-\widetilde{\nabla}\times(\mathbf{u}\widetilde{\times}\mathbf{b})$ は $P((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u}))$ と書けることを注意しておく.

2.4 初期値問題の解の存在結果

2次元 Navier-Stokes 方程式の理論と同様にして，次のような (E) の初期値問題の一意的な時間大域解の存在を示せる．証明の詳細は省略する．[10] などを参照していただきたい.

本稿では簡単のため，外力 F が t に陽に依存しない自励系を扱うことにする.

命題 1 任意の正の数 T および任意の外力 $F\in H$，初期値 $U_0\in H$ に対し，次のような (E) の一意解 U が存在する：$U\in C([0,T];H)\cap C((0,T];V)$ かつ $\sqrt{t}dU/dt$, $\sqrt{t}AU$, $\sqrt{t}B(U)\in L^2(0,T;H)$.

この存在結果により，解作用素 $(S(t))_{t\geq 0}$ および (E) に付随する力学系 $(S(t),H)$ を定めることができる.

3 指数アトラクターの構成

3.1 指数アトラクターの定義

まず，[4], [6] 等に従い指数アトラクターの定義を述べる．相空間を距離空間とした形の定義も可能だが，実際には相空間は Banach 空間であることが多いので，ここでは相空間を Banach 空間にしておく.

$\mathcal{X}$ を Banach 空間とし，$\mathcal{Z}$ をその部分集合とする．$\mathcal{Z}$ は $\mathcal{X}$ の距離から誘導された距離を備えた距離空間とみなせる．$\mathcal{X}$ 上で作用する半群を $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ とおく．各時刻 $t>0$ に対し，$\mathcal{S}(t)$ が $\mathcal{Z}$ をそれ自身に写すと仮定する.

このような設定の下で，コンパクト集合 $\mathcal{M}\subset\mathcal{Z}$ が力学系 $((\mathcal{S}(t))_{t\geq 0},\mathcal{Z})$ の指数アトラクターであるとは，$\mathcal{M}$ が以下の条件を満たすことをいう：$\mathcal{M}$ は $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ の下で正不変である；すなわち $\mathcal{S}(t)\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$ が全ての t について成り立ち，$\mathcal{M}$ のフラクタル次元は有限であり，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Z}$ を指数関数的に引き付ける；すなわちある定数 $C>0$ および $\sigma>0$ が存在して $\mathrm{dist}_H(\mathcal{S}(t)\mathcal{Z},\mathcal{M})\leq Ce^{-\sigma t}$ がすべての $t\geq 0$ に対して成り立つ．ここに $\mathrm{dist}_H(W_1,W_2)=\sup_{w_1\in W_1}\inf_{w_2\in W_2}\|w_1-w_2\|_H$ は X の2つの部分集合 W_1，W_2 に対して定義される Hausdorff の擬距離である.

この定義に対し，いくつか注意を述べておく．まず，[4] ではこのような $\mathcal{M}$ のことを inertial set と呼んでいる．しかし現在では指数アトラクターと呼ぶ方が一般的である．また，そこでは $\mathcal{M}$ が大域アトラクターを含むことを要請しているが，もし大域アトラクターが存在すれば必然的に $\mathcal{M}$ に含まれる．また [6] では

X の任意の有界集合を指数関数的に引き付けるという性質を要求している．本稿では上に挙げた定義を採用することにする．

以上の定義を踏まえ，今回得られた結果は以下のように述べられる：

定理 1 H の空でない部分集合 W で，$(S(t))_{t\geq 0}$ に関して正不変であり，力学系 $((S(t))_{t\geq 0}, W)$ が指数アトラクターを持つものが存在する．

3.2 指数アトラクターの構成法

指数アトラクターの理論の詳細は Eden, Foias, Nicolaenko と Temam の本 [4] で明らかにされた．この本では，Kuramoto-Sivashinsky 方程式や Navier-Stokes 方程式，そして減衰項つきの波動方程式など様々な方程式に対して指数アトラクターが構成され，解析されている．そこでは関数空間としては Hilbert 空間のみが扱われており，指数アトラクターが存在するための十分条件として squeezing property が挙げられている．また，ある種のコンパクト性を必要とするため，非有界領域における反応拡散系に対しては直接適用することはできない．それに対し，Babin と Nicolaenko [1] によって非有界領域における反応拡散系に適用できる形へと拡張された．また Eden ら [3] も α-contraction という概念を用いてコンパクト性の条件を緩めることに成功している．しかしこれらはいずれも squeezing property の成立を前提としており，Hilbert 空間の設定でのみ適用可能な理論にとどまっている．その一方で Banach 空間への拡張の試みもなされてきた．Dung と Nicolaenko [2] は X における微分が縮小写像とコンパクト写像に分解できるような解作用素ならば指数アトラクターを構成できることを示した．一方，Efendiev ら [6] は解作用素に対する微分可能性をの代わりに，smoothing property と呼ばれる性質を仮定して指数アトラクターを構成した．彼らの構成法の利点は次の 4 つである：Banach 空間の設定で適用できる；構成的な手法で証明されているため，数値解析に応用できる；よいフラクタル次元の評価を与える；解作用素に微分可能性を課さないため適用範囲が広い．なお，Hilbert 空間においては smoothing property から squeezing property が導かれることがわかっている ([5])．

本稿では [6] による理論を用いて指数アトラクターの存在を示す．その際，具体的にどのような相空間で考察するかが焦点となる．

3.3 構成の概略

通常行われるように，ある時刻 $T>0$ に対し $S_\star = S(T)$ とおき，k を非負の整数として離散力学系 (S^k, H) を考え，それに対する指数アトラクターをもとに，もとの力学系の指数アトラクターを構成するという手順にのっとる．

[6] の系として次の命題を得る．これは放物型方程式に有用な定理である．

命題 2 *X，Y を 2 つの Banach 空間とし，Y は X にコンパクトに埋め込まれて*

いるとする．Z を X の閉有界集合とし，写像 $T:X\to X$ が Z をそれ自身に写すと仮定する．このとき，もし T が *smoothing property:* ある $\kappa>0$ が存在して，任意の z_1, $z_2\in Z$ に対し

$$\|Tz_1-Tz_2\|_Y\le\kappa\|z_1-z_2\|_X$$

が成り立つ，を満たすならば，(T,Z) は指数アトラクターを持つ．

この命題の系として容易に次を得る：

命題 3 X，Y，Z を上と同様とする．X 上の半群 $(T(t))_{t\ge0}$ が次の条件を満たすと仮定する：ある時刻 $t_*>0$ および定数 $L_1,L_2>0$，$\gamma_1,\gamma_2>0$ が存在し，$T(t_*)$ が Z をそれ自身に写し，かつ 任意の $u_0,v_0\in Z$ および $s,t\in[0,t_*]$ に対し

$$\|S(t_*)u_0-S(t_*)v_0\|_Y\le L_1\|u_0-v_0\|_X, \tag{6}$$
$$\|T(s)u_0-T(t)v_0\|_X\le L_2(|s-t|^{\gamma_1}+\|u_0-v_0\|_X^{\gamma_2}) \tag{7}$$

が成り立つ．

このとき，力学系 $((T(t))_{t\ge0},Z)$ は指数アトラクターを持つ．

さて，$(S(t))_{t\ge0}$ を (E) によって定まる力学系とする．Ω が有界であることから V は H にコンパクトに埋め込まれている．そこで H,V を命題3における X,Y とみなす．重要なのは Z をどのように見出すか，であるが，標準的なア・プリオリ評価により H の有界集合を引き込む，V で有界な吸収集合 $\mathcal{B}_*$ の存在を示すことが出来る．そこで，τ を $\mathcal{B}_*$ 自身の吸収時刻とし，

$$W=\overline{\bigcup_{t\ge\tau}S(t)\mathcal{B}_*},$$

とおくと，この W が命題3の Z の性質を満たすことが示せる．このようにして指数アトラクターの存在が示される．

参考文献

[1] A. Babin and B. Nicolaenko, Exponential attractors of reaction-diffusion systems in an unbounded domain, J. Dynam. Differential Equations **7** (1995), 567–590.

[2] L. Dung and B. Nicolaenko, Exponential attractors in Banach spaces, J. Dynam. Differential Equations **13** (2001), no. 4, 791–806.

[3] A. Eden, C. Foias and V. Kalantarov, A remark on two constructions of exponential attractors for α-contractions, J. Dynam. Differential Equations **10** (1998), no. 1, 37–45.

[4] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, "Exponential attractors for dissipative evolution equations", Masson, Paris; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994.

[5] M. Efendiev and A. Miranville, The dimension of the global attractor for dissipative reaction-diffusion systems, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 351–355.

[6] M. Efendiev, A. Miranville and S. Zelik, Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion system in $\mathbb{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **330** (2000), no. 8, 713–718.

[7] G. Łukaszewicz, Math. Comput. Modelling **34** (2001), no. 5-6, 487–509.

[8] G. Łukaszewicz and W. Sadowski, Z. Angew. Math. Phys. **55** (2004), no. 2, 247–257.

[9] M. Sermange and R. Temam, *Some mathematical questions related to the MHD equations*, Comm. Pure and Appl. Math. **36** (1983), 635–664.

[10] R. Temam, "Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis", 3rd rev. ed., North-Holland, Amsterdam, 1984.

A doubly nonlinear quasi-variational evolution inequality

阿曽 雅泰 (千葉大学大学院 自然科学研究科)

e-mail : masayasu.aso@graduate.chiba-u.jp

要旨 本稿では, 未知関数に依存し変化する適正下半連続凸関数の劣微分を含む二重非線形発展方程式の可解性について考察する. さらに, 不可逆の効果を含む反応拡散系が, この非線形発展方程式に帰着されることも述べる. この結果は, 剣持信幸 (千葉大学教育学部) との共同研究によって得られたものである.

1. 導入

H を実 Hilbert 空間とし, その内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)_H$, $|\cdot|_H$ とする. このとき, 次の Cauchy 問題 $(CP;u_0)$ を考える:

$$(CP;u_0)\quad \begin{cases} u'(t)+\partial\phi_{u(t)}(u'(t))+\partial\psi(u(t))+G(u(t))\ni f(t) \quad \text{in } H, \text{ a.e. } t\in(0,T), \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

ここで, u' は u の時間微分, ϕ_u は各 $u\in D(\psi)$ について H 上の適正下半連続凸関数, ψ は H における適正下半連続凸関数, $\partial\phi_u$ と $\partial\psi$ はそれぞれ H における ϕ_u と ψ の劣微分を表し, G は H から H への一価作用素, f は与えられた関数, u_0 は H において与えられた初期値とする. 上の発展方程式は変分不等式で表したとき, 劣微分作用素 $\partial\phi_u$ が未知関数 u に依存し変化することから, 仮似変分不等式 (quasi-variational inequality) と呼ばれる.

ϕ_u と ψ は H における適正下半連続凸関数なので, その劣微分は H から H への極大単調作用素となる (これについては例えば, [8] を参照). したがって, 上の二重非線形発展方程式は A と B を極大単調作用素としたとき, 以下の形の方程式に分類される:

$$A(u'(t))+B(u(t))\ni f(t) \quad \text{in } H, \text{ a.e. } t\in(0,T).$$

ここで, 既知結果をいくつか紹介する. 作用素 A と B に特に依存がない場合については, T. Arai [2], V. Barbu [7], P. Colli [9], P. Colli and A. Visintin [10] 等の結果がある. $A\equiv A^t$, つまり, 作用素 A が時間依存し変化する場合については, T. Senba [15] により議論されている. さらに, $A\equiv A^t$, $B\equiv B^t$ のように両方の作用素が時間依存し変化する場合については, G. Akagi and M. Ôtani [1] の結果がある. M. Aso, M. Frémond and N. Kenmochi [4] では, $A\equiv A_u$, つまり, 作用素 A が未知関数に依存して変化する場合について考察されている. 特に, [4] においては, A_u は u について一様に有界な作用素であるという条件の下で解の存在が示されている. 本稿では, 作用素 A_u, すなわち, $\partial\phi_u$ が必ずしも有界でない場合 (非有界の場合) を考察する. ここでは, $(CP;u_0)$ の可解性を保証する ϕ_u に対する u の依存の満たすべき条件を決定することが重要である.

2. 主結果

準備 ここで, 本稿で用いられているいくつかの記号について説明する. φ を H における適正下半連続凸関数とし, $\partial\varphi$ をその H における劣微分とする. $D(\varphi)$ と $D(\partial\varphi)$ はそれぞれ φ と $\partial\varphi$ の有効領域と呼ばれる集合で,

$$D(\varphi) := \{z \in H; \varphi(z) < +\infty\}, \quad D(\partial\varphi) := \{z \in H; \partial\varphi(z) \neq \emptyset\}$$

により定義される. 各 $\varepsilon > 0$ について, $J_\varepsilon^\varphi := (I + \varepsilon\partial\varphi)^{-1}$ で定義される作用素は $\partial\varphi$ の resolvent と呼ばれる. ただし, I は H における恒等作用素である. φ の Moreau-Yosida 近似 φ_ε とその劣微分 $\partial\varphi_\varepsilon$ は以下で定義される:

$$\varphi_\varepsilon(z) := \inf_{v \in H}\left\{\frac{1}{2\varepsilon}|z - v|_H^2 + \varphi(v)\right\}, \quad \partial\varphi_\varepsilon(z) := \frac{z - J_\varepsilon^\varphi z}{\varepsilon}, \quad \forall z \in H.$$

凸関数やその劣微分についての基本的な概念や性質については, 例えば, [6],[8],[11],[14] などに詳しい説明がある.

仮定 $(CP; u_0)$ を考える際, 以下の $(A1)$ から $(A4)$ を仮定する.

$(A1)$ H における適正下半連続凸関数 ψ は次を満たす:

- $\partial\psi$ は H から H への一価線形作用素.
- 任意の $r > 0$ について, 集合 $\{v \in H; \psi(v) \le r\}$ は H においてコンパクト.
- $\psi(0) = 0$ で, さらに正定数 C_0 が存在して以下を満たす:

$$\psi(v) \ge C_0|v|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

(A2) u をパラメーターとする H 上の適正下半連続凸関数の族 $\{\phi_u(\cdot); u \in D(\psi)\}$ は次の条件 (M) を満たす:

$$(M)\quad \begin{cases} \text{もし } \{u_n\} \text{ が } u \text{ に } H \text{ において強収束し, かつ } \{\psi(u_n)\} \text{ が有界であれば,} \\ \text{関数列 } \{\phi_{u_n}\} \text{ は関数 } \phi_u \text{ に } H \text{ において Mosco の意味で収束する.} \end{cases}$$

(A3) $\overline{D(\psi)}$ から H への Lipschitz 連続な作用素 p が存在して以下を満たす:

- $\phi_v\left((I + \varepsilon\partial\psi)^{-1}(u - p(v)) + p(v)\right) \le \phi_v(u), \quad \forall u \in H,\ \forall v \in D(\psi),\ \forall \varepsilon > 0.$
- $|\partial\psi(p(v))|_H \le C_1\left(|\partial\psi(v)|_H + 1\right), \quad \forall v \in D(\partial\psi).$
- $\phi_v(p(v)) \le C_2, \quad \forall v \in D(\psi).$

ここで, C_1 と C_2 は正定数.

(A4) G は $\overline{D(\psi)}$ から H への Lipschitz 連続な作用素とする. つまり, 正定数 L_G が存在して以下の不等式を満たす:

$$|G(u_1) - G(u_2)|_H \le L_G|u_1 - u_2|_H, \quad \forall u_1, u_2 \in \overline{D(\psi)}.$$

注意 1 仮定 (A3) における 3 つの不等式は, 後述の不動点の議論をする際に, 解の時間に対する一様評価を得るために必要となる. 特に第 1 の不等式において, $p \equiv 0$ のときは, ϕ_v の v の依存を除けば $\phi((I+\varepsilon\partial\psi)^{-1}u) \le \phi(u)$ となり, よく知られた不等式となる.

注意 2 各 $u \in C([0,T];H)$ について, $L^2(0,T;H)$ 上の凸関数 $\Phi_u(\cdot)$ を

$$\Phi_u(v) := \int_0^T \phi_{u(t)}(v(t))dt, \quad \forall v \in L^2(0,T;H)$$

で定める. このとき, 仮定 (A2) の条件 (M) により次のことが言える:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{もし } \{u_n\} \text{ が } u \text{ に } C([0,T];H) \text{ において強収束し, } \{\psi(u_n)\} \text{ が } [0,T] \text{ 上で一様に有界} \\ \text{ならば, 関数列 } \{\Phi_{u_n}\} \text{ は関数 } \Phi_u \text{ に } L^2(0,T;H) \text{ において Mosco の意味で収束する.} \end{array} \right.$$

注意 3 Mosco 収束について, 本稿では特に次の収束定理が有用である:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{v_n\} \text{ が } v \text{ に } L^2(0,T;H) \text{ において弱収束,} \\ \{u_n\} \text{ が } u \text{ に } C([0,T];H) \text{ において強収束,} \\ \{\psi(u_n)\} \text{ が } [0,T] \text{ において一様有界,} \\ \xi_n \in \partial\Phi_{u_n}(v_n) \text{ を満たす } \{\xi_n\} \text{ が } L^2(0,T;H) \text{ において } \xi \text{ に弱収束,} \\ \text{かつ, } \limsup\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^T (\xi_n(t), v_n(t))_H dt \le \int_0^T (\xi(t), v(t))_H dt \text{ が満たされるならば,} \\ L^2(0,T;H) \text{ において } \xi \in \partial\Phi_u(v) \text{ が成り立つ.} \end{array} \right.$$

Mosco 収束についての基本的な概念や性質については, 例えば, [6],[11],[13] などに詳しい記述がある.

定義 1 任意に与えられた初期値 u_0 と関数 f に対し, 関数 $u \in C([0,T];H)$ が以下の二つの条件 (C1), (C2) を満たすとき $(CP;u_0)$ の解であるという:

(C1) $u \in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0) = u_0$ かつ $\partial\psi(u) \in L^2(0,T;H)$.

(C2) 関数 $\xi \in L^2(0,T;H)$ が存在して以下を満たす:

$$\xi(t) \in \partial\phi_{u(t)}(u'(t)) \ \text{ in } H \ \text{ for a.e. } t \in (0,T),$$

$$u'(t) + \xi(t) + \partial\psi(u(t)) + G(u(t)) = f(t) \ \text{ in } H \ \text{ for a.e. } t \in (0,T).$$

定理 1 (解の存在) $(A1)$ から $(A4)$ を仮定する. このとき任意に与えられた初期値 $u_0 \in D(\partial\psi)$ と関数 $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ に対し, $(CP;u_0)$ は少なくとも 1 つの解 u を持ち, 解 u は $\partial\psi(u) \in L^\infty(0,T;H)$ かつ $\psi(u') \in L^1(0,T)$ を満たす.

3. 証明の概略

近似問題 定理の証明については論文 [4] で使われている手法を用いた. まず, 零拡張を用いて f を $[0,2T]$ まで伸ばし, 以下の近似問題 $(CP;\tilde{u}_0)_\varepsilon$ を考える:

$$
\begin{cases} u'(t) + \partial\phi_{J_\varepsilon^\psi u(t)}(u'(t)) + \partial\psi_\varepsilon(u(t)) + G(J_\varepsilon^\psi u(t)) \ni f(t) \quad \text{in } H, \quad \text{a.e. } t \in (a, a+T), \\ u(a) = \tilde{u}_0. \end{cases}
$$

ただし, $\varepsilon \in (0,1]$, $a \in [0,T]$ で, $\partial\psi_\varepsilon$ は $\partial\psi$ の Moreau-Yosida 近似, J_ε^ψ は $\partial\psi$ の resolvent とする. ここで, $\psi(u_0) < M_0$ を満たす正定数 M_0 と, 十分小さい $T_0 > 0$ をとり, $a \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,1]$ に対して次の集合 $X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1)$ を与える:

$$
X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1) := \left\{ \bar{u} \in W^{1,2}(a, a+T_0; H) \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi_\varepsilon(\bar{u}(a)) \le M_0, \ |\bar{u}'|^2_{L^2(a,a+T_0;H)} \le M_1, \\ |\partial\psi_\varepsilon(\bar{u})|^2_{L^2(a,a+T_0;H)} \le 1. \end{array} \right\}.
$$

ここで, M_1 は M_0 のみに依存する正定数である. いま, $\varepsilon \in (0,1]$ を任意に与え, 固定する. このとき, 与えられた $\bar{u} \in X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1)$ に対し, 方程式

$$
(*) \quad u'(t) + \partial\phi_{J_\varepsilon^\psi \bar{u}(t)}(u'(t)) + \partial\psi_\varepsilon(u(t)) + G(J_\varepsilon^\psi \bar{u}(t)) \ni f(t) \ \text{ in } H, \quad \text{a.e. } t \in (a, a+T_0)
$$

を考える. 論文 [4] と同様の議論により, 集合 $X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1)$ は $C([a, a+T_0]; H_w)$ の位相で, 空でない凸コンパクト集合となる. ここで, H_w は H の弱位相によって位相の定まった線形位相空間である. さらに, $(*)$ の解 u は T_0 が十分小さいとき, 再び $u \in X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1)$ となることが示されるので, $\bar{u}$ を $(*)$ の解 u に対応させる写像 S を考えることができる:

$$
S : X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1) \ni \bar{u} \mapsto u \in X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1).
$$

この写像 S について, 次のことが示される:

$$
S(X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1)) \subset X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1), \quad S \text{ は } C([a, a+T_0]; H_w) \text{ の位相で連続.}
$$

したがって, 以上の事実から, Schauder-Tychonoff の不動点定理によって, 写像 S に対し, 不動点 u_ε, すなわち, $Su_\varepsilon = u_\varepsilon$ となる $X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0, M_1)$ の元 u_ε が存在する. よって u_ε は $(CP; \tilde{u}_0)_\varepsilon$ の解であることがわかる. さらに, エネルギー不等式と Zorn の補題を用いて解の延長の議論をし, 最後に ε の収束, すなわち近似解の収束の議論をして証明が完了する. 近似解の収束については, 注意 3 で述べた収束定理が鍵となっている. 詳しい証明については論文 [3] を参照.

4. 定理の応用

反応拡散系 以下の反応拡散を記述する偏微分方程式系について考える:

$$
\begin{gathered}
\theta_t - \Delta\theta + k(\theta, w) = h(t, x) \quad \text{in } Q := (0,T) \times \Omega, \\
w_t + \partial I_\theta(w_t) - \Delta w + \ell(\theta, w) \ni q(t, x) \quad \text{in } Q, \\
\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma := (0,T) \times \Gamma, \\
\theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad w(0, \cdot) = w_0 \quad \text{in } \Omega,
\end{gathered}
$$

ここで, Ω は滑らかな境界 Γ を持つ $\mathbf{R}^2$ の有界領域, T は 固定された正の実数, θ_t と w_t はそれぞれ θ と w の時間微分, Δ は空間変数 x に対する Laplace 作用素, $\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ におけ

る外向き法線方向の微分を表す. k と ℓ は $\mathbf{R}^2$ において与えられた関数, h と q は Q において与えられた関数, θ_0 と w_0 はそれぞれ θ と w の初期値である. I_θ は区間 $[g(\theta), +\infty)$ の指示関数で, ∂I_θ は $\mathbf{R}$ における I_θ の劣微分を表す, ただし, g は $\mathbf{R}$ において非負かつ有界で滑らかな関数とする:

$$I_\theta(z) = \begin{cases} 0, & \text{if } g(\theta) \le z, \\ +\infty, & \text{if } z < g(\theta), \end{cases} \qquad \partial I_\theta(z) = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } z < g(\theta), \\ (-\infty, 0], & \text{if } z = g(\theta), \\ \{0\}, & \text{if } g(\theta) < z. \end{cases}$$

特に第2の偏微分方程式に着目すると, $\partial I_\theta(w_t)$ の項により, 常に $0 \le g(\theta) \le w_t$ となることから, この偏微分方程式系は不可逆の効果を含む反応拡散系と考えることができる. この偏微分方程式系を $(P; h, q, \theta_0, w_0)$ と書くことにする.

仮定 $(P; h, q, \theta_0, w_0)$ を考える際, k, ℓ, g, h, q, θ_0, w_0 について以下を仮定する:

- k と ℓ は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への Lipschitz 連続な関数であり, g は C^2 級の $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への非負な関数で, g' と g'' は $\mathbf{R}$ 上で有界であるとする.
- $h, q \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\theta_0, w_0 \in H^2(\Omega)$ であり, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ において $\frac{\partial \theta_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0$ を満たす.

簡単のため, $L^2(\Omega)$ における内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|_{L^2(\Omega)}$ で表す. また, Δ_N は, homogeneous な Neumann 境界条件をもつ Laplace 作用素を表すものとする.

定義 2 任意に与えられた上の仮定を満たす h, q, θ_0, w_0 に対し, 関数の組 $\{\theta, w\}$ が $(P; h, q, \theta_0, w_0)$ の解であるとは以下の (1) から (4) までを満たすときに言う:

(1) $\theta, w \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$.
(2) $\theta'(t) - \Delta_N \theta(t) + k(\theta(t), w(t)) = h(t)$ in $L^2(\Omega)$ for a.e. $t \in (0, T)$.
(3) $\xi \in \partial I_\theta(w')$ a.e. on Q となる $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 関数 ξ が存在して, 次を満たす:

$$w'(t) + \xi(t) - \Delta_N w(t) + \ell(\theta(t), w(t)) = q(t) \quad \text{in } L^2(\Omega) \ \text{ for a.e. } t \in (0, T).$$

(4) $\theta(0) = \theta_0$ in $L^2(\Omega)$ かつ $w(0) = w_0$ in $L^2(\Omega)$.

定理 2 (解の存在) 上の仮定の下, $(P; h, q, \theta_0, w_0)$ は少なくとも1つの解 $\{\theta, w\}$ を持ち, θ, w は以下を満たす:

$$\theta, w \in W^{1,2}(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega)).$$

最後に, 抽象 Cauchy 問題 $(CP; u_0)$ の解の存在定理 (定理1) を $(P; h, q, \theta_0, w_0)$ に適用し, 定理2を証明する方法を述べる. まず, 抽象理論における実 Hilbert 空間 H を $L^2(\Omega)$ と $L^2(\Omega)$ の直積空間として与える:

$$H := \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ L^2(\Omega). \end{matrix}$$

H における内積は以下で与えられる:

$$(v, v_1)_H = (\theta, \theta_1) + (w, w_1), \quad \forall v := \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} \in H,\ \forall v_1 := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H.$$

このとき, $(P; h, q, \theta_0, w_0)$ は H 上の方程式系と見ると以下の形で表される:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial I_{\theta(t)}(w'(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta_N \theta(t) \\ -\Delta_N w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(\theta(t), w(t)) \\ \ell(\theta(t), w(t)) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} h(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

ここで, H 上の凸関数 ψ と ϕ_u を次のように定義する:

$$\psi(v) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \dfrac{1}{2}|\theta|^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{1}{2}|w|^2_{L^2(\Omega)}, \text{if } v := \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} H^1(\Omega) \\ \times \\ H^1(\Omega) \end{matrix}, \\ +\infty, \qquad\qquad \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\phi_u(v) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega I_{\theta_1}(w)dx, \quad \text{if} \quad v := \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} \in H, \quad u := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H \text{ with } u \in D(\psi), \\ +\infty, \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

さらに, 作用素 G と関数 f をそれぞれ以下で与える:

$$G(v) := \begin{pmatrix} k(\theta, w) - \theta \\ \ell(\theta, w) - w \end{pmatrix}, \quad \forall v := \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} \in \overline{D(\psi)}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

補題 1 $v = \binom{\theta}{w}$, $v^* = \binom{\theta^*}{w^*}$ とする. このとき, H において $v^* \in \partial\psi(v)$ となるための必要十分条件は, $L^2(\Omega)$ において

$$\theta^* = -\Delta_N \theta + \theta \ \text{ かつ } \ w^* = -\Delta_N w + w$$

となることである.

補題 2 $u := \binom{\theta_1}{w_1}$, $v := \binom{\theta}{w}$, $v^* = \binom{\theta^*}{w^*}$ とする. このとき, H において $v^* \in \partial\phi_u(v)$ となるための必要十分条件は, $L^2(\Omega)$ において

$$\theta^* = 0 \ \text{ かつ } \ w^* \in \partial I_{\theta_1}(w)$$

となることである.

ψ, ϕ_u, G が 仮定 (A1),(A2),(A4) を満たすことは容易に確かめられる. ψ と ϕ_u が (A3) を満たすことを示そう. $u := \binom{\theta}{w} \in \overline{D(\psi)}$ に対して $p(u) := \binom{0}{g(\theta)}$ とおくと, 定義より (A3) の第 3 の不等式が満たされることがわかる. さらに, Ω は滑らかな境界を持つ $\mathbf{R}^2$ の有界領域であるから, Gagliardo-Nirenberg の補間不等式と g についての仮定から

$$|\Delta_N g(\theta)|^2_{L^2(\Omega)} \le C(|\Delta_N \theta|^2_{L^2(\Omega)} + 1) \quad (C: \text{ 正定数})$$

が得られ, この不等式を用いれば, (A3) の第 2 の不等式が導かれる. (A3) の第 1 の不等式は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $v \ge 0$ となる $L^2(\Omega)$ の関数 v が $(I - \varepsilon\Delta_N)^{-1} v \ge 0$ を満たす

ことから示される. したがって, 補題1と補題2より $(P;h,q,\theta_0,w_0)$ は H において次の形に書き換えることができる:

$$u'(t)+\partial\phi_{u(t)}(u'(t))+\partial\psi(u(t))+G(u(t))\ni f(t).$$

ここで, $u:=\binom{\theta}{w}$ である. 与えられた初期値 θ_0 と w_0 に対して, $u_0:=\binom{\theta_0}{w_0}$ と置けば $u_0\in D(\partial\psi)$ であるから, 抽象理論 $(CP;u_0)$ の解の存在定理 (定理1) を用いると, u_0 を初期値とする上の方程式の Cauchy 問題は少なくとも1つの解 $u=\binom{\theta}{w}$ を持つ. したがって $(P;h,q,\theta_0,w_0)$ は少なくとも1つの解 $\{\theta,w\}$ を持ち, 定理2が証明された.

参考文献

1. G. Akagi and M. Ôtani, Time-dependent constraint problems arising from macroscopic critical-state models for type-II superconductivity and their approximations, preprint.

2. T. Arai, On the existence of the solution for $\partial\varphi(u'(t))+\partial\psi(u(t))\ni f(t)$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math., **26** (1979), 75-96.

3. M. Aso and N. Kenmochi, Quasi-variational evolution inequalities for a class of reaction-diffusion systems, to appear in Nonlinear Anal.

4. M. Aso, M. Frémond and N. Kenmochi, Phase change problems with temperature dependent constraints for the volume fraction velocities, to appear in Nonlinear Anal.

5. M. Aso, M. Frémond and N. Kenmochi, Quasi-variational evolution problems for irreversible phase change, pp.517-525 *in Proceedings of International Conference on Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications,* ed. N. Kenmochi, M. Ôtani and S. Zheng, GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. Appl., **20**, Gakkotosho, Tokyo, 2004.

6. H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Applicable Mathematics Series, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1984.

7. V. Barbu, Existence theorems for a class of two point boundary problems. J. Differential Equations, **17** (1975), 236-257.

8. H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.

9. P. Colli, On some doubly nonlinear evolution equations in Banach spaces, Japan J. Indust. Appl. Math., **9** (1992), 181-203.

10. P. Colli and A. Visintin, On a class of doubly nonlinear evolution equations, Comm. Partial Differential Equations, **15** (1990), 737-756.

11. N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., **30** (1981), 1-87.

12. J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire collège de France, 1966-1967.

13. U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions variational inequalities, Advances Math., **3** (1969), 510-585.

14. R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1970.

15. T. Senba, On some nonlinear evolution equation, Funk. Ekvac., **29** (1986), 243-257.

時間に依存する係数を持つ双曲型方程式について[1]

廣澤 史彦[2] (日本工業大学工学部)

1 Preliminaries and results

伝播速度が時間に依存する次の波動方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - a(t)^2\Delta\right) u(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), \ (\partial_t u)(0,x) = \psi(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $a(t) \in C^2([0,\infty))$ かつ $a(t) \geq {}^\exists a_0 > 0$, また (1) の解のエネルギーは次で定義される:

$$E(t) = E(t;u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\partial_t u(t,x)|^2 + a(t)^2 |\nabla_x u(t,x)|^2 \right) dx.$$

伝播速度が定数 $(a'(t) = 0)$ の場合, エネルギー保存則 $E(t) = E(0)$ が成り立つが, 伝播速度が t によって変化する場合には, 一般にエネルギーは保存されず, その漸近挙動は, 単なる有界性ですら一般には自明ではない. 実際,

$$E'(t) = a(t)a'(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(t,x)|^2 \, dx \leq \frac{2|a'(t)|}{a(t)} E(t)$$

より, 任意の $t > 0$ に対して

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(\int_0^t \frac{2|a'(s)|}{a(s)} \, ds \right) \tag{2}$$

となる. ここで $a'(t)$ の零点を $\{t_j\}_{k=1}^\infty$, $a'(t) \geq 0$ $(t \in [t_{2j-1}, t_{2j}])$, $a'(t) \leq 0$ $(t \in [t_{2j}, t_{2j+1}])$ とすると, 次の評価を得る:

$$E(t_{2N}) \leq E(0) \exp\left(\int_0^{t_{2N}} \frac{2|a'(s)|}{a(s)} \, ds \right) = E(0) \prod_{j=1}^N \left(\frac{a(t_{2j})}{a(t_{2j-1})} \right)^2.$$

この評価から $E(t)$ の一様有界性が得られるためには, 一般に "$a(t)$ の振動回数が有限であること", あるいは "$a(t)$ の振幅が縮小する" ことが要求される.

一方, $a'(t) \leq 0$ ならば, $E'(t) \leq 0$ より $E(t)$ が増加しないことがわかるが, 上の評価ではその効果が全く考慮されない. このような古典的なエネルギー法では, 係数 $a(t)$ が振動するようなモデルに対しては, 係数の減少から得られるはずの効果を取り出すことができず, 結果的に非常に荒い評価しか得られない可能性がある.

では, 実際に $a(t)$ が無限回振動し, かつ振幅が減少しない, 例えば $a(t) = \cos t + 2$ のような場合, 果たして (1) の解のエネルギーは有界にとどまるのか, それとも発散してしまうのか. このような問題に対して, 今回得られたのは次のような結果である.

Theorem 1. $a(t)$ が有界, かつ

$$|a'(t)| \leq C(t+1)^{-1}, \ |a''(t)| \leq C(t+1)^{-2} \tag{3}$$

ならば, $E(t)$ は一様に有界である.

---

[1]第 26 回発展方程式若手セミナー, 国民年金健康保養センター おくたま路, 2004 年 8 月 9 日

[2]E-mail: hirosawa@nit.ac.jp

仮定 (3) は, $a(t)$ の振動量に対するある種の制限であると考えられる. 実際, 例えば $\omega(t) \in C^2([0,\infty))$, $\omega'(t) > 0$ に対して, $a(t) = 2 + \cos\omega(t)$ を考えると $|a'(t)| \le \omega'(t)$ となるが, この場合, $|a'(t)|$ のオーダーを制限する関数の $[0,t]$ における積分 $\omega(t)$ は, $a(t)$ の振動回数のオーダーを与えていることがわかる. すなわち, 特に $a(t)$ がこのような振動をしている場合, (3) は, 時刻 $t = T(\gg 1)$ に到るまでの振動量のオーダーが $\log T$ 程度であると解釈できる. 一般に, 振動量が増大すれば, エネルギーの安定性が損なわれる可能性が増すことが予想されるが, Theorem 1 における上記の意味での振動量の制限 (3) が, エネルギー有界性のための限界であることが, 次の定理よりわかる.

Theorem 2. $a(t) = \cos((\log(1+t))^\gamma) + 2$ $(\gamma \ge 0)$ とする. 任意の $\gamma > 1$ に対して $E(t)$ が一様有界とならないような初期データが存在する.

ここで, Theorem 2 で与えられた $a(t)$ は, 任意の $\gamma > 1$ に対して (3) を満たさない. すなわち, エネルギー有界性に関する Theorem 1 の結果は最適であることがわかる.

ところで, $a(t) = \cos t + 2$ は Theorem 2 における $\gamma = \infty$ の場合と考えられ, 当然 (3) も満たしていない. このような $a(t)$ に関しても, Theorem 2 からの直接の帰着ではないが, 同様の手法によって, 一般にエネルギーが非有界であることが証明される.

2 Sketch of the proof of Theorem 1

2.1 Basic idea of the proof

Theorem 1 の証明の基本的な方針は, 超局所解析的なアプローチによって, 初期値問題 (1) の解 (の Fourier 変換) を具体的に表現し, 実際にそのエネルギーを評価するというものである. (1) の方程式を空間変数によって Fourier 変換し, $\hat{u}(\xi,t) = v(t,\xi)$ とすると, 次の方程式の初期値問題に書き変えられる:

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 + a(t)^2|\xi|^2\right) v(t,\xi) = 0, & (t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ v(0,\xi) = \hat{\phi}(\xi),\ v_t(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

このとき, (4) の microenergy $\mathcal{E}(t,\xi)$ によって, 解のエネルギーは次で表現されることに注意する:

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(t,\xi)\, d\xi := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left(a(t)^2|\xi|^2\, |v(t,\xi)|^2 + |v_t(t,\xi)|^2\right) d\xi.$$

伝播速度が定数 $(a(t) = a_0)$ の場合, (4) の解は次のように表現される:

$$v(t,\xi) = \left(\frac{v_0(\xi)}{2} + \frac{v_1(\xi)}{2ia_0|\xi|}\right) e^{ia_0|\xi|t} + \left(\frac{v_0(\xi)}{2} - \frac{v_1(\xi)}{2ia_0|\xi|}\right) e^{-ia_0|\xi|t}.$$

しかし, 伝播速度が定数でない場合, 一般にこのような表現は得られない. ここで, Introduction で紹介したエネルギー法とは, microenergy $\mathcal{E}(t,\xi)$ に対する評価

$$\partial_t\mathcal{E}(t,\xi) = a(t)a'(t)|\xi|^2|v(t,\xi)|^2 \le \frac{2|a'(t)|}{a(t)}\mathcal{E}(t,\xi) \Longrightarrow \mathcal{E}(t,\xi) \le \mathcal{E}(0,\xi)\exp\left(\int_0^t \frac{2|a'(s)|}{a(s)}\, ds\right)$$

に相当するが, この評価は (4) の解を

$$v(t,\xi) \simeq \left(\frac{v_0(\xi)}{2} + \frac{v_1(\xi)}{2ia(t)|\xi|}\right) e^{ia(t)|\xi|t} + \left(\frac{v_0(\xi)}{2} - \frac{v_1(\xi)}{2ia(t)|\xi|}\right) e^{-ia(t)|\xi|t} \tag{5}$$

の形で近似したことに相当する. $a(t)$ が定数の場合には, この $v(t,\xi)$ は近似ではなく, 解を正確に与えるものとなるが, 一般の場合には $a'(t) \neq 0$ の影響による誤差が現れる. 特に $a(t)$ が振動する場合には, $t \to \infty$ において, その誤差が無視できなくなる場合がある. Theorem 1 の証明の基本的なアイディアは, このようなモデルに対して, 振動の影響も考慮に入れた, より精度の高い近似解を導入することである. 具体的には, 近似解 (5) の phase 部分が定係数の場合と同じ $\pm \int_0^t ia(s)|\xi|\,ds$ であったのに対して, $\int_0^t \left(\pm ia(s)|\xi| + \frac{a'(s)}{2a(s)}\right)\,ds$ を phase に持つような近似解を導入することである.

2.2 Construction of the solution in Pseudo-differential zone

(5) で与えられる解の近似は, (t,ξ) 空間で一様に与えられるものであったが, 変数係数の場合, 今回の証明で必要な精度の近似解は, このように一様な形では表現が難しい. そこで, 係数の "振動" の効果が支配的となる場合と, 定数係数的な挙動をする場合の境界となる (t,ξ) 上の超曲面 $|\xi|(1+t) = M$ (M は十分大きい正定数) を境に,

$$Z_\Psi := \{(t,\xi)\,;\,|\xi|(1+t) \le M\}$$

を Pseudo-differential zone,

$$Z_H := \{(t,\xi)\,;\,|\xi|(1+t) \ge M\}$$

を Hyperbolic zone として, それぞれの領域にふさわしい別々の解の近似を考えることにする.

ここで, Z_Ψ, Z_H をそれぞれ Hyperbolic zone, Pseudo-differential zone と呼ぶのは, phase として $\phi(t) := \int_0^t a(s)\,ds$ を考えた場合, $e^{\phi(t)}$ が (t,ξ) 空間上で pseudo-differential operator の symbol と考えられるか否か, というところから来ている. 実際, 仮定 (3) により, $p(t,\xi)$ は Z_Ψ では有界な pseudo-differential operator となっている.

解の具体的表現を与えるために, まず (4) を, 以下のような 1 階の system に書き直す.

$$(\partial_t - A_0(t,\xi) - B_0(t,\xi) - C_0(t,\xi))\,V_0(t,\xi) = 0, \tag{6}$$

ここで

$$V_0(t,\xi) := \begin{pmatrix} i\tilde{a}(t,\xi)|\xi|v(t,\xi) + v_t(t,\xi) \\ i\tilde{a}(t,\xi)|\xi|v(t,\xi) - v_t(t,\xi) \end{pmatrix}, \quad A_0(t,\xi) = i\tilde{a}(t,\xi)|\xi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_0(t,\xi) = \frac{\tilde{a}_t(t,\xi)}{2\tilde{a}(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_0(t,\xi) = \frac{i\left(a(t)^2 - \tilde{a}(t,\xi)^2\right)}{2\tilde{a}(t,\xi)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

また $\tilde{a}(t,\xi)$ は微分可能な任意の関数 (後で与えられる) とする. ここで,

$$\Theta_0(t,\xi) = \begin{pmatrix} e^{i|\xi|\int_0^t \tilde{a}(s,\xi)\,ds} & 0 \\ 0 & e^{-i|\xi|\int_0^t \tilde{a}(s,\xi)\,ds} \end{pmatrix}, \quad V_1(t,\xi) = \Theta_0(t,\xi)V_0(t,\xi),$$

$$A_1(t,\xi) = \Theta_0(t,\xi)(B_0(t,\xi) + C_0(t,\xi))\Theta_0(t,\xi)^{-1}$$

とすると, (6) は次のように書き直される:

$$(\partial_t - A_1(t,\xi))\,V_1(t,\xi) = 0. \tag{7}$$

ここで, (7) の解は形式的に次のように表現される:

$$V_1(t,\xi) = V_1(0,\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{t_0} A_1(t_1,\xi)\int_0^{t_1} A_1(t_2,\xi)\cdots\int_0^{t_k} A_1(t_{k+1},\xi)\,dt_{k+1}\cdots dt_1.$$

よって, $V_1(t,\xi)$ に対して次の評価が得られる:

$$\begin{aligned}|V_1(t,\xi)| &\le |V_1(0,\xi)|\,e^{\int_0^t \|A_1(s,\xi)\|\,ds} \le |V_1(0,\xi)|\,e^{C\int_0^t(|\tilde{a}_t(s,\xi)|+|\tilde{a}(s)-a(s)||\xi|)\,ds}\\ &\le |V_1(0,\xi)| \times \begin{cases} e^{C\int_0^t(1+s)^{-1}\,ds} \le C(1+t)^C & (\tilde{a}=a),\\ e^{C|a_0-\sup_s\{a(s)\}||\xi|t} \le e^{C|\xi|(1+t)} & (\tilde{a}=a_0),\end{cases}\end{aligned}$$

ここで $\|\cdot\|$ は行列ノルムである. 以上より, Z_Ψ においては, $\tilde{a}(t,\xi)=a_0$ と置くと, $|V_1(t,\xi)|$ は一様に有界になる. 一方, Z_H においては $\tilde{a}(t,\xi)=a_0$ では有界性は得られない. また, $\tilde{a}(t)=a(t)$ としても Z_H での有界性は得られない. 従って, Z_H においては別の議論が必要となる.

2.3 Construction of the solution in Hyperbolic zone

$V_1(t,\xi)$ の表現においては, (3) の $a''(t)$ に対する仮定は不要だった. 実際, $V_1(t,\xi)$ の定義より, 解の phase 部分は $\pm ia_0|\xi|t$ であり, これは本質的に (5) による近似を行ったことに等しい. この場合, 前述の議論により, Z_Ψ での有界性は示されたが, Z_H では $|V_1(t,\xi)|$ は高々 $1+t$ のオーダーで上から評価されることしかわからない. (この事実は, 変数係数の場合にエネルギー有界性に悪影響を及ぼす可能性があるのは, $|\xi|(1+t)$ が大きい場所であることがわかる.) そこで, (3) の $a''(t)$ の仮定を用いることによって得られる, Z_H における別な解の表現方法を考えてみる.

$$\Xi(t;\xi) = \frac{1}{1-p(t,\xi)^2}\begin{pmatrix} 1 & ip(t,\xi)\\ -ip(t,\xi) & 1\end{pmatrix},\quad p(t,\xi) = \frac{-a'(t)}{4|\xi|a(t)^2}$$

とする. このとき, Z_H においては $|p(t,\xi)| \le CM^{-1}$ より, 十分大きな M に対しては $\Xi(t,\xi)$, $\Xi(t,\xi)^{-1}$ が共に存在することがわかる. ここで, $V_2(t,\xi)=\Xi(t,\xi)V_0(t,\xi)$ とすると, (6) は

$$(\partial_t - A_2(t,\xi) - B_2(t,\xi))\,V_2(t,\xi) = 0 \tag{8}$$

と書き直される. ただし

$$A_2(t,\xi) := \begin{pmatrix} i|\xi|a(t)+\frac{a'(t)}{2a(t)} & 0\\ 0 & -i|\xi|a(t)+\frac{a'(t)}{2a(t)}\end{pmatrix}$$

である. また (3) より

$$\|B_2(t,\xi)\| \le C|\xi|^{-1}\left(|a'(t)|^2+|a''(t)|\right) \le C|\xi|^{-1}(1+t)^{-2}$$

となることもわかる. 更に

$$\Theta_1(t,\xi) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_\xi}^t\left(i|\xi|a(s)+\frac{a'(s)}{2a(s)}\right)ds} & 0\\ 0 & e^{\int_{t_\xi}^t\left(-i|\xi|a(s)+\frac{a'(s)}{2a(s)}\right)ds}\end{pmatrix}$$

に対して $V_3(t,\xi)=\Theta(t,\xi)V_2(t,\xi)$ とすると, $V_3(t,\xi)$ は

$$(\partial_t - B_3(t,\xi))\,V_3(t,\xi) = 0 \tag{9}$$

の解になる. ここで (3) より Z_H において $\|B_3(t,\xi)\| \le C|\xi|^{-1}(1+t)^{-2}$ となることがわかる. ここで, (9) の解を $V_1(t,\xi)$ の場合と同様に形式的に表現し, それを評価すると, 次が得られる:

$$|V_3(t,\xi)| \le |V_3(t_\xi,\xi)|\, e^{C|\xi|^{-1}\int_{t_\xi}^{t}(1+s)^{-2}\,ds} \le |V_3(t_\xi,\xi)|\, e^{C|\xi|^{-1}(1+t_\xi)^{-1}},$$

ここで t_ξ は $|\xi|(1+t_\xi) = M$ の解である.

最後に, $|p(x,\xi)|$ が小さくとれることに注意すると, $|V_3(t,\xi)| \simeq |V_1(t,\xi)|$, また $a_0 \le a(t)$ と $a(t)$ の有界性より $|V_1(t,\xi)|^2 \simeq \mathcal{E}(t,\xi)$ であることに注意すると, $E(t)$ の大域的有界性, すなわち t に無関係な正定数 C が存在し,

$$E(t) \le CE(0) \tag{10}$$

が示される. □

3 Remarks

Theorem 1 は, それ自体, 新しい結果ではあるが, 実は, 適当な変数変換によって, "一点で微分可能性が崩れる係数を持つ方程式の regularity loss の問題" に帰着させることができ, この種の問題に対しては [1], [6] などから始まる多くの研究結果が知られている. 例えば $a(t)$ が $t = T$ で微分可能でない場合, 例えば (3) を

$$|a'(t)| \le C(T-t)^{-1}, \ |a''(t)| \le C(T-t)^{-2} \quad (t < T) \tag{11}$$

と考えるとする. このとき, Theorem 1 とほとんど同様の証明により, zone を分ける超曲面を $(T-t)(1+|\xi|) = M$ と定義すると, $a''(t)$ に対する仮定を使わない通常のエネルギー法を用いた場合, Z_Ψ においては有界性が得られるが, Z_H においては

$$|V_1(t,\xi)| \le e^{C\int_0^t (T-s)^{-1}\,ds}|V_1(t_\xi,\xi)| \le (T-t)^{-C}|V_1(t_\xi,\xi)| \le C(1+|\xi|)^C|V_1(t_\xi,\xi)|$$

というような評価, すなわち有限次の regularity loss を許す評価しか得ることができない. ここで t_ξ は $(T-t_\xi)(1+|\xi|) = M$ の解である. この場合も, Theorem 1 の証明の場合と同様に, Z_H において $a''(t)$ に対する仮定も用いた解の表現を行うことにより, regularity loss が無い評価, すなわち L^2 well-posedness が示されることがわかる. ちなみに, $|a'(t)| \le C(T-t)^{-1}$ の仮定のみによる有限次の regularity loss に関する結果としては, [2], また, 仮定 $|a''(t)| \le C(T-t)^{-2}$ を課すことによる L^2 well-posedness に関する結果としては [3] がある. また, Theorem 2 に対応する結果としては [4], [5] などがある.

References

[1] F. Colombini, E. De Giorgi and S. Spagnolo, Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **6** (1979), 511–559.

[2] F. Colombini, D. Del Santo and T. Kinoshita, Well-posedness of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with non-Lipschitz coefficients. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)* **1** (2002), 327–358.

[3] F. Hirosawa, Loss of regularity for the solutions to hyperbolic equations with non-regular coefficients -an application to Kirchhoff equation-, *Math. Methods Appl. Sci.* **26** (2003), 783–799.

[4] F. Hirosawa, Hirosawa, F., Loss of regularity for second order hyperbolic equations with singular coefficients, *preprint.*

[5] M. Reissig and J. Smith, $L^p - L^q$ estimate for wave equation with bounded time depending coefficient, to appear in *Hokkaido Math. J.*

[6] T. Yamazaki, On the $L^2(\mathbb{R}^n)$ well-posedness of some singular or degenerate partial differential equations of hyperbolic type, *Comm. Partial Differential Equations* **15** (1990), 1029-1078.

第26回 若手セミナー 2日目午前セッション総括

北直泰（宮崎大学教育文化学部）

• 微分型相互作用を持つ非線形分散型方程式の初期値問題（瀬片純市氏・九州大）

非線形項に導関数を含む非線形シュレーディンガー方程式と深水波の様子を記述するベンジャミン一小野方程式について，初期値問題を考察していた．特に Kenig-Ponce-Vega の方法で問題となっていたデータの小ささを取り除いたところがセールスポイントである．この講演に対して，時間局所解の存在時間幅を初期データの情報から決定できるか否かという質問が発せられた．解の構成法がちょっと複雑なので，この質問に対する回答には苦労しそうである．

• 分数冪ラプラシアン発展作用素の L^p 評価について（林英彦氏・九州大）

異常な拡散法則に支配された拡散現象を取り扱っていた．多く見受けられる拡散法則（＝Fick の法則）は (粒子の流量) $\propto \nabla u(t,x)$ であるが，この講演では，

$$(\text{粒子の流量}) \propto \Delta^{\theta/2-1}\nabla u(t,x)$$

で与えられるような異常拡散法則に基づいた方程式をハーディー空間 H^p $(p<1)$ の枠組みで考察している．この講演について以下のような質問があった．

(1) 有界領域で同じ問題を考えたら解の減衰はどうなるか？(減衰評価の係数に領域の幾何学的情報が明示されるかどうか.)

この質問に答えるためには，有界領域での H^p $(p<1)$ 空間の定義を考えることから始めることになりそうである．

• The Cauchy Problem for the Klein-Gordon Equation with Cubic Convolution Nonlinearity （佐々木浩宣氏・北大）

線形 Klein- Gordon 方程式解の減衰評価を利用し，コンボリューションタイプの非線形項を持つ方程式について時間大域解の存在証明がなされている．講演後の質問で「線形 Klein-Gordon 方程式解の "Strichartz 評価" を利用すれば，もう少し緩やかな条件下で時間大域解の構成が出来るのではないか？」という展望が得られた．また，非線形 Schrödinger 方程式では，コンボリューションの冪が $\gamma > 3/4$ 程度まで下がった状況で解の漸近挙動が得られているので，非線形 Klein-Gordon 方程式でも同程度の結果が得られるかも知れない．この講演についての質問で，非線形 Dirac 方程式では Strichartz 型の評価で小さなデータの下解の時間大域的存在および漸近挙動が示されているので同様の結果が出せるのではないかというものがあった．

• Schrödinger 方程式の連立系の解の漸近挙動について（中村能久氏・熊本大）

$\dot{H}^{-b}$ の条件をとりはずせないか？非線形項に微分が込められている場合には外せそうであるが，通常の冪タイプ非線形項では難しそう．講演で除外されていたケースつまり

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v = |u|^2 u \end{cases}$$

については, 解の陽的な表現をみればすぐ分かるように, v の漸近挙動が線形 Schrödinger 解もしくは phase に修正を入れた線形解に近づくことを期待するのはもはや絶望的である.

• **Maxwell-Schrödinger 方程式の定在波解の存在について（菊池弘明氏・東北大）**

古典的な粒子（速度が小さい電子）と電場が相互作用して定在波が生ずることを変分法的に解決している. ここで定在波とは時間的に周期的に変化する解のことである. これからの方向性としては

(1) 磁場 A が入ってきた場合に定在波は存在するか?

(2) 相対性理論的な粒子（速度が大きい電子など）と電磁場との相互作用を考えたときに, 定在波は存在するか?

(3) u, Φ の形状について具体的な情報を引き出すこと. （例えば, u は空間方向に指数関数的に減衰しているか否かなど）

(4) 摂動に対する定在波の安定・不安定性の解析

などが考えられそう. この講演への質問として, 変分法的な解法に関する確認および定在波解の摂動に対する安定性に関するものが出た.

微分型相互作用を持つ非線形分散型方程式の初期値問題[1]

瀬片 純市[2]
九州大学大学院数理学府[3]

1 Introduction

以下のような微分型相互作用を持つ非線形分散型方程式の初期値問題について考える.

$$(NLS) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \mathcal{N}(u, \overline{u}, \partial_x u, \partial_x \overline{u}), & t,\ x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

$$(BO) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}_x \partial_x^2 u + u\partial_x u = 0, & t,\ x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

ここで u は $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ から複素数に値をとる関数であり, $\overline{u}$ は u の複素共役を表す. $\mathcal{N}(u, \overline{u}, \partial_x u, \partial_x \overline{u})$ は次のように定義される.

$$\mathcal{N}(u, \overline{u}, q, \overline{q}) = \sum_{p_1+p_2+p_3+p_4 \geq p} C_{p_1,p_2,p_3,p_4} u^{p_1} \overline{u}^{p_2} q^{p_3} \overline{q}^{p_4},$$

$C_{p_1,p_2,p_3,p_4} \in \mathbf{C}$. また $\mathcal{H}_x$ は Hilbert 変換, すなわち $\mathcal{H}_x = \mathcal{F}^{-1} \frac{-i\xi}{|\xi|} \mathcal{F}$ として定義される.

方程式 (NLS) は $\mathcal{N} = i\lambda \partial_x(|u|^2 u)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ の時はプラズマ物理学におけるモデル (derivative nonlinear Schrödinger equation), 方程式 (BO) は深い水面波の動きを表すモデル (Benjamin-Ono equation) として現れる.

本稿では初期値問題 (NLS), (BO) の Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ における時間局所適切性, すなわち, 時間局所解の存在, 一意性および初期値連続依存性 (初期値を連続的に変化させたときに解も連続的に変化すること) について述べる. 具体的には初期値問題 (NLS) (あるいは (BO)) が $H^s(\mathbf{R})$ で時間局所適切であるとは次のように定義される.

Definition. 初期値問題 (NLS) (or (BO)) が $H^s(\mathbf{R})$ で時間局所適切である.
$\rightleftharpoons T > 0$ が存在し, 時間区間 $[-T,T]$ で (NLS) (or (BO)) を満たす $u(t)$ が一意に存在する. さらに $u(t)$ は次の性質を満たす.

(i) $u \in C([-T,T];\ H^s(\mathbf{R})) \cap Y_T = X_T$,

(ii) data-solution flow-map $H^s(\mathbf{R}) \to X_T$ $(u_0 \mapsto u(t))$ は連続である, すなわち

$$\forall u_0 \in H^s(\mathbf{R}),\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0; \qquad \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s} < \delta \Rightarrow \|u - \tilde{u}\|_{X_T} < \epsilon,$$
$$\delta = \delta(\epsilon,\ M), \qquad \|u_0\|_{H^s} \leq M,$$

ここに, $\tilde{u}$ は初期値を $\tilde{u}_0$ とする (NLS) (or (BO)) の解.

---

[1] 本研究は北直泰助教授 (宮崎大学教育文化学部) との共同研究による

[2] supported by JSPS Fellowships

[3] 現在は東北大学大学院理学研究科数学専攻受託学生 e-mail segata@math. tohoku.ac.jp

上の定義は $H^s(\mathbf{R})$ を重みつき Sobolev 空間 $H^{s,\alpha}(\mathbf{R})$ に変えても同様に定義できる. ここに $H^{s,\alpha}(\mathbf{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R});\ \|f\|_{H^{s,\alpha}} = \|\langle x\rangle^\alpha \langle D_x\rangle^s f\|_{L^2_x} < \infty\}$, とする. ただし $\langle x\rangle^\alpha = (1+x^2)^{\alpha/2}$, $\langle D_x\rangle^s = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}$.

このとき以下の結果を得ることができる.

Theorem 1 [6] [7].

$$X^s \equiv \begin{cases} H^{s,0}\cap H^{s_1,\alpha_1},\ s > s_1+\alpha_1 > 2,\ s_1 > 3/2,\ \alpha_1 > 1/2 & (p=2\text{ のとき}), \\ H^{s,0},\ s>2 & (p=3\text{ のとき}), \end{cases}$$

とする. このとき (NLS) は X^s で時間局所適切である.

Theorem 2 [8]. $Y^s \equiv H^{s,0}\cap H^{s_1,\alpha_1}$, $s > s_1+\alpha_1 > 1$, $s_1 > 1/2$, $\alpha_1 > 1/2$ とする. このとき (BO) は Y^s で時間局所適切である.

これらの初期値問題を解く際, エネルギー法や同値な積分方程式に対する縮小写像の原理 (Banach の不動点定理) といったアプローチをとるが, エネルギー法の場合, 未知関数 u が複素数値であるために $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)} \neq 0$ の場合は derivative loss と呼ばれる困難を生じる. 次の節ではまず (NLS) において $\mathcal{N} = u^2\partial_x\overline{u}$, $\mathcal{N} = |u|^2\partial_x u$ とした場合を具体例にあげて derivative loss について説明する. ここで $\mathcal{N} = u^2\partial_x\overline{u}$ の時は $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)} = 0$, $\mathcal{N} = |u|^2\partial_x u$ のときは $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)} \neq 0$ となることに注意する.

また Benjamin-Ono 方程式に関して, 未知関数 u を実数値関数と見なした場合は derivative loss は起こらないので通常のエネルギー法により解の存在を示すことができる. これに関しては Ponce [13], Koch-Tzvetkov [11], Kenig-Koenig [3], Tao [16] 等参照. Theorem 2 では未知関数 u は複素数値でも良いことに注意する.

われわれは上の Theorem1 及び Theorem 2 を証明するために (NLS) や (BO) と同値な積分方程式に対する縮小写像の原理を用いるが, この場合も非線形項に含まれる微分の処理が問題となる. この困難を回避するためにここでは線形 Schrödinger 方程式, 線形化された Benjamin-Ono 方程式の解の持つ局所平滑化効果 (あるいは Kato's smoothing effect) を用いる. 局所平滑化効果とはこれらの線形化方程式の解が初期データに比べて可微分性が上がるということである. この効果を用いることにより積分方程式を介して縮小写像の原理によりこれらの方程式を解くことができる (Kenig-Ponce-Vega [4] [5] 参照[4]). しかしながら, この方法では時間局所解の存在を示すだけでも初期データに smallness を課さなければならない (論文 [4] [5] では初期データに smallness が課されている).

3 節ではなぜ初期データに smallness という条件を課さなければいけないのかということについて説明し, 4 節で [6], [7], [8] に従いこの smallness の条件のはずし方について説明する (上の Theorem 1, 2 において初期データに smallness が課されていないことに注意).

2 Derivative loss とは?-Energy 法によるアプローチ-

ここでは derivative loss を説明するために次の 2 つの例を挙げる.

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + u^2\partial_x\overline{u} = 0, \tag{1}$$

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2\partial_x u = 0. \tag{2}$$

[4] [5] では (BO) ではなく generalized Benjamin-Ono 方程式 ((BO) において $u\partial_x u$ を $u^k\partial_x u$ $(k=2,3,4,\cdots)$ に代えたもの) を扱っているが [4] の方法と組み合わせれば彼らの方法は (BO) にも適用できる.

ここで (1) については $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}=0$, (2) については $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}\neq 0$ となることに注意する. (1), (2) に対し $\|\partial_x^m u(t)\|_{L^2}$ を評価する.

2.1 $i\partial_t u+\partial_x^2 u+u^2\partial_x\overline{u}=0$ の場合.

方程式 (1) を x について m 回微分し, $\partial_x^m\overline{u}$ をかけると

$$i\partial_t\partial_x^m u\partial_x^m\overline{u}+\partial_x^{m+2}u\partial_x^m\overline{u}+\partial_x^m(u^2\partial_x\overline{u})\partial_x^m\overline{u}=0.$$

その虚部をとり, x について $\mathbf{R}$ 上積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^m u(t)\|_{L_x^2}^2+\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}\{\partial_x^m(u^2\partial_x\overline{u})\partial_x^m\overline{u}-\partial_x^m(\overline{u}^2\partial_x u)\partial_x^m u\}dx=0.$$

Leibniz rule により

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^m u(t)\|_{L_x^2}^2+\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}u^2\partial_x^{m+1}\overline{u}\partial_x^m\overline{u}dx-\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}\overline{u}^2\partial_x^{m+1}u\partial_x^m udx+R_1(t)=0, \tag{3}$$

ここに $R_1(t)$ は剰余項で

$$R_1(t)=\frac{1}{2i}\sum_{l=0}^{m-1}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^{m-l}(u^2)\partial_x^{l+1}\overline{u}\partial_x^m\overline{u}dx-\frac{1}{2i}\sum_{l=0}^{m-1}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^{m-l}(\overline{u}^2)\partial_x^{l+1}u\partial_x^m udx.$$

$\partial_x^{m+1}\overline{u}\partial_x^m\overline{u}=\frac{1}{2}\partial_x(\partial_x^m\overline{u})^2$, $\partial_x^{m+1}u\partial_x^m u=\frac{1}{2}\partial_x(\partial_x^m u)^2$ に注意して (3) の左辺第 2 項と第 3 項を部分積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^m u(t)\|_{L_x^2}^2-\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}u\partial_x u(\partial_x^m\overline{u})^2\overline{u}dx+\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}\overline{u}\partial_x\overline{u}(\partial_x^m u)^2dx+R_1(t)=0. \tag{4}$$

よって (4) には Gronwall の不等式が適用でき $\|\partial_x^m u(t)\|_{L^2}$ の評価を得ることができる.

2.2 $i\partial_t u+\partial_x^2 u+|u|^2\partial_x u=0$ の場合.

(1) と同様に (2) を x について m 回微分し $\partial_x^m\overline{u}$ をかけると

$$i\partial_t\partial_x^m u\partial_x^m\overline{u}+\partial_x^{m+2}u\partial_x^m\overline{u}+\partial_x^m(|u|^2\partial_x u)\partial_x^m\overline{u}=0.$$

その虚部をとり, x について $\mathbf{R}$ 上積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^m u(t)\|_{L_x^2}^2+\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}\{\partial_x^m(|u|^2\partial_x u)\partial_x^m\overline{u}-\partial_x^m(|u|^2\partial_x\overline{u})\partial_x^m u\}dx=0.$$

Leibniz rule により

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^m u(t)\|_{L_x^2}^2+\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}|u|^2\partial_x^{m+1}u\partial_x^m\overline{u}dx-\frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}}|u|^2\partial_x^{m+1}\overline{u}\partial_x^m udx+R_2(t)=0, \tag{5}$$

ここに $R_2(t)$ は剰余項で

$$R_2(t)=\frac{1}{2i}\sum_{l=0}^{m-1}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^{m-l}(|u|^2)\partial_x^{l+1}u\partial_x^m\overline{u}dx-\frac{1}{2i}\sum_{l=0}^{m-1}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^{m-l}(|u|^2)\partial_x^{l+1}\overline{u}\partial_x^m udx.$$

(5) については部分積分しても u の $m+1$ 階微分が現れるので Gronwall の不等式が適用できない．このように部分積分により最高階の微分を低階な項に移すことができないことを derivative loss という．

一般に Energy 法を適用する場合 (NLS) において

$$Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}=0 \Longrightarrow \textit{derivative loss} \text{ が起こらない}$$
$$Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}\neq 0 \Longrightarrow \textit{derivative loss} \text{ が起こりうる}$$

ことが M. Tsutsumi-Fukuda [17] [18], Klainerman [9], Kla inerman-Ponce [10], Shatah [14] 等により知られている．よってこのままでは一般に (NLS) に Energy 法を適用できない．

3 積分方程式によるアプローチ

積分方程式を介して (NLS) や (BO) を解く場合も非線形項の微分の loss を克服しなければ縮小写像の原理を適用することができない．エネルギー法の場合 (NLS) において $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}=0$ ならば非線形項の微分の loss を部分積分により克服することができるが，積分方程式の場合は以下のような線形化方程式の解の持つ局所平滑化効果により derivative loss を回避することができる．

$$\left\|\partial_x\int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2}F(t')dt'\right\|_{L_x^\infty(\mathbf{R},L_t^2(\mathbf{R}))} \le C\|F\|_{L_x^1(\mathbf{R},L_t^2(\mathbf{R}))}.$$
$$\left\|D_x\int_0^t e^{-(t-t')\mathcal{H}_x\partial_x^2}F(t')dt'\right\|_{L_x^\infty(\mathbf{R},L_t^2(\mathbf{R}))} \le C\|F\|_{L_x^1(\mathbf{R},L_t^2(\mathbf{R}))}.$$

ここに $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $D_x=\mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$. K enig-Ponce-Vega [4] [5] はこの評価式を用いて十分大きな s, $s_1>0$ に対し $u_0\in H^s\cap H^{s_1,1}$ で $\|u_0\|_{H^s\cap H^{s_1,1}}$ が 十分小さければ (NLS) と (BO) は時間局所適切であることを示した．ここで注意すべきことが 2 つある．1 つは非線形項に関する制限である．エネルギー法の場合 (NLS) において非線形項が $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}=0$ を満たさなければ適用することができなかったが，積分方程式による方法 (Kenig-Ponce-Vega の方法) は $Re\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial(\partial_x u)}=0$ を満たさなくても適用できるという点である．したがって非線形項に対する汎用性は後者の方が広い．もう 1 つは初期データに対する smallness という条件である．積分方程式による方法は非線形項に対する汎用性は広いという利点はあるが，時間局所解の存在を示すだけでも初期データに対する smallness という条件が付いてくる．それは以下のような理由による．

$$\Phi(u)\equiv e^{it\partial_x^2}u_0-i\int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2}\mathcal{N}(u,\overline{u},\partial_x u,\partial_x\overline{u})(t')dt',$$

とおき上の平滑化効果を用いて右辺を評価すると

$$|\!|\!|\Phi(u)|\!|\!| \le C\|u_0\|_{H^{s,0}\cap H^{s_1,1}}+|\!|\!|u|\!|\!|^p$$

($|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ の具体的な形はここでは省略する)　というように評価される．ここで $|\!|\!|u|\!|\!|^p$ の前に T^β $(\beta>0)$ が現れないために時間局所適切性を示す場合にも初期データの smallness という条件を課さなければならない．

ここで Kenig-Ponce-Vega [4] [5] の結果において初期データの s mallness をはずすことができるか? という自然な疑問が生じるが Kenig-Ponce-Vega [4] [5] の方法, Hayashi [1] による gauge 変換, Ozawa įteO の方法を組み合わせることによりこの問いを肯定的に解決することができる．次の節でこれらについて説明する．

4 Gauge 変換

4.1 (NLS) の場合

まず最初に (NLS) の場合 ([6] [7]) について述べるが簡単のため以下の方程式を考える.

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \underbrace{iu\partial_x u}_{worst} = 0.$$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi \simeq u_0$ in X^s となる関数を導入し非線形項を次のように 2 つに分ける (X^s の定義については Theorem 1 参照).

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \underbrace{i(u-\varphi)\partial_x u}_{negligeable} + \underbrace{i\varphi\partial_x u}_{worst} = 0. \tag{6}$$

今, φ と u_0 は初期データのクラスで十分近いので時間があまり経っていなければ φ と $u(t)$ も十分近い, すなわち, $u(t)-\varphi$ は小さいと見なすことができる. 従って (6) の第 3 項は剰余項と見なすことができる. 他方, データ u_0 については大きいデータも考えているので (6) の第 4 項 に現れる φ は無視することができない. したがって (6) の第 4 項の処理が証明の鍵となる. そこでわれわれは Hayashi [1], Hayashi-Ozawa [2] の方法を用いて以下のような変換 (gauge 変換) を方程式 (6) に施すことにより (6) の第 4 項を剰余項へと変換する. 実際, $v(t,x) = \exp\left(\frac{i}{2}\int_{-\infty}^x \varphi(y)dy\right) u(t,x)$ と置くと方程式 (6) に $\exp\left(\frac{i}{2}\int_{-\infty}^x \varphi(y)dy\right)$ を掛けることにより $v(t,x)$ は以下の方程式を満たす.

$$\begin{aligned} i\partial_t v + \partial_x^2 v - \frac{i}{2}\partial_x\varphi v \quad &+ \quad \frac{1}{4}\varphi^2 v - \underbrace{i\varphi e^{i\partial_x^{-1}\varphi/2}\partial_x u}_{worst} \\ &+ \quad \underbrace{i(u-\varphi)\partial_x v}_{negligeable} + \frac{1}{2}\varphi uv - \frac{1}{2}\varphi^2 v + \underbrace{i\varphi e^{i\partial_x^{-1}\varphi/2}\partial_x u}_{worst} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

ここで (6) の第 2 項 (線形項) が (7) の第 2 項から第 5 項へ変形され (6) の第 4 項が (7) の第 9 項へ変形される. このとき線形項が変形されて現れてきた (7) の第 5 項が worst term である (7) の第 9 項のちょうど逆符号となりこれらの項が相殺される. 実際これらの項がうまく相殺されるように $v(t,x)$ の exp の指数の部分を選んだ (exp の指数の部分の選び方については [2] が詳しい). この変換により非線形項はすべて低階と見なすことができ $v(t,x)$ は以下の方程式を満たす.

$$i\partial_t v + \partial_x^2 v + i(u-\varphi)\partial_x v + \underbrace{\left(-\frac{i}{2}\partial_x\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi u\right)}_{lower} v = 0.$$

この方程式を積分方程式に直し Kenig-Ponce-Veag の方法を適用すれば初期データに大きさの制限を課すことなく (NLS) の時間局所解の存在を示すことができる. 一般の非線形項に対しては以下で述べる Benjamin-Ono 方程式のように (NLS) を m odify しその modify した方程式について上のようにして gauge 変換を施す.

Remark. 上の方法を一般の非線形項に対して適用する場合, 非線形項に $\partial_x\overline{u}$ を含む時には少し工夫が必要となる. それは例えば上で述べた方法を $\mathcal{N} = u\partial_x\overline{u}$ の場合に適用した場合, うまく未知関数の変換をしても worst term を消すことができないからである. この困難を回避するために方程式をシステム化し, そのシステムを対角化する. 詳細については [6] [7] 参照.

4.2 (BO) の場合

次に (BO) の場合 ([8]) について述べる. (BO) を以下のように modify する.

$$(BO)_\nu \begin{cases} \partial_t u_\nu + \mathcal{H}_x \partial_x^2 u_\nu + u_\nu \partial_x \eta_\nu * u_\nu = 0, \\ u_\nu(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

ここに $\eta_\nu(x) = \nu^{-1}\eta(x/\nu)$, $\eta \in C_0^\infty$, $\int \eta(x)dx = 1$, $\nu \in (0,1]$. (NLS) の場合と同様にして $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi \simeq u_0$ in $H_x^{s,0} \cap H_x^{s_1,\alpha_1}$ という関数を導入する. この関数を用いて $(BO)_\nu$ は以下のように書き直すことができる.

$$\partial_t u_\nu + \mathcal{H}_x \partial_x^2 u_\nu + \varphi \partial_x \eta_\nu * u_\nu + (u_\nu - \varphi)\partial_x \eta_\nu * u_\nu = 0.$$

ここで変換 $v_\nu(t,x) = K_\nu(x,\partial_x)u_\nu(t,x)$ を施すが Benjamin-O no 方程式は線形項に Hilbert 変換を含むためにさらに困難を生じる. そのためにさらに工夫が必要となる そこで $K_\nu(x,\partial_x)$ を symbol を

$$K_\nu(x,\xi) = \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\xi}{i|\xi|}(1-\psi(\xi))\hat{\eta}(\nu\xi)\int_{-\infty}^x \varphi(y)\,dy\right),$$

とする 0 階の擬微分作用素と選ぶ. ここに

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \le 1, \\ smooth, & 1 \le |\xi| \le 2, \\ 0, & |\xi| \ge 2. \end{cases}$$

である. Hilbert 変換の問題点はその symbol $-i\xi/|\xi|$ が $\xi = 0$ で C^{infty} にならないことである. そのため ξ について C^∞ 級が要求される擬微分作用素と相性が悪い. その問題点を回避するためにわれわれは上のような cut-off function を導入した. $(BO)_\nu$ に擬微分作用素 $K_\nu(x,\partial_x)$ を作用させると

$$\partial_t v_\nu + \mathcal{H}_x \partial_x^2 v_\nu \quad + \quad K_\nu(u_\nu - \varphi)\eta_\nu * \partial_x u_\nu + R_\nu(\varphi, u_\nu) = 0, \tag{8}$$

ここに $R_\nu(\varphi,u) = (K_\nu \varphi \eta_\nu * \partial_x + [K_\nu, \mathcal{H}_x \partial_x^2])u$. 実際上の等式を得るためには擬微分作用素の理論, 具体的には Kohn-Nirenberg calculus (例えば [15, p. 237] 参照) が必要となるためここでは詳細は割愛する.

あとはこの近似方程式 $(BO)_\nu$ の解の存在 $\{u_\nu\}$ を示し, $\{v_\nu\}$ の評価を用いて $\{u_\nu\}$ の a priori 評価を求める. 詳細については [8] を参照されたい.

Remark. 上で述べた gauge 変換に関連して, Burger's 方程式

$$\partial_t u - \partial_x^2 u + u\partial_x u = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbf{R}.$$

に対して $v(t,x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x u(y)dy\right)u$ (Hopf -Cole 変換) と変換すると簡単な計算により熱方程式 $\partial_t v - \partial_x^2 v = 0$ になることが知られている. gauge 変換は Hopf-Cole 変換の一般化とも見なすことができる.

参考文献

[1] Hayashi N., *The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equations.* Nonlinear Analysis T.M.A., **18** (1993), 823–833.

[2] Hayashi N. and Ozawa T., *Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension.* Diff. and Integral Eq., **7** (1994), 453–461.

[3] Kenig C. E. and Koenig K., *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 879–895.

[4] Kenig C. E., Ponce G. and Vega L., *Small solution to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **10** (1993). 255–288.

[5] Kenig C. E., Ponce G. and Vega L., *On the generalized Benjamin-Ono equation*,.Trans, Amer. Math. Soc., **342** (1994), 155–172

[6] Kita N., *Derivative nonlinear Schrödinger equation with general quadratic nonlinearity.* preprint 2003.

[7] Kita N., *Derivative nonlinear Schrödinger equation with general cubic nonlinearity.* preprint 2003.

[8] Kita N. and Segata J., *Time local well-posedness for the Benjamin-Ono equation with large initial data.* preprint 2004.

[9] Klainerman S. *Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **78** (1982), no. 1, 73–98.

[10] Klainerman, S. and Ponce, G., *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations.* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 133–141.

[11] Koch H. and Tzvetkov N., *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Inter. Math. Res. Notes. (2003), 1449–1464.

[12] Ozawa T., *Finite energy solutions for the Schrödinger equations with quadratic nonlinearity in one space dimension.* Funkcialaj Ekvacioj., **41** (1998), 451–468.

[13] Ponce G., *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Equations **4** (1991), 527–542.

[14] Shatah J., *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations.* J. Differential Equations **46** (1982), no. 3, 409–425.

[15] Stein E. M., *"Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals"*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1993).

[16] Tao T., *Global well-posedness of Benjamin-Ono equation in $H^1(\mathbf{R})$*, J. Hyperbolic Diff. Eqs. 1 (2004), no. 1, 27–49.

[17] Tsutsumi M. and Fukuda I., *On solutions of the derivative nonlinear Schröinger equation. Existence and uniqueness theorem.* Funkcial. Ekvac. **23** (1980),259–277.

[18] Tsutsumi M, and Fukuda I., *On solutions of the derivative nonlinear Schröinger equation. II.* Funkcial. Ekvac. **24** (1981), 85–94.

分数冪ラプラシアン発展作用素の L^p 評価について*

林　英彦 (九州大学大学院数理学府 M2)

1 Introduction

次の分数冪ラプラシアンを含む半線形放物型方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u = F(u, \partial_x u), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $u_0(x)$ は与えられた初期関数、パラメータ θ は $0 < \theta \leq 2$ とする。非線形項 $F(u, \partial_x u)$ の代表例は、$|u|^{\alpha-2} u \partial_{x_k} u$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ やその線形結合である。方程式 (1.1) は 次の半線形熱方程式の一般化と考えられる。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{\alpha-1} u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

方程式 (1.2) に対しては、時間大域解の存在、解の爆発の双方の観点から、多くの関心が寄せられていて、事実 $1 + \frac{2}{n} < \alpha$ の時、$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して初期値が小さければ時間大域解が存在し、$1 < \alpha \leq 1 + \frac{2}{n}$ の時、初期値の大小に関わらず、正値解が有限時間内に爆発することが知られている。したがって $\alpha = 1 + \frac{2}{n}$ が 臨界指数となる (藤田指数と呼ばれている [1])。

一方、(1.2) の方程式に、$(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}$ の項を加えた次の方程式について、解の存在と一意性が N.Ito [2] によって示されている。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u = |u|^{\alpha-1} u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.3}$$

N.Ito は [2] において、$1 + \frac{\theta}{n} < \alpha < 1 + \frac{2}{n}$ の時、十分小さな初期値に対して (1.3) の時間大域解が存在することを示した。

これらの臨界指数は、解を考える基本空間に関連していると考えられる。上記の全ての結果は、その基本空間を $L^1(\mathbb{R}^n)$ としている。もし解を考える空間を他の ($L^1(\mathbb{R}^n)$ と異なる) 空間で考えるならば、指数の臨界が変わる可能性がある。本研究ではその臨界指数と基本空間との関連性を見るために、(1.1) の方程式を Hardy 空間 $\mathcal{H}^p$ $(p \leq 1)$ で考える。

---

*小川　卓克教授 (九州大学大学院 数理学研究院/東北大学大学院 理学研究科) との共同研究

そのための最初の段階として、線形発展作用素の Hardy 空間 における $L^p - L^q$ 型時間発展評価を構成することを目標とする。

したがって本稿では以下の、初期値問題 (1.1) の線形化問題のみを扱う。

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.4}$$

<u>Hardy 空間について</u>

$\phi(x) \in \mathcal{S}$、$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$ とし、$\phi_\lambda = \lambda^{-n}\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ とおく。$0 < p < \infty$ に対して

$$\sup_{\lambda>0} |\phi_\lambda * f| \in L^p$$

である時、f は Hardy 空間 $\mathcal{H}^p$ に属するという。

良く知られた Hardy-Littlewood の極大関数の L^p 有界性定理と Hausdorff-Young の不等式から、$1 < p < \infty$ のとき、Hardy 空間 $\mathcal{H}^p$ と通常の Lebesgue 空間 L^p が同一視できることは知られている。また $f \in \mathcal{H}^p$ $(0 < p \leq 1)$ の時、任意の多重指数 $|\beta| \leq n(\frac{1}{p} - 1)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(x)dx = 0$$

が成り立つことも知られている。

Hardy 空間における発展作用素の評価について、Miyakawa [3] [4] は、Naveir-Stokes 方程式の初期値問題を Hardy 空間で考えるために、その線形部分である Stokes 半群に対する L^p-L^q 型評価を Hardy 空間で与えた。初期値問題の場合、 Stokes 半群と熱方程式の与える発展作用素は同一視できるので、これは $-\Delta$ の生成する熱半群 $\{e^{t\Delta}\}$ に対する評価に他ならない。

2 Main Result

初期値問題 (1.4) の解は、$(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}$ によって生成される半群 $\{e^{-t(-\Delta)^{-\frac{\theta}{2}}}\}$ を用いて、

$$u(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}} u_0$$

と書ける。この半群について、次の評価式が成り立つ。

Theorem 2.1 $0<\theta<2$ とする。この時、ある定数 $C=C(n,p)$ が存在して、任意の $\frac{n}{n+1}<p\leq\infty$ に対して、

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\theta/2}}f\|_{\mathcal{H}^p}\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^p}.$$

注意Theorem 2.1 から $\{e^{-t(-\Delta)^{\theta/2}}\}_{t\geq 0}$ について, *Hardy* 空間における L^p-L^q 型評価が得られることが期待できる。

3 Preliminary

ここでは、Theorem2.1 の証明において重要となる2つの事柄についてを述べる。1つは $\mathcal{H}^p$-atom 分解定理について、そしてもう1つは分数冪ラプラシアン発展作用素を与える積分核の時空各点評価についてである。

まずはじめに、H^p-atom について定義する。

Definnition $p\leq 1$ とする。$a\in\mathcal{H}^p$ は次の条件を満たす時、$\mathcal{H}^p$-atom であるという。

- $supp(a)\subset B_R(x_a)$,
- $|a(x)|\leq|B_R|^{-1/p}$,
- $\displaystyle\int_{B_R(x_a)}x^\alpha a(x)dx=0. \qquad (|\alpha|\leq 1-\frac{1}{p})$

ただし、$B_R(x_a)$ は半径 $R>0$、中心 x_a の球とする。

$f\in\mathcal{H}^p(p\leq 1)$ に関して、次の atom 分解定理が成り立つことが知られている (Stein [5])。

Lemma 3.1 (atom 分解) 任意の $f\in\mathcal{H}^p(p\leq 1)$ に対して、ある $\mathcal{H}^p$-*atom* の列 $\{a_k\}_k$ と $\{\lambda_k\}\subset l^p$ が存在して、

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k(x).$$

さらに、ある定数 $C=C(n,p)$ が存在して、

$$\sum_k|\lambda_k|^p\leq C\|f\|^p_{\mathcal{H}^P}.$$

初期値問題 (1.4) の解、すなわち $u(t)=e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}}u_0$ は、積分核

$$K_t(x)=\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^\theta}]$$

を用いて、

$$e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}}u_0 = K_t * u_o$$

と書ける。この積分核 $K_t(x)$ について、次の各点評価が成立する。

Lemma 3.2 ある定数 C が存在して、

$$|K_1(x)| \leq \frac{C}{\langle x\rangle^{n+\theta}},$$

$$|\nabla K_1(x)| \leq \frac{C}{\langle x\rangle^{n+\theta+1}}.$$

特に、

$$|K_t(x)| \leq \frac{C\tau^{-n}}{\langle \tau x\rangle^{n+\theta}},$$

$$|\nabla K_t(x)| \leq \frac{C\tau^{-(n+1)}}{\langle \tau x\rangle^{n+\theta+1}} \qquad (\tau = t^{\frac{1}{\theta}}).$$

4 Proof of Theorem 2.1

Lemma 4.1 a は $\mathcal{H}^p$-*atom* であるとし、*supp*$(a) \subset B_R(x_a)$ とする。また $\phi \in \mathcal{S}$ で、$\phi_s(x) = s^{-n}\phi\left(\frac{x}{s}\right)$ とする。この時、$\tilde{a}_s = \phi_s * a$ は、次の性質を満たす。

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta \tilde{a}_s(x)dx = 0, \quad \textit{for all } |\beta| \leq n(\frac{1}{p}-1), \quad s>0, \tag{4.5}$$

$$|\tilde{a}_s(x)| \leq \frac{C_N s^{-(n+1)}}{(1+s^{-1}|x-x_a|)^N} \quad \textit{for } N \geq 0. \tag{4.6}$$

ϕ_s の代表例として、熱核 $G_s(x) = (4\pi x)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4s}}$ があげられる。

Lemma 4.2 $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$ とする。この時、ある定数 $C = C(n,p)$ が存在して、
任意の $\mathcal{H}^p$-*atom* a_k に対して

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}}a_k\|_{\mathcal{H}^p} \leq C.$$

ここでは、Lemma 4.2 の証明の概略を述べる。

Proof of Lemma 4.2. a_k を 1 つ固定し、*supp*$(a_k) \subset B_R(x_a)$ とする。また、テスト関数 $\phi_s(x)$ を熱核 $G_s(x) = (4\pi s)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4s}}$ とする。

$|x-x_a| \le 3R$ の時、$\tilde{a}_s$ の有界性と Lemma 3.2 を用いて、

$$\begin{aligned}|K_t * \tilde{a}_s(x)| &\le |\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\tilde{a}_s(y)dy| \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x-y)|dy \\ &\le C\|\langle x\rangle^{-(n+\theta)}\|_1.\end{aligned}$$

したがって、

$$|K_t * \tilde{a}_s(y)| \le C \tag{4.7}$$

$|x-x_a| > 3R$ の時、(4.5) より、

$$\begin{aligned}|K_t * \tilde{a}_s| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\tilde{a}_s(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-x_a)\tilde{a}_s(y)dy\right| \\ &\le \int_{B_\rho(x_a)} + \int_{B_\rho^c(x_a)} |K_t(x-y)-K_t(x-x_a)||\tilde{a}_s(y)|dy \\ &\equiv I_1(x) + I_2(x),\end{aligned}$$

ただし、$\rho = \dfrac{|x-x_a|}{2}$ とする。

$I_1(x)$ については、平均値の定理、Lemma 3.2 および (4.6) を用いて、

$$\begin{aligned}I_1(x) &= \int_{B_\rho(x_a)} \left|\int_0^1 \frac{d}{dr}K_t(x-x_a-r(y-x_a))dr\right| |\tilde{a}_s(y)|dy \\ &= \int_{B_\rho(x_a)} \left|\int_0^1 \frac{y-x_a}{\tau^{n+1}} \cdot \nabla K_1\left(\frac{x-x_a-r(y-x_a)}{\tau}\right)dr\right| |\tilde{a}_s(y)|dy \qquad (\tau = t^{\frac{1}{\theta}}) \\ &\le \int_0^1 \int_{B_\rho(x_a)} \frac{|y-x_a|}{\tau^{n+1}} \left|\nabla K_1\left(\frac{x-x_a-r(y-x_a)}{\tau}\right)\right| |\tilde{a}_s(y)|dydr \\ &\le C\int_0^1 \int_{B_\rho(x_a)} \frac{\tau^{-(n+1)}|y-x_a|}{(1+\tau^{-1}|x-x_a-r(y-x_a)|)^{n+\theta+1}} \frac{\sqrt{s}^{-(n+1)}}{(1+\sqrt{s}^{-1}|y-x_a|)^N}dydr.\end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{x-x_a}{\tau} = \eta$ とし $\dfrac{y-x_a}{\tau} = z$ と変数変換することにより、

$$I_1(x) \le C\int_0^1 \int_{B_{\frac{|\eta|}{2}}(0)} \frac{1}{(1+|\eta-rz|)^{n+\theta+1}} \frac{\sqrt{s}^{-(n+1)}|z|}{(1+\sqrt{s}^{-1}\tau|z|)^N}dzdr.$$

$z \in B_{\frac{|\eta|}{2}}(0)$ の時、$|\eta - rz| \geq |\eta| - r|z| \geq \frac{|\eta|}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leq \frac{C}{(1+\frac{|\eta|}{2})^{n+\theta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sqrt{s}^{-(n+1)}|z|}{(1+\sqrt{s}^{-1}\tau|z|)^N} dz \\ &\leq \frac{C\tau^{-(n+1)}}{(1+|\eta|)^{n+\theta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z'|}{(1+|z'|)^N} dz' \\ &\leq \frac{C\tau^{\theta}}{(\tau+|x-x_a|)^{n+\theta+1}} \leq \frac{C}{|x-x_a|^{n+1}}. \end{aligned}$$

したがって、

$$I_1(x) \leq C|x-x_a|^{-(n+1)}. \tag{4.8}$$

一方、$I_2(x)$ については三角不等式を用いることにより、

$$I_2(x) \leq \int_{B^c_\rho(x_a)} |K_t(x-y)||\tilde{a}_s(y)|dy + \int_{B^c_\rho(x_a)} |K_t(x-x_a)||\tilde{a}_s(y)|dy.$$

それぞれの項を Lemma 3.2 と (4.6) を用いて評価することによって、

$$I_2(x) \leq C|x-x_a|^{-(n+1)} \tag{4.9}$$

とできる。(4.7)、(4.8)、(4.9) より

$$|K_t * \tilde{a}_s(x)| \leq C\langle x-x_a\rangle^{-(n+1)}$$

とできる。$p > \dfrac{n}{n+1}$ としているので、

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}} a_k\|_{\mathcal{H}^p} &= \|\sup_{s>0} |\phi_s * e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}} a_k|\|_p \\ &= \|\sup_{s>0} |K_t * \tilde{a}_s(x)|\|_p \leq C. \end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 2.1. $f \in \mathcal{H}^p (p \leq 1)$ とする。この時、Lemma 3.1 より
ある $\mathcal{H}^p$-atom の列 $\{a_k\}_k$ と $\{\lambda_k\} \subset l^p$ が存在して、

$$f(x) = \sum_k \lambda_k a_k(x).$$

ここで、$p < 1$ の時、$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^p}$ は三角不等式が成り立たないが、$\|\cdot\|^p_{\mathcal{H}^p}$ とすれば成り立つことに注意すると、

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}} f\|^p_{\mathcal{H}^p} \leq \sum_k |\lambda_k|^p \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}} a_k\|^p_{\mathcal{H}^p}.$$

したがって、Lemma 3.1 と Lemma 4.2 から

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}} f\|^p_{\mathcal{H}^p} \leq C\|f\|^p_{\mathcal{H}^p}.$$

□

参考文献

[1] Fujita,H., *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser I, **13** (1966), 109-124.

[2] Ito, N., 低階の微分項を持つ非線形熱方程式の時間大域解の存在について, 第 25 回 発展方程式若手セミナー 報告集、 北 直泰 編 pp.136-141, 2003.

[3] Miyakawa, T., *Hardy spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Naiver-Stokes equations*, Kyushu J. Math., **50** (1996), 1-64.

[4] Miyakawa, T., *Application of Hardy space techniques to the time decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in* $\mathbb{R}^n$, Funkcial. Ekvac., **41** (1998), 383-434.

[5] Stein, E., *Harmonic Analyis*, Princeton University Press, 1993

GLOBAL EXISTENCE FOR THE KLEIN-GORDON EQUATION WITH CUBIC CONVOLUTION NONLINEARITY

佐々木浩宣（北海道大学大学院理学研究科）

はじめに

本文は平成１６年８月１０日に発展方程式若手セミナーにて発表させていただいた研究についての報告書であります。本来であればこの報告書には発表後の進展具合を添える形で、より発展した内容が記されることが望ましいのでありますが、真に不本意ながら、その逆とも言える報告をしなければならなくなりました。

というのも、結果から申し上げれば、私が発表した主定理は、既に出版されている論文 [10]、[7] の手法を用いれば簡単に示されることが判明いたしました。修士時代の未熟な論文調査が原因であり、大変悔やんでおります。

そこで皆様には、本文は、既存の結果を「別のアプローチで攻めてみる」というテーマで読んでいただければ幸いと考えております。

1. Introduction

This paper is concerned with the Cauchy problem for the Klein-Gordon equation with cubic convolution nonlinearity:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + u = F_\gamma(u) & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ (u(0),\partial_t u(0)) = (f,g) & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

where u is a real-valued unknown function, $F_\gamma(u) = -(V_\gamma * u^2)u$ and

$$V_\gamma(x) \le c|x|^{-\gamma}. \tag{1.2}$$

Here, $0<\gamma<n$ and $*$ denotes the convolution in the space variables. We call the nonlinear term $F_\gamma(u)$ cubic convolution, or Hartree-type. The term is an approximative expression of the nonlocal interaction of specific elementary particles. The functions V_γ and u represent a potential and the wave function, respectively. For the Klein-Gordon equation with cubic convolution, Motai proved in [8] that if $0<\gamma<n$ and $V_\gamma(x)=|x|^{-\gamma}$, then there exists a unique global solution. Mochizuki proved in [6] that there exists the scattering operator for small initial data if $2\le\gamma<n$. On the other hand, Menzala and Strauss proved in [5] that there exists a blow-up solution for large data if $n\ge 3$, $0<\gamma\le 3$, $\gamma<n$ and $V_\gamma(x)$ is a negative even function.

Our concern is to find the infimum of γ such that
(a) *The problem (1.1) has a unique global solution for small initial data.*
and
(b) *The global solution converges to a free solution in L_2-sense as $t\to\infty$.*

In this paper, we use the classical $L_p - L_q$ estimates for the homogeneous Klein-Gordon equation to show the global existence and uniqueness of a solution and its asymptotic behavior in L_2-sense for small initial data for $3/2<\gamma<n$.

For the wave equation with cubic convolution, see Mochizuki [6], Hidano [2] and Tsutaya [11].

In order to state our result, we give notation which will be used in this paper. For Banach spaces X and Y, we denote by $\|\cdot|X\|$ and $\|T|X \to Y\|$ the norm in X and the norm of a bounded operator from X into Y, respectively. Let $H_p^s = H_p^s(\mathbb{R}^n)$ with $s \in \mathbb{R}$ and $1 \le p < \infty$ be the Sobolev spaces which are the completion of $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ with the norm

$$\|u|H_p^s\| \equiv \|\mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}u)|L_p\| = \|\omega^s u|L_p\|,$$

where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier transform on $\acute{\mathcal{S}}$, $\langle\xi\rangle$ denotes $(1+|\xi|^2)^{1/2}$, $\omega = (1-\Delta)^{1/2}$, $\acute{\mathcal{S}}$ is the set of all tempered distributions and $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ is the set of all C^∞-functions whose support is compact. The space H_2^s will be simply denoted by H^s.

We shall treat the following integral equation instead of (1.1):

$$u(t) = \cos t\omega f + \frac{\sin t\omega}{\omega} g + \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau \ . \tag{1.3}$$

We are now ready to state our main result.

Theorem 1.1. *Suppose $n \ge 2$, $3/2 < \gamma \le 2s+1$ and $\gamma < n$. If $s \ge 1$, then there exist some positive constants δ_0, c_γ and sufficiently small number $\varepsilon > 0$ depending only on n, s and γ and such that if*

$$\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\| + \|f|H_p^{s+1/2+\varepsilon}\| + \|g|H_p^{s-1/2+\varepsilon}\| \le \delta_0 \ ,$$

then there uniquely exists $u = u(t,x)$ with the following properties:

$$u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-1}(\mathbb{R}^n)), \tag{1.4}$$

$$u(t) = u_0(t) + \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau \quad in \quad [0,\infty), \tag{1.5}$$

$$\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\| \le c_\gamma \delta_0, \tag{1.6}$$

$$\|u(t)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\| = O(t^{-a}) \quad (t \to \infty), \tag{1.7}$$

where $a = n/2 - n/q$, $1/p = 1/2 + 1/(2n) + \varepsilon/n$, $1/q = 1 - 1/p$ and

$$u_0(t) = \cos t\omega f + \frac{\sin t\omega}{\omega} g.$$

Moreover, there uniquely exist $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in H^s \times H^{s-1}$ such that

$$\lim_{t\to\infty} (\|u(t) - \tilde{u_0}(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u_0}(t)|H^{s-1}\|) = 0, \tag{1.8}$$

where

$$\tilde{u_0}(t) = \cos t\omega \tilde{f} + \frac{\sin t\omega}{\omega}\tilde{g}.$$

Remark 1.2. The same results hold even if the condition (1.2) is replaced by $V_\gamma \in L^{n/\gamma}$ with $\gamma = \min(2s+1, n)$.

Our plan in the present paper is the following: In section 2, we derive three estimates for the nonlinearity and the $L_p - L_q$ estimate for the homogeneous Klein-Gordon equation. By the first estimate for the nonlineartiy, we give the local existence. In section 3, Using the other estimates, we show a priori estimate, by which we easily obtain the global existence. We finally prove the asymptotic behavior.

2. Estimates of Nonlinearity

In this section, we give some estimates for the nonlinearity and the $L_p - L_q$ estimate for the homogeneous Klein-Gordon equation to show the local existence. We first prepare several facts.

Lemma 2.1. *(1)([9], The Generalized Hölder inequality). If $1 < p < \infty$ and $s \geq 0$, then for all q_i, $r_i \in (1, \infty)$, $i = 1, 2$ satisfying*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_2} \ ,$$

there exists some constant $c = c(n, s, p, q_i, r_i) > 0 \ \ (i = 1, 2)$ such that

$$\|fg|H_p^s\| \leq c(\|f|H_{q_1}^s\| \|g|L_{r_1}\| + \|f|L_{q_2}\| \|g|H_{r_2}^s\|) \ . \tag{2.1}$$

(2)(The Hardy-Littlewood-Sobolev inequality). If $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < n$ and

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{\gamma}{n} + \frac{1}{p},$$

then there exists some constant $c = c(n, p, \gamma) > 0$ such that

$$\| | \cdot |^{-\gamma} * f|L_q\| \leq c\|f|L_p\| \ . \tag{2.2}$$

In order to estimate the nonlinearity, we give the following lemma:

Lemma 2.2. *If $n \geq 1$, $s \geq 0$, $1 < p < q, r < \infty$, $2 \leq q$, $2 < r$ and*

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{\gamma}{n} + \frac{1}{q} + \frac{2}{r},$$

then there exists some constant $c = c(n, s, \gamma, p, q) > 0$ such that

$$\begin{aligned}\|(V_\gamma * u_1u_2)u_3|H_p^s\| \leq c(&\|u_1|H_q^s\| \|u_2|L_r\| \|u_3|L_r\| \\ &+ \|u_1|L_r\| \|u_2|H_q^s\| \|u_3|L_r\| + \|u_1|L_r\| \|u_2|L_r\| \|u_3|H_q^s\|) \ .\end{aligned} \tag{2.3}$$

Proof. With the help of (2.1) and (2.2), we have

$$\begin{aligned}\|(V_\gamma * u_1u_2)u_3|H_p^s\| \leq &c(\|V_\gamma * u_1u_2|H^s_{(\gamma/n+1/q+1/r-1)^{-1}}\| \|u_3|L_r\| \\ &+ \|V_\gamma * u_1u_2|L_{(\gamma/n+1/r+1/r-1)^{-1}}\| \|u_3|H_q^s\|) \\ \leq &c(\|\omega^s(V_\gamma * u_1u_2)|L_{(\gamma/n+1/q+1/r-1)^{-1}}\| \|u_3|L_r\| \\ &+ \|V_\gamma * u_1u_2|L_{(\gamma/n+1/r+1/r-1)^{-1}}\| \|u_3|H_q^s\|) \\ \leq &c(\|V_\gamma * \omega^s(u_1u_2)|L_{(\gamma/n+1/q+1/r-1)^{-1}}\| \|u_3|L_r\| \\ &+ \|V_\gamma * u_1u_2|L_{(\gamma/n+1/r+1/r-1)^{-1}}\| \|u_3|H_q^s\|) \\ \leq &c(\|u_1u_2|H^s_{(1/q+1/r)^{-1}}\| \|u_3|L_r\| \\ &+ \|u_1u_2|L_{(1/r+1/r)^{-1}}\| \|u_3|H_q^s\|) \\ \leq &c(\|u_1|H_q^s\| \|u_2|L_r\| \|u_3|L_r\| + \|u_1|L_r\| \|u_2|H_q^s\| \|u_3|L_r\| \\ &+ \|u_1|L_r\| \|u_2|L_r\| \|u_3|H_q^s\|) \ .\end{aligned}$$

Hence the proof is complete. □

By the above estimate, we get three main estimates for the nonlinearity.

Lemma 2.3. *(1)For $n \geq 1$, $s \geq 1$, $0 < \gamma \leq 2s+1$ and $\gamma < n$ there exists some constant $c_1 = c_1(n, s, \gamma) > 0$ such that*

$$\|(V_\gamma * u_1 u_2) u_3 | H^{s-1}\| \leq c_1 \prod_{i=1}^{3} \|u_i | H^s\|^3 . \tag{2.4}$$

(2)For $n \geq 2$, $s \geq 1$, $3/2 < \gamma \leq 2s+1$ and $\gamma < n$, there exist ε, ε is sufficiently small, and some positive constants c_2, c_3 depending only on n, s, γ and ε such that

$$\|(V_\gamma * u^2) u | H^{s-1}\| \leq c_2 \|u | H^s\| \|u | H_{q_\gamma}^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 \tag{2.5}$$

and

$$\|(V_\gamma * u^2) u | H_{p_\gamma}^{s-1/2+\varepsilon}\| \leq c_3 \|u | H^s\| \|u | H_{q_\gamma}^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 , \tag{2.6}$$

where

$$\frac{1}{p_\gamma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{and} \quad \frac{1}{q_\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{\varepsilon}{n} .$$

Proof. It suffices to show (2.6) since the proof of the others is analogous. For $n \geq 2$, $s \geq 1$, $3/2 < \gamma \leq 2s+1$ and $\gamma < n$, we put

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 3/2 - 3\varepsilon}{2s - 1/2 - 3\varepsilon} \cdot \frac{1/2 - \varepsilon}{n} , \quad \frac{1}{\tilde{r_3}} = \frac{1}{q_\gamma} - \frac{\gamma - 3/2 - 3\varepsilon}{2s - 1/2 - 3\varepsilon} \cdot \frac{s - 1/2 - \varepsilon}{n} .$$

Then

$$1 < p_\gamma < 2 < \tilde{r_3} < \infty , \tag{2.7}$$

$$\tfrac{1}{2} \geq \tfrac{1}{r_3} \geq \tfrac{1}{2} - \tfrac{1/2-\varepsilon}{n} , \quad \tfrac{1}{q_\gamma} \geq \tfrac{1}{\tilde{r_3}} \geq \tfrac{1}{q_\gamma} - \tfrac{s-1/2-\varepsilon}{n}, \tag{2.8}$$

$$1 + \tfrac{1}{p_\gamma} = \tfrac{\gamma}{n} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\tilde{r_3}} . \tag{2.9}$$

By (2.7) and (2.9), (2.3) holds with $p = p_\gamma$, $q = 2$ and $r = \tilde{r_3}$, that is,

$$\|(V_\gamma * u^2) u | H_{p_\gamma}^{s-1/2+\varepsilon}\| \leq c \|u | H_{r_3}^{s-1/2+\varepsilon}\| \|u | L_{\tilde{r_3}}\|^2 .$$

By (2.8),

$$H^s \hookrightarrow H_{r_3}^{s-1/2+\varepsilon} \text{ and } H_{q_\gamma}^{s-1/2-\varepsilon} \hookrightarrow L_{\tilde{r_3}} ,$$

thus (2.6) holds. Hence the proof is complete. □

Remark 2.4. In part (2) of Lemma 2.3, if we show only the estimates (2.5), we can weaken the asumption $3/2 < \gamma \leq 2s+1$ to $1 < \gamma \leq 2s+1$.

The following lemma is a preparation for the proof of a priori estimates:

Lemma 2.5. *($L_p - L_q$ estimates for the homogeneous Klein-Gordon equation). There exists some constant $c = c(n,p) > 0$ such that*

$$\| \cos t\omega | H_p^{S_p} \to L_q \| \leq c(1+t)^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}} \tag{2.10}$$

and

$$\| \frac{\sin t\omega}{\omega} | H_p^{S_p - 1} \to L_q \| \leq c(1+t)^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}} , \tag{2.11}$$

where $n \geq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p \leq 2$ *and*

$$S_p = \frac{n(2-p)}{p} \ .$$

Proof. The following inequality is well-known (see [1]):

$$\| \exp(it\omega) | H_p^{(n+2)/2-(n+2)/q} \to L_q \| \leq ct^{-n/2+n/q}.$$

On the other hand, by the Sobolev inequality, we have

$$\begin{aligned} \| \exp(it\omega) f | L_q \| &\leq c \| \exp(it\omega) f | H^{n(2-p)/(2p)} \| \\ &\leq c \| f | H^{n(2-p)/(2p)} \| \\ &\leq c \| f | H_p^{s_p} \| \ . \end{aligned}$$

Hence

$$\| \exp(it\omega) | H_p^{S_p} \to L_q \| \leq c.$$

Since $S_p = n(2-p)/p \geq (n+2)/2 - (n+2)/q$ with $n \geq 2$, the proof is complete. □

The following proposition is the local existence theorem for (1.3).

Lemma 2.6. *For* $n \geq 1$, $s \geq 1$, $3/2 < \gamma \leq 2s+1$ *and* $\gamma < n$, *there exist some* $T > 0$ *and some* $\delta_1 = \delta_1(n, s, \gamma, T) > 0$ *such that if*

$$\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\| \leq \delta_1 \ ,$$

then there exists uniquely $u = u(t,x)$ *with following properties:*

$$u \in C([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}) \ , \tag{2.12}$$

$$u(t) = u_0(t) + \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau)) d\tau \quad (0 \leq t \leq T) \ , \tag{2.13}$$

$$\sup_{t \in [0,T]} (\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\|) \leq 3\delta_1 \ . \tag{2.14}$$

Proof. The lemma follows immediately from (2.4). Hence, we omit the details. □

3. Proof of Theorem

In this section, assume that $u = u(t,x)$ satisfies (2.12), (2.13) and (2.14). Suppose $n \geq 2$, $s \geq 1$, $3/2 < \gamma \leq 2s+1$ and $\gamma < n$. Put

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{n} \quad and \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{\varepsilon}{n},$$

where ε is sufficiently small number which satisfies Lemma 2.3,(2). We set $-a = -n/2 + n/q = -(\varepsilon + 1/2)$ and

$$M(\tilde{T}) \equiv \sup_{t \in [0,\tilde{T}]} (1+t)^a \|u(t)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\| \quad (0 \leq \tilde{T} \leq T) \ . \tag{3.1}$$

Then $M(\tilde{T})$ is continuous with respect to $\tilde{T}$ since $H^s \hookrightarrow H_q^{s-1/2-\varepsilon}$ for sufficiently small ε.

To show the global existence, we give three propositions.

Proposition 3.1. *There exists some* $c_4 = c_4(n, s, \gamma, \delta) > 0$ *such that*

$$\begin{aligned}&\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\| \\ &\qquad \le c_4(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|)\exp(c_4 M^2(\tilde{T})) \quad (0 \le t \le \tilde{T}) \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Proof. By the proof of Lemma 2.6 and (2.5), we have

$$\begin{aligned}&\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\| \\ &\qquad \le 2(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|) + 2\int_0^t \|F_\gamma(u(\tau))|H^{s-1}\| d\tau \\ &\qquad \le 2(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|) + 2\int_0^t \|u(\tau)|H^s\| \|u(\tau)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 d\tau \,. \end{aligned}$$

Since $a > 1/2$, by using Gronwall's inequality,

$$\begin{aligned}&\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\| \\ &\qquad \le c(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|)\exp\Big\{c\int_0^t \|u(\tau)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 d\tau\Big\} \\ &\qquad \le c(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|)\exp\Big\{cM^2(\tilde{T})\int_0^t (1+t)^{-2a} d\tau\Big\} \\ &\qquad \le c_4(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|)\exp\Big(c_4 M^2(\tilde{T})\Big) \,. \end{aligned}$$

The proof is complete. □

Proposition 3.2. *There exist some* $\eta = \eta(n, s, \gamma) > 0$ *and* $L = L(n, s, \gamma, \eta) > 0$ *such that if*

$$\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\| + \|f|H_p^{s+1/2+\varepsilon}\| + \|g|H_p^{s-1/2+\varepsilon}\| \le \eta \,,$$

then

$$M(\tilde{T}) \le L \quad (0 \le t \le \tilde{T}) \,, \tag{3.3}$$

where L *is independent of* T .

Proof. By (2.10), (2.11) and (2.6), we have

$$\begin{aligned}&\|u(t)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\| \\ &\le \|u_0(t)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\| + \int_0^t \Big\|\frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\Big\| d\tau \\ &\le c(1+t)^{-a}(\|f|H_p^{s+1/2+\varepsilon}\| + \|g|H_p^{s-1/2+\varepsilon}\|) \\ &\quad + cc_3\int_0^t (1+t-\tau)^{-a}(\|u(\tau)|H^s\| + \|\partial_t u(\tau)|H^{s-1}\|)\|u(\tau)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 d\tau \,. \end{aligned}$$

From (3.2),

$$\begin{aligned}&(\|u(\tau)|H^s\| + \|\partial_t u(\tau)|H^{s-1}\|)\|u(\tau)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 \\ &\qquad \le \; c_4(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|)\exp\Big(c_4 M^2(\tilde{T})\Big)(1+\tau)^{-2a} M^2(\tilde{T}) \,. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-a}(1+\tau)^{-2a} d\tau \le c(1+t)^{-a} \,,$$

thus

$$M(\tilde{T}) \le c_5\eta + c_5\eta M^2(\tilde{T}) \exp\Big(c_5 M^2(\tilde{T})\Big) .$$

Put $\varphi(x) = c_5\eta(1 + x^2 \exp(c_5 x^2)) - x$, then there exists a positive number L such that $\varphi(L) = 0$. We remark that $M(0) < L$ for some sufficiently large number c_5. Since M is continuous with respect to $\tilde{T}$, $M(\tilde{T})$ can not be greater than L. Hence the proof is complete. □

Lemma 3.3. *(A priori estimate). There exists some $\eta = \eta(n, s, \gamma) > 0$ such that if*

$$\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\| + \|f|H_p^{s+1/2+\varepsilon}\| + \|g|H_p^{s-1/2+\varepsilon}\| \le \ \eta,$$

then there exists some $c_0 = c_0(n, s, \gamma, \eta) > 0$ such that

$$\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\| \le c_0\eta \quad (0 \le t \le T), \tag{3.4}$$

where c_0 is independent of T .

Proof. In view of (3.2) and (3.3),

$$\begin{aligned}\|u(t)|H^s\| + \|\partial_t u(t)|H^{s-1}\| &\le c_4(\|f|H^s\| + \|g|H^{s-1}\|) \exp\Big(c_4 M^2(T)\Big) \\ &\le c_4\eta \exp(c_4 L^2) \\ &\le c_0\eta \ .\end{aligned}$$

The proof is complete. □

Proof of Theorem. Using Lemma 2.6 and Proposition 3.3, we can easily prove the global existence.

There remains the proof of the asymptotic behavior. By (2.5), (1.6), and (3.3), we have

$$\begin{aligned}\|F_\gamma u(\tau)|H^{s-1}\| &\le c\|u(\tau)|H^s\|\|u(\tau)|H_q^{s-1/2-\varepsilon}\|^2 \\ &\le cc_\gamma\delta_0(1+\tau)^{-2a}L^2.\end{aligned}$$

Since $-2a < -1$, $F_\gamma u(\tau)$ is Bochner-integrable over $(0, \infty)$. Thus

$$\int_0^\infty \frac{\sin(-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau \in H^s \ ,$$

$$\int_0^\infty \cos(-\tau)\omega F_\gamma(u(\tau))d\tau \in H^{s-1} \ .$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}&\cos t\omega \int_0^\infty \frac{\sin(-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau + \frac{\sin t\omega}{\omega} \int_0^\infty \cos(-\tau)\omega F_\gamma(u(\tau))d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{\cos t\omega \sin(-\tau)\omega + \sin t\omega \cos(-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau \ .\end{aligned}$$

Thus if we put

$$\tilde{f} = f + \int_0^\infty \frac{\sin(-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau \quad \text{and}$$
$$\tilde{g} = g + \int_0^\infty \cos(-\tau)\omega F_\gamma(u(\tau))d\tau \ ,$$

then

$$\begin{aligned}\|u(t) - \tilde{u_0}(t)|H^s\| &\le \| \int_t^\infty \frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} F_\gamma(u(\tau))d\tau |H^s\| \\ &\le c_\gamma \delta_0 L^2 c \int_t^\infty (1+\tau)^{-2a} d\tau \to 0 \ \ (t \to \infty) \ .\end{aligned}$$

Similarly,

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u_0}(t)|H^{s-1}\| \to 0 \ \ (t \to \infty).$$

With the help of the energy equality of the homogeneous Klein-Gordon equation, it is easy to show the uniqueness. We have thus proved the theorem.

REFERENCES

[1] P. Brenner, *On scattering and everywhere defined scattering operators for nonliner Klein-Gordon equations*, J. Differential Equations 56 (1985), 310-344.

[2] K. Hidano, *Small data scattering and blow-up for a wave equation with a cubic convolution*, Funkcialaj Ekvacioj 43 (2000), 559-588.

[3] S. Klainerman and G.Ponce, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 133-141.

[4] S. Machihara, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Small global solutions and the nonrelativistic limit for the nonlinear Dirac equation*, Rev. Mat. Iberoamericana 19 (2002), 179-194.

[5] G. Menzala and W. Strauss, *On a wave equation with a cubic convolution*, J. Differential Equations 43 (1982), 93-105.

[6] K. Mochizuki, *On small data scattering with cubic convolution nonlinearity*, J. Math. Soc. Japan 41 (1989), 143-160.

[7] K. Mochizuki and T. Motai, *On small data scattering for some nonlinear wave equations, in* "Patterns and Waves -qualitative analysis of nonlinear differential equations -," pp.543-560, Stud. Math. Appl., 18, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[8] T. Motai, *On the Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation with a cubic convolution*, Tsukuba J. Math. 12 (1988), 353-369.

[9] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential and Integral Equations 4 (1991), 527-542.

[10] W. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy: sequel*, J. Funct. Anal. 41 (1981), 110-113.

[11] K. Tsutaya, *Global existence and blow-up for a wave equation with a potential and a cubic convolution*, to appear.

[12] K. Tsutaya and Y. Tsutsumi, private communication.

Schrödinger 方程式の連立系の解の漸近挙動について[1]

中村能久 (熊本大学)

1. Introduction

本稿では，次の非線形シュレディンガー方程式の連立系の時間大域解の存在とその漸近挙動に関して考える.

$$\text{(CNLS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\partial^2 u = F_1(u,v) \ , \\ i\partial_t v + \dfrac{1}{2m}\partial^2 v = F_2(u,v) \ , \end{cases}$$

ここで $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, u, v は未知の複素数値関数, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial = \partial_x = \partial/\partial x$, m は正の定数である．また非線形項は u, $\bar{u}$, v, $\bar{v}$ に関する 3 次の項からなる多項式であり，具体的には次で与えられる:

$$F_j(u_1,u_2) = g_j(u_1,u_2)u_j + N_j(u_1,u_2),$$

ここで

$$\begin{aligned} g_j(u_1,u_2) =& \mu_{j,1}|u_1|^2 + \mu_{j,2}|u_2|^2 \\ &+ \delta_{1,m}(\mu_{j,3}(u_1\bar{u}_2 + \bar{u}_1 u_2) + i\mu_{j,4}(u_1\bar{u}_2 - \bar{u}_1 u_2)), \\ N_1(u_1,u_2) =& \sum_{\alpha;|\alpha|=3,(1.1),(1.3)} \lambda_{j,\alpha} u_1^{\alpha_1}\bar{u}_1^{\alpha_2}u_2^{\alpha_3}\bar{u}_2^{\alpha_4}, \\ N_2(u_1,u_2) =& \sum_{\alpha;|\alpha|=3,(1.2),(1.3)} \lambda_{j,\alpha} u_1^{\alpha_1}\bar{u}_1^{\alpha_2}u_2^{\alpha_3}\bar{u}_2^{\alpha_4}, \end{aligned}$$

である．$j = 1,2$, $k = 1,2,3,4$, 多重指数 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ に対して $\mu_{j,k} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{j,\alpha} \in \mathbb{C}$. ただし α は次の条件を満たす:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4)m \neq 1, \tag{1.1}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4)m \neq m, \tag{1.2}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4)m \neq 0. \tag{1.3}$$

また $p = q$ ならば $\delta_{p,q} = 1$, $p \neq q$ ならば $\delta_{p,q} = 0$ である．連立非線形シュレディンガー方程式 (CNLS) は光ファイバー中を伝播する 2 つのモードの波を描写し，ある特別な非線形項に対しては完全可積分である事が知られている ([3, 6] 等を参照). 今回我々が考える解の漸近挙動の問題は散乱問題と密接に関連している．散乱問題とは時刻無限大において何らかのノルムの意味で与えられた自由シュレディンガー方程式の解に収束する摂動付きシュレディンガー方程式の解を構成する事 (終値問題), あるいは与えられた初期値に対して存在する摂動付き方程式の解が収束する自由シュレディンガー方程式の解の存在を示す事 (初期

[1]本稿は下村明洋氏 (学習院大学), 利根川聡氏 (日本大学) との共同研究に基づく.

値問題) である. 本稿では終値問題を取り扱う. 1 次元において 3 次の非線形項を持つ単独のシュレディンガー方程式 (SNLS) に対しては次のような結果が知られている. 非線形項がゲージ不変性を持つ場合, すなわち非線形項 F が $F(ze^{i\theta}) = F(z)e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$, を満足する場合は (SNLS) ば漸近自由にならない, すなわち自由解に収束する (SNLS) の解は存在しない事が知られている ([1, 8] 参照). この場合は長距離散乱理論により修正波動作用素を構成する事が可能である ([5] 参照). これに対し非線形項がゲージ不変性を持たない場合は漸近自由解が存在する ([4] 参照). また非線形項がゲージ不変性のある項とない項との和で表されている場合は, 修正がゲージ不変性のある非線形項のみに依存して決まるという事実も知られている ([2, 7] 参照). 今回我々は連立非線形シュレディンガー方程式を考える. ラプラシアンの係数が異なる場合, ゲージ不変性を持つ非線形項のいくつかに対して漸近自由解が構成できる事を証明する.

定理を述べるにあたり, 関数空間を導入する. $1 \le p \le \infty$, $m, s \in \mathbb{R}$ に対して重み付きソボレフ空間を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
H^{s,m,p} &= \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \|f\|_{s,m,p} = \|\langle x\rangle^m \langle i\partial\rangle^s f\|_{L^p} < \infty\}, \\
H^{s,m} &= H^{s,m,2}, \ \text{ノルム}: \|f\|_{H^{s,m}} = \|f\|_{s,m,2}, \\
H^{s} &= H^{s,0,2}, \ \text{ノルム}: \|f\|_{H^{s}} = \|f\|_{s,0,2}, \\
\dot{H}^s &= \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \|f\|_{\dot{H}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2} < \infty\},
\end{aligned}
$$

ここで $\langle x\rangle = (1+x^2)^{1/2}$ である. また区間 $I = [0,T]$ 上でバナッハ空間 X に値をとる強連続関数の空間を $C(I;X)$, L^r 関数の空間を $L^r(I_T, X)$ と記す. この時ノルムは

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(I,X)} &= \left(\int_I \|f(t,\cdot)\|_X^r \, dt\right)^{1/r}, \quad 1 \le r < \infty, \\
\|f\|_{L^\infty(I,X)} &= \operatorname{ess\,sup}_{t\in I} \|f(t,\cdot)\|_X
\end{aligned}
$$

である. 次に自由シュレディンガー方程式の基本解を導入する. $U_k(t) = \exp(it\partial^2/k)$, $k \neq 0$, とおくと

$$
\begin{aligned}
U_k(t)f(x) &= \left(\frac{k}{2\pi i t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\frac{k(x-y)^2}{2t}\right) f(y)dy \\
&= (M_k(t)D_k(t)\mathcal{F}M_k(t)f)(x),
\end{aligned}
$$

と書くことが出来る. ここで

$$
(M_k(t)\psi)(x) = \exp\left(\frac{ikx^2}{2t}\right)\psi(x),
$$

$$
(D_k(t)\psi)(x) = \left(\frac{k}{it}\right)^{1/2} \psi\left(\frac{kx}{t}\right),
$$

$$(\mathcal{F}\psi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int \exp(-ixy)\psi(y)dy,$$

で, $k=1$ の場合は $U_1(t) = U(t)$ の様に略記する. $\mathcal{L}_k = i\partial_t + (1/2k)\partial^2$, $k \neq 0$, とおくと, 次の交換関係が成り立つ:

$$\mathcal{L}_k M_k(t) D_l(t) = M_k(t) D_l(t)(i\partial_t + \frac{l^2}{2kt^2}\partial^2), \tag{1.4}$$

ここで $k, l \neq 0$. 主定理を述べる.

Theorem . *Let $u_+, v_+ \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-b}$, where $1/2 < b < 3/2$, and $\|u_+\|_{H^{0,2}} + \|u_+\|_{\dot{H}^{-b}} + \|v_+\|_{H^{0,2}} + \|v_+\|_{\dot{H}^{-b}}$ be sufficiently small. In addition, assume $\mu_{j,3} = \mu_{j,4} = 0$ for $j = 1, 2$ or $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ for $k = 1, 2, 3, 4$ for $g_j(u_1, u_2)$ when $m = 1$. Then the system* (CNLS) *has a unique solution (u, v) satisfying*

$$(u, v) \in C([0, \infty); L^2) \oplus C([0, \infty); L^2),$$

$$\sup_{t\geq 1}(t^{b/2}\|(u(t), v(t)) - (u_a(t), v_a(t))\|_{L^2} + \|(u, v) - (u_a, v_a)\|_{L^4([t,\infty);L^\infty)}) < \infty,$$

where

$$u_a(t, x) = (\frac{1}{it})^{1/2}\hat{u}_+(\frac{x}{t})e^{\frac{ix^2}{2t} - iS_1(t, \frac{x}{t})},$$
$$v_a(t, x) = (\frac{m}{it})^{1/2}\hat{v}_+(\frac{mx}{t})e^{\frac{imx^2}{2t} - iS_2(t, \frac{mx}{t})},$$
$$S_1(t, \xi) = g_1(\hat{u}_+(\xi), \hat{v}_+(m\xi)) \log t,$$
$$S_2(t, \xi) = g_2(\hat{u}_+(\frac{\xi}{m}), \hat{v}_+(\xi)) \log t.$$

Furthermore the modified wave operator

$$W_+ : (u_+, v_+) \mapsto (u(0), v(0))$$

is well-defined.
A similar result holds for negative time.

注意 . 我々の方法では m の値に応じて(修正)波動作用素が構成できない非線形項が存在する.

- $m = 1$ ならば, F_1 に $|u|^2 v$ または $\bar{u}v^2$ が, または F_2 に $|v|^2 u$ または $u^2\bar{v}$ が含まれる時.
- $m = 2$ ならば, F_1 または F_2 に $u^2\bar{v}$ または $\bar{u}^2 v$ が含まれる時.
- $m = 1/2$ ならば, F_1 または F_2 に $u\bar{v}^2$ または $\bar{u}v^2$ が含まれる時.
- $m = 3$ ならば, F_1 に $\bar{u}^2 v$ が, または F_2 に u^3 が含まれる時.
- $m = 1/3$ ならば, F_1 に v^3 が, または F_2 に $u\bar{v}^2$ が含まれる時.

2. 定理の証明

我々は (CNLS) と同値な積分方程式を解く．このとき次の良く知られている補題を適用する．積分作用素 G_k, $k \neq 0$, を次で定義する:

$$(G_k f)(t) = \int_t^\infty U_k(t-s) f(s)\, ds, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Lemma 1 ([9]). *Assume that the components (q, r) and $(\tilde{q}', \tilde{r}')$ satisfying $0 < 2/r = n(1/2 - 1/q) < 1$ and $1 < 2/\tilde{r}' = 1 + n(1/2 - 1/\tilde{q}') < 2$, respectively. Then for any (possibly unbounded) interval I, we have*

$$\|G_k f\|_{L^r(I; L^q)} \leq C \|f\|_{L^{\tilde{r}'}(I; L^{\tilde{q}'})},$$

with a constant C independent of I.

漸近項とゲージ不変性のある非線形項に関する評価は,

$$u_a(t) = M(t) D(t) (\hat{u}_+ e^{-iS_1(t,\cdot)}),$$
$$v_a(t) = M_m(t) D_m(t) (\hat{u}_+ e^{-iS_2(t,\cdot)})$$

と表す事が出来るので, (1.4) に注意すると次の補題が成立する．

Lemma 2. *Let $\varepsilon = \|u_+\|_{H^{0,2}} + \|u_+\|_{\dot{H}^{-b}} + \|v_+\|_{H^{0,2}} + \|v_+\|_{\dot{H}^{-b}}$. Then for some constant $C > 0$ and $t \geq 1$, we have*

$$\|u_a(t)\|_{L^2_x} + \|v_a(t)\|_{L^2_x} \leq C\varepsilon,$$
$$\|u_a(t)\|_{L^\infty_x} + \|v_a(t)\|_{L^\infty_x} \leq C\varepsilon(1+t)^{-1/2},$$
$$\|GR_1(u_a, v_a)(t)\|_{L^2_x} + \|GR_1(u_a, v_a)\|_{L^4([t,\infty); L^\infty)}$$
$$+ \|G_m R_2(u_a, v_a)(t)\|_{L^2_x} + \|G_m R_2(u_a, v_a)\|_{L^4([t,\infty); L^\infty)} \leq C\varepsilon(1+t)^{-d},$$

where $1/4 < d < 1$, $R_1(u_a, v_a) = \mathcal{L} u_a - g_1(u_a, v_a) u_a$ and $R_2(u_a, v_a) = \mathcal{L}_m v_a - g_2(u_a, v_a) v_a$.

ゲージ不変性のない非線形項 N_j, $j = 1, 2$ を評価する．N_j に含まれる項は全て次の形の漸近状態を持つ事に注意する．

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_\omega(t,x) =& c t^{-3/2} \Big(\prod_{j=1}^3 \hat{\psi}_j\Big(\frac{k_j x}{t}\Big)\Big) \\ & \times \exp\Big(\frac{i\omega x^2}{2t} - iV\Big(\frac{\omega x}{t}\Big) \log t\Big), \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで $\omega = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) m$ で, N_1 に含まれる $\widetilde{N}_\omega$ に対しては $\omega \neq 0, 1$, N_2 に含まれる $\widetilde{N}_\omega$ に対しては $\omega \neq 0, m$ である．また $\{u_+, \bar{u}_+, v_+, \bar{v}_+\} \ni \psi_j \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-b}$, $j = 1, 2, 3$, で, $V(x)$ は $\hat{u}_+$, $\hat{\bar{u}}_+$, $\hat{v}_+$, $\hat{\bar{v}}_+$ に関する 2 次の項からなる多項式で, かつ実数値を取る．$V(\omega x/t) =$

$\prod_{j=4}^5 \hat{\psi}_j(k_jx/t)$, $\psi_4, \psi_5 \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-b}$, とおいて評価すれば十分である事に注意する.

Lemma 3. *Let $k > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\omega \neq 0$ and $\omega \neq k$, $k_j > 0$ for $j = 1, \ldots, 5$, and $1/2 < \delta < 3/2$. Asuume that $\psi_j \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-\delta}$ for $j = 1, \ldots, 5$. Let $\widetilde{N}_a$ be defined by* (2.1)*. Then there exists a constant $C > 0$ such that for $t \geq 1$,*

$$\|G_k\widetilde{N}_\omega(t)\|_{L^2_x} + \|G_k\widetilde{N}_\omega\|_{L^4_\tau(t,\infty;L^\infty_x)} \leq Ct^{-\delta/2}\sum_{j=1}^5 \|\psi_j\|^5_{H^{0,2}\cap\dot{H}^{-\delta}}.$$

証明の概略 . (2.1) より次が得られる:

$$\widetilde{N}_\omega(t,x) = \frac{c}{t}(M_\omega(t)D_\omega(t)(fe^{-iV(\cdot)\log t})(x),\ f(x) = \prod_{j=1}^3 \hat{\psi}_j(\frac{k_j}{\omega}x).$$

よって

$$\begin{aligned}(G_k\tilde{N}_\omega)(t) &= \int_t^\infty \widetilde{N}_\omega(\tau)d\tau - \frac{i}{2k}\int_t^\infty U(t-s)\Big(\int_s^\infty \partial_x^2\widetilde{N}_\omega(\tau)d\tau\Big)\\ &= \int_t^\infty \widetilde{N}_\omega(\tau)d\tau + \frac{\omega}{k}G_k\tilde{N}_\omega(t)\\ &\quad + \frac{i\omega}{k}\int_t^\infty U(t-s)\Big(\int_s^\infty P(\tau)d\tau\Big)ds\\ &\quad - \frac{i\omega}{k}\int_t^\infty U(t-s)\Big(\int_s^\infty r(\tau)d\tau\Big)ds,\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}(G_k\tilde{N}_\omega)(t) =& \frac{\omega}{k-\omega}\int_t^\infty \widetilde{N}_\omega(\tau)d\tau + \frac{i\omega}{k-\omega}\int_t^\infty U(t-s)\Big(\int_s^\infty P(\tau)d\tau\Big)ds\\ &- \frac{i\omega}{k-\omega}\int_t^\infty U(t-s)\Big(\int_s^\infty r(\tau)d\tau\Big)ds,\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}P(t) &= -\frac{i}{t}\widetilde{N}_\omega(t) + \frac{1}{t}\widetilde{N}_\omega(t)V\left(\frac{\omega x}{t}\right),\\ r(t) &= \frac{c\omega}{2t^3}M_\omega(t)D_\omega(t)(\partial^2(e^{-iV(\cdot)\log t}f)).\end{aligned}$$

よって補題 1 より

$$\|\int_t^\infty \widetilde{N}_\omega(\tau)d\tau\|_{L^2_x},\ \|\int_t^\infty \widetilde{N}_\omega(\tau)d\tau\|_{L^4((t,\infty);L^\infty_x)}$$

を評価すれば十分である. 部分積分により, 次の評価が得られる:

(2.2)

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_t^\infty \widetilde{N}_\omega(s)\,ds\right| \\
=&\left|\int_t^\infty \frac{c}{s^{3/2}} f\left(\frac{\omega x}{s}\right) e^{-iV(\omega x/s)\log s} \frac{1}{1-(i\omega|x|^2/2s)} \partial_s(se^{i\omega|x|^2/2s})\,ds\right| \\
\leq&\left|\frac{c}{t^{1/2}} f\left(\frac{\omega x}{t}\right) \frac{1}{1-(i\omega|x|^2/2t)}\right| \\
&+\left|\int_t^\infty \partial_s\left(\frac{c}{s^{3/2}} f\left(\frac{\omega x}{s}\right) e^{-iV(\omega x/s)\log s} \frac{1}{1-(i\omega|x|^2/2s)}\right) se^{i\omega|x|^2/2s}\,ds\right| \\
\leq& C_1B_1(t)+C_2B_2(t),
\end{aligned}
$$

ここで

$$B_1(t)=\frac{1}{t^{1/2}}\left|f\left(\frac{\omega x}{t}\right)\right|\frac{1}{1+(|\omega||x|^2/t)},$$

$$
\begin{aligned}
B_2(t)=\int_t^\infty &\Big(\frac{1}{s^{3/2}}\frac{1}{1+(|\omega||x|^2/s)}\Big(\left|f\left(\frac{\omega x}{s}\right)\right| \\
&+\frac{|\omega||x|}{s}\left|(\partial f)\left(\frac{\omega x}{s}\right)\right|+\frac{|\omega||x|}{s}\left|f\left(\frac{\omega x}{s}\right)(\partial V)\left(\frac{\omega x}{s}\right)\right|\log s \\
&+|f(\frac{\omega x}{s})V(\frac{\omega x}{s})|+\frac{|\omega||x|^2}{s^2}|f(\frac{\omega x}{s})|\frac{1}{1+(|\omega||x|^2/s)}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

で $C_1, C_2>0$ は定数である. f の定義を用いると, $1/2<\delta<2$ ならば $t\geq 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|B_1(t)\|_{L_x^2}=&Ct^{-1/2-\delta/2}\left\|\left(\frac{|\omega||\cdot|}{t}\right)^{-\delta}\hat{\psi}_1\left(\frac{k_1\cdot}{t}\right)\hat{\psi}_2\left(\frac{k_2\cdot}{t}\right)\hat{\psi}_3\left(\frac{k_3\cdot}{t}\right)\frac{(\sqrt{|\omega|/t}|x|)^\delta}{1+(|a||x|^2/t)}\right\|_{L^2} \\
\leq&Ct^{-\delta/2}\prod_{j=1}^3\|\psi_j\|^3_{H^{0,2}\cap\dot{H}^{-\delta}}.
\end{aligned}
$$

同様にして, $t\geq 1$ に対して

$$\|B_1(t)\|_{L^4((t,\infty);L_x^\infty)}\leq Ct^{-\delta/2}\prod_{j=1}^3\|\psi_j\|^3_{H^{0,2}\cap\dot{H}^{-\delta}},$$

$$\|B_2(t)\|_{L_x^2},\ \|B_2(t)\|_{L^4((t,\infty);L_x^\infty)}\leq Ct^{-\delta/2}\prod_{j=1}^5\|\psi_j\|^5_{H^{0,2}\cap\dot{H}^{-\delta}},$$

が得られる.

これらの補題を用いて, 定理を証明する.

定理の証明の概略． (CNLS) は次のように変形できる:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}(u-u_a) = F_1(u,v) - F_1(u_a,v_a) + N_1(u_a,v_a) - R_1, \\ \mathcal{L}_m(v-v_a) = F_2(u,v) - F_2(u_a,v_a) + N_2(u_a,v_a) - R_2, \end{cases}$$

ここで R_1 と R_2 は補題 2 で定義されたものである. $w = u-u_a$, $z = v-v_a$ とおくと (2.3) は次の積分方程式と同値になる:

$$\begin{cases} w(t) = iG(F_1(w+u_a, z+v_a) - F_1(u_a,v_a) + N_1(u_a,v_a) - R_1)(t), \\ z(t) = iG_m(F_2(w+u_a, z+v_a) - F_2(u_a,v_a) + N_1(u_a,v_a) - R_1)(t). \end{cases}$$

ここで次の関数空間を導入する:

$$X_T = \{(w,z) \in C([0,\infty); L^2) \oplus C([0,\infty); L^2) \quad \|(w,z)\|_{X_T} < \infty\},$$
$$B_T(\rho) = \{(w,z) \in X_T;\ \|(w,z)\|_{X_T} \le \rho\},$$

また

$$\|(w,z)\|_{X_T} = \sup_{t \ge T} (1+t)^d (\|(w(t),z(t))\|_{L^2} + \|(w,z)\|_{L^4((t,\infty);L^\infty_x)}),$$

ここで $T > 0$, $\rho > 0$ かつ $1/4 < d < 1$ である. F_j, $j = 1,2$, がリプシッツ連続である事と上の 3 つの補題より,

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \Phi[w](t) = iG(F_1(w+u_a, z+v_a) - F_1(u_a,v_a) \\ \qquad\qquad + N_1(u_a,v_a) - R_1)(t), \\ \Psi[z](t) = iG_m(F_2(w+u_a, z+v_a) - F_2(u_a,v_a) \\ \qquad\qquad + N_1(u_a,v_a) - R_1)(t) \end{cases}$$

で定義される積分作用素 (Φ, Ψ) は, 十分小さい $\rho > 0$, $d = b/2$, $1/2 < b < 3/2$ に対して, $B_0(\rho)$ 上の縮小写像となる. したがって (2.4) は $B_0(\rho)$ 中に一意の不動点 (w,z) を持つ. この (w,z) が X_0 で一意である事は容易に示す事が出来る. すなわちこの (w,z) が求める (CNLS) の解である.

REFERENCES

[1] J.E. BARAB, *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys., **25** (1984), 3270–3273.

[2] N. HAYASHI, P.I. NAUMKIN, A. SHIMOMURA AND S. TONEGAWA, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two space demension*, Electron. J. Differential Equations, **2004** (2004), No. 62, 1–16.

[3] Y. KAJINAGA, T. TSUCHIDA AND M. WADATI *Coupled nonlinear Schrödinger equations for two-component wave systems* J. Phys. Soc. Japan, **67** (1998), 1565–1568.

[4] K. MORIYAMA, S. TONEGAWA AND Y. TSUTSUMI, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equations with a nonlinearity of low degree in one or two space demension*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983–986.

[5] T. OZAWA, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space demension*, Comm. Math. Phys., **139** (1991), 479–493.

[6] R. RADHAKRISHNAN AND M. LAKSHMANAN *Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations* J. Phys. A, **28** (1995), 2683–2692.
[7] A. SHIMOMURA AND S. TONEGAWA, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one and two space demension*, Differential Integral Equations, **17** (2004), 127–150.
[8] Y. TSUTSUMI, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the nonlinear Schrödinger equations*, Doctoral Thesis, University of Tokyo (1985).
[9] K. YAJIMA, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415–426.

Maxwell-Schrödinger 方程式の定在波解の存在について

菊池弘明　　東北大学大学院理学研究科

1 Introduction

次の非線形楕円型方程式について考える.

$$(SP)\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + e\Phi u - |u|^{p-2}u + \omega u = 0, & in\ \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\Phi = 4\pi e u^2, & in\ \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで, $u, \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\hbar$, m, $e > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $2 < p < 6$ とする.
これは Maxwell-Schrödinger 方程式の定常問題である.
既に,Coclite[5] の結果によって, $4 \le p < 6$ の時は任意の $e, \omega > 0$ に対して (SP) の非自明な球対称解が $H^1 \times D^{1,2}$ において無限個存在する事が知られている.
ここで, $D^{1,2} := \overline{C_0^\infty}^{\|\cdot\|_{D^{1,2}}}$, $\|\cdot\|_{D^{1,2}} := (\int |\nabla \cdot|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ である.
本稿では, $2 < p < 4$ の時の, (SP) の解の存在, 非存在について考察する.
今回は次の結果を得た.

Theorem 1.1. 次が成り立つ.

(1) $2 < p < 6$ の時, ある e_0, $\omega_0 > 0$ が存在し, (SP) は球対称解 $(u, \Phi) \in H^1 \times D^{1,2}$ が存在する.

(2) $2 < p \le 3$ の時, ある e_1 十分大が存在し $e > e_1$ ならば, (SP) は非自明な解を持たない.

2 Variational Principal

簡単のため, $\hbar = m = 1$ とする.
(SP) は変分構造を持つ. つまり,

$$F(u,\phi) := \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} e\phi u^2 + \omega u^2 dx \\ - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx. \tag{2.1}$$

と定義すると, $F \in C^1(H^1 \times D^{1,2}, \mathbb{R})$ であり, (u, Φ) が (SP) の解である事は, (u, Φ) が F の臨界点である事と同値である.
F は u と ϕ を変数とする汎関数であるが, Poisson 方程式 $-\Delta\Phi = 4\pi e u^2$ に着目することにより, F を u のみを変数とする汎関数に変換する.

Lemma 2.1. 各 $u \in H^1$ に対し, $-\Delta\Phi = 4\pi e u^2$ の解が一意的に存在し, それを $\Phi_e[u]$ と書くと, $\Phi_e[u]$ は次を満たす.

(1) $\Phi_e[u] \geq 0$.

(2) $\Phi_e[tu] = t^2\Phi_e[u] \quad for\ t \in \mathbb{R}$.

(3) $\inf_{\phi\in D^{1,2}} \{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 dx - 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} u^2\phi dx\} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi_e[u]|^2 dx - 4\pi e \int_{\mathbb{R}} u^2\Phi_e[u] dx$.

次に, $J_e[u] := F(u, \Phi_e[u])$ とすると,

$$J_e[u] = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi_e[u]|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} e\Phi_e[u]u^2 + \omega u^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx.$$

$\Phi_e[u]$ は $-\Delta\Phi = 4\pi e u^2$ の解なので,

$$J_e[u] = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} e\Phi_e[u]u^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} e\Phi_e[u]u^2 + \omega u^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx.$$

よって,

$$J_e[u] = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} e\Phi_e[u]u^2 + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx. \tag{2.2}$$

となる. すると, 次の事が成り立つ.

Lemma 2.2. 次の $(a), (b)$ は同値となる.
(a) $(u, \Phi) \in H^1 \times D^{1,2}$ が F の臨界点.
(b) $u \in H^1$ が J の臨界点, かつ $\Phi = \Phi_e[u]$.

Proof. J の定義と $\Phi_e[u]$ は $-\Delta\Phi = 4\pi e u^2$ の一意的な解なので,

$$(b) \Leftrightarrow F'_u(u,\phi) + F'_\phi(u,\phi)\Phi'_e[u] = 0, \text{かつ } \phi = \Phi_e[u].$$
$$\Leftrightarrow F'_u(u,\phi) = 0,\ F'_\phi(u,\phi) = 0 \Leftrightarrow (a).$$

□

Lemma 2.2 より,(SP) の解の存在を示すには, J の臨界点を求めればよい. さらに次の事が成り立つ.

Lemma 2.3. $J|_{H^1_r}$ の任意の臨界点 $u \in H^1_r$ は, J の臨界点となる.

$4 \le p < 6$ の時は $J|_{H^1_r}$ に対する Palais-Smale 列が有界列であることが容易に分かる.
実際, $\{u_n\}$ を $J|_{H^1_r}$ に対する Palais-Smale 列, つまり,

$$|J(u_n)| \le M \quad (M > 0),\ J'(u_n) \to 0 \ in\ H^{-1},$$

とすると,

$$\begin{aligned} pM + \|u_n\| &\ge pJ(u_n) - \langle J'(u_n), u_n\rangle \\ &= \left(\frac{p}{4} - \frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + \left(\frac{p}{2} - 1\right)\omega \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{p}{4} - 1\right) e \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_e[u_n]|u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

となるので, $4 \le p < 6$ の時は,

$$\exists c > 0, \quad pM + \|u_n\| \ge c\|u_n\|^2 \ for\ all\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

(2.3) から $\{u_n\}$ が有界列であることが分かり, Benci & Fortunato[3] と同様の議論により, J が Palais-Smale 条件を満たし, genus を用いることで (SP) の解が無限個存在する事が分かる. しかし, $2 < p < 4$ の時には, (2.3) のような不等式を得る事は困難である. そこで, Berestycki & Lions[4] のアイデアを用いることにより, (SP) の解の存在を示す.

3 Proof of Theorem 1.1

proof of theorem 1.1(1).

$$T(w) := \frac{1}{4}\int |\nabla w|^2 dx + \int |w|^2 dx + \int \Phi[w]|w|^2 dx, \quad V(w) := \frac{1}{p}\int |w|^p dx,$$

とおき,

$$I := \inf\{T(w); w \in H^1, V(w) = 1\},$$

とすると, $I > 0$ である.
$\{u_n\} \subset H^1$ を I に対する最小化列とする. つまり,

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = I, \quad V(u_n) = 1.$$

u_n^* を u_n の対称減少再配分とすると,

$$u_n^* \in H_r^1, \quad V(u_n^*) = 1, \quad I \le T(u_n^*) \le T(u_n),$$

となるので, $\{u_n^*\}$ も I に対する最小化列になる.
$\{u_n^*\}$ を改めて, $\{u_n\}$ と書く.
$I > 0$ より $\{u_n\} \subset H_r^1$ は有界列であるから,

$$\exists u_0 \in H_r^1 \quad s.t. \quad u_n \rightharpoonup u_0 \quad in\ H_r^1 \quad \|u_0\|_{H^1} \le \liminf \|u_n\|_{H^1}.$$

また, $H_r^1 \hookrightarrow L^q$ compact for $2 < q < 6$ なので,

$$\|u_n\|_p \to \|u_0\|_p, \quad \int \Phi[u_n]|u_n|^2 dx \to \int \Phi[u_0]|u_0|^2.$$

が分かる. よって,

$$T(u_0) \le \liminf T(u_n) = I, \qquad V(u_0) = 1.$$

となり, I の定義から $T(u_0) = I$.

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R} : Lagrange\ multiplier \quad s.t. \quad T'(u_0) = \theta V'(u_0). \tag{3.1}$$

仮に, $\theta = 0$ とすると, $\langle T'(u_0), u_0\rangle = 0$ から, $u_0 = 0\ in\ H^1$ となり,
$V(u_0) = 1$ に矛盾.
よって, $\theta \neq 0$. $\theta < 0$ とすると, $V'(u_0) \neq 0$ より,

$$\exists\, w_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \ s.t. \ \ \langle V'(u_0), w_0\rangle > 0. \tag{3.2}$$

すると, $\epsilon > 0$ が十分小ならば,

$$V(u_0 + \epsilon w_0) \cong V(u_0) + \epsilon\langle V'(u_0), w_0\rangle, \tag{3.3}$$
$$T(u_0 + \epsilon w_0) \cong T(u_0) + \epsilon\langle T'(u_0), w_0\rangle.$$

(3.1) より,

$$T(u_0 + \epsilon w_0) \cong T(u_0) + \epsilon\theta\langle V'(u_0), w_0\rangle. \tag{3.4}$$

$v_0 = u_0 + \epsilon w$ とおけば, (3.2), (3.3), (3.4) より,

$$V(v_0) > V(u_0) = 1, \quad T(v_0) < T(u_0) = I. \tag{3.5}$$

$v_\sigma = \sigma v_0,\ \sigma > 0$ とおけば,

$$\exists \sigma_0 \in (0,1),\ s.t. \quad V(u_{\sigma_0}) = 1,\ T(u_{\sigma_0}) < I. \tag{3.6}$$

これは I の定義に矛盾. よって, $\theta > 0$.
$u_\theta(x) := u_0(x/\sqrt{\theta})$ とおけば, ある $\omega_0,\ e_0\ > 0$ が存在して, u_θ は次を満たす,

$$-\frac{1}{2}\Delta u + \omega_0 u + e_0\Phi[u] - |u|^{p-2}u = 0 \quad in\ \mathbb{R}^3. \tag{3.7}$$

□

proof of throrem 1.1(2). $\frac{dJ(u(\lambda x))}{d\lambda}|_{\lambda=1} > 0 \quad for\ all\ \ n \in \mathbb{N}$ を示せばよい.
実際, $2 < p < 3$ の時,

$$\begin{aligned}
\frac{dJ(u(\lambda x))}{d\lambda}|_{\lambda=1} &= \langle J'(u), u\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx + \omega\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2 dx + e\int_{\mathbb{R}^3}\Phi_e[u]|u|^2 dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^3}|u|^p dx
\end{aligned}$$

*Lemma*2.1(3) より,

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx + \omega\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2 dx \\
&- \frac{1}{4\pi}\{\inf_{\phi\in D^{1,2}}\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi|^2 dx - 4\pi e\int_{\mathbb{R}^3}u^2\phi dx\}\} - \int_{\mathbb{R}^3}|u|^p dx.
\end{aligned}$$

$\phi = |u|$ を代入すると,

$$\frac{dJ(u(\lambda x))}{d\lambda}|_{\lambda=1} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx + \omega\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2 + e\int_{\mathbb{R}^3}|u|^3 dx - \int_{\mathbb{R}^3}|u|^p dx. \tag{3.8}$$

ここで, Hölder の不等式から,

$$\|u\|_{L^p}^p \leq \|u\|_{L^2}^{6-2p}\|u\|_{L^3}^{3p-6}.$$

Young の不等式から, 任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\|u\|_{L^p}^p \leq \delta^t\frac{\|u\|_{L^2}^2}{t} + \delta^{-t'}\frac{\|u\|_{L^3}^3}{t'} \quad where\ t = \frac{1}{3-p},\ t' = \frac{1}{p-2}. \tag{3.9}$$

(3.8), (3.9) より,

$$\frac{d}{d\lambda}J(u(\lambda x))|_{\lambda=1} \geq (\frac{1}{2}-\frac{1}{8\pi})\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx+(\omega-\frac{\delta^t}{t})\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2dx+(e-\frac{\delta^{-t'}}{t'})\int_{\mathbb{R}^3}|u|^3dx.$$

$\omega - \frac{\delta^t}{t} > 0$ となるように,$\delta > 0$ を十分小とし, $e - \frac{\delta^{-t'}}{t'} > 0$ となるように, $e > 0$ を十分大とすれば, $\frac{dJ(u(\lambda x))}{d\lambda}|_{\lambda=1} > 0$.
$p = 3$ の時も同様にして, $\frac{dJ(u(\lambda x))}{d\lambda}|_{\lambda=1} > 0$. □

参考文献

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., **14** (1973) 349-381.

[2] V. Benci and D. Fortunato, *An eigenvalue problem for the Maxwell-Scrödinger equations*, Topol. Methods. Nonlinear Anal., **11** (1998) 283-293.

[3] V. Benci and D. Fortunato, *Solitary waves of the nonlinear Klein-Gordon equation coupled with the Maxwell equations*, Rev. Math. Phys., **14** (2002) 409-420.

[4] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **82** (1983) 313-345.

[5] G. M. Coclite, *A multiplicity result for the nonlinear Maxwell-Schrödinger equations*, Comm. Appl. Anal., **7** (2003) 417-423

[6] G. M. Coclite, *Solitary waves for Maxwell-Scrödinger equations*, Electron. J. Differemtial Equations 2004 No 94 31pp (electronic)

[7] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to partial differential equations*, Reg. Conf. Ser. in Math., **65**, Amer.Math. Soc.

[8] W. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys., **55** (1977) 149-162.

[9] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston 1996

２日目午後の一般講演セッションの総括

山崎 教昭　（室蘭工業大学 工学部）

第26回発展方程式若手セミナーの幹事である工学院大学の竹内慎吾先生から、『座長の方々に「担当セクションの総括」をＡ４一枚程度でお願いする予定です』との連絡を受け、少々戸惑いながら、発展方程式若手セミナー２日目午後の一般講演セッションの総括をしていきたいと思います。

２日目午後の一般講演セッションの講演者は、大屋博一 氏（早大理工）、久保隆徹 氏（早大理工）、澤田宙広 氏（早大理工）、鈴木健二 氏（東大新領域創成科学）、鈴木友之 氏（東北大理）、山口範和 氏（早大理工）の計６名でした。講演者の名前をみればおわかりのように、楕円型方程式や流体の方程式に関するセッションでした。

講演者には、図・写真・数式を組み合わせた見やすいOHPなどを作成して頂くと共に、丁寧に講演をして頂きました。そのおかげで、講演者とは全く異なった研究をしている座長でも容易に講演内容を理解することができました。講演では、『自分の扱っている問題がどのような点で面白く、過去にどのような結果が得られていて、今後どのように発展していくのか』という事を中心にお話し頂いたので、講演者の研究問題に対する思い・情熱が強く感じられると同時に、大変興味深い話題だったので、座長個人的には満足し、有意義なセッションでした。加えて、講演者は皆、若手研究者ですが、堂々と講演しているので、『自分の研究結果に自信を持ち、少しでも多くの人に聞いてもらいたい』というのが伝わってきた点もとても印象に残りました。今後も、精力的に研究を進めて行ってほしいと感じました。

講演後の質問も多数ありましたが、講演スケジュールの関係ですべての質問を取り上げることが出来なかったのは残念です。しかし、『休憩時間』、『食事中』や『夜の会』等の時間を利用し講演者に質問している様子を見て嬉しく思うと共に、講演者が丁寧に答え、また議論しているので、発展方程式若手セミナーの開催意義が達成されていると感じました。

詳細な講演内容は、本報告集を参照してください。講演者は皆、厳密な証明などは極力さけ、できるだけわかりやすく報告集を書きまとめています。より詳細な内容が知りたい人は、是非メール等で連絡をとって頂ければと思います。様々な分野の若手研究者が一堂に集まり親交を深める研究集会は他にはありませんので、この機会に他大学の同年代の人と交流して頂ければと思います。

各講演を聞いていて、『自分が大学院生の頃は、こんなに講演は上手くなかったな』と過去の自分を振り返り反省しながら、『今度講演するときは頑張ろう』と決意させられるなど、講演者にエネルギーをもらった座長でした。

最後に、座長である私的はずれな質問等にも、快く答えてくれた講演者にこの場をかりてお礼申し上げると共に、皆様の今後の活躍に期待いたします。また、終始お世話になった第26回発展方程式若手セミナーの幹事である工学院大学の竹内慎吾先生に心から深く感謝申し上げる次第です。

ある半線型楕円型方程式における正値減衰解の多重性について

HIDEKAZU ASAKAWA and HIROKAZU OHYA

1. PROBLEMS AND RESULTS

In this paper we are concerned with following semilinear elliptic equation;

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x)\nabla u(x)) = \lambda m(x)u(x)^q + K(x)u(x)^p & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u \geq 0, u \not\equiv 0, \int_{\mathbf{R}^N} a(x)|\nabla u(x)|^2 dx < +\infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $N \geq 3$ and $0 < q < 1 < p \leq (N+2)/(N-2)$. Here $a(x) \in C^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ is a positive function, $c(x)$, $K(x)$ are non-negative and non-trivial functions with $c(x), K(x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ and $\lambda \in \mathbf{R}$ is a positive parameter. We will denote by $H^1(a)$ the completion of $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ with respect to the norm given by

$$\|u\|_{H^1(a)} := \left(\int_{\mathbf{R}^N} a(x)|\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

which is a weighted Sobolev space. Our aim is to look for multiple non-negative weak solutions of (1.1). Here $u(\not\equiv 0)$ is called a *non-negative weak solution* of (1.1) if it satisfies

$$\int_{\mathbf{R}^N} a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla\phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} (\lambda m(x)u(x)^q + K(x)u(x)^p)\phi(x) dx \tag{1.2}$$

for every $\phi \in H^1(a)$.

To construct a weak solution of (1.2), we set a functional $I : H^1(a) \to \mathbf{R}$ as follows;

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} a|\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\mathbf{R}^N} m(u_+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} K(u_+)^{p+1} dx. \tag{1.3}$$

It is easily seen that if $u_1 \in H^1(a)$ is a critical point of $I(u)$, then u_1 satisfies (1.2).

First we consider the case $p < (N+2)/(N-2)$. We assume that $a(x)$ satisfies

$$(A1) \qquad Q(x) := \frac{2a(x)\Delta a(x) - |\nabla a(x)|^2}{4a(x)^2} \geq 0.$$

The above functional is well defined for every $u \in H^1(a)$ when $c(x)$ and $K(x)$ fulfill the following condition;

$$(\text{A2}) \qquad \begin{cases} \text{there exist } \alpha, \beta \geq 0 \text{ and } \gamma > 0 \text{ satisfying } \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ q + 1 = 2\alpha + 2^*\beta \text{ and } a^{-(q+1)/2} m Q^{-\alpha} \in L^{1/\gamma}(\mathbf{R}^N), \end{cases}$$

$$(\text{A3}) \qquad \begin{cases} \text{there exist } \alpha', \beta' \geq 0 \text{ and } \gamma' > 0 \text{ satisfying } \alpha' + \beta' + \gamma' = 1, \\ p + 1 = 2\alpha' + 2^*\beta' \text{ and } a^{-(p+1)/2} K Q^{-\alpha'} \in L^{1/\gamma'}(\mathbf{R}^N). \end{cases}$$

Theorem 1.1. (Asakawa-Ohya [4]) *Let* $0 < q < 1 < p < (N+2)/(N-2)$. *Assume* (A1)-(A3). *Then there exists* $\lambda_0 > 0$ *such that* (1.1) *has at least two non-negative solutions* $\underline{u}_\lambda$, $\overline{u}_\lambda \in H^1(a)$ *satisfying* $I(\underline{u}_\lambda) < 0$ *and* $I(\overline{u}_\lambda) > 0$ *for every* $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

E-mail:asakawa@cc.gifu-u.ac.jp
E-mail:ooya@fuji.waseda.jp

Next we will focus on the special case $p = (N+2)/(N-2)$. Note that 2^* is a usual critical Sobolev exponent with $2^* = 2N/(N-2)$ and $q_0 = 2^*/\{2^* - (q+1)\}$. We will impose some additional conditions on $m(x)$ and $K(x)$ as follows. (Here $B_R(x)$ is an open ball with center $x \in \mathbf{R}^N$ and radius $R > 0$).

$$\text{(A4)} \qquad \begin{cases} V(x) := a(x)^{-2^*/2}K(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \cap C_{loc}(\mathbf{R}^N) \text{ fulfills} \\ V(x) \geq \|V\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} - C_V|x - x_0|^\tau \text{ in } B_{R_0}(x_0) \\ \text{with some } C_V \geq 0, x_0 \in \mathbf{R}^N,\ \tau > 0 \text{ and } R_0 > 0, \end{cases}$$

$$\text{(A5)} \qquad Q(x) \leq C_Q|x - x_0|^\kappa \text{ in } B_{R_0}(x_0) \text{ with some } C_Q \geq 0 \text{ and } \kappa \geq 0,$$

$$\text{(A6)} \qquad h_0(x) := K(x)^{-(q+1)/2^*}m(x) \in L^{q_0}(\mathbf{R}^N),$$

$$\text{(A7)} \qquad \begin{cases} \text{there exist } m_0, m_\infty > 0,\ s \geq 0 \text{ and } R_1 > 0 \text{ s.t.} \\ \hat{m}(x) := a(x)^{-(q+1)/2}m(x) \text{ satisfies } \hat{m}(x) \geq m_0|x - x_0|^{-s} \text{ in } B_{R_0}(x_0) \\ \text{and } \hat{m}(x) \leq m_\infty|x|^{-s} \text{ in } \mathbf{R}^N \backslash B_{R_1}(x_0). \end{cases}$$

The functional $I(u)$ is also well defined under (A2) and (A4).

Theorem 1.2. (Asakawa-Ohya [4]) *Let $N \geq 4$, $0 < q < 1$ and $p = (N+2)/(N-2)$. Assume* (A1), (A2) *and* (A4)-(A7). *If N, q, s, κ and τ satisfy $q(N-2) > 2 - s$ and $\{2(N-s) - (q+1)(N-2)\}/4 < \min\{1 + \kappa/2, \tau/2\}$, then there exists $\lambda_0^* > 0$ such that* (1.1) *admits at least two non-negative weak solutions u_*, $u^* \in H^1(a)$ with $I(u_*) < 0$ and $I(u^*) > 0$ for every $\lambda \in (0, \lambda_0^*)$.*

Elliptic equations with concave and convex nonlinearity have been studied by many authors in this decades. The typical one is a pioneer work due to Ambrosetti-Brezis-Cerami [2]. They studied (1.1) for a special case $a = m = K \equiv 1$ in a bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ with homogeneous Dirichlet boundary condition on the boundary $\partial\Omega \subset \mathbf{R}^N$. They have shown the existence and multiplicity of positive solutions for $\lambda \in (0, \hat{\lambda})$ and non-existence of positive solutions for all $\lambda \in (\hat{\lambda}, \infty)$ for some $\hat{\lambda} > 0$. After their study, Ouyang and Shi [15] have shown the exact number of positive radial solutions when $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ is a unit ball. (We also refer to Garcia Azorero-Peral Alonso-Manfredi [10]. Their work is an extension of [2] as $-\Delta u$ to p-Laplacian $-\Delta_p u$.)

Putting $u(x) = a^{-1/2}(x)w(x)$ in (1.1), we can rewrite (1.1) as follows;

$$\begin{cases} -\Delta w(x) + Q(x)w(x) = h(x)w(x)^q + \overline{K}(x)w(x)^p \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \\ w \geq 0, w \not\equiv 0, \int_{\mathbf{R}^N} Qw^2dx < +\infty, \end{cases} \tag{1.4}$$

where $h(x) = \lambda a(x)^{-(q+1)/2}m(x)$ and $\overline{K}(x) = a(x)^{-(p+1)/2}K(x)$. Many authors have studied (1.4) with $h(x) \in L^{q_0}(\mathbf{R}^N)$ and $\overline{K}(x) \equiv 1$. Goncalves-Miyagaki [11] have shown the multiplicity of non-negative solutions of (1.4) for $p < (N+2)/(N-2)$ provided that $\|h\|_{L^{q_0}}$ is sufficiently small. (For the case $p = (N+2)/(N-2)$, e.g., see Alves-Goncalves-Miyagaki [1].) From their work, we can see that the smallness of $h(x)$ allows the multiplicity of non-negative solutions. By using the embedding given in Lemmas 2.1 and 2.2, we can somewhat relax the conditions on $m(x)$ and $K(x)$ if the exponent p is subcritical.

Now we will prepare some notations. For $1 < p \leq \infty$, let $\|\cdot\|_p$ denotes the norm corresponding to the usual Lebesque space $L^p(\mathbf{R}^N)$. Denote by $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ the completion of $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ with respect to norm $\|u\|_{D^{1,2}(\mathbf{R}^N)} := \|\nabla u\|_2$. Being related to this space, define S_0 as a best constant as $S_0 := \inf\{\|\nabla u\|_2\ ;\ u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N), \|u\|_{2^*} = 1\}$. Talenti [16] has shown that S_0 is attained by

$$v_\varepsilon(x) := \frac{1}{[\varepsilon + |x - x_0|^2]^{(N-2)/2}} \tag{1.5}$$

for any ε and any $x_0 \in \mathbf{R}^N$.

Finally, throughout this paper, let $\overline{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ be a cut-off function satisfying

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in B(0, 1/2), \\ 0 & \text{if} \quad x \notin B(0,1). \end{cases} \tag{1.6}$$

We also write $\overline{\varphi}_\varepsilon(x) = \overline{\varphi}(x/\varepsilon)$ for any $\varepsilon > 0$.

2. Weighted Sobolev spaces and their properties

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ be an open set with C^1-boundary. For every non-negative function $\Psi(\cdot) \in L^1_{loc}(\Omega)$, we define

$$\|v\|^2_{X_\Psi(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \Psi |v|^2 dx.$$

Let $X(\Psi, \Omega)$ be the completion of $C_0^1(\Omega)$ by norm $\|\cdot\|_{X_\Psi(\Omega)}$. It is clear that $X_\Psi(\Omega)$ is a Hilbert space and its inner product is given by $\langle u, w\rangle_{\Psi,\Omega} := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w dx + \int_\Omega \Psi v w dx$. It is easily seen $\|v\|_{2^*} \le C\|\nabla u\|_2 \le C|v|_{X_\Psi(\Omega)}$ for all $v \in X_\Psi(\Omega)$ $(v \in C_0^1(\Omega))$ with some $C > 0$ (this constant C can be replaced by $(S_0)^{-1}$). For any non-negative function $K(\cdot) \in L^1_{loc}(\Omega)$, we define a semi-norm $|\cdot|_{p+1,K,\Omega}$ as $|v|^{p+1}_{p+1,K,\Omega} := \int_\Omega K|v|^{p+1}dx$ for $p > 0$. Being related to the above norm, we set $L^{p+1}(K, \Omega) := \{v, |v|_{p+1,K,\Omega} < \infty\}$ as a semi-norm space. If $\Omega = \mathbf{R}^N$, we simply write $|\cdot|_{p+1,K} := |\cdot|_{p+1,K,\mathbf{R}^N}$.

Lemma 2.1. *Let $N \ge 3$ and $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$. Assume $\alpha + \beta + \gamma = 1$ and $p + 1 = 2\alpha + 2^*\beta$. If $K\Psi^{-\alpha} \in L^{1/\gamma}(\Omega)$ ($K\Psi^{-\alpha} \in L^\infty(\Omega)$ for $\gamma = 0$), then the embedding $X_\Psi(\Omega) \subset L^{p+1}(K, \Omega)$ is continuous. Moreover, if $\gamma > 0$, then the above embedding is compact.*

Let $\phi \in C^1(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$ be a positive function satisfying the following linear elliptic equation;

$$\Delta\phi(x) - \Psi(x)\phi(x) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{2.1}$$

Define u as $u := v/\phi$ for any $v \in X_\Psi(\Omega)$. A direct computation yields that $v \in C_0^1(\Omega)$ is equivalent to $u \in C_0^1(\Omega)$. According to (2.1), we can conclude that

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + \Psi|v|^2) dx = \int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2 dx$$

for all $v \in C_0^1(\Omega)$. Now we introduce a norm $|||\cdot|||_{\phi^2,\Omega}$ as

$$|||u|||^2_{\phi^2,\Omega} := \int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2 dx.$$

Let $Z(\phi^2, \Omega)$ be the completion of $C_0^1(\Omega)$ in the norm $|||\cdot|||_{\phi^2,\Omega}$. It is also clear that $Z(\phi^2, \Omega)$ is a Hilbert space with inner product defined by $\langle v, w\rangle_{\phi^2,\Omega} := \int_\Omega \phi^2 \nabla v \cdot \nabla w dx$. Note that $\int_\Omega K|v|^{p+1}dx = \int_\Omega \phi^{p+1}K|u|^{p+1}dx$ for all $u \in Z(\phi^2, \Omega)$ with $u = v/\phi$.

Lemma 2.2. *Let $N \geq 3$ and $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Assume $\alpha + \beta + \gamma = 1$ and $p + 1 = 2\alpha + 2^*\beta$. If $K\Psi^{-\alpha} \in L^{1/\gamma}(\Omega)$, then the embedding $Z(\phi^2, \Omega) \subset L^{p+1}(\phi^{p+1}K, \Omega)$ is continuous. Moreover, if $\gamma > 0$, then the above embedding is compact.*

3. Proofs of Theorems.

3.1. **Sketch of the proof of Theorem 1.1.** We will derive the multiple existence of non-negative solutions of (1.1) by applying usual variational methods. To construct weak solutions of (1.1), we have to check the Palais Smale condition for $I(u)$ defined in (1.3). We simply write $\|u\| := \|u\|_{H^1(a)} = (\int_{\mathbf{R}^N} a|\nabla u|^2 dx)^{1/2}$.

Lemma 3.1. *Let $N \geq 3$, $0 < q < 1 < p < (N+2)/(N-2)$ and assume* (A1)-(A3). *Then any sequence $\{u_n\} \subset H^1(a)$ satisfying*

$$\begin{cases} I(u_n) \to c_0, \\ I'(u_n) \to 0 \qquad \text{in } (H^1(a))^*, \end{cases} \tag{3.1}$$

contains a convergent subsequence in $H^1(a)$ for all $c_0 \in \mathbf{R}$.

From the idea of Drábek-Huang [8], we can easily prove the following Lemma.

Lemma 3.2. *Assume* (A2) *and* (A3). *Let $\{u_n\}$ be a non-negative sequence which converges to u_0 weakly in $H^1(a)$. Then there exists a subsequence $\{u_{n'}\} \subset \{u_n\}$, still denoted by $\{u_n\}$, such that $\int g u_n^q \phi dx \to \int g u_0^q \phi dx$ and $\int K u_n^p \phi dx \to \int K u_0^p \phi dx$ as $n \to \infty$ for any $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$.*

Proof of Lemma 3.1. Let $\{u_n\} \subset H^1(a)$ be a sequence satisfying (3.1). From (A2) and (A3), one can easily prove that $\{u_n\}$ is bounded in $H^1(a)$. Consequently, we can choose a subsequence $\{u_{n'}\} \subset \{u_n\}$ (still denoted by $\{u_n\}$) and a function $u_0 \in H^1(a)$ such that $u_n \rightharpoonup u_0$ weakly in $H^1(a)$ and $u_0 \geq 0$. Since $\|I'(u_n)\|_{(H^1(a))^*} \to 0$ as $m \to \infty$, we get

$$\int_{\mathbf{R}^N} a\nabla u_0 \cdot \nabla \phi dx = \int_{\mathbf{R}^N} (\lambda m {u_0}^q + K {u_0}^p) \phi dx$$

for any $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ from Lemma 3.2. Thus $I(u_0) = 0$. Finally, by using the embedding compactness of $H^1(a) \hookrightarrow L^{q+1}(m, \mathbf{R}^N)$ and $H^1(a) \hookrightarrow L^{p+1}(K, \mathbf{R}^N)$, it is easily seen that $\{u_n\} \subset H^1(a)$ satisfies the Palais-Smale condition. □

Lemma 3.3. *There exists λ_0 such that for every $\lambda \in (0, \lambda_0)$*

$$I(u) > r \quad \text{for all } u \in H^1(a) \text{ satisfying } \|u\| = \rho_0$$

with some $r > 0$ and $\rho_0 > 0$.

Proof of Theorem 1.1. We choose $w_1 \in H^1(a)$ with $w_1 \geq 0$ and $\|w_1\|_{m,q+1} = 1$. It is easy to see that $I(tw_1) \leq \|w_1\|^2 t^2/2 - \lambda t^{q+1}/(q+1)$. So we can get $I(tw_1) < 0$ for sufficiently small $t > 0$. That is,

$$\inf_{u \in \partial B} I(u) \geq r \quad \text{and} \quad -\infty < \inf_{u \in \overline{B}} I(u) < 0$$

where $B \equiv B_\rho(0) \subset H^1(a)$. Letting

$$0 < \varepsilon < \inf_{u \in \partial B} I(u) - \inf_{u \in B} I(u),$$

we can apply Ekeland's Variational Principle to $I\colon \overline{B} \to \mathbf{R}$. So there exists an element $u_\varepsilon \in \overline{B}$ such that $I(u_\varepsilon) \le \inf\{I(w), w \in \overline{B}\} + \varepsilon$ and $I(u_\varepsilon) < I(u) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|$ $(u \ne u_\varepsilon)$ for $\varepsilon > 0$. As a matter of fact, $I(u_\varepsilon) < \inf\{I(u), u \in \partial B\}$. That is, $u_\varepsilon \in B$. Letting $F(u) := I(u) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|$, it is easily seen that u_ε is strict local minimum of $F\colon \overline{B} \to \mathbf{R}$. It follows from these facts that $\|I'(u_\varepsilon)\|_{(H^1(a))^*} \le \varepsilon$. Consequently, the minimizing sequence $\{u_n\} \subset B$ with

$$I(u_n) \to \inf_{u \in \overline{B}} I(u), \quad I'(u_n) \to 0 \ \text{ in } (H^1(a))^*$$

has a convergent subsequence from Lemma 3.1.

On the other hand, if we choose $w_2 \in H^1(a)$ with $w_2 \ge 0$ and $\|w_2\|_{p+1,K} = 1$, then $I(tw_2) \le t^2\|w_2\|^2/2 - t^{p+1}/(p+1)$. So we also obtain $I(tw_2) < 0$ for sufficiently large $t > 0$. Applying the Mountain Pass Theorem yields the existence of mini-max point of $I(u)$ as

$$I(u^*) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \ (:= c^*),$$

where Γ is a set of continuous paths in $H^1(a)$ connecting from 0 to $e_0 := tw_2$. Hence the sequence $\{u_n\} \subset H^1(a)$ with $I(u_n) \to c^*$ and $I'(u_n) \to 0$ in $(H^1(a))^*$ also has a convergent subsequence from Lemma 3.1. Consequently we can show at least two non-negative weak solutions of (1.1) $u_*, u^* \in H^1(a)$ with $I(u_*) < 0$ and $I(u^*) > 0$. This completes the proof. □

3.2. **Sketch of the proof of Theorem 1.2.**

Lemma 3.4. *Let $0 < q < 1$ and $p = (N+2)/(N-2)$. Assume* (A1), (A2), (A4) *and* (A6). *Then any sequence $\{u_n\} \subset H^1(a)$ satisfying*

$$\begin{cases} I(u_n) \to c_0^*, & \\ I'(u_n) \to 0 & \text{in } (H^1(a))^* \end{cases} \tag{3.2}$$

contains a convergent subsequence in $H^1(a)$ if c_0^* satisfies

$$c_0^* < -C_1\lambda^{q_0} + \frac{1}{N}(S_0)^{N/2}\|V\|_\infty^{-(N-2)/2} \ (:= \hat{c}_*) \tag{3.3}$$

with some $C_1 > 0$.

We can also show Lemmas 3.2 and 3.3 even if $p = (N+2)/(N-2)$ in the same manner. So if we get the multiple non-negative weak solutions of (1.1), we only have to show Lemma 3.4. To show Lemma 3.4, we have to prepare some notation about concentration-compactness Principle to the sequence $\{u_n\} \subset H^1(a)$. The notion of concentration has been first introduced by P.L. Lions [12, 13]. After his work, the local concentration and concentration at infinity in various setting, have been studied by many authors; Ben-Naoum,Troestler,Willem [5], Bianchi, Chabrowski, Szulkin [6] and others.

Proposition 3.1. ([14]) *Let $\{u_n\}$ be a sequence which converges to u_0 weakly in $H^1(a)$ such that $\mu_n := a|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ and $\nu_n := K|u_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \nu$ in the weak*-sense of measures with $a^{-2^*/2}K \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. Then there exist at most countable index set J, a family $\{x_j, j \in J\}$ of distinct points in $\mathbf{R}^N$ and a family $\nu_j, \mu_j; j \in J\}$ of positive numbers such that*

$$\overline{\nu} = K|u_0|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu \ge a|\nabla u_0|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

In particular, $S_0(\|V\|_\infty^{-1}\nu_j)^{2/2^*} \le \mu_j$ for every $j \in J$.

Proposition 3.2. ([14]) *Let $\{u_n\} \subset H^1(a)$ satisfy the conditions of Proposition 3.1. Define*

$$\nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{\{|x|>R\}} K|u_n|^{2^*}dx, \;\; \mu_\infty := \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{\{|x|>R\}} a|\nabla u_n|^2 dx.$$

Then

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{\mathbf{R}^N} K|u_n|^{2^*}dx = \int_{\mathbf{R}^N} d\nu + \nu_\infty, \;\; \overline{\lim_{m\to\infty}} \int a|\nabla u_n|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^N} d\mu + \mu_\infty$$

and satisfy $S_0(\|V\|_\infty^{-1}\nu_\infty)^{2/2^*} \le \mu_\infty$.

Proof of Lemma 3.4. Let $\{u_n\} \subset H^1(a)$ be a sequence which satisfies (3.2). From the proof of Lemma 3.1, one can see that we only have to prove $u_n \to u_0$ strongly in $L^{2^*}(K, \mathbf{R}^N)$ with some $u_0 \in H^1(a)$. From (A2) and (A4), $\{u_n\}$ is bounded in $H^1(a)$. Thus we can obtain $u_n \rightharpoonup u_0$ weakly in $H^1(a)$. So we can apply Propositions 3.1 and 3.2.

First we will estimate μ_∞ and ν_∞. From (3.2) and the boundedness of $\{u_n\}$ in $H^1(a)$, we get $I'(u_n)u_n(1-\overline{\varphi}_R) \to 0$ as $m \to \infty$ for any $R > 0$. That is,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^N} a|\nabla u_n|^2(1-\overline{\varphi}_R)dx - \int_{\mathbf{R}^N} a\nabla u_n \cdot \nabla\overline{\varphi}_R u_n dx \\ = &\int_{\mathbf{R}^N} (\lambda m|u_n|^{q+1} + K|u_n|^{2^*})(1-\overline{\varphi}_R)dx + o(1). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Taking $\limsup_{m\to\infty}$ and $R \to 0$ in (3.4), we can obtain $\mu_\infty \le \nu_\infty$. And due to Proposition 3.2, we can get $\nu_\infty \ge (S_0)^{N/2}\|V\|_\infty^{-(N-2)/2}$. Similarly, we get $\nu_j \ge (S_0)^{N/2}\|V\|_\infty^{-(N-2)/2}$ for all $j \in J$.

On the other hand, it follows from (A4) that $\int K u_n^{2^*-1}\phi dx \to \int K u_0^{2^*-1}\phi dx$ as $n \to \infty$ for any $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. So it is easily seen that $I'(u_0) = 0$ from (A2) and (A4).

Suppose that there is a concentration either at a local point or at infinity. For any $\sigma > 0$, we get

$$\begin{aligned} c_0^* + \sigma \;>\; &\frac{1}{N}\int_{\mathbf{R}^N} K|u_0|^{2^*}dx + \lambda\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\Big)\int_{\mathbf{R}^N} m|u_0|^{q+1}dx \\ &+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j\in J}\mu_j + \mu_\infty\Big) - \frac{1}{2^*}\Big(\sum_{j\in J}\nu_j + \nu_\infty\Big) \end{aligned}$$

from Propositions 3.1 and 3.2. Note that $\|u_0\|_{q+1,m}^{q+1} \le \|h_0\|_{q_0}\|u_0\|_{2^*,K}^{q+1}$ from (A6). From an easy calculation, one can derive that

$$\zeta(t) := \frac{1}{N}t^{2^*} + \lambda\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\Big)\|h_0\|_{q_0}t^{q+1}, \; t > 0$$

has its global minimum with $\zeta(t_0) = \min_{t\ge0}\zeta(t) = -C_1\lambda^{q_0}$ with some $C_1 > 0$. Then we can conclude that $c_0^* + \sigma \ge \hat{c}_*$ and this contradicts our assumption. Thus there are no concentration either at local points or at infinity. From the uniform convexity of $L^{2^*}(K, \mathbf{R}^N)$, we have $u_n \to u_0$ strongly in $L^{2^*}(K, \mathbf{R}^N)$. □

From Lemma 3.3, we see that $\{u_n\}$ satisfies Palais-Smale condition if the energy level is less than some special value.

Let $\overline{\varphi}_{R_0}(x) := \overline{\varphi}((x-x_0)/R_0)$ be a cut-off function given in (1.6) and define $w_\varepsilon(x) := a^{-1/2}(x)v_\varepsilon(x)\overline{\varphi}_{R_0}(x)$ where v_ε is a special function defined by (1.5). We observe that $w_\varepsilon \in H^1(a)$ for all $\varepsilon > 0$.

Lemma 3.5. *Let* $N \geq 4$ *and assume* (A4), (A5) *and* (A7). *If* q, N, κ, s *and* τ *satisfy* $q(N-2) > 2-s$ *and* $\{2(N-s)-(q+1)(N-2)\}/4 < \min\{1+\kappa/2, \tau/2\}$, *then there exists* $\varepsilon > 0$ *such that* $\sup_{t\geq 0} I(tw_\varepsilon) < (1/N)(S_0)^{N/2}\|V\|_\infty^{-(N-2)/2}$.

We can show Lemma 3.5 by using the technique of Brezis-Nirenberg [7] and Alves-Goncalves-Miyagaki [1]. (We also refer to Escobedo-Kavian [9] and Ohya [14].)

Lemma 3.6. *Assume* (A4) *and* (A6). *For every* $\lambda > 0$, *there exist* $r^* > 0$ *and* $\rho_0^* > 0$ *such that*

$$I(u) > r^* \text{ for all } u \in H^1(a) \text{ satisfying } \|u\| = \rho_0^*.$$

Proof of Theorem 1.2. Letting $B^* \equiv B_{\rho^*}(0) \subset H^1(a)$, it is easily seen from Lemmas 3.4 and 3.6 that the minimizing sequence $\{u_n\} \subset B^*$ with

$$I(u_n) \to \inf_{u \in \overline{B^*}} I(u) < 0 < \hat{c}^*, \quad I'(u_n) \to 0 \text{ in } (H^1(a))^*$$

has a convergent subsequence by using the similar argument given in section 3.1.

If we set

$$I(u^*) := \inf_{\gamma \in \Gamma^*} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \ (:= \overline{c}^*),$$

where Γ^* is a set of continuous paths in $H^1(a)$ connecting from 0 to e_1 satisfying $I(e_1) < 0$, then it is easily seen from Lemma 3.5 that $0 < \overline{c}^* < \hat{c}_*$ provided that λ is sufficiently small. That is, there exists $\Lambda > 0$ such that the sequence $\{u_n\} \subset H^1(a)$ with $I(u_n) \to \overline{c}^*$ and $I'(u_n) \to 0$ in $(H^1(a))^*$ has a convergent subsequence if $\lambda < \Lambda$ from Lemma 3.4. Consequently, there exists $\lambda_0^* > 0$ such that (1.1) admits at least two non-negative weak solutions $u_*, u^* \in H^1(a)$ with $I(u_*) < 0$ and $I(u^*) > 0$ if $\lambda \in (0, \lambda_0^*)$. This completes the proof. □

References

[1] C. O. Alves, J. V. Goncalves and O. H. Miyagaki, Nonlinear Anal. **34** (1998), 593-615.
[2] A. Ambrosetti, H. Brezis, and G. Cerami, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519-543.
[3] A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero and I. Peral Alonso, J. Differential Equations **168** (2000), 10-32.
[4] H. Asakawa and H. Ohya, preprint.
[5] A. K. Ben-Naoum, C. Troestler and M. Willem, Nonlinear Anal. **26** (1996), 823-833.
[6] G. Bianchi, J. Chabrowski and A. Szulkin, Nonlinear Anal. **25** (1995), 41-59.
[7] H. Brezis and L. Nirenberg, Comm. Pure. Appl. Math. **36** (1983), 437-477.
[8] P. Drábek and Y. X. Huang, J. Differential Equations **140** (1997), 106-132.
[9] M. Escobedo and O. Kavian, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103-1133.
[10] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso and J.J. Manfredi, Commun. Contemp. Math. **2** (2000), 385-404.
[11] J. V. Goncalves, O. H. Miyagaki, Nonlinear Anal. **32** (1998), 41-51.
[12] P. L. Lions, Ann. Inst. H. Poincare Anal. **1** (1984), 109-145, 223-283.
[13] P. L. Lions, Rev. Mat. Ibero. **1** (1985), 45-121, 145-201.
[14] H. Ohya, Advances in Differential Equations **9** (2004), 1339-1368.
[15] T. Ouyang and J. Shi, J. Differential Equations **158** (1999) 94-151.
[16] G. Talenti, Ann. Math. Pura. Appl. **101** (1976), 353-372.

$L^p - L^q$ estimate of the Stokes semigroup in a perturbed half-space*

早稲田大学大学院理工学研究科 D 2　久保　隆徹†

1 Introduction

$n \geq 2$ とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ perturbed half-space とする：つまり, 開集合 Ω は $\Omega \backslash B_R = \mathbb{R}^n_+ \backslash B_R$ を満たすような $R > 0$ が存在する領域とする. $\Omega \times (0, \infty)$ において次の非定常 Stokes 方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = 0, \ \nabla \cdot u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = a(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $u(x,t)$ は流速を, $p(x,t)$ は圧力を表し, $a(x)$ は与えられた初期速度とする.

結果を述べる前に, 本稿を通して使われる notation を紹介する.

$$\begin{aligned} &H = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}, \ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \ |x| < R\}, \ \Omega_R = \Omega \cap B_R, \ B_R^+ = H \cap B_R \\ &C_R^+ = \{x \in H; |x'| \leq R. \ |x_n| \leq R\}, \ D_R^+ = \{x \in H; R-1 \leq |x| \leq R\}, \end{aligned}$$

また, 証明を述べるために必要な Fourier 変換を定義する：$\widehat{f}(\xi)$, $\mathcal{F}_\xi^{-1}[f(\xi)](x)$, $\widetilde{f}(\xi', x_n)$ をそれぞれ $f(x)$ の Fourier 変換, 逆 Fourier 変換, x' に関する部分的 Fourier 変換を表すものとし, 次で定義する：

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \ \mathcal{F}_\xi^{-1}[f(\xi)](x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi, \ \widetilde{f}(\xi', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'} f(x', x_n)dx'.$$

関数空間については標準的なものを使う：

$$\begin{aligned} &L^p(\Omega)^n = \{u = (u_1, \ldots, u_n); \ u_j \in L^p(\Omega), j = 1, \cdots n\}, \\ &L^p_R(\Omega)^n = \{u \in L^p(\Omega)^n; \ u(x) = 0 \text{ for } |x| > R\}, \\ &J^p(\Omega) = \text{ the completion in } L^p(\Omega)^n \text{ of the set } \{u \in C_0^\infty(\Omega); \ \nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega\}, \\ &G^p(\Omega) = \{\nabla p \in L^p(\Omega)^n; \ p \in L^p_{loc}(\Omega)\}. \end{aligned}$$

また, Banach 空間 X, Y に対して, X から Y への有界な線形作用素の空間を $\mathcal{L}(X,Y)$ で表し, $Y = X$ のときには, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ と表すことにする.

次に, perturbed half-space Ω において知られている事実を述べる. 1994 年に R. Farwig と H. Sohr [4] は, $1 < p < \infty$ に対して Banach 空間 $L^p(\Omega)^n$ が Helmholtz 分解できることを示している: i.e. $L^p(\Omega)^n = J^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$ （$\oplus$ は直和を表す）. また, P を $L^p(\Omega)^n$ から $J^p(\Omega)$ への連続な射影とする. そのとき, Stokes 作用素 A が $A = -P\Delta$ で定義され, その定義域は $D(A) = \{u \in J^p(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)^n; \ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ である. このとき, $-A$ は $J^p(\Omega)$ で解析的半群 e^{-tA} を生成することも示されている（R. Farwig & H. Sohr [4]）.

* 本研究は柴田良弘先生（早稲田大学）との共同研究による.

† taraco@toki.waseda.jp

2 Main results

perturbed half-space において, 次の局所減衰定理 (Theorem 2.1) を得ることができ, その定理に基いて $L^p - L^q$ 評価 (Theorem 2.2) を得ることができた.

Theorem 2.1 (局所減衰定理). $1 < p < \infty$, m を非負整数とする. また, $R > 0$ を $\Omega \backslash B_R = H \backslash B_R$ を満たす定数とする. このとき, 任意の $t \geq 1$, $f \in L^p_R(\Omega)^n$ に対して, 次を満たす正定数 $C_{p,m,R}$ が存在する:

$$\|\partial_t^m e^{-tA} P f\|_{L^p(\Omega_R)^n} \leq C_{p,m,R} t^{-\frac{n+1}{2}-m} \|f\|_{L^p(\Omega)^n}. \tag{2.1}$$

Theorem 2.2 ($L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2$, Ω を *perturbed half-space* とし, $t > 0$, $f \in J^p(\Omega)$ とする.

1. 指数 p, q が $1 \leq p \leq q \leq \infty (p \neq \infty,\ q \neq 1)$ を満たすとき, 次が成立する:

$$\|e^{-tA} f\|_{L^q(\Omega)^n} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\Omega)^n}. \tag{2.2}$$

2. 指数 p, q が $1 < p \leq q < \infty$ を満たすとき, 次が成立する:

$$\|\nabla e^{-tA} f\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)^n}. \tag{2.3}$$

Remark 2.3. $\nabla e^{-tA} f$ の評価において, 外部領域における q の条件と異なることに注意する. 実際, 外部領域においては, q について制限 $q \leq n$ が必要である. (see [3] and [6]).

3 Theorem 2.1 の証明のアウトライン

局所減衰定理 (Theorem 2.1) の証明は, 次の 2 つの点が鍵になる:

1. 半空間 H における $\lambda = 0$ の近くでの resolvent 展開
2. $\lambda = 0$ の近くでの $(R(\lambda), \Pi(\lambda))$ の連続性

3.1 H における $\lambda = 0$ の近くでの resolvent 展開

$\lambda = 0$ の近くでの resolvent 展開を得るために, H における Stokes resolvent 問題を考える:

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta) u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 & \text{in} \quad H, \\ \qquad u = 0 & \text{on} \quad x_n = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

$R(\lambda) f$, $\Pi(\lambda) f$ を $R(\lambda) f = u$, $\Pi(\lambda) f = p$ で定義された (3.1) の解を与える解作用素とする. このとき, 次の定理を得る (see [8]) .

Theorem 3.1 (H における $\lambda = 0$ の近くでの resolvent 展開). $n \geq 2$, $0 < \varepsilon < \pi/2$ とする. $r > 0$ に対して U_r を $U_r := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < r, |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon\}$ とし、$B := \mathcal{L}(L^p_R(H)^n, W^{2,p}(B_R)^n \times W^{1,p}(B_R))$ とする. このとき, $(R(\lambda), \Pi(\lambda))$ は $\lambda \in U_{1/2} \backslash (-\infty, 0]$ に関して次の展開をもつ:

$$(R(\lambda), \Pi(\lambda)) = \begin{cases} G_1 \lambda^{\frac{n-1}{2}} + G_2(\lambda) \lambda^{\frac{n}{2}} \log \lambda + G_3(\lambda) & n \textit{ is even,} \\ G_1 \lambda^{\frac{n-1}{2}} \log \lambda + G_2(\lambda) \lambda^{\frac{n}{2}} + G_3(\lambda) & n \textit{ is odd,} \end{cases} \tag{3.2}$$

ここで, $G_1 \in B$, $G_2(\lambda)$ は $U_{1/2}$ での B-値正則関数, $G_3(\lambda)$ は $U_{1/2}$ での B-値有界関数である.

Remark 3.2. resolvent 展開において, 注意すべきことは始めの項が $\lambda^{\frac{n-1}{2}}$ であり, 全空間の場合よりも 1/2 だけ良くなっている (see [6] and [9]). これは、反射によって半空間の問題を全空間の問題に帰着させる際に一番悪い項が境界で消えるためである.

[Outline of the proof]
resolvent 展開を得るためには, 半空間 H における Stokes resolvent 問題の解の表現式が必要である. 表現式を得るために, 与えられている外力 $f=(f_1,\dots,f_n)$ を $F=(f_1^e,\dots,f_{n-1}^e,f_n^o)$ に拡張する. ここで, $f^e(x)$, $f^o(x)$ はそれぞれ偶拡張 (the even extension), 奇拡張 (the odd extension) を表し, 次で定義される：

$$f^e(x)=\begin{cases} f(x',x_n) & x_n>0,\\ f(x',-x_n) & x_n<0,\end{cases}\quad f^o(x)=\begin{cases} f(x',x_n) & x_n>0,\\ -f(x',-x_n) & x_n<0,\end{cases}$$

次に, (U,Ψ) を拡張した外力 F に対応する全空間の解とする. すなわち, (U,Ψ) は次の方程式の解とする：

$$(\lambda-\Delta)U+\nabla\Psi=F,\quad \nabla\cdot U=0\ \text{ in }\ \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Fourier 変換によって, (3.3) は次のように変換される：

$$(\lambda+|\xi|^2)\widehat{U}(\xi)+i\xi\widehat{\Psi}(\xi)=\widehat{F}(\xi)\qquad\text{for}\quad\mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

(3.3) から $\Delta\Psi=\nabla\cdot F$ とわかるので, (3.4) によって次を得る：

$$\Psi(x)=\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[-\frac{i\xi\cdot\widehat{F}(\xi)}{|\xi|^2}\right](x),\ \ U(x)=\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}\left(\widehat{F}(\xi)-\frac{\xi\xi\cdot\widehat{F}(\xi)}{|\xi|^2}\right)\right](x), \tag{3.5}$$

そこで $\widetilde{U_j}(\xi',0)$ を計算する. ここで等式

$$\widetilde{U_j}(\xi',0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_n\xi_n}\widehat{U_j}(\xi)d\xi_n\Big|_{x_n=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{U_j}(\xi',\xi_n)d\xi_n,$$

が成立することに注意して, 留数定理を (3.5) を適用すれば次を得る：

$$\begin{aligned}\widetilde{U_j}(\xi',0)=\int_0^\infty &\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}\widetilde{f_j}(\xi',x_n)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_j\xi_k\widetilde{f_k}(\xi',x_n)}{\lambda}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'|x_n}}{|\xi'|}\right)\\ &-\frac{i\xi_j\widetilde{f_n}(\xi',x_n)}{\lambda}\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}\right)dx_n\quad\text{for}\ \ j=1,\cdots,n-1,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\widetilde{U_n}(\xi',0)=0. \tag{3.7}$$

次に, Riemann 関数 (v,θ) を構成する. そのため, $u=U+v$, $\pi=\Phi+\theta$ とおくと (v,θ) は次を満たす:

$$\begin{cases}(\lambda-\Delta)v+\nabla\theta=0,\qquad\nabla\cdot v=0 & \text{in}\ \ H,\\ v_j(x',0)=-U_j(x',0) & \text{for}\ \ j=1,\cdots,n-1,\\ v_n(x',0)=0.\end{cases} \tag{3.8}$$

(3.8) の解 (v,θ) は次で与えられる：

$$\widetilde{v_j}(\xi',x_n)=-\widetilde{U_j}(\xi',0)e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\frac{\xi_j}{|\xi'|}\xi'\cdot\widetilde{U'}(\xi',0), \tag{3.9}$$

$$\widetilde{v_n}(\xi',x_n)=-\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}i\xi'\cdot\widetilde{U'}(\xi',0), \tag{3.10}$$

$$\widetilde{\theta}(\xi',x_n)=\frac{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}+|\xi'|}{|\xi'|}e^{-|\xi'|x_n}i\xi'\cdot\widetilde{U'}(\xi',0), \tag{3.11}$$

ここで $\xi'\cdot\widetilde{U'}(\xi',0)=\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\widetilde{U_j}(\xi',0)$ とした.

ゆえに, 解 (u,p) の表現式は次となる : for $j=1,2,\cdots,n-1$,

$$\widetilde{u_j}(\xi',x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}}{\lambda+|\xi'|^2}\left[\widehat{f_j^e}(\xi)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi'|^2}\widehat{f_k^e}(\xi)-\frac{\xi_j\xi_n}{|\xi'|^2}\widehat{f_n^o}(\xi)\right]d\xi_n$$
$$-e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}\widetilde{U_j}(\xi',0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi'|}\widetilde{U_k}(\xi',0), \tag{3.12}$$

$$\widetilde{u_n}(\xi',x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}}{\lambda+|\xi'|^2}\left[\widehat{f_n^o}(\xi)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_n\xi_k}{|\xi'|^2}\widehat{f_k^e}(\xi)-\frac{\xi_n^2}{|\xi'|^2}\widehat{f_n^o}(\xi)\right]d\xi_n-i\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\xi_k\widetilde{U_k}(\xi',0), \tag{3.13}$$

$$\widetilde{p}(\xi',x_n)=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix_n\xi_n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_k}{|\xi'|^2}\widehat{f_k^e}(\xi)+\frac{\xi_n}{|\xi'|^2}\widehat{f_n^o}(\xi)\right]d\xi_n+i\frac{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}+|\xi'|}{|\xi'|}e^{-|\xi'|x_n}\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\widetilde{U_k}(\xi',0). \tag{3.14}$$

$|\lambda|$ が小さいとき, (u,p) の表現式を $|\xi'|\le 1$ の場合と $|\xi'|\ge 1$ の場合に cut-off technique を使うことによって分ける必要があり、$|\xi'|\le 2$ の場合を解析するためには, さらにより詳しい表現公式が必要になる;

$$\widetilde{u_j}(\xi',x_n)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}|x_n-y_n|}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}(x_n+y_n)}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}\right)\widetilde{f_j}(\xi',y_n)dy_n$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_j\xi_k}{2\lambda}\left\{\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}|x_n-y_n|}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'||x_n-y_n|}}{|\xi'|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\right.$$
$$+\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}(x_n+y_n)}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'|(x_n+y_n)}}{|\xi'|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n$$
$$\left.-2e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'|y_n}}{|\xi'|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\right\}$$
$$+\frac{i\xi_j}{2\lambda}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{sgn}(x_n-y_n)\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}|x_n-y_n|}-e^{-|\xi'||x_n-y_n|}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n\right.$$
$$-\int_0^{\infty}\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}(x_n+y_n)}-e^{-|\xi'|(x_n+y_n)}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n$$
$$\left.+2e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}\int_0^{\infty}\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}-e^{-|\xi'|y_n}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n\right\}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi'|}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_j\xi_k|\xi'|}{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'|y_n}}{|\xi'|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n$$
$$+\frac{i\xi_j|\xi'|}{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\int_0^{\infty}\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}-e^{-|\xi'|y_n}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n, \tag{3.15}$$

$$\widetilde{u_n}(\xi',x_n)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}|x_n-y_n|}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}(x_n+y_n)}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i\xi_k}{2\lambda}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{sgn}(x_n-y_n)\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}|x_n-y_n|}-e^{-|\xi'||x_n-y_n|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\right.$$
$$\left.+\int_0^{\infty}\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}(x_n+y_n)}-e^{-|\xi'|(x_n+y_n)}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\right\}$$
$$-\frac{1}{2\lambda}\left\{\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}|x_n-y_n|}-|\xi'|e^{-|\xi'||x_n-y_n|}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n\right.$$
$$\left.-\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}(x_n+y_n)}-|\xi'|e^{-|\xi'|(x_n+y_n)}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n\right\}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}i\xi_k\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i|\xi'|^2\xi_k}{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'|y_n}}{|\xi'|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\\
&-\frac{|\xi'|}{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}x_n}-e^{-|\xi'|x_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}-|\xi'|}\int_0^\infty\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}-e^{-|\xi'|y_n}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{p}(\xi',x_n)=&-i\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_k}{2|\xi'|}\left\{\int_0^\infty\left(e^{-|\xi'||x_n-y_n|}+e^{-|\xi'|(x_n+y_n)}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\right\}\\
&-\frac{i}{2}\left\{\int_0^\infty \mathrm{sgn}(x_n-y_n)e^{-|\xi'||x_n-y_n|}\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n-\int_0^\infty e^{-|\xi'|(x_n+y_n)}\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n\right\}\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i\xi_k(\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}+|\xi'|)}{|\xi'|}e^{-|\xi'|x_n}\int_0^\infty\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i\xi_k|\xi'|(\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}+|\xi'|)}{\lambda}e^{-|\xi'|x_n}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}}{\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}}-\frac{e^{-|\xi'|y_n}}{|\xi'|}\right)\widetilde{f_k}(\xi',y_n)dy_n\\
&+\frac{(\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}+|\xi'|)|\xi'|}{\lambda}e^{-|\xi'|x_n}\int_0^\infty\left(e^{-\sqrt{\lambda+|\xi'|^2}y_n}-e^{-|\xi'|y_n}\right)\widetilde{f_n}(\xi',y_n)dy_n.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

(3.15)-(3.17) の各項に Maclaurin 展開や二項定理を使えば, resolvent 展開 (3.2) を得る.

3.2 $\lambda=0$ の近くでの $(R(\lambda),\Pi(\lambda))$ の連続性

$\lambda=0$ の近くでの解作用素 $(R(\lambda),\Pi(\lambda))$ の連続性を示すことが出来る. Theorem 3.3 は Fourier multiplier theorem や resolvent 展開 (3.2) を使うことによって示される.

Theorem 3.3. $1<p<\infty$, $0<\epsilon<\pi/2$ とし, $R(\lambda)$, $\Pi(\lambda)$ をそれぞれ *sect 3.1* で定義された作用素とする. Σ_ϵ を $\Sigma_\epsilon=\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\arg\lambda|\le\pi-\epsilon\}$ とする. $u=R(0)f$, $p=\Pi(0)f$ とおけば, $(u,p)\in W^{2,p}_{loc}(H)^n\times W^{1,p}_{loc}(H)$ であり, (u,p) は次の 3 つの条件を満たす:

1. 与えられた $f\in L^p_R(H)^n$ に対して, (u,p) は次の方程式を満たす:

$$-\Delta u+\nabla p=f,\ \nabla\cdot u=0,\quad in\ H,\qquad u(x',0)=0,$$

2. $\lambda\in\Sigma_\epsilon$ に対して, 次の評価が成立する:

$$\|R(\lambda)f-R(0)f\|_{W^{1,p}(B_R^+)^n}+\|\Pi(\lambda)f-\Pi(0)f\|_{W^{1,p}(B_R^+)}\le C\left(|\lambda|^{\frac{n-1}{2}}+|\lambda|^{\frac{n-1}{2}}\log\lambda\right)\|f\|_{L^p(H)^n},$$

ここで, C は f, λ に無関係な正定数である.

3. $|x|\ge 2\sqrt{2}R$ である $x\in H$ に対して, (u,p) は次の評価を満たす:

$$|u(x)|,\ |\nabla u(x)|,\ |p(x)|\le C|x|^{-(n-1)}\|f\|_{L^p(H)^n},$$

ここで, C は f, λ に無関係な正定数である.

3.3 局所減衰定理の証明

岩下先生の方法 [6] と同様に証明することができる. 次の定理を証明すれば十分:

Theorem 3.4. $n\ge 2$, $1<p<\infty$. 任意の $f\in L^p_R(\Omega)^n$ に対して, 次を満たす正定数 C_p が存在する:

$$\|e^{-tA}Pf\|_{L^p(\Omega_R)^n}\le C_pt^{-\frac{n+1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n}\qquad t\ge 1 \tag{3.18}$$

Proof. $\frac{\pi}{2} < \delta_0 < \delta < \pi$, $0 < \varepsilon < \lambda_0$($\lambda_0$ は Theorem 3.1 と同じ定数) とする. 半群は次のように表せる:

$$e^{-tA}Pf = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{-tA}U(\lambda)Pfd\lambda + \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} e^{-tA}(A+\lambda)^{-1}Pfd\lambda. \tag{3.19}$$

ここで, $\Gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < |\lambda| < \varepsilon,\ \arg\lambda = \pm\delta\}$, $\quad \Gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > \varepsilon,\ \arg\lambda = \pm\delta\}$ とする.

第 2 項は正則であるので容易に評価でき, 第 1 項についても次の Gamma 関数 $\Gamma(\sigma)$ についての Lemma を使うことによって評価できる:

Lemma 3.5. 非負整数 $n > 0$, $t > 0$ に対して, 次が成立:

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-tz}z^{n-1}dz = -\frac{\sin n\pi}{\pi}\Gamma(n)e^{i\pi n}t^{-n},$$
$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-tz}z^{n}\log z dz = -\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sin\sigma\pi}{\pi}\Gamma(\sigma)e^{i\pi\sigma}\right]\Bigg|_{\sigma=n+1} t^{-n-1}.$$

□

4 Theorem 2.2 の証明のアウトライン

菱田先生と同様の方法 [5] で, 局所減衰定理 (Theorem 2.1) によって $L^p - L^q$ を証明することが出来る. この章では, 外部領域と異なる点について触れながら証明のアウトラインを述べる.

始めに, perturbed half-space において成立する評価を紹介する. そのため, $g = e^{-A}f \in D(A^N)$ ($f \in J^p(\Omega)$, $N \in \mathbb{N}$) とおく. このとき, $\|g\|_{W^{2N,p}(\Omega)^n} \le C_{N,p}\|f\|_{L^p(\Omega)^n}$ が成立する. $R \ge R_0$ を $\Omega\backslash B_{R_0} = H\backslash B_{R_0}$ を満たすようにとる. また, $\psi_R \in C^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ を次のような cut-off function とする:

$$\psi_R(x) = 1 \text{ for } \Omega\backslash B_{R+1}, \qquad \psi_R(x) = 0 \text{ for } \Omega_R. \tag{4.1}$$

そこで, $h = \psi_R g - \mathbb{B}[(\nabla\psi_R)\cdot g]$($\mathbb{B}$ は Bogoskiĭ作用素) とおくと, $h \in D(A)$ であることがわかる. ゆえに次の関係を満たすような $v(t)$, $\pi(t)$ が存在する:

$$v(t) \in C^1([0,\infty); J^p(H)) \cap C^0([0,\infty); D(A)), \quad \nabla\pi(t) \in C^0([0,\infty); L^p(H)^n),$$

であり,

$$\begin{cases} \partial_t v(t) - \Delta v(t) + \nabla\pi(t) = 0,\ \nabla\cdot v(t) = 0, & \text{in} \quad H\times(0,\infty), \\ v(0) = h,\ v|_{x_n=0} = 0,\ \int_{D_R^+}\pi(t,x)dx = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

また, $v|_{x_n=0} = 0$ であることに注意すれば, $v(t,x) = \int_0^{x_n}\partial_n v(t,x',y_n)dy_n$ となるので, $v(t)$, $\pi(t)$ が次の評価を満たすことも示すことが出来る:

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^p(C_R^+)^n} \le R\|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^p(C_R^+)^{n^2}}. \tag{4.3}$$

$$\|v(t)\|_{W^{2,p}(C_R^+)^n} + \|\partial_t v(t,\cdot)\|_{L^p(C_R^+)^n} + \|\pi(t,\cdot)\|_{W^{1,p}(C_R^+)} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n}. \tag{4.4}$$

また (4.3) と Theorem 2.1 を使うことにより, 次を得る:

$$\|e^{-tA}f\|_{W^{1,p}(\Omega_R)^n} \le Ct^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n}, \quad f \in J^p(\Omega),\ t \ge 2 \tag{4.5}$$

Remark 4.1. (4.5) において, 外部領域の場合の t の指数は $-\frac{n}{2}$ である. つまり t の指数について, perturbed half-space の場合は外部領域の場合よりも $\frac{1}{2}$ だけ良くなっていることが分かる.

２番目に, 次の評価を示すことが出来る：

$$\|\nabla e^{-tA}f\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} \le C_{p,q}t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n},\ \ 1<p\le q<\infty,\ t>1 \tag{4.6}$$

実際, $R\ge R_0+2$ とし, $g=e^{-A}f\in D(A^N)(N\in\mathbb{N})$ とおき, $u(t)=e^{-tA}g=e^{-(t+1)A}f$ とおく.

$$z(t)=\psi_{R-1}u(t)-\mathbb{B}[(\nabla\psi_{R-1})\cdot u(t)],\ \Phi(t)=\psi_{R-1}p(t),$$

とおく (ψ_{R-1} : (4.1) 参照). ここで、 $(u(t),p(t))$ は次の方程式を満たす解とする:

$$\begin{cases}\partial_t u(t)-\Delta u(t)+\nabla p(t)=0,\ \nabla\cdot u(t)=0 \quad \text{in}\ \ \Omega\times(0,\infty),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\ u|_{t=0}=g,\ \int_{D_R^+}p(t,x)dx=0.\end{cases} \tag{4.7}$$

そのとき, $(z(t),\Phi(t))$ が次を満たすことがわかる：

$$\partial_t z(t)-\Delta z(t)+\nabla\Phi(t)=L(t),\ \ \nabla\cdot z=0\ \text{ in }\ \Omega\times(0,\infty) \tag{4.8}$$

$$z|_{x_n=0}=0\quad z(0)=\psi_{R-1}g-\mathbb{B}[(\nabla\psi_{R-1})\cdot g]=:z_0, \tag{4.9}$$

ここで,

$$L(t)=-2\nabla\psi_{R-1}:\nabla u(t)-(\Delta\psi_{R-1})u(t)+(\partial_t-\Delta)\mathbb{B}[(\nabla\psi_{R-1})\cdot u]+\nabla\psi_{R-1}p(t). \tag{4.10}$$

とした. $z(t)\in C^1([0,\infty);J^p(H))\cap C^0([0,\infty);D(A_H))$ (A_H は H での Stokes 作用素) であるから, $z(t)$ は次のように書き換えられる：

$$z(t)=E(t)z_0-\int_0^t E(t-s)PL(s)ds=:z_1+z_2, \tag{4.11}$$

ここで, $E(t)$ は半空間 H での解作用素とする. z_1 は半空間における L^p-L^q 評価を用いて評価できるので, z_2 を評価すれば十分. そのため, $PL(t)$ を評価する.

$$\|(\nabla\psi_{R-1})p(t)\|_{L^p(H)^n}\le C(1+t)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n},$$

であることに注意すれば, $1<r\le p$ に対して,

$$\|PL(t)\|_{L^r(\Omega)^n}\le C_r\|L(t)\|_{L^r(\Omega)^n}\le C_{p,r}\|L(t)\|_{L^p(\Omega)^n}\le C_{p,r}(1+t)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n}, \tag{4.12}$$

が成立する. q を $1<q<\min(n/2,p)$ にとれば,

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\int_0^t E(t-s)PL(s)ds\right\|_{L^p(H)^n}\\
&\le\int_{t-1}^t\|\nabla E(t-s)PL(s)\|_{L^p(H)^n}ds+\int_0^{t-1}\|\nabla E(t-s)PL(s)\|_{L^p(H)^n}ds\\
&\le C\int_{t-1}^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|L(s)\|_{L^p(H)^n}ds+C\int_0^{t-1}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|L(s)\|_{L^q(H)^n}ds\\
&\le Ct^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)^n}\int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}ds+C\|f\|_{L^p(\Omega)^n}\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+s)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}ds\\
&=I_1+I_2
\end{aligned}$$

と評価でき, 第２項 I_2 を評価すれば十分：

$$\begin{aligned}
I_2&=\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+s)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}ds\\
&=\int_0^{t/2}(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+s)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}ds+\int_0^{t/2}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+t-s)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}}ds,
\end{aligned}$$

$0 \leq s \leq t/2$ のとき, $1+t-s \geq 1+s$ であることに注意すれば, $(1+s)^{-1} \geq (1+t-s)^{-1}$ が成立するので,

$$I_2 \leq 2(1+t/2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}} ds = 2(1+t/2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2q}-\frac{1}{2}} ds.$$

故に, $1 < q < \min(n/2, p)$ に対して、

$$\left\| \nabla \int_0^t E(t-s)PK(s)ds \right\|_{L^p(H)^{n^2}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)^n}, \tag{4.13}$$

が成立する. 故に

$$\|\nabla z(t)\|_{L^p(H)^{n^2}} \leq C_p t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)^n} \qquad 1 < p < \infty.$$

を得る. $|x| \geq R$ に対して, $z(t) = e^{-tA}f$ であるので, (4.5) を考慮に入れれば,

$$\|\nabla e^{-tA} f\|_{L^p(\Omega)^{n^2}} \leq C_p t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)^n} \qquad t \geq 1.$$

を得る. 故に, $1 < p \leq q < \infty$ に対して,

$$\|\nabla e^{-tA} f\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} \leq C_q t^{-\frac{1}{2}} \left\| e^{-tA/2} f \right\|_{L^q(\Omega)^n} \leq C_q t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)^n} \quad t > 1.$$

を得る. $0 < t < 1$ に対しても $t > 1$ と同じように評価することができる. 故に, Theorem 2.2 を得る.

5 Application to the Navier-Stokes equation in a perturbed half-space

この章では, Navier-Stokes 方程式への応用を紹介する. 加藤先生の方法 [7] と同様にして, $L^p - L^q$ 評価と縮小写像の定理より, 次の定理を得ることができる:

Theorem 5.1. $n \geq 2$ とする. 次の性質を満たす正定数 $\delta = \delta(\Omega, n)$ が存在する: 初期値 $a \in J^n(\Omega)$ が $\|a\|_{L^n(\Omega)^n} \leq \delta$ を満たせば, 積分方程式

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} P(u(s) \cdot \nabla u(s)) ds \tag{5.1}$$

は $(0, \infty)$ 上で一意の強解 $u(t)$ をもち, さらに, $t \to \infty$ のとき,

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)^n} = o(t^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2r}}), \qquad \textit{for} \quad n \leq r \leq \infty, \tag{5.2}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^r(\Omega)^{n^2}} = o(t^{-1+\frac{n}{2r}}). \qquad \textit{for} \quad n \leq r < \infty, \tag{5.3}$$

が成立する.

さらに, 初期値に条件 $a \in L^1(\Omega)$ を付け加えれば, 次を示すことができる.

Theorem 5.2. $n \geq 2$ とする. 次の性質を満たす正定数 $\eta = \eta(\Omega, n) < \delta$ が存在する: 初期値 $a \in L^1 \cap J^n(\Omega)$ が $\|a\|_{L^n(\Omega)^n} \leq \eta$ を満たせば, 積分方程式 (5.1) は $(0, \infty)$ 上で一意の強解 $u(t)$ をもち, さらに $t \to \infty$ のとき,

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)^n} = O(t^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{2r}}), \qquad \textit{for} \quad 1 < r \leq \infty, \tag{5.4}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^r(\Omega)^{n^2}} = O(t^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{2r}-\frac{1}{2}}). \qquad \textit{for} \quad 1 < r < \infty, \tag{5.5}$$

が成立する.

参考文献

[1] W. Borchers and Tetsuro Miyakawa ; *L^2 Decay for the Navier-Stokes Flow in Halfspaces.* Math. Ann. 282, 139-155 (1988).

[2] W. Borchers and H. Sohr ; *On the equations $rotv = g$ and $div\, u = f$ with zero boundary conditions,* Hokkaido Math. J. 19, 67-87 (1990).

[3] W. Dan and Y. Shibata : *On the $L^q - L^r$ estimates of the Stokes semigroup in a two dimensional exterior domain.* J. Math. Soc. Japan Vol. 51, No. 1, (1999).

[4] R. Farwig and H. Sohr : *Generalized resolvent estimates for the Stokes system in bounded and unbounded domains,* J. Math. Soc. Japan 46(1994) N0. 4 607-643

[5] T. Hishida : *The Nonstationary Stokes and Navier-Stokes Flows Through an Aperture.* Advances in Mathematical Fluid Mechanics, 79-123 (2004)

[6] H. Iwashita : *L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L^q spaces* Math. Ann. 285, 265-288(1989)

[7] T. Kato; *Strong L^p-Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbb{R}^m$, with Applications to Weak Solutions.* Math. Z. 187, 471-480 (1984)

[8] T. Kubo and Y. Shibata; *On some properties of solutions to the Stokes equation in the half-space and perturbed half-space.* Ezuations in Math. Physics Quaderni in Mathematica, series edited by Dept. Math. II Univ. di Napoli. (to appear)

[9] T. Muramatsu : *On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined in a general region,* Publ. RIMS, Kyto Univ. , 9 (1974), 325-396

[10] Y. Shibata : *On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain,* Tsukuba J. Math. 7, pp. 1-68 (1983)

[11] Y. Shibata and S. Shimizu ; *A decay property of the Fourier transform and its applications to the Stokes problem*; J. math. fluid mech 3(2001) 213-230

[12] S. Ukai ; *A Solution Formula for the Stokes Equation in $\mathbb{R}^n_+$.* Comm. Pure Appl. Math. 40, 611-621 (1987)

Navier-Stokes方程式の弱解の正則性と圧力の関係について

鈴木 友之
東北大学大学院理学研究科

1 序

3次元領域 Ω における非圧縮性粘性流体の運動はNavier-Stokes方程式により記述される.

$$
\text{(N-S)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}
$$

ここで, $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ は速度ベクトル, $p = p(x,t)$ は圧力を表している. u_0 は与えられた初期条件である.

Serrin[9], Sohr[10] などにより

$$
(1.1) \qquad u \in L^s(0,T;L^r(\Omega)), \quad 2/s + 3/r \le 1,\ 3 < r \le \infty
$$

であれば, 弱解が $\overline{\Omega} \times (0,T)$ 上滑らかであるという結果が得られている.

また, Serrin[8], Takahashi[11] により $\Omega \times (0,T)$ の部分領域 $Q = D \times (a,b)$ に対して,

$$
(1.2) \qquad u \in L^s(a,b;L^r(D)), \quad 2/s + 3/r \le 1,\ 3 < r \le \infty
$$

を満たしていれば, D に含まれるコンパクト集合上で滑らかであることが示されている.

前者は, 条件 (1.1) の仮定の下で (N-S) の初期値境界値問題を考えた時の正則性で, 大域的正則性と呼ばれる. 一方, 後者は部分領域 $Q = D \times (a,b)$ で (N-S) の第一式と第二式を満たす弱解に対して条件 (1.2) の仮定の下で正則性を論じているため, 内部正則性と呼ばれている.

ここで, クラス (1.1) はスケール変換に関して不変な空間である.

次に圧力に対する条件の下での正則性を考える. 大域的正則性に関して Berselli-Galdi[1] は次の結果を得た.

$$
(1.3) \qquad p \in L^s(0,T;L^r(\mathbb{R}^3)), \quad 2/s + 3/r = 2,\ 3/2 < r \le \infty
$$

ならば弱解は $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ で滑らかである. また, 彼らは $9/4 \le r \le 3$ に対して有界領域 Ω において同様の結果を得ている. ここで, (1.1) と同様にクラス (1.3) はスケール不変な空間である.

本研究の目的は, 圧力項に対する条件の下で内部正則性を証明することである. 即ち, $\Omega \times (0,T)$ の部分領域 $D \times (a,b)$ において

$$
(1.4) \qquad p \in L^s(a,b;L^r(D)), \quad 2/s + 3/r = 2,
$$

ならば, 弱解 u が滑らかになるかということである. ここで, r の範囲を求めることも課題である.

Navier-Stokes 方程式において, u, p に対して (1.2) や (1.4) などの局所的な可積分条件を仮定しても, 内部正則性を得ることは自明でない. それは, 速度と圧力の関係にある. (N-S) の第一式に div を施すと $\Delta p = -\mathrm{div}(u \cdot \nabla u)$ となるが, この Poisson 方程式は p に対する適当な境界条件の下で解くことができる. 実際, $\mathbb{R}^3$ では Riesz 変換 $R_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(-\Delta)^{-1/2}$ を用いて $p = \sum_{i,j=1}^{3} R_i R_j u_i u_j$ と書くことができる. 従って, Riesz 変換の L^q 有界性により

$$\|p\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|^2_{L^{2q}(\mathbb{R}^3)}, \quad 1 < q < \infty \tag{1.5}$$

が成り立つ.

Berselli-Galdi[1] において (1.5) が成り立つことが本質的に重要である. 一方, 有界領域において p の境界条件を指定することが不可能であり圧力方程式を解くことができないので, (1.5) の様な評価を一般に期待することができない.

本研究ではこの困難さを解決するために, cut-off 関数を用いることにより特異点の近傍に p の台を局所化する方法を導入した. 即ち, p を $\mathbb{R}^3$ の無限遠方で恒等的にゼロである関数とみなし, 上述の圧力方程式に対応する方程式を解く. その際, cut-off 関数を用いることにより現れる剰余項の処理を余儀なくされるが Caffarelli-Kohn-Nirenberg[3] の結果が重要な役割を演ずる. 彼らは suitable weak solution という弱解の概念を導入し, その様な解の特異点集合の 1 次元 Hausdorff 測度がゼロになることを示した. ここで, 一般の弱解との最も大きな違いは局所化されたエネルギー不等式を満たしているということである. その結果を用いると, 特異点のある近傍で u が有界になる領域を取ることができ, その領域で剰余項により生ずる困難さを回避することができる.

2 主定理

$L^2_\sigma := \overline{C^\infty_{0,\sigma}}^{\|\cdot\|_{L^2}}$, $H^1_{0,\sigma} := \overline{C^\infty_{0,\sigma}}^{\|\cdot\|_{H^1}}$, $C^\infty_{0,\sigma} := \{\phi \in C^\infty_0; \mathrm{div}\phi = 0\}$ とする.

定義 2.1. u が (N-S) の弱解であるとは, 次を満たすことである.
(i) $u \in L^\infty(0,T; L^2_\sigma) \cap L^2(0,T; H^1_{0,\sigma})$,
(ii) $\phi(\cdot, T) = 0$ であるような任意の$\phi \in C^1([0,T]; H^1_{0,\sigma})$ に対して,

$$\int_0^T \left\{-(u, \partial_t \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) + (u \cdot \nabla u, \phi)\right\} dt = (u_0, \phi(0)) \tag{2.1}$$

が成り立つ.

次に我々が扱う suitable weak solution を定義する.

定義 2.2. (u, p) が suitable weak solution であるとは, 次を満たすことである.
(i) u は弱解である,
(ii) $p \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T))$,

(iii) (局所化されたエネルギー不等式) 任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$, $\phi \geq 0$ に対して,

$$2\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi \, dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega \left\{ |u|^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\right) + \left(|u|^2 + 2p\right) u \cdot \nabla\phi \right\} dxdt$$

が成り立つ.

定義 2.3. 特異点集合 $S(u)$ を,

$$S(u) = \{(x_0, t_0); \text{任意の } r > 0 \text{ に対して } u \notin L^\infty\left(B_r(x_0, t_0)\right)\}$$

により定義する. ここで, $B_r(x_0, t_0) = \{(x,t); |x - x_0| + |t - t_0| < r\}$ である. $S(u)$ に属する点 (x_0, t_0) を特異点と呼び, $S(u)$ に属さない点 (x_0, t_0) を正則点と呼ぶ.

定義 2.4. u が次を満たす時, 強エネルギー不等式を満たすという.
ほとんど至るところの $t_0 \geq 0$ と $t_0 \leq t_1$ なるすべての t_1 に対して

$$\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_{t_0}^{t_1} \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, d\tau \leq \|u(t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{2.2}$$

が成り立つ.

我々は次の結果を得た.

定理 2.1. $Q = D \times (a,b)$ を $\Omega \times (0,T)$ の部分領域とする. (u,p) を Q 上の suitable weak solution であり u は強エネルギー不等式 (2.2) を満たすとする. この時,

$$p \in L^s(a,b; L^r(D)) 2/s + 3/r = 2 \text{ を満たす } 3/2 < r \leq 3, 2 \leq s < \infty \tag{2.3}$$

ならば, $D \times (a,b)$ に真に含まれる任意のコンパクト集合 $K \times [a', b']$ に対して

$$u \in C^{0,\kappa}([a', b']; C^m(K)), \quad \forall m \in \mathbb{N},\ 0 < \forall\tau < 1/2$$

が成立する. ここで, $C^{0,\kappa}$ は κ 次 Hölder 連続関数を表す.

注意 1. Necǎs-Neustupa[6] は (x_0, t_0) が正則点になるための条件として次を与えた. ある $\rho > 0, r > 0$ が存在して

$$u \in L^\alpha\left(t_0 - r^2/\rho^2, t_0; L^\beta(\boldsymbol{B}_r(x_0) \setminus \boldsymbol{B}_{\varepsilon(t)\rho}(x_0))\right), \quad 2/\alpha + 3/\beta = 1,\ 3 < \beta \leq 9,$$
$$p_- \in L^s\left(t_0 - r^2/\rho^2, t_0; L^r(\boldsymbol{B}_{\varepsilon(t)}(x_0))\right), \quad 2/s + 3/r = 2,\ 3/2 < r \leq 9/2$$

ならば (x_0, t_0) は正則点である. 但し, $\varepsilon(t) := \sqrt{t_0 - t}$ $(t \leq t_0)$, $p_-(x) := \min\{0, p(x)\}$ とする. これは, 点 (x_0, t_0) の近傍で p の非正部分 p_- がクラス (2.3) に属していて, その外側の円環領域において u がクラス (1.2) に属しているという条件である. 我々の定理では, この u に対する条件を課す必要がないことに注意されたい.

3 準備

補題 3.1. (Caffarelli-Kohn-Nirenberg[3])

(i) ある定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, suitable weak solution (u,p) が

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\iint_{Q_\delta^*(x_0,t_0)}|\nabla u|^2\,dxdt \le \varepsilon_0$$

を満たすならば, (x_0,t_0) は正則点である.

但し, $Q_\delta^*(x_0,t_0)=\{(x,t);|x-x_0|<\delta, t_0-\frac{7}{8}\delta^2<t<t_0+\frac{1}{8}\delta^2\}$ とする.

(ii) suitable weak solution (u,p) の特異点集合 $\boldsymbol{S}(u)$ に対して, $\mathcal{H}^1(\boldsymbol{S}(u))=0$.

但し, $\mathcal{H}^1$ は1次元 Hausdorff 測度である.

補題 3.2. (F.H.Lin[5]) ある定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して suitable weak solution (u,p) が

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint_{Q_\delta(x_0,t_0)}(|u|^3+|p|^{3/2})\,dxdt \le \varepsilon_0$$

を満たすならば, (x_0,t_0) は正則点 である.

但し, $Q_\delta(x_0,t_0)=\{(x,t);|x-x_0|\le\delta, t_0-\delta^2\le t\le t_0\}$ とする.

Leray は時間の特異点集合に関して, 構造定理と呼ばれる結果を得ている.

補題 3.3. (Leray[4]) Ω を滑らかな境界を持つ有界領域とする. u が $\Omega\times(0,T)$ 上の弱解であり, 強エネルギー不等式 (2.2) を満たすならば次が成り立つ.

$$(0,T)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma,b_\gamma)\cup G$$

ここで, Γ は高々可算集合, (a_γ,b_γ) は互いに交わらない, u は $\Omega\times(a_\gamma,b_\gamma)$ 上滑らか, $\mathcal{H}^{1/2}(G)=0$ である. $\{(a_\gamma,b_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は正則点の集合で, G は特異点の集合である. 特に, G は閉集合である.

以後, 特に断らない限り (u,p) を suitable weak solution であり強エネルギー不等式を満たしているとする. $Q\Supset Q':=D'\times(a',b')$ となる Q' を1つ取り固定すると補題3.3により $(a',b')=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(a'_\gamma,b'_\gamma)\cup G'$ と表される. ここで $G'\subset G$ である. 以後 $(x_0,t_0)\in Q'$ を特異点で, ある $\gamma\in\Gamma$ に対して $t_0=b_\gamma$ が成り立っているとする.

次に, 補題3.1(ii) により (x_0,t_0) に対し $\boldsymbol{S}(u)$ と交わらない領域を取ることができる.

補題 3.4. (Neustupa-Penel[7]) 次を満たす $\tau>0, 0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ が存在する.

(i) $0<\tau<b_\gamma-a_\gamma=t_0-a_\gamma$,

(ii) $\overline{\boldsymbol{B}_{\varepsilon_2}(x_0)}\times[t_0-\tau,t_0]\subset Q'$,

(iii) $\left\{\left(\overline{\boldsymbol{B}_{\varepsilon_2}(x_0)}\setminus\boldsymbol{B}_{\varepsilon_1}(x_0)\right)\times[t_0-\tau,t_0]\right\}\cap\boldsymbol{S}(u)=\emptyset$,

(iv) $\nabla^k u\in L^\infty\left(\left(\overline{\boldsymbol{B}_{\varepsilon_2}(x_0)}\setminus\boldsymbol{B}_{\varepsilon_1}(x_0)\right)\times[t_0-\tau,t_0]\right)\quad\forall k\in\mathbb{N}$,

(v) $\nabla^k\partial_t u,\nabla^k p\in L^\alpha(t_0-\tau,t_0;L^\infty(\boldsymbol{B}_{\varepsilon_2}\setminus\overline{\boldsymbol{B}_{\varepsilon_1}}))\quad\forall k\in\mathbb{N}, 1<\forall\alpha<2$.

ここで, cut-off 関数 η を微分の台が $B_{\varepsilon_2} \setminus B_{\varepsilon_1}$ に完全に含まれるように取る. 一般に, div $(\eta u) = 0$ とはならないが Bogovski の定理 (Borchers-Sohr[2]) により $\operatorname{div} U = \nabla\eta \cdot u$ となる U が存在する. 従って, $w = \eta u - U$ とおくと, $\operatorname{div} w = 0$ となる.

そこで (N-S) を次のように書き直す.

$$
\text{(N-S)}' \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla(\eta p) = f & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (t_0 - \tau, t_0) \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (t_0 - \tau, t_0) \\ w|_{t=t_0-\tau} = \eta u(t_0 - \tau) - U(t_0 - \tau) & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{但し}, f = &- \partial_t U - U \cdot \nabla(\eta u) - (\eta u) \cdot \nabla U + U \cdot \nabla U + (\eta u \cdot \nabla \eta) u \\
&- \eta(1-\eta) u \cdot \nabla u - 2\nabla\eta \cdot \nabla u - u\Delta\eta + \Delta U + p\nabla\eta.
\end{aligned}
$$

Bogovski の定理と η の選び方により $\operatorname{supp} f(t) \subset (\boldsymbol{B}_{\varepsilon_2} \setminus \overline{\boldsymbol{B}_{\varepsilon_1}})$ であり

$$
\nabla^k f \in L^\alpha(t_0 - \tau, t_0; L^\infty(\boldsymbol{B}_{\varepsilon_2} \setminus \overline{\boldsymbol{B}_{\varepsilon_1}}))
$$

となる. また, w は u と同じ正則性を持っている.

(N-S)$'$ を $\mathbb{R}^3$ で考えているので (1.5) の様な評価が成り立つと期待できる. そこで以前と同様に, (N-S)$'$ に div をほどこすと $\Delta(\eta p) = -\operatorname{div}\,(w \cdot \nabla w - f)$ となる. これは

$$
\begin{aligned}
\eta p &= (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}\,(w \cdot \nabla w - f) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} R_i R_j w_i w_j - \sum_{i=1}^{3} (-\Delta)^{-1/2} R_i f \qquad \text{in } \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

と解ける. 従って, Riesz 変換の L^q 有界性と Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式により

$$
\text{(3.1)} \qquad \|\eta p\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \le C \|w\|^2_{L^{2q}(\mathbb{R}^3)} + C \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}, \quad 1/q = 1/r - 1/3,\ 3/2 < q < \infty.
$$

4 定理の証明の概略

$0 < \sigma < \tau$ となる σ を一つ取り固定する. $t \in (t_0 - \tau, t_0 - \sigma)$ を取り (N-S)$'$ の両辺に $w|w|$ をかけて $\mathbb{R}^3$ 上積分する. この時, 補題 3.3 により $w(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ であるから以下で行う計算は意味を持っている. また, $w = w(\cdot, t)$ と書く.

$$
\text{(4.1)} \qquad
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|w\|^3_{L^3(\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^3} |w||\nabla w|^2\, dx + \left\| \nabla |w|^{3/2} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad \le C \left| \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot w|w|\, dx \right| + C \int_{\mathbb{R}^3} |\eta p| |w|^{1/2} |\nabla |w|^{3/2}|\, dx.
\end{aligned}
$$

(a) $3/2 < r < 9/4$ の時.

(4.1) の右辺第一項は

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot w|w| dx \right| = \left| \int_{\boldsymbol{B}_2 \setminus \overline{\boldsymbol{B}_1}} f \cdot w|w| dx \right| \le C \|w\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{B}_2 \setminus \overline{\boldsymbol{B}_1})} \|f\|_{L^\infty(\boldsymbol{B}_2 \setminus \overline{\boldsymbol{B}_1})}
$$

と評価される.

(4.1) の右辺第二項は Hölder の不等式, Young の不等式と (3.1) により,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\eta p||w|^{1/2}|\nabla|w|^{3/2}|dx &\leq \|\eta p\|_{L^{9/4}(\mathbb{R}^3)} \|w\|_{L^9(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C\|\eta p\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2r}{9-2r}} \|\eta p\|_{L^{9/2}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{9-4r}{9-2r}} \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4/3} \\
&\leq C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{9-2r}} \left\|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\ w\cdot\nabla w\right\|_{L^{9/2}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{9-4r}{9-2r}} \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4/3} \\
&\quad + C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{9-2r}} \left\|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\ f\right\|_{L^{9/2}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{9-4r}{9-2r}} \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4/3} \\
&\leq C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{9-2r}} \|w\|_9^{\frac{2(9-4r)}{9-2r}} \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4/3} \\
&\quad + C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{2r-3}} + C\|f\|_{L^{9/5}(D)}^{3/2} + \frac{1}{4}\left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{2} \\
&\leq C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{9-2r}} \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{8(3-r)}{9-2r}} \\
&\quad + C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{2r-3}} + C\|f\|_{L^{9/5}(D)}^{3/2} + \frac{1}{4}\left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{2} \\
&\leq C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{2r-3}} + \frac{1}{4}\left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{2} \\
&\quad + C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{2r-3}} + C\|f\|_{L^{9/5}(D)}^{3/2} + \frac{1}{4}\left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{2}
\end{aligned}
$$

従って, 次を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|w\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 + \int_{\mathbb{R}^3}|w||\nabla w|^2\,dx + \left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\qquad \leq C\|f\|_{L^\infty(\boldsymbol{B}_2\setminus\overline{\boldsymbol{B}_1})}\|w\|_{L^\infty(\boldsymbol{B}_2\setminus\overline{\boldsymbol{B}_1})}^2 + C\|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{2r-3}} + C\|f\|_{L^{9/5}(D)}^{3/2}.
\end{aligned}
$$

両辺を $(t_0-\tau, t_0-\sigma)$ 上積分すると

$$
\begin{aligned}
&\|w(t_0-\sigma)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 + \int_{t_0-\tau}^{t_0-\sigma}\int_{\mathbb{R}^3}|w||\nabla w|^2\,dxdt + \int_{t_0-\tau}^{t_0-\sigma}\left\|\nabla|w|^{3/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\,dt \\
&\quad \leq \|w(t_0-\tau)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 + C\int_a^b \|p\|_{L^r(D)}^{\frac{2r}{2r-3}}\,dt \\
&\qquad + C\|w\|_{L^\infty(t_0-\tau,t_0;L^\infty(\boldsymbol{B}_2\setminus\overline{\boldsymbol{B}_1}))}^2 \int_{t_0-\tau}^{t_0}\|f\|_{L^\infty(\boldsymbol{B}_2\setminus\overline{\boldsymbol{B}_1})}\,dt + C\int_{t_0-\tau}^{t_0}\|f\|_{L^{9/5}(D)}^{3/2}\,dt
\end{aligned}
$$

となる. この式の右辺は仮定 (2.3) により有限値になり, σ に依存していないので $\sigma\to 0$ とすると $\nabla|w|^{3/2}\in L^2(t_0-\tau,t_0;L^2(\mathbb{R}^3))$ を得る. Sobolev の埋め込み定理により $w\in L^3(t_0-\tau,t_0;L^9(\mathbb{R}^3))$ となる. η の定義により

$$
u\in L^3(t_0-\tau,t_0;L^9(\boldsymbol{B}_3))
$$

を得る.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint_{\tilde{Q}_\delta(x_0,t_0)}|u|^3dxdt \leq \lim_{\delta\to 0}\|u\|_{L^3(t_0-\delta^2,t_0;L^9(\boldsymbol{B}_\delta(x_0)))}^3 = 0 \\
&\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint_{\tilde{Q}_\delta(x_0,t_0)}|p|^{3/2}dxdt \leq \lim_{\delta\to 0}C\|p\|_{L^s(t_0-\delta^2,t_0;L^r(\boldsymbol{B}_\delta(x_0)))}^{3/2} = 0
\end{aligned}
$$

であるから, 補題 3.2 により (x_0, t_0) は正則点 である。従って, u は $D' \times (a', b')$ に特異点を持たない.

更に, $D \times (a, b)$ でも特異点をもたないことがわかる. 実際, $D \times (a, b)$ の点 (x_0, t_0) に対してその点を含み, 且つ $D \times (a, b)$ に真に含まれる $D' \times (a', b')$ をとることが出来る. そこで, 前述の議論をすれば点 (x_0, t_0) が正則点であることがわかる. Serrin の内部正則性定理 [8] により D に含まれるコンパクト集合上で滑らかになる. また, $9/4 \le r \le 3$ の場合も同様である.

参考文献

[1] Berselli, L.C, Galdi, G.P., *Regularity criteria involving the pressure for the weak solutions to the Navier-Stokes equations.* Proc. American Math. Soc. **130**, 3585-3595 (2002)

[2] Borchers, W., Sohr, H., *On the equations* rot $v = g$ *and* div $a = f$ *with zero boundary conditions.* Hokkaido Math. J. **19**, 67-87 (1990)

[3] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. **35**, 771-831 (1982)

[4] Leray, J., *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math. **63**, 193-248 (1934).

[5] Lin, F.H., *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem.* Comm. Pure Appl. Math. **51**, 241-257 (1998)

[6] Necǎs, J., Neustupa, J., *New condition for local regularity of a suitable weak solution to the Navier-Stokes equation.* J. Math. Fluid Mech. **4**, 237-256 (2002)

[7] Neustupa, J., Penel, P., *Anisotropic and geometric criteria for interior regularity of weak solutions to the 3D Navier-Stokes equations.* Adv. Math. Fluid Mech., 237–265, Birkhäuser, Basel, 2001

[8] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **9**, 187-195 (1962)

[9] Serrin, J., *The initial value problem for the Navier-Stokes equations.* Nonlinear Problems, R. E. Langer ed., Madison: University of Wisconsin Press, 69-98 (1963).

[10] Sohr, H., *Zur regularitätstheorie der instantionären Gleichungen von Navier-Stokes.* Math. Z. **184**, 359-375 (1983)

[11] Takahashi, S., *On interior regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Manuscripta Math. **69**, 237-254 (1990)

空間無限遠で1次増大する初期値に対する
ナヴィエ・ストークス方程式の可解性

澤田宙広 (OKIHIRO SAWADA), 早大理工

ABSTRACT. The local-in-time mild solutions to the Navier-Stokes equations with the initial velocity U_0 of the form $U_0(x) = -Mx + u_0(x)$ is constructed, where M is an $n \times n$ constant matrix with $\operatorname{tr} M = 0$ and $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Key method is to establish Ornstein-Uhlenbeck semigroup and studying its property, for example, to establish the $L^p - L^q$ estimates. The solution is smooth in x, but no differentiable in t. Moreover, if $\|e^{tM}\| \leq 1$ for all $t \geq 0$, then this mild solution is even analytic in x.

This paper is essentially based on the results in [10] with Matthias Hieber (in Technische Universität Darmstadt, Germany).

1. INTRODUCTION.

We consider the Navier-Stokes equations in the whole space $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$:

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} U_t - \Delta U + (U, \nabla)U + \nabla P = 0, \quad \nabla \cdot U = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ U|_{t=0} = U_0 \quad \text{with} \quad \nabla \cdot U_0 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Here, $U = (U^1(x,t), \dots, U^n(x,t))$ and $P(x,t)$ denote unknown velocity and unknown pressure of the viscous fluid at $x \in \mathbb{R}^n$ and $t > 0$; $U_0 = (U_0^1(x), \dots, U_0^n(x))$ is given initial velocity.

Our purpose of this paper is to construct the mild solution of (NS), when the initial velocity may grow linearly at space infinity. So, we select the initial velocity is of the form

$$U_0(x) = -Mx + u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

where M is a real valued $n \times n$ constant matrix with $\operatorname{tr} M = 0$, and $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Here, we denote $L^p(\mathbb{R}^n)$ by the usual Lebesgue space, and $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ by its solenoidal subspace; $H^s_p(\mathbb{R}^n) := (I - \Delta)^{-s/2} L^p(\mathbb{R}^n)$ stands for Sobolov space, and $H^s(\mathbb{R}^n) := H^s_2(\mathbb{R}^n)$ for simplicity. Throughout of this paper we do not distinguish the vector valued functions and scalar as well as function spaces. Also, we sometimes omit $(\mathbb{R}^n)$ as $L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$, if no confusion occurs likely.

On the other hand, we consider the substitution

$$u := U - \bar{U} \qquad \text{and} \qquad \tilde{P} := P - \bar{P},$$

where $\bar{U} := -Mx$, $\bar{P} := (\Pi x, x)$, $\Pi := \frac{1}{2}((M^{sym})^2 + (M^{ssym})^2)$ and $M^{sym} := \frac{1}{2}(M + M^T)$ and $M^{ssym} := \frac{1}{2}(M - M^T)$. Here M^T denotes the transposed matrix of M. At that time we notice that the pair (U, P) satisfies (NS) in classical sense if and only if $(u, \tilde{P})$ solves

$$\text{(NS2)} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + (u, \nabla)u - (Mx, \nabla)u - Mu + \nabla \tilde{P} = 0, \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

The author is a JSPS Research Fellow.

Look at that $(\bar{U}, \bar{P})$ is a solution of not only (NS) but also the stationary Euler equations; this fact was firstly shown by Majda in [16]. Then $(u, \tilde{P})$ can be regarded as a perturbation between the solution to (NS) and Majda's stationary solution. One of our motivations is to observe the stability and uniqueness of Majda's solution.

A typical example of M is $M = R + J$, where

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad J = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

for $a, b \in \mathbb{R}$. Note that R corresponds to pure rotation, and describes the Coriolis force. As we mentioned before, in the case of $M = R$, the problem (NS2) was investigated by Hishida [11, 12, 13] and by Babin, Mahalov and Nicolaenko [1, 2]. Indeed, Hishida considered (NS2) with $M = R$ in an exterior domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ and constructed a local-in-time mild solution, when the initial data u_0 belongs to $H^s(\Omega)$ for $s \geq 1/2$. Babin, Mahalov and Nicolaenko also showed that (NS) with $U_0(x) = -Rx + u_0(x)$ has a unique classical solution, provided that u_0 is in $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ or u_0 is a smooth periodic function. In [19], the author of this paper proved the existence of a unique classical solution, still for $M = R$, provided that u_0 belongs to the Besov space $\dot{B}^0_{\infty,1}$. Note that $\dot{B}^0_{\infty,1} \subset L^\infty$, and contains some almost periodic functions. In addition, the advantage of using $\dot{B}^0_{\infty,1}$ is the boundedness of the Riesz transform in $\dot{B}^0_{\infty,1}$. The definitions and properties of the homogeneous Besov spaces are found in e.g. [21]. In particular, $\dot{B}^0_{\infty,1}$ is investigated in [19, 20], more precise.

On the other hand, according to Majda in [16], $M = J$ illustrates the jet flows of the fluid. In fact, Jx corresponds to the drain along to x_1 and x_2-axises and to the outgoing to infinity along to x_3-axis. Giga and Kambe [6] also investigated the axisymmetric irrotational flow and studied the stability of the vortex, when the velocity field of the fluid U is expressed as $U = Jx + V$, where V is a two-dimensional velocity field $V = (V^1, V^2, 0)$.

In the back groud of this works, the author consideres the following problem:

What is the boarder case between the well-posed and ill-posed of (NS)?

Here the (time-local) well-posed means that one can construct a local-in-time unique classical solution to (NS) with value continious up to initial time. The author guesses that the boarder is just when the initial velocity grows linear order at space infinity. To consider the 1-dimensional Burgers equaiton $U_t - U_{xx} + UU_x = 0$, $U(0) = U_0$, which seems to be a model case of 1-dimensional Navier-Stokes equation, we know the answer: let $|U_0(x)| \sim |x|^s$ as $x \to \infty$,

$$\begin{aligned} &(1)\ \ if\ s < 1,\ then\ time{-}global\ well{-}posed, \\ &(2)\ \ if\ s = 1,\ then\ time{-}local\ well{-}posed, \\ &(3)\ \ if\ s > 1,\ then\ ill{-}posed\ for\ any\ time. \end{aligned}$$

Using the Cole-Hopf transform, we apply the classical results by Tychonoff [22] to know above. On the multi-dimensional Burgers-like equation, similar results were also obtained by Giga and Yamada [9, 23]. Maybe, the structure of Burgers equation is far form that of Navier-Stokes, but the author still believes to obtain similar results on (NS).

This paper is organized as follows. In section 2 we shall state the main results on this paper, and refer to related results. In section 3 we prepare the tools. In particular, we establish several estimates for the semigroup.

2. Main Results.

Before mentioning the main results on this paper, we now define the operator A by

$$Au := -\Delta u - (Mx, \nabla)u + Mu$$

in $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ for $p \in [1, \infty]$ with domain $D(A) := \{u \in H^2_p \cap L^p_\sigma; (Mx, \nabla)u \in L^p\}$. We may prove that $-A$ generates a C_0-semigroup e^{-tA} on L^p_σ for $p \in [1, \infty)$; see e.g. [17, 18]. Remark that the semigroup e^{-tA} is not analytic, see [11]. Applying the projection $\mathbb{P}$ to (NS2), formally, we have the abstract equation:

$$\text{(ABS)} \qquad u_t + Au + \mathbb{P}(u, \nabla)u - 2\mathbb{P}Mu = 0, \quad u(0) = u_0.$$

We now deal with the whole space problem, the projection $\mathbb{P}$ can be written explicitly by $\mathbb{P} := (\delta_{ij} + R_i R_j)_{1 \le i,j \le n}$, where δ_{ij} denotes the Kronecker's delta, and R_i is the Riesz transform defined by $R_i := \partial_i(-\Delta)^{-1/2}$. Note that A and $\mathbb{P}$ commute, since $\nabla \cdot Au = 0$ if $\nabla \cdot u = 0$. Then, it is straightforward to get the integral equation:

$$\text{(INT)} \qquad u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}u(s) \cdot \nabla u(s) ds + 2\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}Mu(s) ds$$

for $t \in (0, T)$ with $u(0) = u_0$, integrating (ABS) in time. For $T > 0$ we call a function $u \in C([0, T); L^p_\sigma(\mathbb{R}^n))$ *a mild solution*, if u satisfies (INT). We are now in position to state the local-in-time existence and uniqueness results for mild solutions in L^p_σ spaces.

2.1. **Theorem.** *Let $n \ge 2$, $p \in [n, \infty)$ and $q \in [p, \infty]$. Let M be a real valued $n \times n$ constant matrix with* $\operatorname{tr} M = 0$, *and assume that $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Then there exist $T_0 > 0$ and a unique mild solution u such that*

$$t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}u \in C([0, T_0); L^q_\sigma(\mathbb{R}^n)), \tag{2.1}$$

$$t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) + \frac{1}{2}}\nabla u \in C([0, T_0); L^q(\mathbb{R}^n)). \tag{2.2}$$

2.2. **Remark.** (i) *The functions defined in* (2.1) *and* (2.2) *are continuous in t up to initial time, moreover, they vanish at $t = 0$ provided $q \ne p$ in* (2.1).
(ii) *The case $p = \infty$. It seems to be di cult to obtain the solvability in L^∞ or BUC. This di culty comes form unboundedness of the Riesz transform onto L^∞. Therefore, if we choose the initial data u_0 in $\dot{B}^0_{\infty,1}$, we can show the local existence of mild solution in $C([0, T_0); \dot{B}^0_{\infty,1})$.*

In order to prove Theorem 2.1 we derive the benefit estimates (for example, $L^p - L^q$ estimates) for the semigroup e^{-tA} as well as heat semigroup. Nevertheless the semigroup e^{-tA} is not analytic, thanks to the explicit formula of the semigroup, we can derive them by direct calculations of the kernel; see Lemma 3.2. To construct the mild solution we use a standard iteration scheme. We mimic the proof of [15] directly, so we shall skip the details in this paper.

From similar argument of the proof of Theorem 2.1 we are able to derive uniform bounds for $\nabla^k u(t)$ for any $k \in \mathbb{N}$, if $t \le T_k$ for some $T_k \sim k^{-k}$. This implies evidently that $u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

as long as mild solution exists. Conversely, we cannot control the time-differentiation of u, even if the initial data belongs to $D(A)$, in general. Because, it cannot be expected that the solution is in $D(A)$.

The estimates for the semigroup show that the linear term of (INT) grows at $t \to \infty$ exponentially, in general. Furthermore, the linear remainders, which is the last term of (INT), prevents Kato's argument in [15] (time-global well-posedness for small data). Hence, it seems to be difficult to obtain results on global existence of mild solutions, even if we solve it in scaling invariant space (e.g. $L^n(\mathbb{R}^n)$).

In 2-dimensional case, we can apply the maximum principle for the vorticity, at least when $M = 0$, see e.g. [4]. Once we obtain the uniform bound for vorticity, we can get global solution, see [7]. However, in our situation we need some new idea. Indeed, taking rot into (NS2), for general M we have the vorticity equation on the scalar function $\omega := \operatorname{rot} u$:

$$\text{(VOR)} \qquad \omega_t - \Delta\omega - (Mx, \nabla)\omega + \operatorname{tr} M\omega + (u, \nabla)\omega = 0$$

with $\omega(0) = \omega_0 := \operatorname{rot} u_0$; under our assumption we suppose $\operatorname{tr} M = 0$. At least we may not apply the maximum principle for (VOR) directly, so it is not known how to get the estimate like $\|\omega(t)\|_q \le \|\omega_0\|_q$ for $t > 0$ with some q. In [19, Lemma 3.3] we have the following estimates:

$$\|\omega(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \le C\|\omega_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \exp\{C \sum_{k=0}^{2} \int_0^t \|\nabla^k u(s)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} ds\}.$$

But this is very far from what we desire, this does not help us.

It is a natural question to consider the exterior domains Ω, instead of $\mathbb{R}^n$. This initial-boundary value problem leads us to interesting applications such as spin-coating of fluids. This will be the content of a forthcoming publication; in the future we will prove that $-A$ generates a C_0-semigroup on $L^p_\sigma(\Omega)$ for $1 < p < \infty$.

We are forced to derive the estimates T_k independent of k under some condition on M. In fact, if we select M so that $\|e^{tM}\| \le 1$ for all $t \le 0$, then we take T_k uniformly in k; involving the iteration scheme, we can control $\|\nabla^k u(t)\|_q$ for all k, simultaneously. It is easy to verify that $M = R$ should satisfy $\|e^{tR}\| = 1$. Once we obtain it, the analyticity in x of $u(t)$ can be shown. Actually, spatial-analyticity is deduced form the following estimates of regularizing rates for higher order derivatives of u:

2.3. Theorem. *Let $n \ge 2$, $u_0 \in L^n_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Assume that $\|e^{tM}\| \le 1$ for all $t \ge 0$. Let u be the local-in-time mild solution obtained by Theorem 2.1 in the class of*

$$u \in C([0,T]; L^n_\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap C((0,T]; L^r_\sigma(\mathbb{R}^n))$$

for some $r \in (n, \infty]$ and $T > 0$. Assume further that there exist positive constants M_1, M_2 such that

$$\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_n \le M_1 \qquad \text{and} \qquad \sup_{0<t<T} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})}\|u(t)\|_r \le M_2.$$

Then there exist constants K_1 and K_2 (depending only on n, M, r, T, M_1, M_2) such that

$$\|\nabla^m u(t)\|_q \le K_1(K_2 m)^m t^{-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})} \tag{2.3}$$

for all $t \in (0,T]$, $q \in [n, \infty]$ and $m \in \mathbb{N}_0$. Here $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

It is easy to see that from Theorem 2.3 the mild solution $u(t)$ is spatial-analytic. More precisely, we get the estimate for size of radius of convergence of Taylor expansion ($=: \rho(t)$) from below:

$$\rho(t) \geq \limsup_{m\to\infty} \left(\frac{\|\nabla^m u(t)\|_\infty}{m!} \right)^{-1/m} \geq C\sqrt{t}$$

for $t \in (0, T]$. This estimate comes from Cauchy's criterion and Stirling's formula.

To get (2.3) we prove an equivalent estimate

$$\|\partial_x^\alpha u(t)\|_q \leq K_1 (K_2|\alpha|)^{|\alpha|-\delta} t^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}$$

for all $t \in (0, T]$, $q \in [n, \infty]$ and $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ with some $\delta \in (1/2, 1]$. Here the constant K_1 and K_2 may depend on δ, but independent of α and t. We differentiate the both hand sides of (INT) and take L^q-norm. We notice that e^{-tA} and ∇ do not commute, in general, we actually obtain that

$$\nabla e^{-tA} f = e^{tM} e^{-tA} \nabla f. \tag{2.4}$$

(The meaning of the assumption on M is for the uniform bound of shifting the derivatives over semigroup as well as we like.) We divide the integral $\int_0^t$ into two parts as $\int_0^{(1-\varepsilon)t} + \int_{(1-\varepsilon)t}^t$ in order to distribute the singularity, and apply the Gronwall type inequality (see [8, Lemma 2.4]). Finally, ε is taken small enough such that $\varepsilon \sim 1/|\alpha|$ with induction on $|\alpha|$ to get (2.3). This is essentially same strategy in [8], they also prove the analyticity in x for the mild solution in the case $M = 0$. In this paper we do not give the proof of Theorem 2.3 precisely, making this paper short.

The author does not know whether one can still show (2.3), when we relax the assumption on M, for example, $\|e^{tM}\| \leq C_*$ with some $C_* > 1$. In our proof we need $C_* = 1$ to choose the constants K_1 and K_2 independently in m. We only obtain the spatial-analyticity, since the time-analyticity of u does not follow from our method directly. Probably, the mild solution should not be analytic in time! The author also guesses that this method is not applicable for the boundary value problem, since we need suitable commutativity between the semigroup and differential.

3. Estimates for the semigroup e^{-tA}.

In this section we establish the semigroup theory and research its properties. In the next section we use these tools for proofs of main theorems.

Let M be an $n \times n$ matrix of real valued constants; it is not necessary to impose $\operatorname{tr} M = 0$ troughout this section. We now introduce the operator $\mathcal{A}$ by

$$\mathcal{A}u := -\Delta u - (Mx, \nabla)u + Mu,$$

where $u := (u_1, \ldots, u_n) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ for $p \in [1, \infty]$ and $\mathcal{A}$ is an $n \times n$ matrix operator. Observe that by simple calculation

$$\nabla \cdot \{-(Mx, \nabla)u + Mu\} = 0, \qquad \text{provided} \quad \nabla \cdot u = 0.$$

We thus define A as the realization of $\mathcal{A}$ in $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Au & := & \mathcal{A}u \\ D(A) & := & \{u \in H^2_p \cap L^p_\sigma; (Mx, \nabla)u \in L^p\}. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

By standard perturbation theory it follows that

3.1. **Lemma.** *The operator $-A$ generates a C_0-semigroup on $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ for $p \in [1,\infty)$. The semiroup $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ has an explicit formula by*

$$(e^{-tA}u)(x) := \frac{e^{-tM}}{(4\pi)^{n/2}(detQ_t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(e^{tM}x - y)e^{-\frac{1}{4}(Q_t^{-1}y,y)}dy, \tag{3.2}$$

where $Q_t := \int_0^t e^{sM}e^{sM^T}ds$.

Notice that in the case $M = 0$ the semigroup e^{-tA} coincides with the heat semigroup, since $t^{-1}Q_t = Id$. The proof of Lemma 3.1 was shown by e.g. Metafune and his collaborators [17, 18]. Note that the semigroup e^{-tA} is not analytic, In fact, if we intend to show that e^{-tA} is analytic semigroup, we may construct the counter example by using (Mx, ∇) term; see [11]. The operator $-A$ also generates a semigroup on $L^\infty_\sigma(\mathbb{R}^n)$. But, as same as heat semigroup, there is a lack of strong continuity at $t = 0$ in L^∞.

We now turn to $L^p - L^q$ smoothing properties as well as gradient estimates for e^{-tA}. Due to the non analyticity of e^{-tA}, gradient estimates do not follow from the general theory of analytic semigroups.

3.2. **Lemma.** *Let $n \geq 1$ and $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Then there exist constants $\tilde{C}_0 > 0$ and $\omega_0 \geq 0$ such that*

$$\|e^{-tA}f\|_q \leq \tilde{C}_0 t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}e^{\omega_0 t}\|f\|_p, \qquad t > 0, \tag{3.3}$$

$$\|\nabla e^{-tA}f\|_p \leq \tilde{C}_0 t^{-\frac{1}{2}}e^{\omega_0 t}\|f\|_p, \qquad t > 0. \tag{3.4}$$

Moreover, for $p < q$ and $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ we have

$$t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|e^{-tA}f\|_q \to 0 \quad \text{as } t \to 0, \tag{3.5}$$

$$t^{\frac{1}{2}}\|\nabla e^{-tA}f\|_p \to 0 \quad \text{as } t \to 0. \tag{3.6}$$

We can prove (3.3) and (3.4) by direct calculations of the kernel of explicit formula and Young's inequality. In the proofs of (3.5) and (3.6) we use triangle inequality, (3.3), (3.4) and the density $C_0^\infty \subset L^p$ for $p < \infty$. We skip the proof of Lemma 3.2 in this paper, because one can find it in [10]. Note also that if M satisfies $\|e^{-tM}\| \leq C$ for all $t > 0$ with some constant C, we may take $\omega_0 = 0$. In the special case $M = Id$, $L^p - L^q$ estimates for e^{-tA} were obtained by Gallay and Wayne [3].

To next we estimate for higher order derivatives of semigroup, i.e., for $\nabla^m e^{-tA}f$, which are very useful to consider smoothing properties of mild solutions. The main difficulty is that the semigroup e^{-tA} and tdifferential ∇ do not commute, in general. Nevertheless, we obtain following estimates similar to those of the heat semigroup.

3.3. **Lemma.** *Let $n \geq 1$ and $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Then there exist constants $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3 > 0$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \geq 0$ (depending only on n, p, q and M) such that*

$$\|\nabla^m e^{-tA}f\|_q \leq \tilde{C}_1 e^{(\omega_1+\omega_2 m)t}t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\nabla^m f\|_p \tag{3.7}$$

for $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$ and $f \in H^m_p(\mathbb{R}^n)$, and

$$\|\nabla^m e^{-tA}f\|_q \leq \tilde{C}_2(\tilde{C}_3 m)^{m/2}e^{(\omega_3+\omega_4 m)t}t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{m}{2}}\|f\|_p \tag{3.8}$$

for $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$ and $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

It is evident to get (3.7) by (2.4) m-th times. So, it is clear to see that the assertion (3.7) holds true with $\omega_2 = 0$, provided that $\|e^{tM}\| \le 1$ for all $t > 0$. To obtain (3.8), we split e^{-tA} into $m+1$ parts, and use (2.4) m-th times. Then we have

$$\|\nabla^m e^{-tA} f\|_q \le C\tilde{C}^m \|(\nabla e^{-\frac{t}{m+1}A})^m e^{-\frac{t}{m+1}A} f\|_q$$

with some constants C and $\tilde{C}$. For each terms we apply (3.3) and (3.4), and sum up with them to show (3.8). In (3.8) the top order of dependence of m is $m^{m/2}$, which is natural in the sense that this order is same as that of heat semigroup.

REFERENCES

[1] A. Banin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, *Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains.* Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 1133-1176.

[2] A. Banin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, *3D Navier-Stokes and Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity.* Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), 1-35.

[3] Th. Gallay and E. Wayne, *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on* $\mathbb{R}^2$. Arch. Rational Mech. Anal., **163** (2002), 209-258.

[4] M-H. Giga and Y. Giga, *Nonlinear Partial Difierential Equations.* Kyouritsu Shuppan, 1999 (in Japanese).

[5] Y. Giga, K. Inui and S. Matsui, *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data.* Quaderni di Matematica, **4** (1999), 28-68.

[6] Y. Giga and T. Kambe, *Large time behaviour of the vorticity of two-dimensional viscous ow and its application to vortex formation.* Commun. Math. Phys., **117** (1988), 549-568.

[7] Y. Giga, S. Matsui and O. Sawada, *Global existence of two-dimensional Navier-Stokes ow with nondecaying initial velocity.* J. Math. Fluid Mech., **3** (2001), 302-315.

[8] Y. Giga and O. Sawada, *On regularizing-decay rate estimate for solutions to the Navier-Stokes initial value problem.* Nonlinear Anal. and Appl., (2003), to appear.

[9] Y. Giga and K. Yamada, *On viscous Birgers-like equations with linearly growing initial data.* Hokkaido University preprint series in Mathematics, (preprint).

[10] M. Hieber and O. Sawada, *The Ornstein-Uhlenbeck semigroup on exterior domains.* Preprint (2004).

[11] T. Hishida, *An existence theorem for the Navier-Stokes ow in the exterior of a rotating obstacle.* Arch. Rat. Mech. Anal., **150** (1999), 307-348.

[12] T. Hishida, *The Stokes operator with rotation efiect in exterior domains.* Analysis, **19** (1999), 51-67.

[13] T. Hishida, *L^2 theory for the operator $\Delta + (k \times x) \cdot \nabla$ in exterior domains.* Nihonkai Math J., **11** (2000), 103-135.

[14] C. Kahane, *On the spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rational Mech. Anal., **33** (1969), 386-405.

[15] T. Kato, *Strong L^p-solutions of Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ with applications to weak solutions.* Math. Z., **187** (1984), 471-480.

[16] A. Majda, *Vorticity and the mathematical theory of incompressible uid ow.* Comm. Pure Appl. Math., **34** (1986), 187-220.

[17] G. Metafune, D. Pallara, E. Priola, *Spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures.* J. Funct. Anal., (to appear).

[18] G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, *The domain of the Ornstein-Uhlenbeck operator on an L^p-space with invariant measure.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **1** (2002), 471-485.

[19] O. Sawada, *The Navier-Stokes ow with linearly growing initial velocity in the whole space.* Bol. Soc. Paran. Mat., (to appear).

[20] O. Sawada and Y. Taniuchi, *On the Boussinesq ow with nondecaying initial data.* Funkcial. Ekvac., (to appear).

[21] H. Triebel, *Theory of Function Spaces.* Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, (1983).

[22] A. Tychonoff, *Theoremes d'unicite pour l'equations de la chaleur.* Mat. Sbron., **42** (1935), 199-216.

[23] K. Yamada, *On viscous conservation laws with growing initial data.* Hokkaido University preprint series in Mathematics, (preprint).

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCE, SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, WASEDA UNIVERSITY, OKUBO 3-4-1, SHINJUKU 169-855, JAPAN

E-mail address: sawada@gm.math.waseda.ac.jp

3次元外部領域における磁気流体方程式系の大域解の存在と漸近挙動について

山口 範和 (早稲田大学大学院理工学研究科)
norikazu@gm.math.waseda.ac.jp

1. 問題と主結果

次の磁気流体方程式系の初期値・境界値問題を考える:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_t - \Delta \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\pi + \boldsymbol{B}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = 0 & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ \boldsymbol{B}_t + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = 0 & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nu} = 0, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{B} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ \boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{B}(x,0) = \boldsymbol{b} & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \qquad \text{(MHD)}$$

ここに Ω は**単連結**な有界開集合 $\mathcal{O}\subset\boldsymbol{R}^3$ に対する外部領域, すなわち $\Omega=\boldsymbol{R}^3\setminus\overline{\mathcal{O}}$ で与えられる領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は十分に滑らかであるとする; $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)$ は流体の速度場, π は圧力, $\boldsymbol{B}=(B^1,B^2,B^3)$ は磁場を表わす未知関数; $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\nu^2,\nu^3)$ は境界 $\partial\Omega$ における単位外法線; $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ はそれぞれ速度場, 磁場に対して与えられる初期データ. (MHD) は伝導性を有する非圧縮性粘性流体の運動を記述するシステムであり, Navier-Stokes 方程式系, Maxwell の方程式, Ohm の法則, MHD 近似により導出される. 流体が粘性流体であることから境界条件としては粘着条件 (境界上 $\boldsymbol{v}=0$) を課し, 磁場に関しては電磁気学における標準的な境界条件である完全導体壁 (境界上 $\operatorname{curl}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nu}=0$, $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{B}=0$) を課す. 詳しい問題の背景は Landau-Lifschitz [6] 等を参照されたい.

(MHD) に対しては領域 Ω が全空間や有界領域の場合は豊富な結果があるが, 多くの場合 L^2 空間の枠組みで問題を捕らえている. L^2 での扱いは Navier-Stokes 方程式系における Fujita-Kato [1] の結果と同様に強解の存在を示す際には初期値に対して幾らかの可微分性が必要となる (実際に Fujita-Kato は初期速度に $\boldsymbol{v}_0\in\mathcal{D}(A_2^{1/4})$ を課していた) . また外部問題に関しては筆者の知る限りにおいて Kozono [5] により弱解の energy decay に関する研究がなされているのみである. これまで (MHD) に対しては領域の有界・非有界性を問わず, 主に L^2 空間の枠組みにおける取り扱いが主であり, 外部問題に関しては殆ど未着手な状態にあった.

一方, Navier-Stokes 方程式系に対しては Giga-Miyakawa [2], Kato [4] により初期速度 $\boldsymbol{a}$ が L^n ($n\geq 2$ は次元) の意味で十分に小さい場合に関し時間大域的可解性が示されている. Kato の方法は Stokes 半群 (全空間の場合は熱半群とみなせる) の各種の L^p ノルムを評価をすることに基

づいている．特に Stokes 半群に対する L^p-L^q 型の評価が Kato の方法における本質的な部分である．Kato の結果以降, 様々な領域において同様のアプローチが試みられた．外部問題に関しては Iwashita [3] により Stokes 半群に対する L^p-L^q 評価が示され, 時間大域解の存在が示された．これらの Navier-Stokes 方程式系に対する既存の結果の観点から (MHD) を考察すれば, 初期データに対する可微分性の条件を外す事が出来ると期待できる．実際に Ω が有界の場合は Yoshida-Giga [13] によって肯定的に解決されている．

Kato の観点から (MHD) を考えるには, まず (MHD) の線形化問題について考えなくてはならない. (MHD) の線形化問題は非定常 Stokes 方程式系と次の完全導体壁条件下における熱程式系からなる:

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_t + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \operatorname{curl}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{B} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ \boldsymbol{B}(x,0) = \boldsymbol{b} & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

非定常 Stokes 方程式系に関しては既に Iwashita [3], Maremonti-Solonnikov [7] らにより既に必要な評価が得られている為, 主に (1.1) について考察すればよい.

主結果を述べる為に Helmholtz 分解を紹介する．$1 < p < \infty$ とする．このとき Banach 空間 $L^p(\Omega)^3$ は Helmholtz 分解

$$L^p(\Omega)^3 = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G^p(\Omega), \quad \oplus : \text{直和} \tag{1.2}$$

を許容することはよく知られている．ここでいま境界 $\partial\Omega$ が十分に滑らかであることから

$$\begin{aligned} L^p_\sigma(\Omega) &= \{\boldsymbol{v} \in L^p(\Omega)^3 \mid \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ G^p(\Omega) &= \{\nabla\pi \mid \pi \in L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\}. \end{aligned}$$

と特徴付けられる．$P = P_p$ を (1.2) と対応する $L^p(\Omega)^3$ から $L^p_\sigma(\Omega)$ への連続的射影 (Helmholtz 射影) とする．P を用いて線形作用素 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_p, \mathcal{M} = \mathcal{M}_p$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= L^p_\sigma(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)^3 \cap W^{1,p}_0(\Omega)^3, \\ \mathcal{A}\boldsymbol{v} &= -P\Delta\boldsymbol{v} \quad \text{for } \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \\ \mathcal{D}(\mathcal{M}) &= L^p_\sigma(\Omega) \cap \{\boldsymbol{B} \in W^{2,p}(\Omega)^3 \mid \operatorname{curl}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ \mathcal{M}\boldsymbol{B} &= \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{B} \quad \text{for } \boldsymbol{B} \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

作用素 $\mathcal{A}$ は **Stokes 作用素**と呼ばれる．

$-\mathcal{A}$ は $L^p_\sigma(\Omega)$ において解析的半群 $\{e^{-t\mathcal{A}}\}_{t\geq 0}$ を生成することが知られている．また $-\mathcal{M}$ に関しても $L^p_\sigma(\Omega)$ において解析的半群 $\{e^{-t\mathcal{M}}\}_{t\geq 0}$ を生成することが Miyakawa [8], Shibata-Yamaguchi [9] で示されている．従って Duhamel の原理より (MHD) は次の積分方程式系へ帰着される:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(t) = e^{-t\mathcal{A}}\boldsymbol{a} - \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}} P[(\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s) - (\boldsymbol{B}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(s)]\,ds, \\ \boldsymbol{B}(t) = e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{b} - \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{M}}[(\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(s) - (\boldsymbol{B}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s)]\,ds. \end{cases} \tag{INT}$$

ここでベクトル解析の公式 $\boldsymbol{B} \times \operatorname{curl} \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \nabla(|\boldsymbol{B}|^2/2)$ を用いた (後者は P によって消えることに注意).

目的を達成する為には (INT) を逐次近似法によって解けばよい. その為に次の L^p-L^q 評価を示した.

定理 1 ($e^{-t\mathcal{M}}$ に対する L^p-L^q 評価).

(i) $1 \le p \le q \le \infty, p \ne \infty, q \ne 1$ とする. このとき p, q に依存する正定数 $C_{p,q} > 0$ が存在して

$$\|e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{f}\|_{L^q(\Omega)} \le C_{p,q} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0$$

なる評価が任意の $\boldsymbol{f} \in L^p_\sigma(\Omega)$ に対して成立する.

(ii) $1 < p \le q \le 3$ とする. このとき p, q に依存する正定数 $C_{p,q} > 0$ が存在して

$$\|\nabla e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{f}\|_{L^q(\Omega)} \le C_{p,q} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0$$

なる評価が任意の $\boldsymbol{f} \in L^p_\sigma(\Omega)$ に対して成立する.

Stokes 半群に関しては Iwashita [3], Maremonti-Solonnikov [7] により次が知られている.

定理 2 (e^{-tA} に対する L^p-L^q 評価 [3, 7]).

(i) $1 \le p \le q \le \infty, p \ne \infty, q \ne 1$ とする. このとき q, r に依存する正定数 $C_{p,q} > 0$ が存在して

$$\|e^{-t\mathcal{A}}\boldsymbol{f}\|_{L^q(\Omega)} \le C_{p,q} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0$$

なる評価が任意の $\boldsymbol{f} \in L^p_\sigma(\Omega)$ に対して成立する.

(ii) $1 < p \le q \le 3$ とする. このとき p, q に依存する正定数 $C_{p,q} > 0$ が存在して

$$\|\nabla e^{-t\mathcal{A}}\boldsymbol{f}\|_{L^q(\Omega)} \le C_{p,q} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0$$

なる評価が任意の $\boldsymbol{f} \in L^p_\sigma(\Omega)$ に対して成立する.

定理 1 および定理 2 より次の大域解の存在および漸近挙動に関する定理を得る

定理 3. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in L^3_\sigma(\Omega) \times L^3_\sigma(\Omega)$ とする. このとき, 次をみたす $\epsilon = \epsilon(\Omega) > 0$ が存在する: $\|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\|_{L^3(\Omega)} < \epsilon$ ならば $(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{B}(t)) \in BC([0,\infty); L^3_\sigma(\Omega)^2)$ が存在し, $t \to \infty$ で次をみたす:

$$\|(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{B}(t))\|_{L^p(\Omega)} = o(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2p}}), \quad 3 \le p \le \infty, \tag{1.3}$$

$$\|\nabla(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{B}(t))\|_{L^3(\Omega)} = o(t^{-\frac{1}{2}}). \tag{1.4}$$

注意 4. 時間局所解の存在を示す際には初期データの小ささは必要ない. すなわち任意の $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in L^3_\sigma(\Omega)^2$ に対して, 時間局所解は構成出来る.

2. 証明の概略

本節では主結果の証明の概略について述べる. 証明の詳細については [9, 11, 12] を参照して欲しい.

2.1. 定理 1 の証明の概略

定理 1 の証明は $0 < t < 1$ の場合と, $t \geq 1$ の場合に分けて行う. $0 < t < 1$ の場合は解析的半群の理論と複素補間により簡単に証明が出来る. 本質的なのは $t \geq 1$ の場合である. $t \geq 1$ の場合の定理 1 の証明の鍵は次の局所エネルギー減衰に関する定理である.

定理 5 (局所エネルギー減衰評価 [9, 12]). $1 < p < \infty$ とする. $R_0 > 0$ を $\mathcal{O} \subset B_{R_0}(0)$ となる数とし, $R > R_0$ とする. このときある正定数 $C_{p,R} > 0$ が存在して

$$\|e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{f}\|_{W^{2,p}(\Omega\cap B_R(0))} \leq C_{p,R}t^{-\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \geq 1$$

なる評価が任意の $\boldsymbol{f} \in L^p_\sigma(\Omega) \cap \{\boldsymbol{f} \in L^p(\Omega)^3 \mid \operatorname{supp}\boldsymbol{f} \subset B_R(0)\}$ に対して成立する.

定理 5 と全空間における熱核の評価を cut-off の方法によって組み合わせることで定理 1 を得る. この部分の計算は多少煩雑である為, ここでは割愛する. 詳しくは [11, 12] を参照して欲しい.

2.2. 局所エネルギー減衰評価の証明の概略

定理 5 を示す為に (1.1) と対応するレゾルベント問題:

$$\begin{cases} \lambda\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{curl}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu} = 0, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

を解析する. ここで $\lambda \in \Sigma_\epsilon = \{z \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \mid |\arg z| < \pi - \epsilon\}$, $0 < \epsilon < \pi/2$ なるパラメータ, $\boldsymbol{f}$ は与えられたベクトル場である. 一見 (2.1) と (1.1) が対応関係にあるようにはみえないが, (2.1) に関しては, もし $\boldsymbol{f} \in L^p_\sigma(\Omega)$ ならば, その解 $\boldsymbol{u}$ は自動的に $\boldsymbol{u} \in L^p_\sigma(\Omega)$ となることがわかり, さらにベクトル解析の公式 $\Delta\boldsymbol{u} = \nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$ に注意すれば (2.1) が (1.1) と対応関係にあるとみれる. (2.1) に関し, 特に $|\lambda|$ が十分に小さい場合に解作用素が λ に関してどのように展開されるかを調べることが定理 5 を示す際の鍵となる. 解作用素の λ に関する展開は全空間からの摂動を用いて調べるが, その際に次の一意性に関する補題が Fredholm の交代定理の観点から本質的となる.

補題 6. $1 < p < \infty$ とする. $\boldsymbol{u} \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^3$ が

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{u} = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{curl}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu} = 0, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

の解であり, さらに放射条件 $\boldsymbol{u}(x) = O(|x|^{-1})$, $\nabla\boldsymbol{u}(x) = O(|x|^{-2})$ をみたすとする. このとき Ω においで $\boldsymbol{u} \equiv 0$.

注意 7. 補題の証明には境界条件の特殊性から von Wahl による $\nabla \boldsymbol{u}$ の評価 [10, Theorem 3.2] を用いる. その為, 領域に**単連結性**を要する.

2.3. 定理 3 の証明の概略

積分方程式 (INT) を逐次近似法で解くには非線形項の評価が本質的である. 記号を簡略化する為に,

$$F[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)] = \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}} P[(\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s) - (\boldsymbol{B}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(s)]\,ds,$$
$$G[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)] = \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{M}} [(\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(s) - (\boldsymbol{B}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s)]\,ds$$

とおく. Hölder の不等式, Helmholtz 射影 P_p の L^p 有界性, 定理 1, 定理 2 より次を得る.

補題 8. $\delta \in (0,1)$ を固定する. $p \geq 3$ に対して

$$\|F[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)], G[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)]\|_{3/\delta} \leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_{3/\delta} \|\nabla(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3\,ds,$$
$$\|F[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)], G[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)]\|_{p} \leq C_p\int_0^t (t-s)^{-\frac{1+\delta}{2}+\frac{3}{2p}} \|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_{3/\delta} \|\nabla(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3\,ds,$$
$$\|\nabla(F[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)], G[\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t)])\|_{3} \leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1+\delta}{2}} \|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_{3/\delta} \|\nabla(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3\,ds.$$

最後に漸近挙動 (1.3), (1.4) を示す. その為にまず十分に小さな $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in L^3_\sigma(\Omega)^2$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3 = 0 \tag{2.2}$$

となることを示す. まず次の補題を示す.

補題 9. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)^2$ とし, $\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_3 < \epsilon$ とする. $(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))$ を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ に対する積分方程式系 (INT) の解とするとき (2.2) が成立する.

証明. $\gamma \in (0,1/2)$ を与えて, $p \in (3/2,3)$ を $\gamma = -1/2 + 3/2p$ となるようにとる. このとき定理 1, 定理 2 より

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3 &\leq Ct^{-\gamma}\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_p + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3 \|\nabla(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3\,ds \\ &\leq Ct^{-\gamma}\left\{\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_p + CB(1/2,1/2-\gamma)\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_3 \sup_{0<s\leq t} s^\gamma \|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3\right\}\end{aligned}$$

を得るので, 初期データを十分小さく取り直せば

$$\sup_{0<s\leq t} s^\gamma \|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\| \leq C\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_p$$

と出来る. これより十分小さな $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)^2$ に対し (2.2) を得る. □

次に積分方程式の解の連続依存性を用いれば $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in L^3_\sigma(\Omega)^2$ に対し, (2.2) を得る. (2.2) を元に (1.3) を $p\neq\infty$ の場合に示そう. Riesz-Thorin の補間不等式を用いれば

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}}\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_p &\le \|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3^\theta\left(t^{\frac{1}{2}}\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_\infty\right)^{1-\theta}\\
&\le C_p\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_3^{1-\theta}\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3^\theta
\end{aligned}
$$

を得る. ここで $1/p=\theta/3$. 上の関係式において (2.2) を考慮すれば $3<p<\infty$ に対しても (1.3) を得る. 最後に (1.3) における $p=\infty$ の場合と, (1.4) を示すために

$$
\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_\infty+\|\nabla(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3=o(t^{-\frac{1}{2}}) \tag{2.3}
$$

を示そう. その為に積分方程式系 (INT) を

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{v}(t)=e^{-t\mathcal{A}}\boldsymbol{v}(t/2)-\displaystyle\int_{t/2}^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}P[(\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s)-(\boldsymbol{B}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(s)]\,ds,\\
\boldsymbol{B}(t)=e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{B}(t/2)-\displaystyle\int_{t/2}^t e^{-(t-s)\mathcal{M}}[(\boldsymbol{v}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(s)-(\boldsymbol{B}(s)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(s)]\,ds.
\end{cases}
$$

と書き直す. 定理 1 と定理 2 を用いて

$$
\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_\infty+\|\nabla(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3 &\le Ct^{-\frac{1}{2}}\|(\boldsymbol{v}(t/2),\boldsymbol{B}(t/2))\|_3\\
&\quad+C\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_6\|\nabla(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_3\,ds
\end{aligned}
$$

を得る. ゆえに $t>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&t^{\frac{1}{2}}(\|(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_\infty+\|\nabla(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{B}(t))\|_3)\\
&\quad\le C\|(\boldsymbol{v}(t/2),\boldsymbol{B}(t/2))\|_3+C\|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|_3\sup_{t/2\le s\le t}s^{\frac{1}{4}}\|(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{B}(s))\|_6
\end{aligned}
$$

を得る. 従って (2.2) と (1.3) で $p=6$ とした場合の結果を用いて, (2.3) を得る.

参考文献

[1] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16:269–315, 1964.

[2] Y. Giga and T. Miyakawa. Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 89(3):267–281, 1985.

[3] H. Iwashita. L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces. *Math. Ann.*, 285(2):265–288, 1989.

[4] T. Kato. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4):471–480, 1984.

[5] H. Kozono. On the energy decay of a weak solution of the MHD equations in a three-dimensional exterior domain. *Hokkaido Math. J.*, 16(2):151–166, 1987.

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media.* Course of Theoretical Physics, Vol. 8. Translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell. Pergamon Press, Oxford, 1960.

[7] P. Maremonti and V. A. Solonnikov. On nonstationary Stokes problem in exterior domains. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(3):395–449, 1997.

[8] T. Miyakawa. The L^p approach to the Navier-Stokes equations with the Neumann boundary condition. *Hiroshima Math. J.*, 10(3):517–537, 1980.

[9] Y. Shibata and N. Yamaguchi. On a local energy decay of solutions for the heat system with perfectly conducting wall in three dimensional exterior domain. *preprint.*

[10] W. von Wahl. Estimating ∇u by $\operatorname{div} u$ and $\operatorname{curl} u$. *Math. Methods Appl. Sci.*, 15(2):123–143, 1992.

[11] N. Yamaguchi. On an existence theorem of global strong solution to the magnetohydrodynamic system in three dimensional exterior domain. *preprint.*

[12] N. Yamaguchi. L^q-L^r estimates of solution to the parabolic Maxwell equations and their application to the magnetohydrodynamic equations. 数理解析研究所講究録, (1353):72–91, 2004.

[13] Z. Yoshida and Y. Giga. On the Ohm-Navier-Stokes system in magnetohydrodynamics. *J. Math. Phys.*, 24(12):2860–2864, 1983.

流体・構造方程式の混合型有限要素離散化から生成される連立一次方程式の解法

鈴木健二（東大新領域）
鷲尾巧（科学技術振興機構 CREST）

連続体力学における以下の２つの原理を考える。

連続体の運動量保存の原理

$$\underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_{V_x} \rho v dV_x}_{\text{慣性力}} = \underbrace{\int_{S_x} t dS_x}_{\text{表面力}} + \underbrace{\int_{V_x} \rho g dV_x}_{\text{物体力}} \tag{1}$$

連続体の質量保存の原理

$$\left.\frac{\partial m}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_{V_x} \rho dV_x = 0 \tag{2}$$

上記の式を変形して行くと、以下のような Navier-Stokes の方程式 (以下 N-S 方程式) 及び連続の式を得ることができる。本研究では N-S 方程式及び連続の式を有限要素法により離散化した連立一次方程式を迅速に解く方法を考える。

非圧縮性の Newton 流体に対する N-S の方程式（ALE 表示）及び連続の式（微圧縮性を仮定・ALE 表示）

$$\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \rho \boldsymbol{c} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{v}) = -\nabla_{\boldsymbol{x}} p + 2\mu \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \frac{1}{B} \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \frac{1}{B} \boldsymbol{c} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} p) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

但し、ALE は Arbitrary Lagrangian Eulerian の略であり、流体構造連成問題の解析手法である [4]。実際に上の二つの式を有限要素法で離散化すると、以下のようなマトリクス方程式が得られる。

ALE N-S の方程式のマトリクス方程式と微圧縮性 ALE 連続の式のマトリクス方程式

$$\boldsymbol{M} \cdot \overset{*}{\boldsymbol{V}} + \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{K}_\mu \cdot \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{M}^P \cdot \overset{*}{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{\Lambda}^P \cdot \boldsymbol{P} + \boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

ただし，記号 * は未知変数の参照時間導関数 $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}}$ を簡略表記したものとする．又、非圧縮性を仮定すれば連続の式の第一項目、第二項目は無くなる。また、今回離散化に用いた要素は以下の 8-1d と呼ばれる 6 面体要素である。これは 1 要素につき 8 つの流速節点が各頂点にあり、圧力節点が要素の中央に配置されたものである。

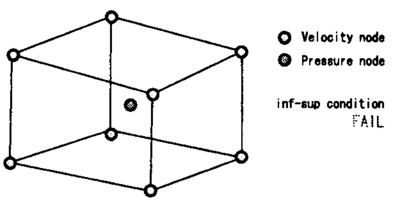


図 1: 六面体 8-1d 要素

この２つのマトリクス方程式は，流体の全未知変数で一般化したベクトル φ を導入することにより，さらにまとめて１つのマトリクス方程式で表すことができる．

流体解析の有限要素マトリクス方程式

$$\boldsymbol{M}_f \cdot \overset{*}{\varphi} + \boldsymbol{C}_f \cdot \varphi = \boldsymbol{F}_f \tag{5}$$

ここで出現する各マトリクスと各ベクトルは，以下の通りである．

$$\boldsymbol{M}_f = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^P & \\ & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{C}_f = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^P & \boldsymbol{G}^T \\ -\boldsymbol{G} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}_\mu \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{F}_f = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \tag{7}$$

さらに，それぞれのマトリクスの物理的解釈は以下の通りである．

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}^P, \boldsymbol{M} & : \text{圧力, 速度についての質量マトリクス} \\ \boldsymbol{A}^P, \boldsymbol{A} & : \text{圧力, 速度についての移流マトリクス} \\ \boldsymbol{F} & : \text{外力（表面力と体積力）ベクトル} \\ \boldsymbol{K}_\mu & : \text{粘性散逸マトリクス} \\ \boldsymbol{G} & : \text{発散マトリクス} \end{cases} \tag{8}$$

次に，割線反復法（Secant method）によって動的な時間積分を進める。式5の時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの増分形式は，以下のようになる．

$${}^t\boldsymbol{M}^f \cdot \Delta\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}{}^f + {}^t\boldsymbol{C}^f \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}^f = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^f - {}^t\boldsymbol{Q}^f \tag{9}$$

ただし，${}^t\boldsymbol{M}^f$ と ${}^t\boldsymbol{C}^f$ は時刻 t での割腺マトリックスとし，${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^f$ は時刻 $t+\Delta t$ での外力ベクトルである．また，${}^t\boldsymbol{Q}^f$ は時刻 t での流体の内力ベクトルである．

$${}^t\boldsymbol{Q}^f = {}^t\boldsymbol{M}^f \cdot \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}{}^f + {}^t\boldsymbol{C}^f \cdot \boldsymbol{\varphi}^f \tag{10}$$

式(9)では $\Delta\boldsymbol{\varphi}^{*f}$ と $\Delta\boldsymbol{\varphi}^f$ が未知数になっている。これをNewmark-β 法を用いて一変数（本計算では $\Delta\boldsymbol{\varphi}^{*f}$ に統一）に減じると、最終的に以下が解くべき連立一次方程式となる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_v} \\ \mathbf{b_p} \end{pmatrix} \tag{11}$$

この式を $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表すことにする。一行目はN-S方程式、二行目は連続の式に対応する。また、連続の式に非圧縮を仮定すれば $\mathbf{C}$ は零行列になる。$\mathbf{B}^T$ はgradient、$\mathbf{B}$ はdivergenceに対応する。$\mathbf{A}$ は移流項などが存在するため実際には非対称かつ不定値（正の固有値と負の固有値が混ざっている）である。しかし、Newmark-β 法を用いると移流・粘性散逸・発散項に対応するマトリクス ${}^t\boldsymbol{C}^f$ に $\frac{1}{\Delta t}$ がかかる。このため時間ステップが十分に小さければ質量マトリクス ${}^t\boldsymbol{M}^f$ が支配的になる。

以上から、係数行列の理論的な考察を行う際には以下の性質を仮定した。

$\mathbf{A}$: symmetric and positive　$\mathbf{B}$: $ker(\mathbf{B}^T) = 0$　$\mathbf{C}$: symmetric and non-negative ($\mathbf{C} \sim \mathbf{0}$)

尚、本研究では構造部分も流体と同様の要素を用いて離散化を行っており、同様の式が算出される。
式(11)の連立一次方程式を解くために本研究では混合型FEM用ILU前処理付GMRES法[1]を採用している。前処理とは係数行列にあらかじめある行列 $\mathbf{M}$ をかけ反復法にとって収束しやすい行列に変換をする方法である。ILU（Incomplete LU）前処理は、不完全にLU分解をする事により $\mathbf{M}$ を構成する方法である。

なお、現在の当研究室の左心室解析では係数行列は10万×10万程度の大きさであり、非零成分は800万個程度である。連立一次方程式を解く方法は以下の2通りの方法がある。

現在はILU前処理付GMRES法という反復法を用いてこの連立一次方程式を解いている。この方法だと左心室1周期の解析に数日程度の時間がかかる。

表 1: 直接法及び反復法の計算時間と性質

方法	主な解法	計算時間)	メリット	デメリット
直接法	skyline 法	数分程度	多くの問題に適用できる	計算時間が多い
反復法	ILU 前処理付 GMRES 法	30 秒程度	計算が圧倒的に速い	問題ごとにチューニングが必要

また現在メッシュを更に細かくした100万自由度の左心室解析の準備に入っている。現在の方法だと1秒の解析で数ヶ月程度の時間がかかると考えられる。加えて、100万自由度のデータは一般のパソコンではメモリ上に乗り切らないため、1台のプロセッサで計算をするのは基本的に不可能。そのため並列化を用いたスピードアップが必要となる。

並列化する必要があるのは行列生成部行列求解部（ILU 前処理と GMRES 法）の2箇所である。行列生成部の並列化は要素を各プロセッサーに分割し、各部分領域ごとに現在の行列生成コードを用いる。GMRES 法の並列化はベクトル内積、ベクトル行列積の並列化に集約される。これは領域分割に従って定められた分割データを用いて各プロセッサで計算を行い、その後通信すればよい。よって並列化の研究は前処理に集約されると言っても良い。

ILU 前処理の並列化はプロセッサ間に依存関係が大きく存在するためそのまま並列化を行うと非常に複雑で通信回数も膨大になり遅いネットワークでの実現は難しい [2]。本研究では ILU 前処理を不定値行列にも対応するよう簡略化を行い、且つ十分精度良く並列化を実現した。これにより通信回数が少なく、実装も容易でフレキシブルな行列求解部の並列化を実現した。以降はその説明を行う。まず圧力節点包含条件を以下のように定義する。

定義 1.1 (圧力節点包含条件) 全体領域を Ω とし，その部分領域を Ω_i とする．このとき，任意の圧力節点 $Q_\alpha \in \Omega_i$ に対して Q_α とつながるすべての流速節点が Ω_i に含まれるならば「Ω_i は圧力節点包含条件を満たす」ということにする．

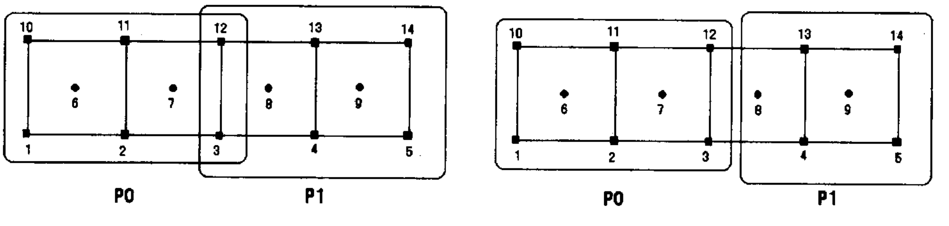


図 2: 圧力節点包含条件を満たす例（左）と満たさない例（右）

そして各プロセッサが担当する各部分領域を圧力節点包含条件を満たすように分割し、各部分領域で個別に前処理を行えば（手法2）、圧力節点包含条件を満たさない各部分領域でそれを行う（手法1）よりも収束性が良くなることを示せた。例えば以下のような定理が示せた。

定理 1.2 ($\Sigma_i T_i$ の固有値の虚部の評価) 各部分領域が圧力節点包含条件を満たすとき、$\Sigma_i T_i$ の固有値の虚部の評価に関しては以下の式が成り立つ.

$$\mathrm{Im}(\lambda) \quad \leq \quad \frac{1}{4}(c + \Sigma_i \frac{1+\beta_i}{\beta_i}) \tag{12}$$

■

ここで、$\Sigma_i T_i$ は A と相似な行列である。これは手法２を用いれば固有値の虚部が抑えられることを示す。一般に、固有値が複素平面上で中心１、半径１の円に入っていれば反復法の収束性が高いことが知られている。

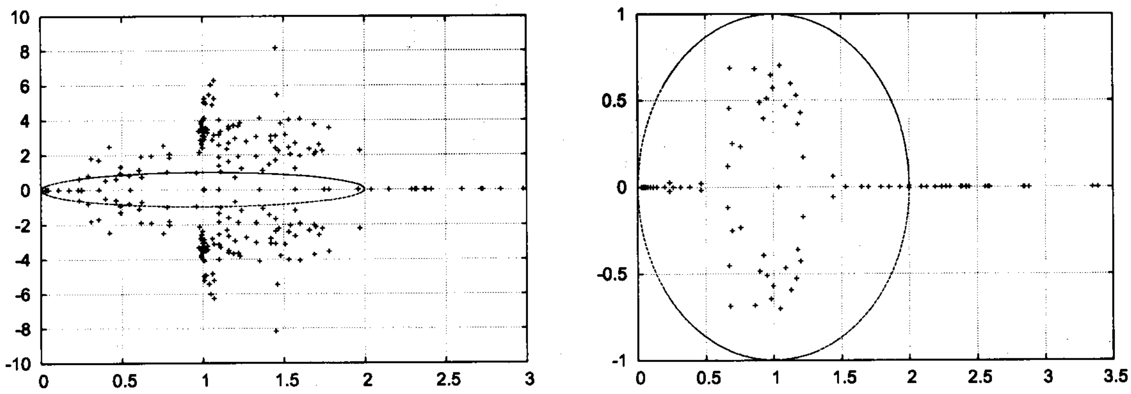


図 3: 手法１を用いた係数行列の固有値分布（左）と手法２を用いた係数行列の固有値分布（右）

よってこの定理により、並列化に用いる各部分領域が圧力節点包含条件を満たすようにすればしない場合に比べて固有値分布が改善され、収束性が向上することが保障されるわけである。

また、手法２からオーバーラップを一重取った方法を手法３とする。各手法における反復回数と速度向上率の比較は図４のようになっている。この結果から手法２と３を用いれば十分な並列化を達成できているといえる。

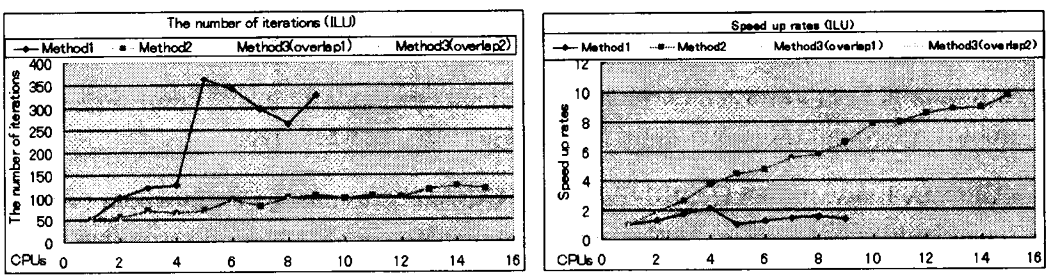


図 4: 各手法を用いた際の反復回数の比較（左）と速度向上率の比較

また、５プロセッサにおける左心室の分割例は図５のようになる。

図 5: 5プロセッサにおける左心室の分割図

参考文献

[1] Washio, T., et.al., Robust and Efficient Preconditioners based on incomplete LU factorization for Fluid-Structure Interaction Problems, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, submitted

[2] S. O. Wille , O. Staff, A. F. D. Loula, Parallel ILU preconditioning,a priori pivoting and segregation of variables for iterative solution of the mixed finite element formulation of the Navier-Stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids. 47, 977-996, 2003.

[3] 久田俊明: 「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」, 丸善 (1992).

[4] 久田俊明, 野口裕久: 「非線形有限要素法の基礎と応用」, 丸善 (1995).

[5] A. Klawonn, L. F. Pavarino, : Overlapping Schwarz methods for mixed linear elasticity and Stokes problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 165, 233-245, 1998.

[6] KURODA Hisayasu, KATAGIRI Takahiro, KANADA Yasumasa : Performance of Automatically Tuned Parallel GMRES(m) Method on DistributedMemory Machines, Proceedings of VecPar2000, pp.251 - 264, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, June, 21 - 23, 2000.

[7] Suzuki K., Study of parallel solution method of linear systems generated by strongly coupled FSI analysis, Master thesis in Japanese, Graduate School of Frontier Science, University of Tokyo, 2004

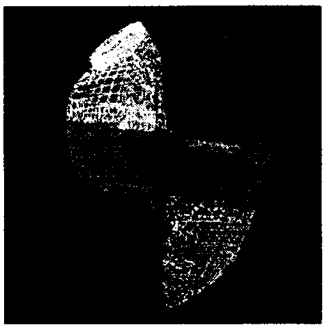


図 5: 5プロセッサにおける左心室の分割図

参考文献

[1] Washio, T., et.al., Robust and Efficient Preconditioners based on incomplete LU factorization for Fluid-Structure Interaction Problems, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, submitted

[2] S. O. Wille , O. Staff, A. F. D. Loula, Parallel ILU preconditioning,a priori pivoting and segregation of variables for iterative solution of the mixed finite element formulation of the Navier-Stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 47, 977-996, 2003.

[3] 久田俊明: 「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」, 丸善 (1992).

[4] 久田俊明, 野口裕久: 「非線形有限要素法の基礎と応用」, 丸善 (1995).

[5] A. Klawonn, L. F. Pavarino, : Overlapping Schwarz methods for mixed linear elasticity and Stokes problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 165, 233-245, 1998.

[6] KURODA Hisayasu, KATAGIRI Takahiro, KANADA Yasumasa : Performance of Automatically Tuned Parallel GMRES(m) Method on DistributedMemory Machines, Proceedings of VecPar2000, pp.251 264, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, June, 21 23, 2000.

[7] Suzuki K., Study of parallel solution method of linear systems generated by strongly coupled FSI analysis, Master thesis in Japanese, Graduate School of Frontier Science, University of Tokyo, 2004

3日目午前のセッションの総括

久藤 衡介（早稲田大学理工学部）

今年度(2004年度)の「発展方程式若手セミナー」は、去る8月9日より12日まで深緑豊かな「おくたま路（青梅市）」にて開催されました。ここでは、幹事の竹内慎吾先生（工学院大）の御指示に基づいて、セミナーの「3日目午前のセッションの総括」を述べさせて頂きます。上記時間帯では講演順に、浦野道雄 氏（早大）、佐藤洋平 氏（早大）、木本恭子 氏（島根大）、松澤寛 氏（都立大）、原本和夫 氏（九大）、渡邉耕二 氏（島根大）の6名の方々が、20分もしくは30分の一般講演をされました。

最初に、各講演の様子と座長を務めさせて頂いた筆者の手短かな感想を述べましょう。浦野氏は、ある非線型常微分方程式が「遷移層解」と呼ばれる短い区間で急激に変化する解をもつことを講演された。自身の研究成果はもとより、遷移層が現れるメカニズムを分かりやすく解説されていたのが印象深い。類似の研究分野の参加者が数名おられたこともあり、質義応答は時間を超過するほど活発なものであった。佐藤氏は、全空間における非線型楕円型方程式について、指定された有界領域内で振動するような解の構成方法を紹介された。変分解析の高度な技術に依った研究成果でありながら、図を多く取り入れたシートを用いた解説で、問題意識を中心に全体像が把握できる講演であった。木本氏は、Liénard 系を一般化した連立常微分方程式の零解の安定性に関して新たな判定条件を提唱された。プロジェクターを用いた講演は、視覚レイアウトが効果的であり証明方針を中心に大変わかりやすい印象をもった。松澤氏は、ある非線型常微分方程式の遷移層解の構成に関する研究成果を紹介された。研究テーマは前述の浦野氏と近いが、非線型項と着眼点は異なり、お二人の講演を比較検討できたことは、この分野を志す参加者にとっては大変欲張りな内容であったろう。松澤氏の講演はいつも活気に溢れ、筆者も注目させて頂くのだが、今回も若手セミナーらしい元気な講演を聴かせてくれた。原本氏は、Timoshenko 系の線形化問題の解に対する減衰評価を紹介された。筆者は、Timoshenko 系に関して全くの素人であったが、証明の流れを丁寧に解説して頂いたおかげで、大変勉強になった。院生の一参加者が、高次元への拡張の可能性を示唆されるなど、質疑応答も大変有意義であったと思う。渡邉氏は、階段関数を係数にもつある非線型常微分方程式が減衰解の存在について講演された。プロジェクターの視覚的レイアウトが、階段関数の形状と解の減衰の関係を明確に印象づけるものであった。既存の研究との比較を明確に意識された分かりやすい講演であったため、必然的に質疑応答は活発であった。

全般的には、明晰かつ若々しい講演の連続で、清々しい知的興奮の時間が過ごせたと思います。殊のほか、講演や質疑応答が活気付いていたのは、該当セッションの講演者が、大学院博士課程が3名、修士課程が3名と「若手」セミナーに相応しい布陣であったためかと思われます。近年、数学に限らず各理系分野で大学院への進学率が著しく上昇しているのは周知の通りです。そういった状況にあって、若手セミナーの講演者の若年化が進むことは自然な流れなのでしょう。この自然な流れに対して逆らうことなく、修士課程を含めたより多くの院生が「一般講演に挑戦しよう」と思えるような雰囲気を、若手セミナーは提供し続けるべきと考えます。

ある双安定型方程式に対する遷移層やスパイクを持つ解の安定性 [1]

早稲田大学 大学院 理工学研究科
博士後期課程 2 年
浦野 道雄[2]

1 序

微小なる正のパラメータ ε を含む反応拡散方程式

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x,u), & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,t) = u_0(x), & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

について考える. ここで, 反応項 f は

$$f(x,u) = u(1-u)(u-a(x)) \tag{1.2}$$

で与えられる空間非一様な関数であり, 関数 a は次の条件を満たす C^2-級の関数である:
(A.1) $0 < a(x) < 1, \quad 0 < x < 1,$
(A.2) $\Sigma := \{x \in (0,1)\,;\, a(x) = 1/2\} \neq \varnothing$ かつ, $a'(x) \neq 0\,(x \in \Sigma),$
(A.3) $\Lambda := \{x \in (0,1)\,;\, a'(x) = 0\}$ は有限集合,
(A.4) $a'(0) = a'(1) = 0.$

(1.1) の第 1 式において $\varepsilon = 0$ とした常微分方程式は $u = 0, a(x), 1$ という 3 つの解を持つ. このうち $u = 0, 1$ の 2 つが安定であることから, (1.2) で与えられる非線形項を双安定な項と呼ぶ.

(1.1) の定常問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x,u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

は, 非線形項の空間非一様性および双安定性の影響を受け, 非常に豊かな解構造を有する. 特に, 遷移層と呼ばれる空間的に非常に小さい区間内で, その値が劇的に変化する層を持つ解や, スパイクと呼ばれるトゲのような形状をした部分を持つ解の存在がよく知られている. そういった遷移層やスパイクを持つ解の中でも, 複数の遷移層やスパイクが幾重にも折り重なったように密集して現れる現象も起こる. これらの密集して現れる遷移層やスパイクと単独で現れる遷移層やスパイクを区別して, 本稿ではそれぞれを **multi-layer**, **multi-spike**, **single-layer**, **single-spike** のように呼ぶ.

本稿では, まず, これらの解の詳しい形状について議論する. その後, 得られた解の形状とその安定性の関係について考察する.

---
[1] 本研究は, 中島主恵先生 (東京海洋大学), 山田義雄先生 (早稲田大学) との共同研究に基づく.
[2] e-mail: michio_u@akane.waseda.jp

2 遷移層やスパイクを持つ解の形状

(1.3) の解で遷移層やスパイクを持つ解を u_ε とする.

u_ε のような振動する解を解析するためには, u_ε と a の交点に注目すると都合がよい. 特に

$$\Xi := \{x \in (0,1)\,;\, u_\varepsilon(x) = a(x)\}$$

とすると, ε が十分小さいならば, ある正定数 C が存在して, $|u_\varepsilon'(\xi)| > C/\varepsilon\,(\xi \in \Xi)$ となることを示すことができる. したがって, 遷移層やスパイクの現れる位置は, Ξ に属する点の現れる位置で特徴付けられる.

Ξ に属する点の近傍で遷移層やスパイクが形成される一方で, そういった点から離れた場所で, $u_\varepsilon(x)$ が 0 または 1 にどれだけ漸近しているかという情報もまた, 遷移層やスパイクの位置を限定するためには, 非常に有効な情報となる.

定理 2.1 ([7]). $\xi_1, \xi_2\,(\xi_1 < \xi_2)$ を Ξ の隣り合う点とし, $\zeta \in (\xi_1, \xi_2)$ において u_ε が極大となるとする. さらに, 距離関数 d_1, d_2 を

$$d_1(x) := x - \xi_1\ (x \in I_1 := [\xi_1, \zeta]), \qquad d_2(x) := \xi_2 - x\ (x \in I_2 := [\zeta, \xi_2])$$

と定める. このとき, $d_i(\zeta)/\varepsilon \to +\infty\,(\varepsilon \to 0)$ ならば, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, ある正定数 $C_1, C_2, r, R\,(C_1 < C_2,\ r < R)$ が存在して

$$C_1 \exp\left(-\frac{Rd_i(\zeta)}{\varepsilon}\right) < 1 - u_\varepsilon(x) < C_2 \exp\left(-\frac{rd_i(x)}{\varepsilon}\right)\ (x \in I_i)\ (i = 1, 2). \tag{2.1}$$

が成立する.

定理 2.1 は $\zeta \in (\xi_1, \xi_2)$ が u_ε の極大を与える点である場合に, $u_\varepsilon(x)$ がどれだけ 1 に漸近するかを表しているが, 逆に ζ が u_ε の極小を与える点である場合にも, $u_\varepsilon(x)$ の 0 への漸近の度合いを表す, (2.1) と同様の不等式

$$C_1 \exp\left(-\frac{Rd_i(\zeta)}{\varepsilon}\right) < u_\varepsilon(x) < C_2 \exp\left(-\frac{rd_i(x)}{\varepsilon}\right)\ (x \in I_i)\ (i = 1, 2). \tag{2.2}$$

が成立する.

これらの不等式 (2.1), (2.2) を用いて, 遷移層やスパイクの現れる位置を限定できる. Σ, Λ に加えて, 集合

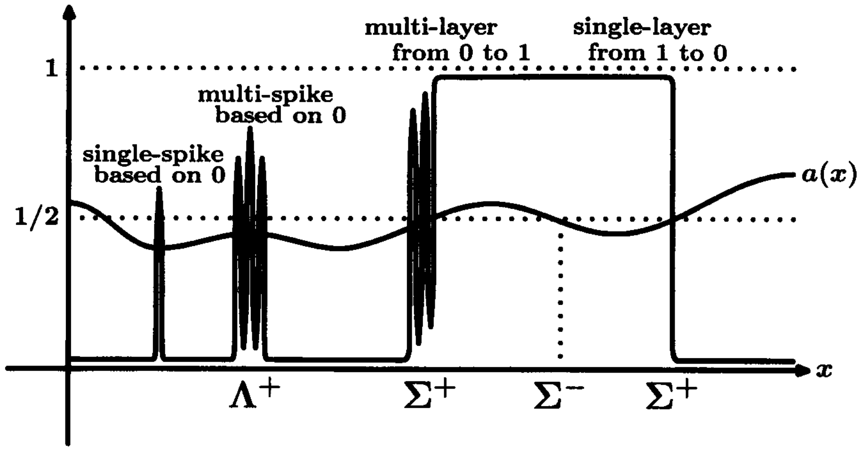
$$\Sigma^+ := \{x \in \Sigma\,;\, a'(x) > 0\}, \quad \Sigma^- := \{x \in \Sigma\,;\, a'(x) < 0\},$$
$$\Lambda^+ := \{x \in \Lambda\,;\, a(x) < 1/2, a''(x) < 0\}, \Lambda^+ := \{x \in \Lambda\,;\, a(x) > 1/2, a''(x) > 0\}$$

を導入すると, 遷移層やスパイクの現れる位置は次の定理により表される:

定理 2.2 ([7]). (i) 遷移層が現れる場所は, Σ の点の近傍に, スパイクが現れる場所は, Λ の点の近傍に限られる.

(ii) 0 から 1 (resp. 1 から 0) への multi-layer の現れる場所は, Σ^+ (resp. Σ^-) の点の近傍に限られる.

(iii) 0 (resp. 1) を土台とするような multi-spike の現れる場所は, Λ^+ (resp. Λ^-) の点の近傍に限られる.



3 遷移層を持つ解の安定性

本節では, (1.3) の解 u_ε で, 定理 2.2 により表現されるような遷移層を持つ解の安定性について議論する. そのため, (1.3) の解 $u = u_\varepsilon$ における線形化固有値問題

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 w'' - f_u(x, u_\varepsilon)w = \lambda w \quad 0 < x < 1, \\ w'(0) = w'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える.

(3.1) は Sturm-Liouville 型の固有値問題であり, 次の 2 つの命題が基本的である.

命題 3.1 (Sturm の比較定理). (3.1) に対して

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to \infty \quad \text{as } k \to \infty \tag{3.2}$$

を満たす固有値 $\{\lambda_k\}$ が存在し, 各 λ_k に対応する固有関数は, $(0, 1)$ 区間上にちょうど $(k-1)$ 個の零点を持つ.

命題 3.2 (Courant の原理). (3.1) の第 k 固有値を λ_k とするとき, λ_k は次のように特徴づけされる:

$$\lambda_1 = \inf_{w \in H^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{H(w)}{\|w\|^2_{L^2(0,1)}},$$

$$\lambda_k = \sup_{\psi_1,\ldots,\psi_{k-1} \in L^2(0,1)} \inf_{w \in X[\psi_1,\ldots,\psi_{k-1}]} \frac{H(w)}{\|w\|^2_{L^2(0,1)}}.$$

ここで,

$$H(w) = \int_0^1 \left\{ \varepsilon^2 |w'(x)|^2 - f_u(x, u_\varepsilon(x))|w(x)|^2 \right\} dx,$$

$$X[\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}] = \{w \in H^1(0,1) \setminus \{0\}\,;\, (w, \psi_j)_{L^2(0,1)} = 0,\ (i = 1, 2, \cdots, k-1)\}.$$

である.

一般に, $\lambda_1 > 0$ であるとき, u_ε は漸近安定である. 一方で, (3.2) で与えられる固有値のうち, 負であるものの個数を **Morse 指数**と呼び, この Morse 指数は解の不安定性の度合いを表す目安となる.

本稿では簡単のため, ある $z \in \Sigma$ と十分小さい $\delta > 0$ に対して $\Xi = \Xi \cap (z-\delta, z+\delta)$ である場合を考える. これは, u_ε がスパイクを持たないこと, および u_ε の持つ遷移層がすべて z の十分小さい近傍に現れることを意味する. ここで, multi-layer は奇数個の遷移層からなることが知られているので,

$$\Xi = \Xi \cap (z-\delta, z+\delta) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m-1}\}, \quad (m \in \mathbb{N},\, m > 1) \tag{3.3}$$

とすることができる.

定理 3.3 (multi-layer を持つ解の安定性). (3.3) を仮定する. このとき, u_ε は不安定であり, u_ε の Morse 指数は m 以上となる.

証明. $z \in \Sigma^+$ の場合を考える. このとき, この multi-layer は 0 から 1 をつなぐようなものである. さらに, u_ε の満たす方程式の性質から, u'_ε の零点を

$$\zeta_0 < \xi_1 < \zeta_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{2m-1} < \zeta_{2m-1}$$

を満たすように選ぶことができる.

このとき, 線形独立な関数の組 $\{w_k\}_{k=1}^m$ で

$$H(w_k) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{3.4}$$

となるものの存在を示せば, 命題 3.2 から結論を得る.

$k = 1, 2, \dots, m$ に対して

$$w_k(x) = \begin{cases} u'_\varepsilon(x) & \text{in } (\zeta_{2k-2}, \zeta_{2k-1}) \\ 0 & \text{in } (0,1) \setminus (\zeta_{2k-2}, \zeta_{2k-1}) \end{cases} \tag{3.5}$$

と定義する. このように w_k を定めると, それぞれ台が分離しているので線形独立である.

以下, 各 w_k が (3.4) を満たすことを示す. (1.3) の上式を x で微分することにより,

$$\varepsilon^2 w''_k(x) + f_u(x, u_\varepsilon(x)) w_k = -f_x(x, u_\varepsilon(x)) = a'(x) u_\varepsilon(x)(1 - u_\varepsilon(x))$$

を得る. 辺々 $(-w_k)$ をかけて, $(0,1)$ 上 x について積分すると

$$H(w_k) = -\int_{\zeta_{2k-2}}^{\zeta_{2k-1}} a'(x) u_\varepsilon(x)(1 - u_\varepsilon(x)) u'_\varepsilon(x) dx \tag{3.6}$$

となる.

今,

$$u'_\varepsilon(x) > 0 \quad \text{in } (\zeta_{2k-2}, \zeta_{2k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

が成立する. 一方, a' は

$$a'(x) > 0 \quad \text{in } (\zeta_{2k-2}, \zeta_{2k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, m-1$$

である. すなわち, $k=1$, $k=m$ に対応する区間 (ζ_0,ζ_1), $(\zeta_{2m-2},\zeta_{2m-1})$ 上では, a' の符号が必ずしも正とは限らない. もしこれらの区間でも, $a'(x)>0$ ならば, (3.6) からただちに証明が完了する.

そこで, (ζ_0,ζ_1) や $(\zeta_{2m-2},\zeta_{2m-1})$ において a' の符号が変化する場合, 特に (ζ_0,ζ_1) おいて a' の符号が変化するとき, w_1 が (3.4) を満たすことを示そう. そのために

$$\zeta_0 < y^* := \max\{x < z_0\,;\, a'(y^*) = 0\}$$

を仮定する. $\Xi \cap (y^*+\delta, z_0-\delta) = \emptyset$ なので, $\xi_1 - y^* > \delta$ となることに注意すると, (2.2) から, ある定数 C, r に対して

$$u_\varepsilon(y^*) < C\exp\left(-\frac{r(\xi_1-y^*)}{\varepsilon}\right) < C\exp\left(-\frac{r\delta}{\varepsilon}\right) \tag{3.7}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
H(w_1) &= -\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} a'(x)u_\varepsilon(x)(1-u_\varepsilon(x))u'_\varepsilon(x)dx \\
&= -\int_{\zeta_0}^{y^*} a'(x)u_\varepsilon(x)(1-u_\varepsilon(x))u'_\varepsilon(x)dx - \int_{y^*}^{\zeta_1} a'(x)u_\varepsilon(x)(1-u_\varepsilon(x))u'_\varepsilon(x)dx \\
&=: \mathrm{I} + \mathrm{II}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

とおく.

まず, I について考える.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &\le M\int_{\zeta_0}^{y^*} u_\varepsilon(x)(1-u_\varepsilon(x))u'_\varepsilon(x)dx \quad (M = \max\{|a(x)|\,;\, x\in[\zeta_0,y^*]\}) \\
&< M\int_{\zeta_0}^{y^*} u_\varepsilon(x)u'_\varepsilon(x)dx = \frac{M}{2}(u_\varepsilon(y^*)^2 - u_\varepsilon(\zeta_0)^2) \\
&= \frac{M}{2}(u_\varepsilon(y^*)+u_\varepsilon(\zeta_0))(u_\varepsilon(y^*)-u_\varepsilon(\zeta_0)) < M(u_\varepsilon(y^*)-u_\varepsilon(\zeta_0)) < Mu_\varepsilon(y^*)
\end{aligned}$$

なので, (3.7) から

$$\mathrm{I} = O(\exp(-1/\varepsilon)) \tag{3.9}$$

を得る.

次に II を考える. 十分小さい $\eta>0$ を固定すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\le -m\int_{y^*+\eta}^{\zeta_1} u_\varepsilon(x)(1-u_\varepsilon(x))u'_\varepsilon(x)dx \quad (m = \min\{a(x)\,;\, x\in[y^*+\eta,\zeta_1]\} > 0) \\
&= -m\int_{u_\varepsilon(y^*+\eta)}^{u_\varepsilon(\zeta_1)} s(1-s)ds
\end{aligned}$$

となる. ここで, (3.7) から, ある $K>0$ について

$$\int_{u_\varepsilon(y^*+\eta)}^{u_\varepsilon(\zeta_1)} s(1-s)ds > K$$

が成立する．よって

$$\mathrm{II} < -mK \tag{3.10}$$

を得る．

以上, (3.8), (3.9), (3.10) から, $k=1$ に対して (3.4) が示される．$k=m$ の場合も, 必要ならば同様にして (3.4) を示すことができる． □

参考文献

[1] S. Ai, X. Chen, and S. P. Hastings, *Layers and spikes in non-homogeneous bistable reaction-diffusion equations*, preprint

[2] S. B. Angenent, J. Mallet-Paret, and L. A. Peletier, *Stable transition layers in a semilinear boundary value problem*, J. Differential Equations, **67**(1987), 212–242.

[3] E. N. Dancer and S. Yan, *Multi-layer solutions for an elliptic problem*, J. Differential Equations, **194**(2003), 382-405.

[4] J. K. Hale and K. Sakamoto, *Existence and stability of transition layers*, Japan J. Appl. Math., **5**(1988), 367–405.

[5] K. Nakashima, *Stable transition layers in a balanced bistable equation*, Differential Integral Equations, **13**(2000), 1025–1238.

[6] K. Nakashima, *Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation*, J. Differential Equations, **191**(2003), 234–276.

[7] M. Urano, K. Nakashima and Y. Yamada, *Transition layers and spikes for a bistable reaction-diffusion equation*, preprint.

Sign changing multi-bump solutions for some singular perturbation problem

佐藤洋平、田中和永　　　早稲田大学院理工学研究科

1.Introduction

次の非線形楕円型方程式の解の存在と多重性について考える。

$$(*)_\lambda \qquad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda^2 a(x) + 1)u = |u|^{p-1}u & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases}$$

ここで p は $1 < p < \infty$ $(N = 1,2)$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ $(N \geq 3)$ を満たす指数とし、$a(x) \in C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ は次の条件 (A1)-(A2) を満たす関数とする。λ はパラメーターであり、十分大きな λ に対する $(*)_\lambda$ の解の存在と $\lambda \to \infty$ のときの $(*)_\lambda$ の解の挙動を考察する。

(A1) $a(x) \geq 0$ in $\mathbf{R}^N$ かつ $\sup_{x \in \mathbf{R}^N} a(x) < \infty$, $\liminf_{|x| \to \infty} a(x) > 0$

(A2) 滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもった有界開集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ が存在して、$a(x)$ が 0 となる x のなす集合は次のように書ける。$\overline{\Omega} = \{x \in \mathbf{R}^N |\ a(x) = 0\ \}$

λ が大きくなると共にポテンシャル $\lambda^2 a(x) + 1$ は $\overline{\Omega}$ の外では無限大に発散していくことに注意する。このことから、$(*)_\lambda$ の解 $u_\lambda(x)$ は $\lambda \to \infty$ のとき次の Dirichlet 問題

$$-\Delta u + u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

の解に収束していくことが予想される。実際、Bartsch-Pankov-Wang [BPW] によってそれは条件 $\sup_\lambda \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda^2 a(x) + 1)u_\lambda^2 dx < \infty$ の下で示されている。またこのような解の族の存在、多重性も得られている。(c.f.[BPW,BW])

以下では、Ω が 2 つの連結成分をもつとき、つまり

(A3) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

のときを考える。各 Ω_i $(i = 1,2)$ での Dirichlet 問題

$$(**)_{\Omega_i} \qquad -\Delta u + u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega_i, \qquad u \in H_0^1(\Omega_i)$$

は少なくとも可算個の解が minimax 法等により存在することが知られている。ここでは $(*)_\lambda$ の正値解の多重度、また $\lambda \to \infty$ のとき極限として現れる $(**)_{\Omega_1}, (**)_{\Omega_2}$ の解の pair について考察した。

2. 結果

まず正値解の存在について次を得た。

定理 1. $N > 3$ とし、(A1)-(A3) を仮定する。このときある $p_0 \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ が存在して指数 p が $p \in (p_0, \frac{N+2}{N-2})$ を満たすとき十分大きな λ に対して $(*)_\lambda$ は少なくとも $\mathrm{cat}(\Omega_1) + \mathrm{cat}(\Omega_2) + \mathrm{cat}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 個の正値解をもつ。

ここで $\mathrm{cat}(\Omega)$ とは Lusternik Schnirelman の category と呼ばれ、次で定義される。

$$\mathrm{cat}(\Omega) = \inf \left\{ k \in \mathbf{N} \;\middle|\; \Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ 各 } A_i \subset \Omega \text{ は } \Omega \text{ 内で 1 点に可縮} \right\}$$

次に正値解と限らず議論を行う。

$$I_{\Omega_i}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega_i} |u|^{p+1} dx : H_0^1(\Omega_i) \longrightarrow \mathbf{R}$$

を $(**)_{\Omega_i}$ に対応する汎関数とする。$I_{\Omega_2}(u)$ に対して Symmetric Mountain Pass Theorem に関連した minimax 値 $b_k^2 = \inf_{\in \Gamma_k} \max_{x \in D_k} I_{\Omega_2}(\gamma(x))$ を考えれば、それは $b_k^2 \to \infty$ を満たす $I_{\Omega_2}(u)$ の臨界値となっている。$I_{\Omega_1}(u)$ に関しては Mountain Pass Theorem によって与えられる minimax 値 c_{MP}^1 を定義する。次が成立する。

定理 2. (A1)-(A3) を仮定する。任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して、ある $(*)_\lambda$ の解 $u_\lambda(x)$ $(\lambda \gg 1)$ が存在して $\lambda \to \infty$ のとき次が成立する。

(i) $\Psi_\lambda(u_\lambda) \to c_{MP}^1 + b_k^2$ $(n \to \infty)$ ただし $\Psi_\lambda(u)$ は $(*)_\lambda$ に対応する汎関数。

(ii) $\lambda_n \to \infty$ なる部分列を選ぶと u_{λ_n} は $H^1(\mathbf{R}^N)$ において収束し、その極限 $u(x)$ は $u|_{\mathbf{R}^N \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} \equiv 0$ をみたし、さらに $u|_{\Omega_i}(x)$ は $(**)_{\Omega_i}$ の解であり $u|_{\Omega_1}(x) > 0$ が成立。

(iii) さらに $I_{\Omega_1}(u)$ あるいは $I_{\Omega_2}(u)$ の臨界値が c_{MP}^1 あるいは b_k^2 の近傍において離散的ならば、

$$I_{\Omega_1}(u|_{\Omega_1}) = c_{MP}^1, \qquad I_{\Omega_2}(u|_{\Omega_2}) = b_k^2$$

が成立する。

注意. 最も簡単な $k = 1$ の場合 ($b_1^2 = c_{MP}^2$ であり 2 つの MP 解を繋ぐ問題) は Ding-Tanaka[DT] において考察されている。

$N = 1$ のときはさらに強い次の結果が成立する。次の定理では $I_{\Omega_1}(u)$ に対する minimax 値 b_k^1 も Symmetric Mountain Pass Theorem により定義する。

定理 3. $N = 1$ とする。このとき任意の $(k_1, k_2) \in \mathbf{N}^2$ に対して、$(*)_\lambda$ の解 $u_\lambda(x)$ $(\lambda \gg 1)$ が存在して $\lambda \to \infty$ のとき次が成立する。

(i) $\Psi_\lambda(u_\lambda) \to b^1_{k_1} + b^2_{k_2}$ $(n \to \infty)$

(ii) $\lambda \to \infty$ のとき u_λ は $H^1(\mathbf{R})$ において収束し、その極限 $u(x)$ は $u|_{\mathbf{R}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} \equiv 0$ をみたし、さらに $u|_{\Omega_i}(x)$ は $(**)_{\Omega_i}$ の解であり、Ω_i 内において丁度 $k_i - 1$ 個の零点をもつ。

(iii) $I_{\Omega_1}(u|_{\Omega_1}) = b^1_{k_1}$, $\quad I_{\Omega_2}(u|_{\Omega_2}) = b^2_{k_2}$

3. 汎関数の変形

方程式 $(*)_\lambda$ に対応する汎関数は

$$\Psi_\lambda(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + (\lambda^2 a(x) + 1)u^2) - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\,dx : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$$

であり、方程式 $(*)_\lambda$ の解はこの汎関数の臨界点として特徴付けられる。ここでは詳しい定理の証明は省略し、定理 1、定理 2 を証明する為に用いた汎関数の変形の方法について紹介する。

(a) 非線形項 $|u|^{p-1}u$ の修正

まず $\Omega_i \subset\subset \Omega_i'$, $\Omega_1' \cap \Omega_2' = \emptyset$ を満たす境界が滑らかな開集合 Ω_i' をとり、delPino Felmer[DF] の方法を使って汎関数を修正する。$0 < \ell_1 < \ell_2$ 対して、次を満たすような $f(\xi) \in C^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ をとる。

$$\begin{aligned} &f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi \quad \text{for } |\xi| \le \ell_1, \\ &0 \le f'(\xi) \le \frac{2}{3} \quad \text{for all } \xi \in \mathbf{R}, \\ &f(\xi) = \frac{1}{2}\xi \quad \text{for } |\xi| \ge \ell_2, \end{aligned}$$

定理 1 の状況の下では

$$g(x,\xi) = \begin{cases} |\xi|^{p-1}\xi & \text{if } x \in \Omega_1' \cup \Omega_2' \text{ and } \xi \ge 0, \\ f(\xi) & \text{if } x \in \mathbf{R}^N \setminus (\Omega_1' \cap \Omega_2') \text{ and } \xi \ge 0, \\ 0 & \text{if } \xi < 0. \end{cases}$$

定理 2 の状況の下では

$$g(x,\xi) = \begin{cases} |\xi|^{p-1}\xi & \text{if } x \in \Omega_1' \text{ and } \xi \ge 0, \\ f(\xi) & \text{if } x \in \Omega_1' \text{ and } \xi < 0, \\ |\xi|^{p-1}\xi & \text{if } x \in \Omega_2' \\ f(\xi) & \text{if } x \in \mathbf{R}^N \setminus (\Omega_1' \cap \Omega_2'). \end{cases}$$

と置き次のように汎関数を修正する。

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + (\lambda^2 a(x)+1)u^2 dx - \int_{\mathbf{R}^N} G(x,u)dx$$
$$\frac{1}{2}||u||^2_{\lambda,\mathbf{R}^N} - \int_{\mathbf{R}^N} G(x,u)dx.$$

但し

$$G(x,\xi) = \int_0^\xi g(x,s)ds,$$

$$||u||^2_{\lambda,\mathbf{R}^N} = \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + (\lambda^2 a(x)+1)u^2)dx.$$

このとき汎関数 $\Phi_\lambda(u)$ は (PS)-条件を満たす。また $\Phi_\lambda(u)$ の臨界点 $u_\lambda(x)$ が

$$|u_\lambda(x)| \le \ell_1 \quad \text{for} \quad x \in \mathbf{R}^N \backslash (\Omega_1' \cup \Omega_2')$$

を満たし，定理 2 の状況の下ではさらに

$$u_\lambda(x) \ge \ell_1 \quad \text{for} \quad x \in \Omega_1'$$

を満たすとすると $u_\lambda(x)$ は修正前の汎関数 $\Psi_\lambda(u)$ の臨界点でもあることに注意する。

(b) $H^1(\Omega_1') \oplus H^1(\Omega_2')$ 上の問題への変形

$\Phi_\lambda(u)$ の臨界点を見つけるために、$H^1(\mathbf{R}^N)$ 上の問題を $H^1(\Omega_1') \oplus H^1(\Omega_2')$ 上の問題に変形する。

$(u_1,u_2) \in H^1(\Omega_1') \oplus H^1(\Omega_2')$ に対して次の最小化問題を考える。

$$I_\lambda(u_1,u_2) = \inf_{w \in A_{u_1,u_2}} \Phi_\lambda(w),$$

ここで

$$A_{u_1,u_2} = \{w \in H^1(\mathbf{R}^N);\, w = u_i \text{ on } \Omega_i'\}.$$

この最小化問題は λ が十分大きいとき、ただひとつの minimizer $w_\lambda(u_1,u_2) \in A_{u_1,u_2}$ によって達成され、さらに次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} -\Delta w + (\lambda^2 a(x)+1)w = |w|^{p-1}w \quad \text{in } \mathbf{R}^N \backslash (\Omega_1' \cap \Omega_2'), \\ \qquad w = u_i \quad \text{on } \Omega_i', \\ \qquad w \in H^1(\mathbf{R}^N \backslash (\Omega_1' \cup \Omega_2')). \end{cases}$$

したがって λ が十分大きいとき、

$$I_\lambda(u_1,u_2) = \Phi_\lambda(w_\lambda(u_1,u_2))$$

は $H^1(\Omega'_1)\oplus H^1(\Omega'_2)$ 上の汎関数と思える。さらに $I_\lambda(u_1,u_2)$ は C^2-級になり (PS)-条件も満たす。また $(u_1,u_2)\in H^1(\Omega'_1)\oplus H^1(\Omega'_2)$ が $I_\lambda(u_1,u_2)$ の臨界点であることと、$w_\lambda(u_1,u_2)$ が $\Phi_\lambda(u)$ の臨界点であることは同値であることがわかる。

(c) $\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}$ 上の問題への変形

次に $H^1(\Omega'_1)\oplus H^1(\Omega'_2)$ 上の問題を無限次元トーラス $\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}$ 上の問題に変形する。ここで

$$\Sigma_{i,\lambda}=\{v\in H^1(\Omega'_i);\ ||v||_{\lambda,\Omega'_i}=1\}\quad \text{for } i=1,2.$$

まず $(v_1,v_2)\in\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}$ に対して $J_\lambda:\ \Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}\to(0,\infty]$ を次で定義する。

$$J_\lambda(v_1,v_2)=\sup_{s,t\geq 0} I_\lambda(sv_1,tv_2).$$

ここで $M>0$ に対して

$$[J_\lambda\leq M]_{\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}}=\{(v_1,v_2)\in\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda};\ J_\lambda(v_1,v_2)\leq M\}$$

と置く。このとき任意の $(v_1,v_2)\in[J_\lambda\leq M]_{\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}}$ に対して λ が十分大きいとき

$$(s,t)\mapsto I_\lambda(sv_1,tv_2)$$

は一意的な最大点をもち、それを $(s_\lambda(v_1,v_2),t_\lambda(v_1,v_2))$ と書くと、

$$J_\lambda(v_1,v_2)=I_\lambda(s_\lambda(v_1,v_2)v_1,t_\lambda(v_1,v_2)v_2):[J_\lambda\leq M]_{\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}}\to\mathbf{R}$$

は C^1-級であり (PS)-条件も満たす。また $(v_1,v_2)\in\Sigma_{1,\lambda}\oplus\Sigma_{2,\lambda}$ が $J_\lambda(v_1,v_2)$ の臨界点であるとき、$(s_\lambda(v_1,v_2)v_1,t_\lambda(v_1,v_2)v_2)$ は $I_\lambda(u_1,u_2)$ の臨界点であることがわかる。さらに、$J_\lambda(v_1,v_2)$ の臨界点は $\lambda\to\infty$ としたとき各 Ω_i 上で 0 に収束するような $I_\lambda(u_1,u_2)$ の臨界点には対応しない。

参考文献

[BPW] T.Bartsch,A.Pankov,Z.-Q.Wang :Nonliner Schrödinger equations with steep potential well.Comm.Contemp.Math.3,549-569(2002)

[BW] T. Bartsch, Z.-Q. Wang :Multiple positive solutions for a nonliner Schrödinger equations.Z.Angew.Math.Phys.51,366-384(2000)

[DF] M. del Pino and P. Felmer Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Calc. Var. Partial Differential Equations 4 (1996), no. 2, 121–137.

[DT] K.Tanaka,Ding Y.H.:Multiplicity of positive solutions of a nonliner Schrödinger equations.Manuscripta Math.112,109-135(2003)

一般化された Liénard 方程式系の零解の大域的漸近安定性について

島根大学大学院 総合理工学研究科
木本　恭子

1 序文

次の一般化された Liénard 方程式系

$$\begin{cases} x' = h(y) - F(x), \\ y' = -p(t)g_1(x) - q(t)g_2(x) \end{cases} \tag{E}$$

の零解が大域的漸近安定 [GAS] であるための十分条件を考える．ただし，$' = d/dt$ とし，関数 $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$, $F(x)$, $h(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．また，関数 $p(t)$, $q(t)$ はある定数 $\alpha > 0$ に対して区間 $[\alpha, \infty)$ 上で定義され，微分可能な非負の関数であるとする．さらに，初期値に関する方程式系 (E) の解の一意性を保証する．方程式系 (E) の零解が [GAS] であるとは

(i) 方程式系 (E) の零解が局所的に安定である

(ii) すべての解が零解に漸近する

ことをいう．

方程式系 (E) は自励系

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x) \end{cases} \tag{1}$$

を含んでいる．この方程式系は Liénard 方程式系と呼ばれる (これは van der Pol 方程式系を一般化したものとして有名である)．Burton [1] や Graef [2] は，関数 $g(x)$ と $F(x)$ がそれぞれ

$$xg(x) > 0 \text{ and } xF(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0$$

を満たしているとき，方程式系 (1) の零解が大域的漸近安定であるための必要十分条件は

$$\limsup_{x\to\infty} \left\{ \int_0^x g(\xi)d\xi + F(x) \right\} = +\infty \quad \text{and} \quad \limsup_{x\to-\infty} \left\{ \int_0^x g(\xi)d\xi - F(x) \right\} = +\infty$$

であることを示した．

本研究でも同様に，関数 $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ と $F(x)$ はそれぞれ

$$xg_i(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0 \quad (i = 1, 2) \tag{A_1}$$

$$xF(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0 \tag{A_2}$$

を満たしているとする．ここで

$$G_i(x) = \int_0^{x_i} g_i(\xi)d\xi \quad (i = 1, 2)$$

を定義する．また，方程式系 (E) のある正の半解軌道が特性曲線と交わらずに無限遠点に流れれば，明らかに方程式系 (E) の零解は大域的漸近安定ではない．したがって，方程式系 (E) のすべての正の半解軌道が特性曲線と交わることが不可欠な仮定である．ここでいう，方程式系 (E) の特性曲線とは集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : h(y)-F(x)=0\}$ のことである．次に，関数 $h(y)$ は

$$yh(y)>0 \quad \text{if } y\neq 0 \tag{A_3}$$

$$\frac{d}{dy}h(y)>0 \tag{A_4}$$

を満たすとする．これらの仮定により，関数 $h(y)$ の逆関数が存在し，それを $h^{-1}(\cdot)$ とする．このとき，方程式系 (E) の特性曲線は

$$y=h^{-1}(F(x))$$

と表すことができる．ここでの注意点は，特性曲線 $y=h^{-1}(F(x))$ の定義域が関数 $F(x)$ と $h(y)$ の形状によって異なり，必ずしも $\mathbb{R}$ 全体ではないことである．ここで簡単のため，2つの領域

$$D^+=\big\{(x,y)\colon x\geq 0 \text{ and } y>h^{-1}(F(x))\big\},$$
$$D^-=\big\{(x,y)\colon x\leq 0 \text{ and } y<h^{-1}(F(x))\big\}$$

を定義する．

方程式系 (E) の零解が [GAS] であるための十分条件を与える前に，まず方程式系 (E) において $h(y)=y$ とした非自励な Liénard 方程式系

$$\begin{cases} x'=y-F(x), \\ y'=-p(t)g_1(x)-q(t)g_2(x) \end{cases} \tag{P}$$

を考える．Sugie and Amano [3] は方程式系 (P) の零解が [GAS] であるための十分条件を与えた．

Theorem A (Sugie and Amano). 条件 $(A_1),(A_2)$ を仮定する．さらに

$$p'(t)\leq 0 \quad \text{for } t\geq\alpha \tag{A_5}$$

$$\lim_{t\to\infty}p(t)>0 \tag{A_6}$$

$$q(t)xg_2(x)\geq q'(t)G_2(x) \quad \text{for } t\geq\alpha \text{ and } x\in\mathbb{R} \tag{A_7}$$

$$0\leq q(t)<\infty \quad \text{for } t\geq\alpha \tag{A_8}$$

$$p(t)xg_1(x)\geq\frac{1}{4}F^2(x) \quad \text{for } t\geq\alpha \text{ and } x\in\mathbb{R} \tag{A_{9^*}}$$

を満たすならば，方程式系 (P) の零解は大域的に漸近安定である．

非自励な Liénard 方程式系の零解の大域的漸近安定性に関する結果は少ない．その理由の一つに，自励系と比べて，非自励な場合は正の半解軌道は非常に複雑な振る舞いをするということが挙げられる．したがって，Theorem A は大変有用な結果であるといえる．しかし，Theorem A は方程式系 (P) を対象としており，方程式系 (E) においては $h(y)=y$ しか適応できないので改良する必要がある．

2 主定理と証明の概略

Holling 型や Ivlev 型などの生態モデルを考えるとき，方程式系 (P) に同値変換されない方程式系はたくさんある．そのため本研究では，Theorem A の改良を試み，関数 $h(y)$ が $h(y)=y$ 以外の時にも適用できる結果を与える．

Theorem 1. 条件 $(A_1)-(A_8)$ を仮定する．また，方程式系 (E) の任意の正の半解軌道は特性曲線と交わると仮定する．さらに

$$p(t)xg_1(x) \geq \frac{1}{4}\frac{y}{h(y)}F^2(x) \quad \text{for } t \geq \alpha,\ x \in \mathbb{R} \text{ and } y \neq 0 \tag{A_9}$$

を満たすならば，方程式系 (E) の零解は大域的漸近安定である．

Theorem 1 の証明の概略 方程式系 (E) の正の半解軌道が特性曲線 $y=h^{-1}(F(x))$ と交わるための必要十分条件を与える．次に，方程式系 (E) に極座標変換を行うと

$$\begin{cases} r' = rh(\sin\theta)\cos\theta - F(r\cos\theta)\cos\theta - \big\{p(t)g_1(r\cos\theta)+q(t)g_2(r\cos\theta)\big\}\sin\theta, \\ \theta' = -\dfrac{h(\sin\theta)\sin\theta}{r} + \dfrac{F(r\cos\theta)}{r}\sin\theta - \dfrac{p(t)g_1(r\cos\theta)+q(t)g_2(r\cos\theta)}{r}\cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

を得る．$(x(t),y(t))$ を方程式系 (E) の任意の非自明な解とし，解 $(x(t),y(t))$ に対応する方程式系 (2) の解を $(r(t),\theta(t))$ とすると，$x(t)\neq 0$, $y(t)\neq 0$ である限り

$$\begin{aligned}\theta'(t) = &-\frac{h(y(t))}{y(t)}\left(\sin\theta(t) - \frac{y(t)F(x(t))}{2x(t)h(y(t))}\cos\theta(t)\right)^2 \\ &+ \left(\frac{y(t)F^2(x(t))}{4h(y(t))} - p(t)x(t)g_1(x(t))\right)\frac{\cos^2\theta(t)}{x^2(t)}\end{aligned}$$

となる．ここで, 条件 (A_2) を使うと

$$\theta'(t) \leq -\frac{h(y(t))}{y(t)}\left(\sin\theta(t) - \frac{y(t)F(x(t))}{2x(t)h(y(t))}\cos\theta(t)\right)^2 \leq 0$$

を得る．ゆえに $\theta(t)$ は減少関数である．これは解 $(x(t),y(t))$ に対応している (E) の正の半解軌道が原点の周りを時計回りに回転することを意味している．より正確に言えば，回転は次の 2 つ

(a) 原点のまわりを時計回りに無限回回転する場合

(b) 直線 $y=(\tan\hat{\theta})x$ に漸近する場合

に分類することができる．ただし，$\hat{\theta}$ は

$$\theta(t) \searrow \hat{\theta} \quad \text{as } t \to \infty$$

を満たす定数である．この事実を証明する手順は以下の通りである．まず，方程式系 (E) の正の半解軌道は原点を除く任意の内点に収束しないことを示す．次に，Liapunov 関数を用いて，方程式系 (E) の零解が安定であることを示す．最後に，方程式系 (E) のすべての解が零解に漸近すること上記の 2 つに分けて証明する．Case (a) では，Liapunov 関数と相平面解析を行い，方程式系 (E) の正の半解軌道が原点に漸近することを示す．Case (b) では，方程式系 (E) の正の半解軌道が領域 $\{(x,y)\colon x>0 \text{ and } \tan\hat{\theta}<y/x<\tan(\hat{\theta}+\varepsilon)\}$ または領域 $\{(x,y)\colon x<0 \text{ and } \tan\hat{\theta}<y/x<\tan(\hat{\theta}+\varepsilon)\}$ の内部を通過しながら原点に漸近していくことを示す． □

3 補足（解が特性曲線と交わる条件）

この節では，Theorem 1 の証明において仮定した，方程式系 (E) の正の半解軌道が特性曲線 $y=h^{-1}(F(x))$ と交わるための条件について補足を与える．まず，方程式系 (E) の正の半解軌道が特性曲線 $y=h^{-1}(F(x))$ と交わるための条件を導くために，自励系

$$\begin{cases} x' = h(y) - F(x), \\ y' = -ag_1(x) \end{cases} \tag{E^*}$$

の正の半解軌道の漸近挙動を考える．ただし，定数 a は

$$p(t) \geq a \quad \text{for } t \geq \alpha$$

を満たすとする．このような定数 a は，条件 (A_5) と (A_6) から選ぶことができる．

条件 (A_1) と (A_2) より，任意の $(x,y)\in D^+$ に対して

$$\frac{-p(t)g_1(x)-q(t)g_2(x)}{h(y)-F(x)} \leq \frac{-ag_1(x)}{h(y)-F(x)} \leq 0$$

となる．したがって，方程式系 (E) と方程式系 (E^*) の解軌道の傾き dy/dx を考慮すると，方程式系 (E^*) の正の半解軌道が特性曲線と交わるならば，方程式系 (E) の正の半解軌道も特性曲線と交わることがわかる．領域 D^- においても，方程式系 (E) と方程式系 (E^*) の正の半解軌道の関係は同様である．

Villari [4] や Villari and Zanolin [5] は，方程式系 (1) において，関数 $g(x)$ が

$$xg(x) > 0 \text{ if } x \neq 0 \tag{3}$$

を満たし，関数 $F(x)$ が

$$\begin{aligned} &F(x) > -c > -\infty \quad \text{if } x>0, \\ &F(x) < c < +\infty \quad \text{if } x<0 \end{aligned} \tag{4}$$

となるような正の定数 c を持つと仮定したとき，方程式系 (1) の正の半解軌道が特性曲線 $y=F(x)$ と交わるための必要十分条件を与えている．

Theorem B. 条件 (3), (4) を仮定する．このとき，領域 D^+ (または D^-) 内に初期点

をもつ方程式系 (1) の正の半解軌道が特性曲線 $y = F(x)$ と交わるための必要十分条件は

$$\limsup_{x\to\infty}\{G(x)+F(x)\} = +\infty$$

$$\left(\text{または}\quad \limsup_{x\to-\infty}\{G(x)-F(x)\} = +\infty\right)$$

である．ただし

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$$

とする．

Theorem B は方程式系 (1) を対象としているため，方程式系 (E^*) において $h(y) = y$ のみ適用できる．しかし，方程式系 (E^*) の特性曲線は方程式系 (1) の特性曲線と比較すると非常に複雑な振る舞いをするため， Theorem B だけではまかないきれない．

方程式系 (E^*) の特性曲線は大別すると次の 3 つ

◎ $\lim_{y\to\infty} h(y) = \infty$ (B_1)

◎ $^\exists H > 0;\ \lim_{y\to\infty} h(y) = H$ and $^\exists\omega > 0;\ ^\forall x > \omega,\ F(x) < H$ (B_2)

◎ $^\exists H > 0;\ \lim_{y\to\infty} h(y) = H$ and $^\forall\omega > 0,\ ^\exists x^* > \omega;\ F(x^*) \geq H$ (B_3)

に分けられる．関数 $F(x)$ と $h(y)$ が条件 (B_3) を満たしているとき，領域 D^+ の形状と方程式系 (E^*) の正の半解軌道のベクトル場から考えると，領域 D^+ 内に初期点をもつ方程式系 (E^*) の正の半解軌道は必ず特性曲線 $y = h^{-1}(F(x))$ と交わることがわかる．したがって，関数 $F(x)$ と $h(y)$ が条件 (B_1) または (B_2) を満たしているときを議論しなければならない．その場合には次の結果が与えられる．

Theorem 2. 条件 (A_1) - (A_4) を仮定する．さらに条件 (B_1) または (B_2) を仮定する．このとき，領域 D^+ 内に初期点をもつ方程式系 (E^*) の正の半解軌道が特性曲線 $y = h^{-1}(F(x))$ と交わるための必要十分条件は

$$\limsup_{x\to\infty}\{G_1(x) + h^{-1}(F(x))\} = +\infty \tag{5}$$

である．

Theorem 2 の証明の概略 (必要性) 背理法を用いる．条件

$$\limsup_{x\to\infty}\{G_1(x) + h^{-1}(F(x))\} = +\infty$$

を仮定し，方程式系 (E^*) の正の半解軌道が特性曲線 $y = h^{-1}(F(x))$ と交わらないことを示す．

(十分性) 条件 (5) を

(i) $G_1(x) \to \infty$ as $x \to \infty$

または

(ii) $\quad h^{-1}(F(x)) \to \infty \quad$ as $\ x \to \infty$

に分けて証明する．Case (i) では，任意の定数 $k > 0$ に対して，曲線

$$W(x,y) = \int_0^y h(\eta)d\eta + aG_1(x) = k$$

を定義する．条件 (A_3) と (A_4) により曲線 $W(x,y)$ は閉曲線である．方程式系 (E^*) の正の半解軌道のベクトル場と $W(x,y)$ の導関数が負であることを用いて，方程式系 (E^*) の正の半解軌道が特性曲線 $y = h^{-1}(F(x))$ と交わることを示す．Case (ii) では，方程式系 (E^*) の正の半解軌道の傾きと $h^{-1}(F(x))$ が非有界であることから，方程式系 (E^*) の正の半解軌道が特性曲線 $y = h^{-1}(F(x))$ と交わることを示す． □

参考文献

[1] T. A. Burton, *On the equation* $x'' + f(x)h(x')x' + g(x) = e(t)$, Ann. Mat. Pura Appl. **85** (1970), 277–285.

[2] J. R. Graef, *On the generalized Liénard equation with negative damping*, J. Differential. Eqns. **12** (1972), 34–62.

[3] J. Sugie and Y. Amano, *Global asymptotic stability of nonautonomous systems of Liénard type* , J. Math. Appl. **289** (2004), 673–690.

[4] G. Villari, *On the qualitative behaviour of solution of Liénard equation*, J. Differential. Eqns. **67** (1987), 269–277.

[5] G. Villari and F. Zanolin, *On a dynamical system in the Liénard plane. Necessary and sufficient conditions for the intersection with the vertical isocline and applications*, Funkcial. Ekvac. **33** (1990), 19–38.

Stable transition layers in a balanced bistable equation with degeneracy

Hiroshi Matsuzawa*
Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University,
Minami-Osawa 1-1, Hachioji-shi, Tokyo 192-0397, Japan

In this article, we state the results in [5]. Consider steady-state solutions for the following problem:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} = f(x,u), & (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

where ε is a positive number and $f(x,u)$ is given by

$$f(x,u) = -u(u-\alpha(x))(u+\alpha(x)).$$

Here $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ is a positive C^1 function and a C^2 function except for a finite number of points on $[0,1]$. Such $f(x,u)$ is a typical example of the so-called bistable nonlinearity and we note that $f(x,u)$ satisfies that

$$\int_{-\alpha(x)}^{\alpha(x)} f(x,u)du = 0.$$

In this sense, we call the bistable function f to be *balanced.*

Since we are interested in the stationary problem, we consider the following problem:

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \begin{cases} -\varepsilon^2 u_{xx} = f(x,u) & \text{in } (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

It is easily shown that there exist stable solutions $u_\varepsilon^{(+)}$, $u_\varepsilon^{(-)}$ for (P_ε) such that $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon^{(+)}(x) = \alpha(x)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon^{(-)}(x) = -\alpha(x)$ uniformly in $x \in [0,1]$ (see [7, Proposition 2.2]). The aim of this paper is to find stable solutions u_ε with transition layers.

*hmatsu@comp.metro-u.ac.jp

Nakashima [7] has studied the problem (P_ε) when α is smooth and nondegenerate, i.e. $\alpha'' \neq 0$ at each local minimum of α. In this paper we consider the case that α degenerates on an interval I of positive measure where α takes its local minimum, that is, $\alpha'(x) = 0$ on I. Nakashima and Tanaka [9] also have studied such a degenerate case and obtain solutions with a single layer and multi-layers(clustering layers) by using a variational method. However the stability of these solutions were not discussed. In this paper we obtain a stable solution with transition layers by a sub-supersolution method of Brezis and Nirenberg type (see [2]) and precise profile of the solution near the interval where α degenerates by using a blow up argument inspired by the arguments in Dancer and Shusen Yan [3].

Now we state precise conditions on α.

Conditions . (C1) α is a positive function on $[0,1]$ and $\alpha \in C^1[0,1]$.

(C2) There exist a finite number of points $x_1, x_2, \cdots, x_{2m} \in (0,1)$ $(m \geq 1)$ such that

(i) $\alpha'(x) = 0$ on $I_i := [x_{2i-1}, x_{2i}]$ for $i = 1, \cdots, m$;

(ii) $\alpha \in C^2((x_{2i}, x_{2i+1}))$ for each $i = 0, 1, \cdots, m$, and there exist limits

$$\alpha''(x_{2i-1} - 0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\alpha'(x_{2i-1}) - \alpha'(x_{2i-1} - h)}{h}$$

and

$$\alpha''(x_{2i} + 0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\alpha'(x_{2i-1} + h) - \alpha'(x_{2i})}{h}$$

for each $i = 1, \cdots, m$;

(iii) $\alpha''(x_{2i-1} - 0) > 0$ and $\alpha''(x_{2i} + 0) > 0$ for $i = 1, \cdots, m$.

Hereafter we denote $\alpha''(x_{2i-1})$, $\alpha''(x_{2i})$ instead of $\alpha''(x_{2i-1}-0)$, $\alpha''(x_{2i}+0)$.

Remark . The condition (i) of (C2) implies that $\alpha(x) = const.$ on I_i and if $x_{2i-1} = x_{2i}$ for $i = 1, \cdots, m$, this is the case as in Nakashima [7].

We set $L = \{x_1, x_2, \cdots, x_{2m}\}$ and $K = \{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$. We choose any subset $\hat{K}$ of K. We denote $\hat{K} = \{\hat{I}_1, \hat{I}_2, \cdots, \hat{I}_l\}$ with $1 \leq l \leq m$ and $\hat{I}_i = [x'_{2i-1}, x'_{2i}]$ for each $i = 1, \cdots l$ where we use the notation $x'_0 = 0$, $x'_{2l+1} = 1$. We consider the following two cases:

$$\text{(I)} \quad \Omega_1 = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{2l-1}{2}\right]} (x'_{4i}, x'_{4i+1}), \ \Omega_2 = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{2l-3}{2}\right]} (x'_{4i+2}, x'_{4i+3})$$

$$\text{(II)} \quad \Omega_1 = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{2l-3}{2}\right]} (x'_{4i+2}, x'_{4i+3}), \ \Omega_2 = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{2l-1}{2}\right]} (x'_{4i}, x'_{4i+1})$$

and we set

$$\Omega_i^\delta = \{x \in (0,1) | \text{dist}(x, \partial\Omega_i \backslash \{0,1\}) > \delta\}.$$

First, we construct a solution to (P_ε) that may have transition layers.

Theorem 1. *Assume that* (C1) *and* (C2) *hold. Then for sufficiently small* $\varepsilon > 0$*, there exists a family of stable solutions* $\{u_\varepsilon\}$ *of* (P_ε) *such that*

$$\begin{aligned} |-\alpha(x) - u_\varepsilon(x)| &< \sigma \text{ in } \Omega_1^\delta, \\ |\alpha(x) - u_\varepsilon(x)| &< \sigma \text{ in } \Omega_2^\delta, \end{aligned}$$

where $\sigma = \sigma(\varepsilon) = o_\varepsilon(1)$*,* $\delta = \delta(\varepsilon) = o_\varepsilon(1)$*.*

Moreover u_ε *is a local minimizer of the functional*

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{2}|u_x|^2 - F(x,u)dx,$$

where $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$*.*

Next theorem describes the precise profile of u_ε near the intervals where α degenerates.

Theorem 2. *Consider the case (I). Let* u_ε *be the solution of* (P_ε) *obtained in Theorem 1.1. Then* u_ε *has exactly one layer in* $[x'_{2i-1} - 2\varepsilon^{1-\rho}, x'_{2i} + 2\varepsilon^{1-\rho}]$ *for any small* $0 < \rho < 1$ *and for each* $i = 1, 2, \cdots, l$*. That is for any small* $\eta > 0$*, there exists* $\varepsilon_0 > 0$*, such that for any* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$*, the followings hold.*

(1) *For each* $i = 1, 2, \cdots, l$*, there exists the unique pair of numbers* $\{t_{\varepsilon,1,i}, t_{\varepsilon,2,i}\}$ *such that* $x'_{2i-1} - 2\varepsilon^{1-\rho} < t_{\varepsilon,1,i} < t_{\varepsilon,2,i} < x'_{2i} + 2\varepsilon^{1-\rho}$ *and the followings hold.*

    (a) *If* i *is even number, the followings hold;*

$$\begin{cases} u_\varepsilon < -\overline{\alpha}_i + \eta \ on \ [x'_{2i-1} - 2\varepsilon^{1-\rho}, t_{\varepsilon,1,i}), \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,1,i}) = -\overline{\alpha}_i + \eta, \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,2,i}) = \overline{\alpha}_i - \eta, \\ u_\varepsilon > \overline{\alpha}_i - \eta \ on \ (t_{\varepsilon,2,i}, x'_{2i} + 2\varepsilon^{1-\rho}]. \end{cases}$$

(b) *If i is odd number, the followings hold;*

$$\begin{cases} u_\varepsilon > \overline{\alpha}_i - \eta \text{ on } [x'_{2i-1} - 2\varepsilon^{1-\rho}, t_{\varepsilon,1,i}), \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,1,i}) = \overline{\alpha}_i - \eta, \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,2,i}) = -\overline{\alpha}_i + \eta, \\ u_\varepsilon < -\overline{\alpha}_i + \eta \text{ on } (t_{\varepsilon,2,i}, x'_{2i} + 2\varepsilon^{1-\rho}]. \end{cases}$$

Here $\overline{\alpha_i} = \alpha(x_{2i-1}) = \alpha(x_{2i})$.

(2) *If i is even number, u_ε is increasing on $(t_{\varepsilon,1,i}, t_{\varepsilon,2,i})$ and if i is odd number, u_ε is decreasing on $(t_{\varepsilon,1,i}, t_{\varepsilon,2,i})$.*

(3) $0 < R_1 \leq \frac{t_{\varepsilon,2,i} - t_{\varepsilon,1,i}}{\varepsilon} \leq R_2$, *where R_1 and R_2 are two constants independent of $\varepsilon > 0$.*

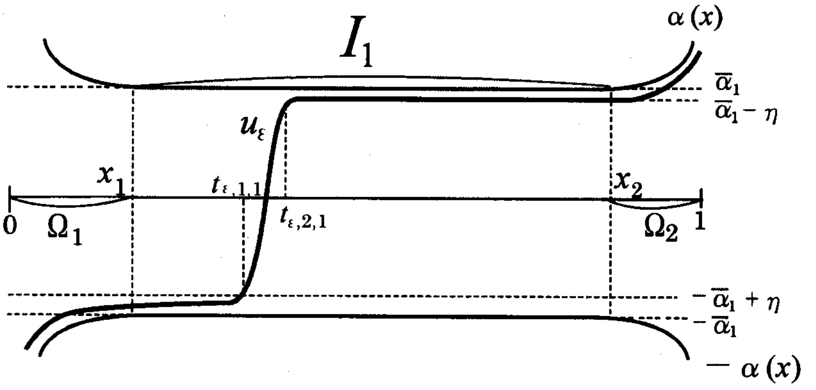


Figure 1: The case when $L = \{x_1, x_2\}$, $I_1 = [x_1, x_2]$, $K = \{I_1\}$ and we choose $\hat{K} = \{\hat{I}_1\} = \{I_1\}$ and case (I).

Remark . If we take the case (II), the statement (a) of (1) holds if i is odd number and statement (b) of (1) holds if i is even number. And if i is odd number, u_ε is increasing on $(t_{\varepsilon,1,i}, t_{\varepsilon,2,i})$ and if i is even number, u_ε is decreasing on $(t_{\varepsilon,1,i}, t_{\varepsilon,2,i})$.

Remark . Since $\{t_{\varepsilon,1,i}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ and $\{t_{\varepsilon,2,i}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ are bounded sequences, from the part (3) of Theorem 1.2, we may assume that there exists $t_i \in [x'_{2i-1}, x'_{2i}]$ such that $t_{\varepsilon,1,i}, t_{\varepsilon,2,i} \to t_i$ as $\varepsilon \to 0$. But the exact location of t_i is not yet known when $x'_{2i} - x'_{2i-1} > 0$ and this is an open problem.

References

[1] S. B. Angenent, J. Mallet-Paret, and L. A. Peletier, Stable transition layers in a semilinear boundary value problem, J. Differential Equations, **67** (1987), 212-242.

[2] H. Brezis, L. Nirenberg, H^1 versus C^1 local minimizers, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **317** (1993) 465-472.

[3] E. N. Dancer, S. Yan, Construction of various type of solutions for an elliptic problem, to appear in Calculus of Variations and Partial Differential Equations.

[4] E. H. Lieb, M. Loss, "Analysis" second edition, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathmatics **14**, (2001).

[5] H. Matsuzawa, Stable transition layers in a balanced bistable equation with degeneracy, Nonlinear Analysis, **58** (2004) 45-67.

[6] A. S. Nascimento, Stable transition layers in a semilinear diffusion equation with spatial inhomogeneities in N- dimensional domains, J. Differential Equations, **190** (2003), 16-38.

[7] K. Nakashima, Stable transition layers in a balanced bistable equation, Differential and Integral Equations, **13** (2000), 1025-1038.

[8] K. Nakashima, Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation, J. Differential Equations, **191** (2003), 234-276.

[9] K. Nakashima, K. Tanaka, Clustering layers and boundary layers in spatially inhomogeneous phase transition problems, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003), 107-143.

Timoshenko系の解の減衰評価

原本 和夫 (九州大学・数理学府)
川島 秀一 (九州大学・数理学研究院)

1. 序

次のような消散項付きの Timoshenko 系を考える.

$$(T)\begin{cases}\rho\varphi_{tt}-\alpha(\varphi_x+\psi)_x=0,\\ \psi_{tt}-c_0^2\psi_{xx}+\alpha(\varphi_x+\psi)+\gamma\psi_t=0,\end{cases}\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty).$$

ただし, ρ, α, c_0, γ は正定数である.

この方程式系は物理学的には, Timoshenko beam と呼ばれる梁の振動を表現している. 消散項のない本来の Timoshenko 系についての考察 [1], [2] で詳しく記述されているように, 梁の中心からの距離を変数 x にとった場合に, φ は x 軸方向に対する鉛直方向の梁の変位, ψ は梁の回転角度の変位を表す.

消散的 Timoshenko 系は Rivera-Racke [3] において考察された. 彼らは有限区間 $0<x<L$ 上において, 境界条件を $\varphi=0$, $\psi_x=0$ の形で与えた場合の初期・境界値問題を考察し, 次のような興味ある結果を示した.

『$\frac{\alpha}{\rho}=c_0^2$ の場合, 解のエネルギーは指数的に減衰するが, $\frac{\alpha}{\rho}\neq c_0^2$ の場合は指数的減衰は起こりえず, 解のエネルギーは多項式的に減衰する.』

本論文の目的は, 消散的 Timoshenko 系の初期値問題を $-\infty<x<\infty$ で考察し, $\frac{\alpha}{\rho}=c_0^2$ と $\frac{\alpha}{\rho}\neq c_0^2$ の場合で系の消散構造にどのような違いがあるのかを解明することである.

2. 主結果

$\varphi_t=u$, $\varphi_x+\psi=v$, $\psi_t=w$, $\psi_x=z$ とし, (T) を1階系に変換すると,

$$(E)\begin{cases}v_t-u_x-w=0,\\ \rho u_t-\alpha v_x=0,\\ z_t-w_x=0,\\ w_t-c_0^2z_x+\alpha v+\gamma w=0,\end{cases}\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty).$$

これを Fourier 変換すると,

$$(\hat{E})\begin{cases}\hat{v}_t-i\xi\hat{u}-\hat{w}=0,\\ \rho\hat{u}_t-\alpha i\xi\hat{v}=0,\\ \hat{z}_t-i\xi\hat{w}=0,\\ \hat{w}_t-c_0^2i\xi\hat{z}+\alpha\hat{v}+\gamma\hat{w}=0,\end{cases}\qquad (\xi,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty).$$

以下, これらの1階系に対して得られた結果を述べる. $U=(v,u,z,w)$, $\hat{U}=(\hat{v},\hat{u},\hat{z},\hat{w})$ とし, $U,\hat{U}$ の初期値をそれぞれ U_0, $\hat{U}_0$ とする.

Theorem 1. (E) の解 U は $t\in(0,\infty)$ に対し，次の評価を満たす．

(1) $\frac{\alpha}{\rho}=c_0^2$ のとき，

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le Ce^{-ct}\|\partial_x^k U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}+C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})}\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (k=0,1,2,\dots)$$

(2) $\frac{\alpha}{\rho}\ne c_0^2$ のとき，$\delta=\left|\frac{\alpha}{\rho}-c_0^2\right|$ をパラメータとして，

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le Ce^{-ct}\|\partial_x^k U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}+C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})}\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + C\delta^l(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (k,l=0,1,2,\dots)$$

ただし，C と c は δ に依らない正定数である．

(2) の最後の項は，初期値 U_0 に対する l 階微分のロスで，解の $t^{-\frac{l}{2}}$ の減衰が得られることを示している．

この定理の証明では，$\hat{U}(\xi,t)$ に対する次の各点評価が Key Lemma となる．

Lemma 1. $(\xi,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ に対して，次の評価が成り立つ．

(1) $\frac{\alpha}{\rho}=c_0^2$ のとき，

$$|\hat{U}(\xi,t)|\le Ce^{-c\eta(\xi)t}|\hat{U}_0(\xi)|.$$

(2) $\frac{\alpha}{\rho}\ne c_0^2$ のとき，$\delta=\left|\frac{\alpha}{\rho}-c_0^2\right|$ に対して，

$$|\hat{U}(\xi,t)|\le Ce^{-c\eta_\delta(\xi)t}|\hat{U}_0(\xi)|.$$

ただし，C と c は δ に依らない正定数であり，

$$\eta(\xi)=\frac{\xi^2}{1+\xi^2},\qquad \eta_\delta(\xi)=\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)(1+\delta^2\xi^2)}.$$

3. 証明の概略

ここでは Theorem 1 と Lemma 1 の証明の概略を述べる．

3.1 Lemma 1 の証明の概略

Fourier 空間のエネルギー法により，リヤプノフ関数を構成する．
(1) の証明は，(2) の証明で形式的に $\delta=0$ としたものなので，(2) のみを示す．
以下，$(\hat{E})$ の第1式～第4式をそれぞれ (2.1)～(2.4) と表す．

step1：力学的なエネルギーと $|\hat{w}|$ の評価を求める．

$(2.1)\times\alpha\bar{\hat{v}}+(2.2)\times\bar{\hat{u}}+(2.3)\times c_0^2\bar{\hat{z}}+(2.4)\times\bar{\hat{w}}$ の Re をとると，

$$(\alpha|\hat{v}|^2+\rho|\hat{u}|^2+c_0^2|\hat{z}|^2+|\hat{w}|^2)_t+\gamma|\hat{w}|^2=0. \qquad (3.1)$$

step2：$|\hat{u}|$, $|\hat{z}|$ を $|\hat{v}|$, $|\hat{w}|$ で評価する．

$(2.1)\times\rho i\xi\bar{\hat{u}}-(2.2)\times i\xi\bar{\hat{v}}$ の Re をとると，

$$\xi^2(\rho|\hat{u}|^2-\alpha|\hat{v}|^2)+\mathrm{Re}(i\xi\rho\hat{v}\bar{\hat{u}})_t-\mathrm{Re}(i\xi\rho\hat{w}\bar{\hat{u}})=0. \qquad (3.2)$$

同様に，$(2.4)\times i\xi\bar{\hat{z}}-(2.3)\times i\xi\bar{\hat{w}}$ の Re をとると，

$$\xi^2(c_0^2|\hat{z}|^2-|\hat{w}|^2)+\mathrm{Re}(i\xi\hat{w}\bar{\hat{z}})_t+\mathrm{Re}\{i\xi(\alpha\hat{v}\bar{\hat{z}}+\gamma\hat{w}\bar{\hat{z}})\}=0. \qquad (3.3)$$

$(3.2)+(3.3)$ を評価すると，任意の $\epsilon_1>0$ に対し，

$$\begin{aligned}\xi^2\{(\rho-\epsilon_1)|\hat{u}|^2+(c_0^2-\epsilon_1)|\hat{z}|^2\}&+\mathrm{Re}\{i\xi(\hat{w}\bar{\hat{z}}+\rho\hat{v}\bar{\hat{u}})\}_t\\ &\le C_{\epsilon_1}(1+\xi^2)(|\hat{v}|^2+|\hat{w}|^2). \qquad (3.4)\end{aligned}$$

step3 : $|\hat{v}|$ を評価する．

$(2.1)\times\bar{\hat{w}}+(2.4)\times\bar{\hat{v}}+\{(2.2)\times\bar{\hat{z}}+(2.3)\times\rho\bar{\hat{u}}\}\times(c_0^2/\alpha)$ の Re をとると，

$$\alpha|\hat{v}|^2-|\hat{w}|^2+\mathrm{Re}\big(\hat{w}\bar{\hat{v}}+\frac{\rho c_0^2}{\alpha}\hat{u}\bar{\hat{z}}\big)_t+\gamma\,\mathrm{Re}(\hat{w}\bar{\hat{v}})-\mathrm{Re}\big\{i\xi\big(\hat{u}\bar{\hat{w}}+\frac{\rho c_0^2}{\alpha}\hat{w}\bar{\hat{u}}\big)\big\}=0.$$

これを評価すると，任意の $\epsilon_2>0$ に対し，

$$\begin{aligned}(\alpha-\epsilon_2)|\hat{v}|^2+\mathrm{Re}\big(\hat{w}\bar{\hat{v}}+\frac{\rho c_0^2}{\alpha}\hat{u}\bar{\hat{z}}\big)_t&\le C_{\epsilon_2}|\hat{w}|^2+\big|1-\frac{\rho c_0^2}{\alpha}\big|\,|\xi|\,|\hat{u}|\,|\hat{w}|\\ &=C_{\epsilon_2}|\hat{w}|^2+\frac{\rho}{\alpha}\delta\,|\xi|\,|\hat{u}|\,|\hat{w}|. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

以下，δ が 0 に近い場合の結果を得るために $0<\delta<1$ とする．

step4 : (3.1)〜(3.5) を組み合わせ，リヤプノフ関数を完成させる．

$\epsilon_3>0$ を任意にとり，$(3.4)\times\dfrac{\epsilon_3}{1+\xi^2}+(3.5)$ を評価すると，

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_3\xi^2}{1+\xi^2}\big\{(\rho-\epsilon_1)|\hat{u}|^2+(c_0^2-\epsilon_1)|\hat{z}|^2\big\}&+(\alpha-\epsilon_2-\epsilon_3C_{\epsilon_1})|\hat{v}|^2\\ +\mathrm{Re}\big(\hat{w}\bar{\hat{v}}+\frac{\rho c_0^2}{\alpha}\hat{u}\bar{\hat{z}}\big)_t&+\frac{\epsilon_3}{1+\xi^2}\mathrm{Re}\big\{i\xi(\hat{w}\bar{\hat{z}}+\rho\hat{v}\bar{\hat{u}})\big\}_t\\ \le C(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)|\hat{w}|^2&+\frac{\epsilon_4\xi^2}{1+\xi^2}|\hat{u}|^2+C_{\epsilon_4}(1+\xi^2)\delta^2|\hat{w}|^2.\end{aligned}$$

ただし，$\epsilon_4>0$ は任意にとれる．これを整理すると，

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_3\xi^2}{1+\xi^2}\big\{\big(\rho-\epsilon_1-\frac{\epsilon_4}{\epsilon_3}\big)|\hat{u}|^2+(c_0^2-\epsilon_1)|\hat{z}|^2\big\}&+(\alpha-\epsilon_2-\epsilon_3C_{\epsilon_1})|\hat{v}|^2\\ +\mathrm{Re}\big(\hat{w}\bar{\hat{v}}+\frac{\rho c_0^2}{\alpha}\hat{u}\bar{\hat{z}}\big)_t&+\frac{\epsilon_3}{1+\xi^2}\mathrm{Re}\big\{i\xi(\hat{w}\bar{\hat{z}}+\rho\hat{v}\bar{\hat{u}})\big\}_t\\ \le C(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)&(1+\delta^2\xi^2)|\hat{w}|^2. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

最後に，$\epsilon_5>0$ を任意にとり，$(3.1)+(3.6)\times\dfrac{\epsilon_5}{1+\delta^2\xi^2}$ を計算すると，

$$E_t+F\le 0$$

の形の微分不等式が得られる．ただし，

$$E = \alpha|\hat{v}|^2 + \rho|\hat{u}|^2 + c_0^2|\hat{z}|^2 + |\hat{w}|^2 + \frac{\epsilon_5}{1+\delta^2\xi^2}\mathrm{Re}\big(\hat{w}\bar{\hat{v}} + \frac{\rho c_0^2}{\alpha}\hat{u}\bar{\hat{z}}\big) + \frac{\epsilon_3\epsilon_5}{(1+\xi^2)(1+\delta^2\xi^2)}\mathrm{Re}\big\{i\xi(\hat{w}\bar{\hat{z}} + \rho\hat{v}\bar{\hat{u}})\big\},$$

$$F = \frac{\epsilon_3\epsilon_5\xi^2}{(1+\xi^2)(1+\delta^2\xi^2)}\big\{\big(\rho - \epsilon_1 - \frac{\epsilon_4}{\epsilon_3}\big)|\hat{u}|^2 + (c_0^2 - \epsilon_1)|\hat{z}|^2\big\} + \frac{\epsilon_5}{1+\delta^2\xi^2}(\alpha - \epsilon_2 - \epsilon_3 C_{\epsilon_1})|\hat{v}|^2 + (\gamma - \epsilon_5 C(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4))|\hat{w}|^2.$$

また，これら E, F は $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$ をうまく選ぶと次のような性質を満たす．

(*i*) δ に依存しない正定数 C_1, C_2 が存在して，$C_1|\hat{U}|^2 \le E \le C_2|\hat{U}|^2$.

(*ii*) δ に依存しない正定数 C_3 が存在して，$C_3\,\eta_\delta(\xi)\,E \le F$.

これらの評価と Gronwall の不等式より，求める評価

$$|\hat{U}(\xi,t)| \le Ce^{-c\eta_\delta(\xi)t}\,|\hat{U}_0(\xi)|$$

が得られる．

3.2 Theorem 1 の証明の概略

(1) の証明は，(2) の証明に含まれるので (2) を示す．
Lemma 1 の結果から，$k = 1, 2, \dots$，$t \in (0,\infty)$ に対し，

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = C\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k}|\hat{U}(\xi,t)|^2 d\xi \le C\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k}e^{-c\eta_\delta(\xi)t}\,|\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi.$$

ここで，積分領域を $|\xi| \le 1$, $1 \le |\xi| \le 1/\delta$, $|\xi| \ge 1/\delta$ の 3 つに分け，
それぞれの積分を I_1, I_2, I_3 とする．

I_1 の評価：$|\xi| \le 1$ のとき，$\eta_\delta(\xi) \ge c\xi^2$ と評価できるので，

$$\begin{aligned} I_1 &= C\int_{|\xi|\le 1} \xi^{2k}e^{-c\eta_\delta(\xi)t}\,|\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\le C\,\|\hat{U}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \int_{|\xi|\le 1} \xi^{2k}e^{-c\xi^2 t}d\xi \\ &\le C\,\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R})}^2\,(1+t)^{-(\frac{1}{2}+k)}. \end{aligned}$$

I_2 の評価：$1 \le |\xi| \le 1/\delta$ のとき，$\eta_\delta(\xi) \ge c$ と評価できるので，

$$\begin{aligned} I_2 &= C\int_{1\le|\xi|\le 1/\delta} \xi^{2k}e^{-c\eta_\delta(\xi)t}\,|\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\le Ce^{-ct}\int_{1\le|\xi|\le 1/\delta} \xi^{2k}|\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\le Ce^{-ct}\,\|\partial_x^k U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

I_3 の評価：$|\xi| \geq 1/\delta$ のとき，$\eta_\delta(\xi) \geq c/\delta^2\xi^2$ と評価できるので，

$$
\begin{aligned}
I_3 &= C \int_{|\xi|\geq 1/\delta} \xi^{2k} e^{-c\eta_\delta(\xi)t} \, |\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{|\xi|\geq 1/\delta} \xi^{2k} e^{-ct/\delta^2\xi^2} \, |\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C \sup_{|\xi|\geq 1/\delta} (\xi^{-2l} e^{-ct/\delta^2\xi^2}) \int_{|\xi|\geq 1/\delta} \xi^{2k+2l} |\hat{U}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\delta^{2l}(1+t)^{-l} \, \|\partial_x^{k+l} U_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad l = 0,1,2,\ldots.
\end{aligned}
$$

以上より，$\frac{\alpha}{\rho} \neq c_0^2$ のとき，求める評価

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-ct} \|\partial_x^k U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})} \, \|U_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
+ C\delta^l (1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+l} U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad k, l = 0,1,2,\ldots.
\end{aligned}
$$

が得られた.

4. 固有値問題

Lemma 1 の各点評価が最良であるか否かを判定するため，$(\hat{E})$ の固有値 $\lambda_j(\xi)$ $(j = 1,2,3,4)$ の漸近展開を求める．まず，$(\hat{E})$ を行列形で表すと，

$$
\hat{U}_t + i\xi A\hat{U} + L\hat{U} = 0.
$$

ただし，

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -c_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\alpha}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.
$$

この系の固有多項式を $\Phi(\lambda)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda) &= \det(\lambda I + i\xi A + L) \\
&= \lambda^4 + \gamma\lambda^3 + \left\{ \left(c_0^2 + \frac{\alpha}{\rho}\right)\xi^2 + \alpha \right\}\lambda^2 + \frac{\alpha}{\rho}\gamma\xi^2\lambda + \frac{\alpha}{\rho}c_0^2\xi^4.
\end{aligned}
$$

- $|\xi| \to 0$ のときの固有値の漸近展開

$|\xi| \to 0$ のとき，固有値 $\lambda_j(\xi)$ $(j = 1,2,3,4)$ は次のように漸近展開される.

$$
\lambda_j(\xi) = \lambda_j^{(0)} + i\xi\lambda_j^{(1)} + (i\xi)^2\lambda_j^{(2)} + \cdots
$$

これを固有方程式 $\Phi(\lambda) = 0$ に代入し，係数 $\lambda_j^{(k)}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めると，

$j=1,2$ に対して,

$$\lambda_j^{(0)}=\lambda_j^{(1)}=0,\quad \lambda_j^{(2)}=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\rho c_0^2}}{2\rho^2}.$$

このとき,

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j^{(0)})=\mathrm{Re}\,(i\xi\lambda_j^{(1)})=0,\quad \mathrm{Re}\,((i\xi)^2\lambda_j^{(2)})=-c\xi^2.$$

$j=3,4$ に対して,

$$\lambda_j^{(0)}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha}}{2}.$$

このとき,

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j^{(0)})=-c.$$

以上より, $|\xi|\to 0$ のときの最良評価は

$$|\hat{U}(\xi,t)|\leq Ce^{-c\xi^2 t}\,|\hat{U}_0(\xi)|$$

と予想される.

- $|\xi|\to\infty$ のときの固有値の漸近展開

$|\xi|\to\infty$ のとき, 固有値 $\lambda_j(\xi)$ $(j=1,2,3,4)$ は次のように漸近展開される.

$$\lambda_j(\xi)=i\xi\mu_j^{(1)}+\mu_j^{(0)}+(i\xi)^{-1}\mu_j^{(-1)}+(i\xi)^{-2}\mu_j^{(-2)}+\cdots$$

これを固有方程式 $\Phi(\lambda)=0$ に代入し, 係数 $\mu_j^{(k)}$ $(k=,-1,0,1,\dots)$ を求めると,

(1) $\frac{\alpha}{\rho}=c_0^2$ のとき,

$j=1,2$ に対して,

$$\mu_j^{(1)}=c_0,\quad \mu_j^{(0)}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha}}{4}.$$

このとき,

$$\mathrm{Re}\,(i\xi\mu_j^{(1)})=0,\quad \mathrm{Re}\,(\mu_j^{(0)})=-c.$$

$j=3,4$ に対して,

$$\mu_j^{(1)}=-c_0,\quad \mu_j^{(0)}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha}}{4}.$$

このとき,

$$\mathrm{Re}\,(i\xi\mu_j^{(1)})=0,\quad \mathrm{Re}\,(\mu_j^{(0)})=-c.$$

以上より，$|\xi| \to \infty$ のときの最良評価は

$$|\hat{U}(\xi,t)| \le Ce^{-ct}\,|\hat{U}_0(\xi)|$$

と予想される．

(2) $\frac{\alpha}{\rho} \neq c_0^2$ のとき，

$j=1,2$ に対して，

$$\mu_j^{(1)} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}},\quad \mu_j^{(0)} = 0,\quad \mu_j^{(-1)} = -\frac{\alpha\mu_j^{(1)}}{2\left(\frac{\alpha}{\rho}-c_0^2\right)},\quad \mu_j^{(-2)} = \frac{\alpha^2\gamma}{\rho\left(\frac{\alpha}{\rho}-c_0^2\right)^2}.$$

このとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,(i\xi\mu_j^{(1)}) = \mathrm{Re}\,(\mu_j^{(0)}) = \mathrm{Re}\,((i\xi)^{-1}\mu_j^{(-1)}) = 0,\\ &\mathrm{Re}\,((i\xi)^{-2}\mu_j^{(-2)}) = -\frac{c}{\delta^2\xi^2}.\end{aligned}$$

$j=3,4$ に対して，

$$\mu_j^{(1)} = \pm c_0,\quad \mu_j^{(0)} = -\frac{\gamma}{2}.$$

このとき，

$$\mathrm{Re}\,(i\xi\mu_j^{(1)}) = 0,\quad \mathrm{Re}\,(\mu_j^{(0)}) = -c.$$

以上より，$|\xi| \to \infty$ のときの最良評価は

$$|\hat{U}(\xi,t)| \le Ce^{-ct/\delta^2\xi^2}\,|\hat{U}_0(\xi)|$$

と予想される．

参考文献

[1] S. Taylor, A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability, Journal of Computational and Applied Mathematics, 114 (2000), 23-40.

[2] S. Taylor and S. Yau, Boundary control of a rotating Timoshenko beam, ANZIAM Journal, 44 (E) (2003), 143-184.

[3] J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9 (2003), 1625-1639.

[4] T. Umeda, S. Kawashima and Y. Shizuta, On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics, Japan J. Appl. Math., 1 (1984), 435-457.

[5] Y. Shizuta and S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, Hokkaido Math. J., 14 (1985), 249-275.

係数が階段関数である2階半分線形微分方程式の SMALL SOLUTION について

渡邊　耕二（島根大学大学院総合理工学研究科　M2）

1 Introduction

1.1 Half–linear differential equation

2階半分線形微分方程式

$$x''|x'|^{n-1}+a_k^2|x|^{n-1}x=0, \quad n>0, \quad '=d/dt \tag{1.1}$$

について考える．ただし，方程式 (1.1) は $t_{k-1}\le t<t_k$ で定義され，数列 $\{t_k\}$ と数列 $\{a_k\}$ は

$$t_0=0, \quad t_k<t_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty}t_k=\infty, \quad a_k>0$$

を満たすものとする．半分線形微分方程式とは，$x_0(t)$ が解となるならば $x_0(t)$ の定数倍したものも解となる性質をもつ微分方程式のことをいう．

Definition 1.1.　方程式 *(1.1)* の解 $x(t)$ とは，区間 $[0,\infty)$ 上で C^1 級で区間 $I=\bigcup_{k=1}^{\infty}(t_{k-1},t_k)$ 上では C^2 級であり，I 上で方程式 *(1.1)* を満たす関数である．

Definition 1.2.　区間 $[0,\infty)$ 上で定義される方程式 *(1.1)* の解 $x_0(t)$ が *small solution* であるとは

$$\lim_{t\to\infty}x_0(t)=0$$

を満たすことである．また，$x_0(t)\equiv 0$ であるとき，解 $x_0(t)$ は *trivial small solution* であるという．

本稿では，方程式 (1.1) の small solution について議論する．

1.2 About a linear differential equation

方程式 (1.1) において，$n=1$ とすると2階線形微分方程式

$$x''+a_k^2x=0 \tag{1.2}$$

となる．ただし，$t_{k-1}\le t<t_k$ である．方程式 (1.2) は，応用の数学モデルとして役立つことが知られている．例えば，法則 $l=l(t)$ によってひもの長さが変化する振り子の運動を考える．質点の位置は，$l(t)$ と角度 $\varphi(t)$ により記述できる．そのモデルは

$$\varphi''+\frac{g}{l(t)}\sin\varphi=0, \qquad g：重力定数$$

である．しかし，この方程式で振動が微小なものであるとき，線形微分方程式

$$\varphi''+\frac{g}{l(t)}\varphi=0$$

で記述することができる．現実的にはこのような状況は，滑車とロープを用いて物を引き上げる状態を表す．方程式 (1.2) は，法則 $l(t)$ が階段関数である場合と同値であり small solution とは，質点が静止してしまう状態である．

L.Hatvani は，方程式 (1.2) に対して small solution の存在を保証する定理を与えた．

Theorem A. *(L.Hatvani [1]).* 数列 $\{a_k\}$ が

$$a_k < a_{k+1}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty$$

を満たすならば，方程式 *(1.2)* は少なくとも *1* つ *non-trivial small solution* をもつ．

Thorem A のように small solution の存在が保証されることは大変重要なことである．しかし，現実的なことを考慮すると small solution の存在性のみの主張はあまり役に立たない．したがって，現実問題を考えるにはすべての解が small solution であるということを保証する必要がある．このような課題に対して A.Elbert が次の定理を与えた．

Theorem B. *(A.Elbert [2]).* 数列 $\{a_k\}$ が

$$a_k < a_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\ ;\ 1 - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right\} \sin^2\left(a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)\right) = \infty$$

を満たすならば，方程式 *(1.2)* のすべての解は *small solution* である．

この定理は，とても良い結果と言える．しかしながら，数列 $\{a_k\}$ がこの条件を満たすことを確かめることは難しい．簡単に言えば，Theorem B の条件は，$t_{k+1} - t_k$ の値が $m\pi/a_{k+1}$, $m \in \mathbb{N}$ に近いものであってはならないということを主張している．Theorem A を与えた L.Hatvani と L.Stasho は，数列 $\{t_k\}$ がランダム性をもつときに，方程式 (1.2) の解がどれくらいの頻度で small solution になるのかを研究した．

Theorem C. *(L.Hatvani and L.Stacho [3]).* 数列 $\{a_k\}$ が

$$a_k < a_{k+1}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty$$

を満たし，数列 $\{t_k\}$ において，$t_k - t_{k-1}$ が $[0, 1]$ 上の一様分布に従うならば，方程式 *(1.2)* の解は確率 1 で *small solution* である．

2 The result and its proof

方程式 (1.1) に対して得られた結果は次の通りである．

Theorem 2.1. 数列 $\{a_k\}$ が

$$a_k < a_{k+1}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty$$

を満たすならば，方程式 *(1.1)* は少なくとも *1* つ *non-trivial small solution* をもつ．

Theorem 2.2. 数列 $\{a_k\}$ が

$$a_k < a_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\ ;\ 1 - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right\} \sin^2\left(a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)\right) = \infty$$

を満たすならば，方程式 *(1.1)* のすべての解は *small solution* である．

Theorem 2.3. 数列 $\{a_k\}$ が

$$a_k < a_{k+1}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty$$

を満たし，数列 $\{t_k\}$ において， $t_k - t_{k-1}$ が $[0,1]$ 上の一様分布に従うならば，方程式 *(1.1)* の解は確率 1 で *small solution* である．

この三つの定理は，方程式 (1.2) で成り立つ結果が方程式 (1.1) でも成り立つということを主張している．次の補題を証明することで，上記の三つの定理は得られる．

Lemma 2.1. 方程式 *(1.1)* は，方程式 *(1.2)* に同値変換される．

Proof . 方程式 (1.1) に対して新しい変数

$$y = \frac{1}{a_k^n}|x'|^{n-1}x'$$

を導入すると，方程式系

$$\begin{cases} x' = a_k|y|^{\frac{1}{n}-1}y, \\ y' = -na_k^{2-n}|x|^{n-1}x \end{cases} \tag{2.1}$$

に同値変換される．ただし，方程式系 (2.1) は $t_{k-1} \le t < t_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ で定義される．時刻 $t = t_k$ における $y(t)$ の左極限を $y(t_k - 0)$ とすると

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_k-0} x'(t) &= \lim_{t\to t_k-0} a_k|y(t)|^{\frac{1}{n}-1}y(t) \\
&= \lim_{t\to t_k-0} \begin{cases} a_k y^{\frac{1}{n}}(t), & (y(t)\ge 0) \\ -a_k\left(-y(t)\right)^{\frac{1}{n}}, & (y(t)<0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_k y^{\frac{1}{n}}(t_k - 0), & (y(t)\ge 0) \\ -a_k\left(-y(t_k-0)\right)^{\frac{1}{n}}, & (y(t)<0) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．また

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_k+0} x'(t) &= \lim_{t\to t_k+0} a_{k+1}|y(t)|^{\frac{1}{n}-1}y(t) \\
&= \lim_{t\to t_k+0} \begin{cases} a_{k+1} y^{\frac{1}{n}}(t), & (y(t)\ge 0) \\ -a_{k+1}\left(-y(t)\right)^{\frac{1}{n}}, & (y(t)<0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_{k+1} y^{\frac{1}{n}}(t_k), & (y(t)\ge 0) \\ -a_{k+1}\left(-y(t_k)\right)^{\frac{1}{n}}, & (y(t)<0) \end{cases}
\end{aligned}$$

である．方程式 (1.1) の解 $x(t)$ とは区間 $[0,\infty)$ 上で C^1 級であるので，$x'(t)$ は任意の時刻 t (≥ 0) に対して連続である．したがって

$$y(t_k) = \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n y(t_k - 0) \tag{2.2}$$

を得る．このように，関数 $y(t)$ は区間 $[0,\infty)$ で右連続であるから，方程式系 (2.1) に付帯条件 (2.2) をつけた

$$\begin{cases} x' = a_k|y|^{\frac{1}{n}-1}y, \quad y' = -na_k^{2-n}|x|^{n-1}x, \\ y(t_k) = \left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n y(t_k - 0) \end{cases} \tag{2.3}$$

を考えなければならない．ただし，$t_{k-1} \leq t < t_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ である．方程式系 (2.3) に対して，新しい時刻

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{n+1}|x|^{\frac{1-n}{2}}|x'|^{\frac{n-1}{2}} = \frac{2}{n+1}a_k^{\frac{n-1}{2}}|x|^{\frac{1-n}{2}}|y|^{\frac{n-1}{2n}}$$

を導入する．時刻 $t = t(\tau)$ は時刻 τ の増加関数であるので

$$\exists\{\tau_k\} \quad \text{s.t} \quad t_k = t(\tau_k), \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_{k-1} < \tau_k$$

となることが分かる．$X(\tau) = x(t(\tau)) = x(t)$，$Y(\tau) = y(t(\tau)) = y(t)$ とおき，$\dot{} = d/d\tau$ とすると

$$\begin{aligned}\dot{X} &= x'\frac{dt}{d\tau}\\ &= a_k|y|^{\frac{1}{n}-1}y\frac{2}{n+1}a_k^{\frac{n-1}{2}}|x|^{\frac{1-n}{2}}|y|^{\frac{n-1}{2n}}\\ &= \frac{2}{n+1}a_k^{\frac{n+1}{2}}|X|^{\frac{1-n}{2}}|Y|^{\frac{1-n}{2n}}Y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= y'\frac{dt}{d\tau}\\ &= -na_k^{2-n}|x|^{n-1}x\frac{2}{n+1}a_k^{\frac{n-1}{2}}|x|^{\frac{1-n}{2}}|y|^{\frac{n-1}{2n}}\\ &= -\frac{2n}{n+1}a_k^{\frac{3-n}{2}}|Y|^{\frac{n-1}{2n}}|X|^{\frac{n-1}{2}}X\end{aligned}$$

となる．したがって，方程式系 (2.1) は

$$\begin{cases}\dot{X} = \dfrac{2}{n+1}a_k^{\frac{n+1}{2}}|X|^{\frac{1-n}{2}}|Y|^{\frac{1-n}{2n}}Y\\ \dot{Y} = -\dfrac{2n}{n+1}a_k^{\frac{3-n}{2}}|Y|^{\frac{n-1}{2n}}|X|^{\frac{n-1}{2}}X\end{cases} \tag{2.4}$$

と変換される．ただし，方程式系 (2.4) は $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ で定義される．付帯条件 (2.2) を $Y(\tau)$ で表すと

$$Y(\tau_k) = y(t_k) = \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n y(t_k - 0) = \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n Y(\tau_k - 0) \tag{2.5}$$

となる．ただし，$Y(\tau_k - 0)$ は時刻 $\tau = \tau_k$ での $Y(\tau)$ の左極限である．よって，方程式系 (2.3) は

$$\begin{cases}\dot{X} = \dfrac{2}{n+1}a_k^{\frac{n+1}{2}}|X|^{\frac{1-n}{2}}|Y|^{\frac{1-n}{2n}}Y, \quad \dot{Y} = -\dfrac{2n}{n+1}a_k^{\frac{3-n}{2}}|Y|^{\frac{n-1}{2n}}|X|^{\frac{n-1}{2}}X,\\ Y(\tau_k) = \left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n Y(\tau_k - 0)\end{cases} \tag{2.6}$$

と変換される．ただし，$\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ である．さらに，方程式系 (2.6) に対して変数変換

$$|u|u = \frac{2n}{n+1}|X|^n X, \qquad |v|v = \frac{2n}{n+1}a_k^{n-1}|Y|^{\frac{1}{n}}Y$$

を行う．(i)　$X \geq 0$, $Y \geq 0$ のとき，方程式系 (2.4) は

$$\begin{cases} \dot{X} = \dfrac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} X^{\frac{1-n}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}}, \\ \dot{Y} = -\dfrac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} X^{\frac{n+1}{2}} Y^{\frac{n-1}{2n}} \end{cases}$$

である．また，変数変換は

$$u^2 = \frac{2n}{n+1} X^{n+1}, \qquad v^2 = \frac{2n}{n+1} a_k^{n-1} Y^{\frac{1}{n}+1}$$

となる．したがって

$$u = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} X^{\frac{n+1}{2}}, \qquad v = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}}$$

を得る．それぞれ時刻 τ で微分すると

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} X^{\frac{n-1}{2}} \dot{X} \\ &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} X^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} X^{\frac{1-n}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}} \\ &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n+1}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}} \\ &= a_k v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} Y^{\frac{1-n}{2n}} \dot{Y} \\ &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} Y^{\frac{1-n}{2n}} \left(-\frac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} X^{\frac{n+1}{2}} Y^{\frac{n-1}{2n}}\right) \\ &= -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k X^{\frac{n+1}{2}} \\ &= -a_k u \end{aligned}$$

となる．(ii)　$X \geq 0$, $Y < 0$ のとき，方程式系 (2.4) は

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dfrac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} X^{\frac{1-n}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}}, \\ \dot{Y} = -\dfrac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} X^{\frac{n+1}{2}} (-Y)^{\frac{n-1}{2n}} \end{cases}$$

である．また，変数変換は

$$u^2 = \frac{2n}{n+1} X^{n+1}, \qquad (-v)^2 = \frac{2n}{n+1} a_k^{n-1} (-Y)^{\frac{1}{n}+1}$$

となる．したがって

$$u = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} X^{\frac{n+1}{2}}, \qquad -v = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}}$$

を得る．それぞれ時刻 τ で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} X^{\frac{n-1}{2}} \dot{X} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} X^{\frac{n-1}{2}} \left(-\frac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} X^{\frac{1-n}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}}\right) \\
&= -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n+1}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}} \\
&= a_k v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} (-Y)^{\frac{1-n}{2n}} \dot{Y} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} (-Y)^{\frac{1-n}{2n}} \left(-\frac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} X^{\frac{n+1}{2}} (-Y)^{\frac{n-1}{2n}}\right) \\
&= -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k X^{\frac{n+1}{2}} \\
&= -a_k u
\end{aligned}$$

となる．(iii) $X < 0,\ Y \geq 0$ のとき，方程式系 (2.4) は

$$\begin{cases}
\dot{X} = \dfrac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} (-X)^{\frac{1-n}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}}, \\
\dot{Y} = \dfrac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} (-X)^{\frac{n+1}{2}} Y^{\frac{n-1}{2n}}
\end{cases}$$

である．また，変数変換は

$$(-u)^2 = \frac{2n}{n+1}(-X)^{n+1}, \qquad v^2 = \frac{2n}{n+1} a_k^{n-1} Y^{\frac{1}{n}+1}$$

となる．したがって

$$-u = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} (-X)^{\frac{n+1}{2}}, \qquad v = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}}$$

を得る．それぞれ時刻 τ で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} (-X)^{\frac{n-1}{2}} \dot{X} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} (-X)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} (-X)^{\frac{1-n}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n+1}{2}} Y^{\frac{n+1}{2n}} \\
&= a_k v,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{v} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} Y^{\frac{1-n}{2n}} \dot{Y} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} Y^{\frac{1-n}{2n}} \frac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} (-X)^{\frac{n+1}{2}} Y^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k (-X)^{\frac{n+1}{2}} \\
&= -a_k u
\end{aligned}
$$

となる．(iv) $X<0$，$Y<0$ のとき，方程式系 (2.4) は

$$
\begin{cases}
\dot{X} = -\dfrac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} (-X)^{\frac{1-n}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}}, \\
\dot{Y} = \dfrac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} (-X)^{\frac{n+1}{2}} (-Y)^{\frac{n-1}{2n}}
\end{cases}
$$

である．また，変数変換は

$$
(-u)^2 = \frac{2n}{n+1}(-X)^{n+1}, \qquad (-v)^2 = \frac{2n}{n+1} a_k^{n-1} (-Y)^{\frac{1}{n}+1}
$$

となる．したがって

$$
-u = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} (-X)^{\frac{n+1}{2}}, \qquad -v = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}}
$$

を得る．それぞれ時刻 τ で微分すると

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} (-X)^{\frac{n-1}{2}} \dot{X} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{2} (-X)^{\frac{n-1}{2}} \left(-\frac{2}{n+1} a_k^{\frac{n+1}{2}} (-X)^{\frac{1-n}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}}\right) \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n+1}{2}} (-Y)^{\frac{n+1}{2n}} \\
&= a_k v, \\
\dot{v} &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} (-Y)^{\frac{1-n}{2n}} \dot{Y} \\
&= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2n} (-Y)^{\frac{1-n}{2n}} \frac{2n}{n+1} a_k^{\frac{3-n}{2}} (-X)^{\frac{n+1}{2}} (-Y)^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a_k (-X)^{\frac{n+1}{2}} \\
&= -a_k u
\end{aligned}
$$

となる．よって，(i)–(iv) より

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{d\tau} = a_k v, \\
\dfrac{dv}{d\tau} = -a_k u
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

を得る．ただし，方程式系 (2.7) は $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ $(k=1,2,\cdots)$ で定義される．付帯条件 (2.5) を v で表す．(I) $Y(\tau) \geq 0$ のとき

$$Y(\tau) = \left\{\frac{n+1}{2n}a_k^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau)$$

である．したがって

$$Y(\tau_k) = \left\{\frac{n+1}{2n}a_{k+1}^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k),$$

$$Y(\tau_k - 0) = \left\{\frac{n+1}{2n}a_k^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k - 0)$$

を得る．条件 (2.5) より

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{n+1}{2n}a_{k+1}^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k) &= \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n \left\{\frac{n+1}{2n}a_k^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k - 0) \\
a_{k+1}^{\frac{n(1-n)}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k) &= \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n a_k^{\frac{n(1-n)}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k - 0) \\
v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k) &= \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^{\frac{2n}{n+1}} v^{\frac{2n}{n+1}}(\tau_k - 0) \\
v(\tau_k) &= \frac{a_k}{a_{k+1}} v(\tau_k - 0)
\end{aligned}$$

となる．(II) $y(t) < 0$ のとき

$$Y(\tau) = -\left\{\frac{n+1}{2n}a_k^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} (-v(\tau))^{\frac{2n}{n+1}}$$

である．したがって

$$Y(\tau_k) = -\left\{\frac{n+1}{2n}a_{k+1}^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} (-v(\tau_k))^{\frac{2n}{n+1}},$$

$$Y(\tau_k - 0) = -\left\{\frac{n+1}{2n}a_k^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} (-v(\tau_k - 0))^{\frac{2n}{n+1}}$$

を得る．条件 (2.5) より

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{n+1}{2n}a_{k+1}^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} (-v(\tau_k))^{\frac{2n}{n+1}} &= \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n \left\{\frac{n+1}{2n}a_k^{1-n}\right\}^{\frac{n}{n+1}} (-v(\tau_k - 0))^{\frac{2n}{n+1}} \\
a_{k+1}^{\frac{n(1-n)}{n+1}} (-v(t_k))^{\frac{2n}{n+1}} &= \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n a_k^{\frac{n(1-n)}{n+1}} (-v(\tau_k - 0))^{\frac{2n}{n+1}} \\
(-v(\tau_k))^{\frac{2n}{n+1}} &= \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^{\frac{2n}{n+1}} (-v(\tau_k - 0))^{\frac{2n}{n+1}} \\
v(\tau_k) &= \frac{a_k}{a_{k+1}} v(\tau_k - 0)
\end{aligned}$$

となる．したがって，(I) と (II) より

$$v(\tau_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} v(\tau_k - 0) \tag{2.8}$$

を得る．ただし，$v(\tau_k - 0)$ は時刻 $\tau = \tau_k$ における $v(t)$ の左極限である．したがって，方程式系 (2.7) と条件 (2.8) から方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = a_k v, \quad \dfrac{dv}{d\tau} = -a_k u, \\ v(\tau_k) = \dfrac{a_k}{a_{k+1}} v(\tau_k - 0) \end{cases} \tag{2.9}$$

を得る．ただし，方程式系 (2.9) は $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ で定義される．よって，方程式

$$\ddot{u} + a_k^2 u = 0, \qquad (\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k)$$

を得る． □

参考文献

[1] L. Hatvani, *On the existence of a small solution of linear second order differential equations with step function coefficients*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems. **4** (1998), 321–330.

[2] A. Elbert, *On asymptotic stability of some Sturm-Liouville differential equations*, General Seminar in Mathematics, University of Patras, 1996/97, 22-23, 57-66.

[3] L. Hatvani and L. Stachó *On small solution of second order differential equations with random coefficients*, Arch. Math. (Brno), **34** (1998), 119-126.

３日目午後の一般講演セッションにおける感想

座長：伊藤　昭夫（近畿大・工）

本セッションにおける講演者は，Emil Minchev 氏（早稲田大）・佐藤典弘氏（早稲田大）・白川健氏（東京電気大）・若狭徹氏（早稲田大）・岡田浩嗣（広島大）・深尾武史氏（鳥羽商船高専）の６氏であった．その講演の内容を大きく分けると次の非線形方程式（系）に分類されるであろう。

1. 捕食・被捕食（者）モデル

2. Allen-Cahn 方程式等に代表される相転移現象を記述するモデル

そこで，講演を通して私が感じたことを素直に記す。講演の中で扱われている方程式（系）は「ヒステリシス項・非線形拡散項・非柱状領域」など非線形性が非常に強く，非線形解析学の枠組みの中で取り扱うのが困難なものばかりである。そのような方程式（系）に対してある種の結果を得ているところに講演者の努力が伝わってくる。

一方で，講演の内容が高度になりすぎて，しばしば院生（特に，マスターの学生）にとっては，その問題の難しさを漠然とイメージすることさえも困難なのではないかと思われた。座長である私もその場で直ぐにイメージできたかと言うとはなはだ疑問である。もちろん，これがいけないわけではなく，これから我々が挑戦していなければならない問題を提案することは重要な要素である。更に，今回の講演から若手のネットワークが拡がり，その中で様々な議論が喚起されれば座長として嬉しく思う。

それを踏まえた上で，聴衆者に対して敢えて１つお願いしたい。「わからない」ということは決して恥ずかしいことではなく，「わからない」ことを「わからない」ままにしておくことが恥ずかしいということである。どんな内容の質問でも構わないので，是非，質問をしていただきたい。もちろん，座長の私も質問のしやすい環境を作り上げることが出来なかったことを本文章を打ちながら反省しているところである。

そこで，提案であるが，若手セミナーの中にも分科会的な小グループを結成し，そこで１つの問題を決定し，それを解決していくための議論の場を導入してはどうかと思う。もちろん，それぞれの学生が指導教員からそれぞれ課題を与えられていて，それで手一杯であるとは思うのだが。この小グループの目的は，議論を通して若手ネットワークの構築を目指すことである。また，議論を通して，自分にとって興味のある分野を見つけ，その分野を研究の対象にすることも今後の研究では重要であると，私は考える。

以上，取り留めない感想を書き綴ってしまったが，最後に本セッションで講演していただいた講演者各位と幹事である竹内先生に心から感謝申し上げて総括を終わりとする。

A Diffusion - Convection Prey - Predator Model with Hysteresis

Emil Minchev*

Department of Applied Physics
School of Science and Engineering, Waseda University
3-4-1 Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169 - 8555, Japan
eminchev@hotmail.com, iac04002@kurenai.waseda.jp

Abstract

The paper provides mathematical analysis of a system of nonlinear PDE's which describes a diffusion - convection prey - predator model with hysteresis effect. Results for non-negativity, boundedness and existence of at least one solution of the system under consideration are proved.

Mathematics Subject Classification: 35R70, 35K50, 37N25, 47J40
Keywords: nonlinear phenomena in biology, hysteresis, nonlinear PDE's, prey-predator model, convection, subdifferential

1 Introduction

The present paper deals with a diffusion - convection prey - predator model which takes into account the hysteresis effects and is described by the following system of PDE's

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla \sigma + \vec{\lambda}(\sigma)) + \partial I_U(\sigma) \ni g(\sigma, U) \quad in\ Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla u_i + \vec{\mu}_i(u_i)) = h_i(\sigma, U) \quad in\ Q, \quad i = 1, ..., m, \tag{2}$$

where $U = (u_1, ..., u_m)$, $T > 0$, N, m are positive integers, $\Omega \subset R^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$; $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}_i$ $(i = 1, ..., m) : R \to R^N$, g, h_i $(i = 1, ..., m) : R^{1+m} \to R$, $f_*, f^* : R^m \to R$ are given functions. We assume that $f_*, f^* \in C^2(R^m)$, $0 \leq f_* \leq f^* \leq 1$ on R^m, and all partial derivatives of first

*Supported by grant P04050 of the Japan Society for the Promotion of Science.

and second order of f_* and f^* are bounded on R^m.

We denote by $I_U(\cdot)$ the indicator function of the interval $[f_*(U), f^*(U)]$ and $\partial I_U(\cdot)$ denotes the subdifferential of $I_U(\cdot)$. The subdifferential $\partial I_U(\sigma)$ is a set - valued mapping and in our statement of the problem

$$\partial I_U(\sigma) = \begin{cases} \emptyset & if\ \sigma > f^*(U)\ or\ \sigma < f_*(U) \\ [0, +\infty) & if\ \sigma = f^*(U) > f_*(U) \\ \{0\} & if\ f_*(U) < \sigma < f^*(U) \\ (-\infty, 0] & if\ \sigma = f_*(U) < f^*(U) \\ R & if\ \sigma = f^*(U) = f_*(U). \end{cases}$$

In this paper we study the system (1),(2) together with the following boundary and initial conditions

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0 \quad on\ \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega, \quad i = 1, ..., m, \tag{3}$$

$$\sigma(0,x) = \sigma_0(x), \quad u_i(0,x) = u_{i0}(x) \quad in\ \Omega, \quad i = 1, ..., m, \tag{4}$$

where ν is the unit outward normal vector on $\partial\Omega$, σ_0, u_{i0}, $(i = 1, ..., m)$ are given initial data.

Equations (1) and (2) correspond to the evolution of the prey and the predators (m - types); here σ and u_i, $(i = 1, ..., m)$ are the population densities of the prey and the predators, respectively. A typical example from the population dynamics is the following system

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla \sigma + \vec{\lambda}(\sigma)) + \partial I_U(\sigma) \ni a_0 \sigma (1 - a_j \sum_{j=1}^{m} u_j) \quad in\ Q, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla u_i + \vec{\mu}_i(u_i)) = -c_i u_i (1 - d_i \sigma) \quad in\ Q, \quad i = 1, ..., m, \tag{6}$$

where a_0, a_i, c_i, d_i, $(i = 1, ..., m)$ are positive constants. The system (5),(6) presents a prey-predator model allowing hysteresis relation between the prey/ predator densities σ, u_i, $(i = 1, ..., m)$.

It is known that some types of hysteresis operators can be represented by ordinary differential inclusion containing the subdifferential of the inidicator function of a closed set. This fact was pointed out by Visintin in [17] and was used for analysis of many nonlinear phenomena, for example, real-time control problems (see [7]), solid-liquid phase transitions (see [5], [8], [15]) and shape memory alloy problems (see [1]).

Let us note that there are indications for existence of hysteresis in various biological problems, see for instance, [9], [12]. There are examples of biological systems which are subject to changes due to changes of some parameters in such a way that when the parameters go back to the old values the system does not retrace its steps in reverse and thus forms a hysteresis loop. Although population dynamics is an object of long-standing interest, the mathematical description of hysteresis effect in the processes in population dynamics has been considered in a few papers, see [6], the survey paper [13], and very recently we refer to [2], [3].

To describe mathematically the hysteresis phenomena in biological problems from population dynamics we will use certain similarities between the mathematical description of: (i) phase transitions phenomena which involve hysteresis and (ii) population dynamics with hysteresis effect. In mathematical aspect, the description of hysteresis effect in certain population models is closely related to a class of phase transition models with hysteresis effect, namely the so called *phase relaxation models with temperature dependent constraint* (see for example, [5], [8], [11], [15], [17]).

Based on this approach, in the present paper we will obtain results for non-negativity, boundedness and existence of at least one solution of the population model with hysteresis effect described by the system (1)-(4). Our main tools are the method of Yosida approximation, energy method for parabolic systems and fixed point arguments.

2 Preliminary Notes

Denote by H the Hilbert space $L^2(\Omega)$ with the usual scalar product $(\cdot,\cdot)$ and norm $|\cdot|_H$; $\mathbf{H} = H \times \cdots \times H$ (m - times). Denote by V the Sobolev space $H^1(\Omega)$ equipped with the norm $|u|_V = (u,u)_V^{1/2}$, where

$$(u,v)_V = (u,v) + a(u,v),$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad u,v \in V.$$

Denote $\mathbf{V} = V \times \cdots \times V$ (m - times).

Now we give the definition of solutions of the system (1)-(4).

Definition 2.1 *A pair of functions* $\{\sigma, U\}$, $U = (u_1, ..., u_m)$ *is called a solution of the system (1)-(4) if:*

(i) $\sigma, u_i \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $i = 1, ..., m$.

(ii) $\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla \sigma + \vec{\lambda}(\sigma)) + \partial I_U(\sigma) \ni g(\sigma, U)$, *in* H, *a.e. in* $(0,T)$.

(iii) $\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla u_i + \vec{\mu}_i(u_i)) = h_i(\sigma, U)$, $i = 1, ..., m$, *in* H, *a.e. in* $(0,T)$.

(iv) $\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 0$, $\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0$ *in* $L^2(\partial\Omega)$, *a.e. in* $(0,T)$, $i = 1, ..., m$.

(v) $\sigma(0) = \sigma_0, \quad u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, ..., m.$

For simplicity, we denote respectively by σ' and u_i' the time - derivatives $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ and $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ of σ and u_i, $(i = 1, ..., m)$.

Note that the inclusion (ii) implies that:

(ii)-(a) $f_*(U) \leq \sigma \leq f^*(U)$ a.e. in Q.

(iii)-(b) $(\sigma'(t) - \nabla \cdot (\nabla\sigma(t) + \vec{\lambda}(\sigma(t))) - g(\sigma(t), U(t)), \sigma(t) - z) \leq 0$ for all $z \in H$ with $f_*(U(t)) \leq z \leq f^*(U(t))$ a.e. in Ω for a.e. $t \in (0, T)$.

Throughout the paper we suppose that the following assumptions hold:

H1. $N \leq 3$; $\sigma_0, u_{i0} \in L^\infty(\Omega) \cap V$ and $u_{i0} \geq 0$, $(i = 1, ..., m)$, $f_*(U_0) \leq \sigma_0 \leq f^*(U_0)$ a.e. in Ω, $U_0 = (u_{10}, ..., u_{m0})$.

H2. $f_*, f^* \in C^2(R^m)$, $0 \leq f_* \leq f^* \leq 1$ on R^m and all partial derivatives of first and second order of f_* and f^* are bounded on R^m. Denote $C_0 = \max\{|f_*|_{W^{2,\infty}(R^m)}, |f^*|_{W^{2,\infty}(R^m)}\}$.

H3. $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}_i$ $(i = 1, ..., m)$ are Lipschitz continuous functions on R, g and h_i $(i = 1, ..., m)$ are Lipschitz continuous functions on R^{1+m} (with a common Lipschitz constant M), and $h_i(\sigma, u_1, ..., u_{i-1}, 0, u_{i+1}, ..., u_m) = 0$ for $\sigma \in [0, 1]$, $i = 1, ..., m$.

3 Main Results

3.1 Non-negativity of solutions

Theorem 3.1 *Any solution $\{\sigma, U\}$ of (1)-(4) satisfies the estimate*

$$\sigma \geq 0, \; u_i \geq 0, \quad a.e. \text{ in } Q, \; i = 1, ..., m. \tag{7}$$

3.2 Boundedness of solutions

Theorem 3.2 *Any solution $\{\sigma, U\}$ of (1)-(4) satisfies the estimate*

$$|\sigma|_\infty, |u_i|_\infty \leq M_0, \quad i = 1, ..., m, \tag{8}$$

where

$$M_0 = \max\{1, k_1 e^{MT}\}, \quad k_1 = \max_{i=1,...,m}\{|u_{i0}|_\infty\}. \tag{9}$$

Remark 3.1 From Theorems 3.1 and 3.2 it follows that by cutting outside the set $\{0 \leq \sigma \leq M_0, \; 0 \leq u_i \leq M_0, i = 1, ..., m\}$ (if necessary), we can assume in the further sequel without loss of generality that the functions g, h_i $(i = 1, ..., m)$ are bounded and Lipschitz continuous on R^{1+m} and the functions λ, μ_i $(i = 1, ..., m)$ are bounded and Lipschitz continuous on R.

Remark 3.2 The proofs of Theorems 3.1 and 3.2 could be easily adapted to the system (5),(6),(3),(4) using the boundedness of σ.

3.3 Auxiliary problems

In this section we introduce the following auxiliary problem:

$$\sigma' - \Delta\sigma + \partial I_U(\sigma) \ni g(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\lambda}(\bar{\sigma}) \quad in\ Q, \tag{10}$$

$$u_i' - \Delta u_i = h_i(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\mu}_i(\bar{u}_i) \quad in\ Q, \quad i = 1, ..., m, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0 \quad on\ \Sigma, \quad i = 1, ..., m, \tag{12}$$

$$\sigma(0, x) = \sigma_0(x), \quad u_i(0, x) = u_{i0}(x) \quad in\ \Omega, \quad i = 1, ..., m, \tag{13}$$

namely, we have replaced the terms $\nabla \cdot \vec{\lambda}(\sigma)$, $\nabla \cdot \vec{\mu}_i(u_i)$ by $\nabla \cdot \vec{\lambda}(\bar{\sigma})$, $\nabla \cdot \vec{\mu}_i(\bar{u}_i)$, respectively, where $\bar{\sigma}$, $\bar{u}_i$ $(i = 1, ..., m)$ are given functions.

Definition 3.3 *Let $\bar{\sigma}, \bar{u}_i \in L^2(0, T; V)$ $(i = 1, ..., m)$ be given functions. A pair of functions $\{\sigma, U\}$, $U = (u_1, ..., u_m)$ is called a solution of the system (10)-(13) if:*

(i) $\sigma, u_i \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, $i = 1, ..., m$.

(ii) $\sigma' - \Delta\sigma + \partial I_U(\sigma) \ni g(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\lambda}(\bar{\sigma})$, in H, a.e. in $(0, T)$.

(iii) $u_i' - \Delta u_i = h_i(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\mu}_i(\bar{u}_i)$, $i = 1, ..., m$, in H, a.e. in $(0, T)$.

(iv) $\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 0$, $\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0$ in $L^2(\partial\Omega)$, a.e. in $(0, T)$, $i = 1, ..., m$.

(v) $\sigma(0) = \sigma_0$, $u_i(0) = u_{i0}$, $i = 1, ..., m$.

We will prove existence and uniqueness of the solutions of the system (10)-(13) as well as continuous dependence on the data $\bar{\sigma}, \bar{u}_i$ $(i = 1, ..., m)$.

Theorem 3.4 *For any given $\bar{\sigma}, \bar{u}_i \in L^2(0, T; V)$ $(i = 1, ..., m)$, there exists a unique solution $\{\sigma, U\}$ of (10)-(13).*

Moreover, the solution $\{\sigma, U\}$ satisfies the following inequality

$$\int_0^t \left(|\sigma'(s)|_H^2 + |U'(s)|_{\mathbf{H}}^2 + |\Delta\sigma(s)|_H^2 + |\Delta U(s)|_{\mathbf{H}}^2\right) ds + |\nabla\sigma(t)|_H^2 + |\nabla U(t)|_{\mathbf{H}}^2$$

$$\leq N_1 \left(1 + \int_0^t |\nabla\bar{\sigma}(s)|_H^2 ds + \int_0^t |\nabla\bar{U}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds\right) \tag{14}$$

for all $t \in [0, T]$, where $N_1 > 0$ is a constant independent of $\bar{\sigma}, \bar{U}$ and $\{\sigma, U\}$.

In order to study the system (10)-(13) we introduce an approximate system with approximation parameter $\delta > 0$. To this end for $\sigma \in R$, $U \in R^m$ denote by ∂I_U^δ the Yosida regularization of the subdifferential graph ∂I_U:

$$\partial I_U^\delta(\sigma) = \frac{1}{\delta}[\sigma - f^*(U)]^+ - \frac{1}{\delta}[f_*(U) - \sigma]^+.$$

Consider the following approximate system of PDE's

$$\sigma' - \Delta\sigma + \partial I_U^\delta(\sigma) = g(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\lambda}(\bar{\sigma}) \quad in\ Q, \tag{15}$$

$$u_i' - \Delta u_i = h_i(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\mu}_i(\bar{u}_i) \quad in\ Q, \quad i = 1, ..., m, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0 \quad on\ \Sigma, \quad i = 1, ..., m, \tag{17}$$

$$\sigma(0, x) = \sigma_0(x), \quad u_i(0, x) = u_{i0}(x) \quad in\ \Omega, \quad i = 1, ..., m. \tag{18}$$

Below we give a definition of the solution of the approximate system (15)-(18). For the sake of simplicity we will denote the solution again by $\{\sigma, U\}$ instead of $\{\sigma_\delta, U_\delta\}$.

Definition 3.5 *Let $\bar{\sigma}, \bar{u}_i \in L^2(0, T; V)$ $(i = 1, ..., m)$ be given functions. A pair of functions $\{\sigma, U\}$ is called a solution of the system (15)-(18) if:*

(i) $\sigma, u_i \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, $i = 1, ..., m$.

(ii) $\sigma' - \Delta\sigma + \partial I_U^\delta(\sigma) = g(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\lambda}(\bar{\sigma})$, in H, a.e. in $(0, T)$.

(iii) $u_i' - \Delta u_i = h_i(\sigma, U) + \nabla \cdot \vec{\mu}_i(\bar{u}_i)$, $i = 1, ..., m$, in H, a.e. in $(0, T)$.

(iv) $\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 0$, $\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0$ in $L^2(\partial\Omega)$, a.e. in $(0, T)$, $i = 1, ..., m$.

(v) $\sigma(0) = \sigma_0$, $u_i(0) = u_{i0}$, $i = 1, ..., m$.

Lemma 3.6 *For each $\bar{\sigma}, \bar{u}_i \in L^2(0, T; V)$ $(i = 1, ..., m)$ there exists a unique solution of the system (15)-(18). Moreover,*

$$|u_i|_\infty \le M_1, \quad i = 1, ..., m, \tag{19}$$

where $M_1 > 0$ is a constant which depends only on T, $|\mu_i|_\infty$, $|h_i|_\infty$, $|u_{0i}|_\infty$ $(i = 1, ..., m)$.

Remark 3.3 Note that the solutions of system (10)-(13) depend continuously on $\bar{\sigma}, \bar{U}$. Namely, let $\bar{\sigma}_n \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $\bar{U}_n \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$, $\bar{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $\bar{U} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$, $n = 1, 2, ...$, and let $\{\sigma_n, U_n\}$, $\{\sigma, U\}$ be the respective solutions of the system (10)-(13). Suppose that $\{\bar{\sigma}_n\}$ is bounded in $W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $\{\bar{U}_n\}$ is bounded in $W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$ and

$$\bar{\sigma}_n \to \bar{\sigma} \text{ in } L^2(0, T; H),$$

$$\bar{U}_n \to \bar{U} \text{ in } L^2(0,T;\mathbf{H}).$$

Then it is not difficult to see that

$$\begin{aligned} \sigma_n \to \sigma \quad & \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \\ & \text{and weakly-* in } L^\infty(0,T;V), \\ U_n \to U \quad & \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;\mathbf{H}) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)) \\ & \text{and weakly-* in } L^\infty(0,T;\mathbf{V}). \end{aligned}$$

3.4 Existence of solutions of system (1)-(4)

In this section we will formulate the main result of the paper:

Theorem 3.7 *There exists at least one solution of the system (1)-(4).*

Remark 3.4 Without loss of generality, in the proof of Theorem 3.4 it could be assumed that σ is also bounded. Thus, in view of Remarks 3.1 and 3.2 it follows that the proof of Theorem 3.4 as well as Theorem 3.7 can be easily adapted to the system (5),(6),(3),(4).

References

[1] T. Aiki, One-dimensional shape memory alloy problems, *Funkcial. Ekvac.*, **46** (2003), 441-469.

[2] T. Aiki, E. Minchev, A prey-predator model with hysteresis effect, *to appear.*

[3] T. Aiki, E. Minchev, T. Okazaki, A population model with vector hysteresis, *to appear.*

[4] P. Colli, K. H. Hoffmann, A nonlinear evolution problem describing multi - component phase changes with dissipation, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **14** (1993), 275 - 297.

[5] P. Colli, N. Kenmochi, M. Kubo, A phase field model with temperature dependent constraint, *J. Math. Anal. Appl.*, **256** (2001), 668 - 685.

[6] F. C. Hoppensteadt, W. Jäger, C. Pöppe, A hysteresis model for bacterial growth patterns, in *Modelling of Patterns in Space and Time,* W. Jäger and J. D. Murray Eds., Lecture Notes in Biomath., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 123 - 134.

[7] N. Kenmochi, T. Koyama, G. H. Meyer, Parabolic PDEs with hysteresis and quasivariational inequalities, *Nonlinear Analysis,* **34** (1998), 665 - 686.

[8] N. Kenmochi, E. Minchev, T. Okazaki, Ordinary differential systems describing hysteresis effects and numerical simulations, *Abstr. Appl. Anal.,* **7** (2002), no. 11, 563 - 583.

[9] J.-P. Kernevez, G. Joly, M.-C. Duban, B. Bunow, D. Thomas, Hysteresis, oscillations, and pattern formation in realistic immobilized enzyme systems, *J. Math. Biol.,* **7** (1979), no. 1, 41 - 56.

[10] M. A. Krasnosel'skii, A. V. Pokrovskii, *Systems with Hysteresis,* Springer, Heidelberg, 1989.

[11] M. Kubo, A filtration model with hysteresis, *J. Differential Equations,* **201** (2004), 75 - 98.

[12] M. Landau, P. Lorente, J. Henry, S. Canu, Hysteresis phenomena between periodic and stationary solutions in a model of pacemaker and nonpacemaker coupled cardiac cells, *J. Math. Biol.,* **25** (1987), no. 5, 491 - 509.

[13] J. W. Macki, P. Nistri, P. Zecca, Mathematical models for hysteresis, *SIAM Review,* **35** (1993), no. 1, 94 - 123.

[14] I. D. Mayergoyz, *Mathematical Models for Hysteresis,* Springer, New York, 1991.

[15] E. Minchev, On a system of nonlinear PDE's for phase transitions with vector order parameter, *Advances in Mathematical Sciences and Applications,* **14** (2004), no. 1, 187 - 209.

[16] K. Shirakawa, Large time behavior for doubly nonlinear systems generated by subdifferentials, *Adv. Math. Sci. Appl.,* **10** (2000), no. 1, 417 - 442.

[17] A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis,* Springer, Berlin, 1994.

[18] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A Linear Monotone Operators,* Springer, New York - Berlin, 1990.

Gray-Scott モデルにおける定常解について

早稲田大学大学院理工学研究科D２　佐藤典弘

1 Problem and Results.

次の空間 1 次元 Gray-Scott モデルを考える.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - uv^2 + \lambda(1-u), & (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty), \\ \frac{\gamma}{d} v_t = \gamma v_{xx} + uv^2 - v, & (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

ただし λ, γ, d は正定数である. (1) の定常解は以下の常微分方程式を満たす.

$$u'' - uv^2 + \lambda(1-u) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

$$\gamma v'' + uv^2 - v = 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

この定常問題を (SP) と呼ぶことにする. 定数定常解に関しては,
(i) もし $\lambda < 4$ ならば, $(u,v) = (1,0)$.
(ii) もし $\lambda = 4$ ならば, $(u,v) = (1,0)$, $(\frac{1}{2}, 2)$.
(iii) もし $\lambda > 4$ ならば, $(u,v) = (1,0)$, $\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, \frac{\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2}\right)$.
本講演では (2), (3) と以下の境界条件

$$\lim_{x \to \pm\infty} (u,v) = (1,0) \tag{4}$$

を満たす非自明な定常解の存在・非存在に関して考える.

半自明解を $(1,v)(v \neq 0)$ か $(u,0)(u \neq 1)$ と定義すると, (SP) の半自明解は存在しないことに注意する.

定常問題 (SP) はこれまでに Hale, Peletier および Troy [1] によって λ と γ が

$$\lambda\gamma = 1 \tag{5}$$

あるいは

$$\lambda\gamma = 1 + \epsilon \tag{6}$$

を満たす場合に関して研究されてきた. ただし ϵ は十分小さい数である.

(5) の場合ついて以下の定理が知られている. ([1] 参照)

Theorem HPT1. λ と γ が (5) を満たすとする.
(i)$0 < \gamma < \frac{2}{9}$ ならば, (SP) の非自明解 (u,v) が存在して以下の性質を満たす.
(a)$u(x) = u(-x), \quad v(x) = v(-x), \quad u + \gamma v - 1 = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$,
(b)$u'(x) > 0, \quad v'(x) < 0 \quad (x > 0)$.
(ii)*If* $\gamma \geq \frac{2}{9}$ ならば (SP) の非自明解は存在しない.

(6) の場合に関して, 以下の定理が Hale, Peletier および Troy [1] によって示された.

Theorem HPT2. $0 < \gamma < \frac{2}{9}$ に対して (6) を仮定する. そのとき, ある正定数 ϵ_0 が存在して (SP) の偶関数ホモクリニック軌道の連続な枝 $\{(u(\epsilon), v(\epsilon)) : |\epsilon| < \epsilon_0\}$ が存在して, $\epsilon \to 0$ のとき $H^2(\mathbf{R}) \times H^2(\mathbf{R})$ において

$$(u(\epsilon), v(\epsilon)) \to (u_0, v_0).$$

ただし (u_0, v_0) は Theorem HPT1 の (i) で与えられたホモクリニック軌道である.

Hale, Peletier および Troy [1] はまた (2), (3) と以下の境界条件を満たす別の定常問題に対しても研究している.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (u, v) = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2} \right) \tag{7}$$

彼らは λ と γ が (5), (6) および

$$\frac{2}{9} < \gamma < \frac{1}{4}$$

を満たすときに, (2), (3) および境界条件 (7) を満たす非自明解が存在することも示している.

われわれは $\lambda\gamma$ が 1 に近くない場合に関して研究を重ね (SP) の非自明解が存在しないための十分条件を得ることができた.

Theorem 1. $\lambda\gamma < 1$ とする. そのとき以下の条件のうち 1 つでも成り立てば (SP) の非自明解は存在しない.

(i)$\gamma \geq \frac{1}{4}$

(ii)$\frac{4}{\gamma} - 16 < \lambda \leq 4$ かつ $\frac{1}{5} < \gamma < \frac{1}{4}$

(iii)$\lambda \leq \frac{4}{5\gamma}$, $\gamma \leq \frac{1}{4}$ かつ

$$\begin{cases} \lambda \geq \frac{4(1-4\gamma)}{\gamma(1+4\gamma-16\gamma^2)} & \lambda\gamma \leq (1-\lambda\gamma)(1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2})^2, \\ \lambda \leq 4 & \lambda\gamma > (1-\lambda\gamma)(1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2})^2. \end{cases}$$

Theorem 2. $\lambda\gamma > 1$ とする. そのとき $\lambda < 4$ ならば, (SP) の非自明解は存在しない.

2 A priori estimates.

上記の定理を示すために, (SP) の解に対するアプリオリ評価が必要である. われわれの解析は以下の形式の強最大値原理を用いる. (例えば [2] 参照).

Strong Maximum Principle. $w (\not\equiv 0)$ を

$$w'' + b(x)w' + c(x)w = f(x) \quad x \in \mathbf{R}$$

の解とする. ただし b と c は $\mathbf{R}$ 上の有界関数であり, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $c(x) \leq 0$ である. また, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) \leq 0$ であると仮定する. そのとき, もし

$$\liminf_{x \to \pm\infty} w(x) \geq 0$$

ならば,

$$w(x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

この強最大値原理を使って以下の補題を示すことができる．

Lemma 1. (u, v) を (SP) の任意の非自明解とする．そのとき

$$0 < u(x) < 1, \quad v(x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Proof. まず最初に背理法を用いて $x \in \mathbf{R}$ に対して $u(x) > 0$ であることを示す．$\inf_{x\in\mathbf{R}} u(x) \leq 0$ であると仮定する．$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 1$ であるので、u は $x = x_0$ で最小値を持つ;

$$\inf_{x\in\mathbf{R}} u(x) = u(x_0) \leq 0.$$

$u''(x_0) \geq 0$ であることに注意すると, (2) より

$$0 \leq u''(x_0) = u(x_0)v(x_0)^2 + \lambda(u(x_0) - 1) \leq -\lambda < 0$$

となり, これは矛盾である．それゆえに $\inf_{x\in\mathbf{R}} u(x) = \min_{x\in\mathbf{R}} u(x) > 0$.

次に $u - 1 = w$ とおく．そのとき (2) と (4) より

$$w'' - \lambda w = uv^2 \geq 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} w(x) = 0.$$

ゆえに強最大値原理により $x \in \mathbf{R}$ に対して $w(x) < 0$ を示すことができる．すなわち

$$u(x) < 1 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

最後に, (3) と (4) より

$$\gamma v'' - v = -uv^2 \leq 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} v(x) = 0$$

となるが、再び強最大値原理を用いることにより

$$v(x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

□

Lemma 2. (u, v) を (SP) の任意の非自明解とする．そのとき、以下の不等式が成り立つ．
(i)$\lambda\gamma < 1$ ならば, $x \in \mathbf{R}$ に対して $u(x) + \gamma v(x) - 1 < 0$.
(ii)$\lambda\gamma > 1$ ならば, $x \in \mathbf{R}$ に対して $u(x) + \gamma v(x) - 1 > 0$.

Proof. まず始めに $\lambda\gamma < 1$ の場合を考える．(2)+(3) より

$$u'' + \gamma v'' = \lambda u + v - \lambda. \tag{8}$$

$p = u + \gamma v - 1$ と定義すると,

$$p'' - \lambda p = (1 - \lambda\gamma)v \geq 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = 0.$$

が成り立つので, 強最大値原理より

$$p(x) < 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

がいえる．ゆえに $\lambda\gamma < 1$ のときに (i) が成り立つ．$\lambda\gamma > 1$ に対する証明は (i) と同様である． □

Lemma 3. (u, v) を (SP) の任意の非自明解とする．そのとき以下の不等式が成り立つ．
(i)$\lambda\gamma < 1$ ならば, $x \in \mathbf{R}$ に対して $u(x) + \gamma v(x) > \lambda\gamma$.
(ii)$\lambda\gamma > 1$ ならば, $x \in \mathbf{R}$ に対して $u(x) + \gamma v(x) < \lambda\gamma$.

Proof. $\lambda\gamma < 1$ の場合にのみ証明をする．その他の場合に関しては同様に証明することができる．$q = u + \gamma v - \lambda\gamma$ とおくと, (8) は

$$q'' - \frac{1}{\gamma}q = \left(\lambda - \frac{1}{\gamma}\right)u \leq 0.$$

$\lim_{x\to\pm\infty} q(x) = 1 - \lambda\gamma > 0$ なので, 強最大値原理により

$$q(x) = u(x) + \gamma v(x) - \lambda\gamma > 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

□

(SP) の任意の解 (u, v) に対して

$$u_{min} = \min_{x\in\mathbf{R}} u(x), \quad v_{max} = \max_{x\in\mathbf{R}} v(x).$$

と定義する．そのとき以下の補題が成り立つ．

Lemma 4. $\lambda\gamma < 1$ とする．
(i)$\lambda\gamma^2 \geq \frac{1}{4}$ ならば, $u_{min} = 1$ かつ $v_{max} = 0$.
(ii)$\lambda\gamma^2 < \frac{1}{4}$ ならば,

$$u_{min} \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda\gamma^2}}{2}, \quad v_{max} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda\gamma^2}}{2\gamma}.$$

Proof. ある $x_m \in \mathbf{R}$ に対して $u_{min} = u(x_m)$ と定義する．(2) より

$$0 \leq u''(x_m) = u(x_m)(\lambda + v(x_m)^2) - \lambda.$$

それゆえに

$$u_{min} = u(x_m) \geq \frac{\lambda}{\lambda + v(x_m)^2} \geq \frac{\lambda}{\lambda + v_{max}^2}. \tag{9}$$

また Lemma 2 より $v_{max} < \frac{1}{\gamma}$ となるので

$$u_{min} \geq \frac{\lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2 + 1} = a_1.$$

さて, 数列 $\{a_n\}$ を以下で定義する．

$$a_{n+1} = \max\left\{a_n, \frac{\lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2 + (a_n - 1)^2}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{10}$$

帰納法によりすべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $u_{min} \geq a_n$ が成り立つことを示す．実際, もし $u_{min} \geq a_n$ ならば, Lemma 2 の (i) より $v_{max} < \frac{1}{\gamma}(1 - u_{min}) \leq \frac{1}{\gamma}(1 - a_n)$ となる．それゆえに (9) から

$$u_{min} > \frac{\lambda}{\lambda + \left\{\frac{1}{\gamma}(1 - a_n)\right\}^2} = \frac{\lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2 + (a_n - 1)^2}$$

が成り立ち、これは (10) を意味する.

(10) によって定義した $\{a_n\}$ に対して以下の結果が成り立つ.

(a)$4\lambda\gamma^2 \geq 1$ ならば, $\{a_n\}$ は狭義単調増加数列であり $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b)$4\lambda\gamma^2 < 1$ とする. そのとき, もし $a_1 \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}\right)$ ならば, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n = a_1 = \frac{\lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2+1}$.

一方, もし $a_1 \in \left(0, \frac{1-\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}\right)$ ならば, $\{a_n\}$ は狭義単調増加数列で $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}$.

$4\lambda\gamma^2 \geq 1$ のとき, (a) よりすべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $1 \geq u_{min} \geq a_n$ が成り立ち、$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ である. それゆえに $u_{min} = 1$, すなわち $u \equiv 1$ で $v \equiv 0$ となる。

$4\lambda\gamma^2 < 1$ のとき, (b) から

$$u_{min} \geq \frac{1-\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}$$

となることがわかる. さらに Lemma 2 より

$$v_{max} < \frac{1}{\gamma}(1-u_{min}) < \frac{1+\sqrt{1+4\lambda\gamma^2}}{2}.$$

□

Lemma 5. $\lambda\gamma < 1$ かつ $4\lambda\gamma^2 \leq 1$ とする. ある正定数 a が存在して

$$1 > a\gamma \geq \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}, \tag{11}$$

$$\gamma a^2 - a + 4(1-\lambda\gamma) \geq 0 \tag{12}$$

を満たすと仮定する. そのとき (SP) の任意の解 (u, v) は

$$a(u(x)-1) + v(x) < 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Proof. $(2) \times a + (3) \times \frac{1}{\gamma}$ より

$$au'' + v'' = \left(a - \frac{1}{\gamma}\right)uv^2 + a\lambda(u-1) + \frac{1}{\gamma}v.$$

$r = a(u-1) + v$ とおくと r は $\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$ を満たし、

$$r'' - \left\{\lambda + \left(1 - \frac{1}{a\gamma}\right)v^2\right\}r = \frac{1-a\gamma}{a\gamma}v\left\{v^2 - av + \frac{a(1-\lambda\gamma)}{1-a\gamma}\right\}. \tag{13}$$

ここで

$$\begin{aligned} v^2 - av + \frac{a(1-\lambda\gamma)}{1-a\gamma} &= \left(v - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a(1-\lambda\gamma)}{1-a\gamma} \\ &\geq \frac{a}{4(1-a\gamma)}\left\{\gamma a^2 - a + 4(1-\lambda\gamma)\right\}. \end{aligned}$$

それゆえに (13) の右辺は (12) により非負となる. (13) における r の係数に関して Lemma 4 より

$$\begin{aligned} \lambda + \left(1 - \frac{1}{a\gamma}\right)v^2 &\geq \lambda - \frac{1-a\gamma}{a\gamma}\left(\frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2\gamma}\right)^2 \\ &= \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2\gamma^2}\left(1 - \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2a\gamma}\right). \end{aligned}$$

これは (11) により非負である．そのとき強最大値原理により $x \in \mathbf{R}$ に対して $r(x) < 0$ が成り立つ． □

Remark 1. Lemma 5 において $D := 16\lambda\gamma^2 - 16\gamma + 1 \leq 0$ のときはいつでも (12) が成り立つ．一方 $D > 0$ ならば, (12) は

$$a \geq \frac{1+\sqrt{D}}{2\gamma} \quad \text{あるいは} \quad a \leq \frac{1-\sqrt{D}}{2\gamma}$$

と同値となる．(11) と (12) を満たす a に関しては, もし

$$\lambda \leq \max\left\{\frac{16\gamma-1}{16\gamma^2}, \frac{4}{5\gamma}\right\}$$

ならば,

$$a \geq \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2\gamma}$$

ととり, 一方

$$\lambda > \max\left\{\frac{16\gamma-1}{16\gamma^2}, \frac{4}{5\gamma}\right\}$$

ならば,

$$a \geq \frac{1+\sqrt{16\lambda\gamma^2-16\gamma+1}}{2\gamma}$$

ととることができる．

Lemma 6. $\lambda\gamma < 1$, $\gamma < \frac{1}{4}$ および $4\lambda\gamma^2 \leq 1$ を仮定する．また,

$$a = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2\gamma} & \lambda \leq \frac{4}{5\gamma}, \\ \frac{1+\sqrt{16\lambda\gamma^2-16\gamma+1}}{2\gamma} & \lambda > \frac{4}{5\gamma}. \end{cases} \tag{14}$$

とする．そのとき以下の不等式が成り立つ．
(i)$\frac{4}{5\gamma} < \lambda < 4$ ならば, $u_{min} = 1$ かつ $v_{max} = 1$.
(ii)$\lambda \leq \frac{4}{5\gamma}$ あるいは $\lambda \geq \max\left\{4, \frac{4}{5\gamma}\right\}$ ならば,

$$u_{min} \geq \frac{a-\sqrt{a^2-4\lambda}}{2a}, \quad v_{max} \leq \frac{a+\sqrt{a^2-4\lambda}}{2}.$$

Proof. 証明は Lemma 4 とほとんど同様である．違いは Lemma 4 で定義した数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{\lambda}{\lambda + a^2(a_n-1)^2}$$

と定義することである． □

Lemma 7. $\lambda\gamma < 1$, $4\lambda\gamma^2 \leq 1$ とし a を (14) で定義したものとする．ある正定数 b が存在して

$$a > b \geq \frac{a+\sqrt{a^2-4\lambda}}{2\gamma a}, \tag{15}$$

$$\gamma b^2 - b + 4(1-\lambda\gamma) \geq 0 \tag{16}$$

を満たすとする．そのとき (SP) の任意の解 (u, v) は

$$b(u(x)-1) + v(x) < 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Proof. 証明は Lemma 5 と同様である. □

Remark 2. $\lambda \geq 4$ かつ $\lambda > \frac{4}{5\gamma}$ ならば, (15) と (16) より

$$b \geq \frac{1+\sqrt{16\lambda\gamma^2 - 16\gamma + 1}}{2\gamma}.$$

一方、$\lambda \leq \frac{4}{5\gamma}$ ならば, (15) と (16) より

$$b \geq \begin{cases} \frac{1+\sqrt{16\lambda\gamma^2-16\gamma+1}}{2\gamma} & \lambda\gamma > (1-\lambda\gamma)(1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2})^2, \\ \frac{1+\sqrt{1-\frac{4\lambda}{a^2}}}{2\gamma} & \lambda\gamma \leq (1-\lambda\gamma)(1+\sqrt{1-4\lambda\gamma^2})^2. \end{cases}$$

3 Proof of Theorems.

Proof of (i) of Theorem 1. (SP) が非自明解 (u,v) を持つと仮定する. 集合 A を以下のように定義する;

$$A = \left\{ (u,v) \in \mathbf{R}^2 : 0 < u < 1,\ v > 0,\ -\frac{1}{\gamma}u + \lambda < v < \frac{1}{\gamma}(1-u) \right\}.$$

Lemmas 1, 2 および 3 より, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $(u(x), v(x)) \in A$ となる. ここで, もし $\gamma \geq \frac{1}{4}$ ならば, すべての $(u,v) \in A$ は $uv < 1$ を満たす. それゆえに, $\gamma v'' = v(1-uv) < 0$ が $\mathbf{R}$ 上で成り立つことがわかる. この不等式により v は狭義凸関数となり, これは矛盾である. □

Proof of (ii), (iii) of Theorem 1. $\gamma \leq \frac{1}{4}$ と $\lambda < \frac{1}{\gamma}$ に対して集合 B を

$$B = \left\{ (u,v) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1-\sqrt{1-4\lambda\gamma^2}}{2} \leq u < 1\ v > 0,\ -\frac{1}{\gamma}u + \lambda < v < a(1-u) \right\},$$

と定義する. ただし a は (11) と (12) を満たす. そのとき Lemmas 1-5 より, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対し $(u(x), v(x)) \in B$ が成り立つ. ここで $a \leq 4$ ならば, すべての $(u,v) \in B$ は $uv < 1$ を満たすことに注意する. この場合は v は狭義凸関数となり, これは矛盾である. このようにして, もし a が (11), (12) と $a \leq 4$ 満たすようにとることができるならば, (SP) の非自明解は存在しないことがわかる. これは λ と γ が

$$\frac{4}{\gamma} - 16 < \lambda \leq 4, \quad \frac{1}{5} < \gamma < \frac{1}{4}$$

を満たすときに可能である. ゆえに (ii) の場合を示すことができた.

(i) と (ii) の場合と同様にして, Lemmas 6 と 7 を用いて (iii) の場合も示すことができる. □

最後に Theorem 2 を証明する.

Proof of Theorem 2. (u,v) を (SP) の任意の非自明解とする. 集合 C_n を

$$C_n = \left\{ (u,v) \in \mathbf{R}^2 : b_n \leq u < 1,\ v > 0,\ \frac{1}{\gamma}(1-u) < v < -\frac{1}{\gamma}u + c_n \right\}$$

のように定義する．ただし $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ は正の数からなる数列で後で定めることにする．ある n に対して $(u(x), v(x)) \in C_n$ がすべての $x \in \mathbf{R}$ に対して成り立つと仮定する．そのとき (9) から

$$u_{min} \geq \frac{\lambda}{\lambda + \left(-\frac{1}{\gamma}b_n + c_n\right)^2} = \frac{\lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2 + (b_n - \gamma c_n)^2} \equiv b_{n+1}.$$

$s = u + \gamma v - \gamma c$ とおく．ただし、c はあとで決めることにする．そのとき (8) は

$$s'' - \frac{1}{\gamma}s = \left(\lambda - \frac{1}{\gamma}\right)u - \lambda + c. \tag{17}$$

となる．$\left(\lambda - \frac{1}{\gamma}\right)u - \lambda + c \geq \left(\lambda - \frac{1}{\gamma}\right)u_{n+1} - \lambda + c$ なので, (17) の右辺はもし c が

$$c \geq \lambda + \left(\frac{1}{\gamma} - \lambda\right)b_{n+1}$$

を満たすならば非負となる．この場合に関しては

$$\lim_{x \to \pm\infty} s(x) = 1 - \gamma c \leq (\lambda\gamma - 1)(b_{n+1} - 1) < 0$$

となることがわかる．さて, $c_{n+1} = \lambda + \left(\frac{1}{\gamma} - \lambda\right)b_{n+1}$ と定義すると, (17) に対して強最大値原理が適用できて

$$v < -\frac{1}{\gamma}u + c_{n+1}.$$

それゆえに, もし $(u, v) \in C_n$ ならば,

$$(u, v) \in C_{n+1}.$$

Lemmas 1-3 より $b_1 = 0$ かつ $c_1 = \lambda$ ととることができることに注意する．これまでの議論により $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ を

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{\lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2 + (b_n - \gamma c_n)^2}, \\ c_{n+1} &= \lambda + \left(\frac{1}{\gamma} - \lambda\right)b_{n+1} \end{aligned} \tag{18}$$

と定義することができる．また, $c_n = \lambda + (\frac{1}{\gamma} - \lambda)b_n$ がすべての $n \in \mathbf{N}$ に対し成り立つことに注意する．この等式を (18) に代入すると

$$b_{n+1} = \frac{1}{1 + \lambda(b_n - 1)^2}.$$

もし, $\lambda < 4$ ならば

$$b_n < b_{n+1} \quad b_n < 1 \quad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つことがわかる．それゆえに Bolzano-Weierstrass の定理から

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 1$$

となる．これは矛盾である． □

参考文献

[1] J. K. Hale, L. A. Peletier and W. C. Troy; *Exact homoclinic and heteroclinic solutions of the Gray-Scott model for autocatalysis*, SIAM J. Appl. Math. **61**(2000), 102-130.

[2] L. A. Peletier and W. C. Troy; 'Spatial Patterns, Higher Order Models in Physics and Mechanics', Progress in Nonlinear Differntial Equations and Their Applications. Vol. 45, Birkhäuser, Boston, 2001.

非斉次な表面張力係数を持つ固体・液体相転移モデルにおける解の漸近挙動

白川　健　（東京電機大・情報環境）

1　導入

Ω を $\mathbb{R}^2$ 内の Lipschitz 連続な境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域、σ を Ω 上非負な値を持つ Lipschitz 連続関数とする。本論文では領域 Ω 内に ある物質（例えば H_2O）が満たされているとし、その物質がある温度（相転移温度）を境に凝固または融解する（相転移する）様子を再現する発展方程式（数学モデル）を考える。

固体・液体相転移現象の力学系の数式化（モデリング）には様々な手法があるが、その中の有力なものの1つとして 方程式をエネルギーの汎関数（自由エネルギー）$\mathscr{F}$ の勾配流：

$$-\frac{d}{dt}u(t,x) = \frac{d}{du}\mathscr{F}_\theta(u(t,x)),\ (t,x) \in Q := (0,+\infty) \times \Omega; \tag{1.1}$$

として与えるという方法がある。ここに、$\theta = \theta(t,x)$ は（相対）温度を表すパラメータで、ここでは簡単のため θ を既知とし 相転移温度を 0 (℃) とする。また $u = u(t,x)$ は物質の状態を表すパラメータ（相関数）で、本論文では時刻 t, 場所 x における $u(t,x)$ の値を次のルールに従って設定する：

$$\begin{cases} \bullet\ \text{状態が液体ならば } u(t,x) = 1, \\ \bullet\ \text{状態が固体ならば } u(t,x) = -1, \\ \bullet\ \text{液体・固体の境目（界面）または2つの状態の混合状態ならば } -1 < u(t,x) < 1. \end{cases}$$

上記の方法に従ってモデリングを行う場合、自由エネルギー $\mathscr{F}_\theta$ の設定に関しても無数の選択肢があるが、ここでは $\mathscr{F}_\theta$ を次の様な汎関数として設定する：

$$\mathscr{F}_\theta(u) := \int_\Omega \left\{ I_{[-1,1]}(u) - \frac{1}{2}u^2 - \theta u \right\} dx + V_\sigma(u); \tag{1.2}$$

ただし、$I_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1,1]$ 上の指示関数であり、V_σ は

$$V_\sigma(z) := \inf\left\{ \liminf_{i\to+\infty} \int_\Omega \sigma|\nabla\zeta_i|\,dx \ \middle|\ \begin{array}{l} \{\zeta_i\} \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ s.t.} \\ \zeta_i \to z \text{ in } L^1(\Omega) \\ \text{as } i \to +\infty \end{array} \right\},\ z \in L^1(\Omega); \tag{1.3}$$

と定義される $L^1(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数である。

一番目の積分は主に物質の凝固・融解のメカニズムを特徴付ける項であり、指示関数 $I_{[-1,1]}(u)$ の効果からこの積分の密度関数は常に $u = 1$ または $u = -1$ において極小値を持つ。

それに対して 汎関数 V_σ は主に界面上でのエネルギー（界面エネルギー）を表しており、関数 σ は 界面上の表面張力の強さを表す係数（表面張力係数）として解釈される。

特に関数 z が滑らかならば V_σ の値は積分値 $\displaystyle\int_\Omega \sigma(x)|\nabla z(x)|\, dx$ と一致するが、このとき $\sigma=0$ となる場所では界面エネルギーの密度は常に最小値（ゼロ）となる。したがって σ の零点の集合 $\sigma^{-1}(0)$ の設定を色々に取ることで、結晶などの物質特有の形状決定のメカニズムを再現することに役立てられるのではないかと期待出来る。

関数 $\theta \in L^2_{loc}([0,+\infty); L^2(\Omega))$ を固定し、(1.2) で与えられる自由エネルギーに関する勾配流 (1.1) を計算すると、次の発展方程式が導かれる：

$$(E_\sigma;\theta) \quad u_t(t) + \partial\Phi_\sigma(u(t)) \ni u(t) + \theta(t) \ \text{ in } L^2(\Omega),\ t>0,$$

ここに Φ_σ は：

$$\Phi_\sigma(z) := \int_\Omega I_{[-1,1]}(z)\, dx + V_\sigma(z),\ z \in L^2(\Omega); \tag{1.4}$$

で定義される $L^2(\Omega)$ 内の適正下半連続凸関数であり、$\partial\Phi_\sigma$ は Φ_σ の（$L^2(\Omega)$ での）劣微分である。

方程式 $(E_\sigma;\theta)$ の可解性（初期値問題の解の存在および一意性）は Brézis の一般論（[2] 参照）から直ちに保障される。更に Φ_σ のレベル集合をコンパクトにする様な仮定を追加すれば解 $u(t)$ の $t \to +\infty$ としたときの集積点 (ω-limit points) は、$(E_\sigma;\theta)$ の時間に関して不動な解（定常解）であることも示される。

本論文では、定常解の中でも自由エネルギーの最小元の例をいくつか紹介し、各最小元が持つパラメータの揺らぎに対する復元力（漸近安定性）を評価する。結論として 関数 σ の設定しだいで、自由エネルギー最小元に現れる界面のパターンをある程度コントロールできることが確認される。

2 解の基本性質

本論文を通し 特に断りがなければ、各次元 $m \in \mathbb{N}$ おける測度はすべて $\mathbb{R}^m$ 上の Lebesgue 測度 $\mathscr{L}^m$ であるとする。また、任意の Borel 集合 E に対し、E の特性関数を χ_E で表す。

V_σ を (1.3) で与えられる $L^1(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数とし、V_σ の有効領域を $D(V_\sigma)$ で表す。よく知られる様に（例えば 文献 [1, Chapter 1], [3, Chapter 5], [4, Part I] などを参照）$\sigma \equiv 1$ (on $\overline{\Omega}$) であれば、対応する汎関数 V_1 の値は 関数 $z \in D(V_1)$ に依存して決まる Radon 測度 $|\nabla z|$ (total variation measure) を用いて:

$$V_1(z) := \int_\Omega |\nabla z|,\ \forall z \in D(V_1);$$

と書くことが出来る。このときの汎関数 V_1 は全変動汎関数と呼ばれ、特にその有効領域 $D(V_1)$ は通常 $BV(\Omega)$ と表記される。更に、空間 $BV(\Omega)$ は次のノルム：

$$|z|_{BV(\Omega)} = |z|_{L^1(\Omega)} + V_1(z),\ z \in BV(\Omega);$$

によって Banach 空間となり、空間 $L^1(\Omega)$ にコンパクトに埋め込まれることが知られる。

注意 2.1 一般に σ が非負な値を持つ Lipschitz 連続関数である場合、汎関数 V_σ の持つ性質として次の事柄が知られる（論文 [5] 参照)。

(i) $D(V_\sigma) \supset BV(\Omega)$, 特に $\sigma^{-1}(0) = \emptyset$ ならば $D(V_\sigma) = BV(\Omega)$ となる。

(ii) $\forall z \in D(V_\sigma)$, $\exists D_\sigma z : \Omega$ 上のベクトル値 Radon 測度, s.t.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot D_\sigma z = -\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma\boldsymbol{\varphi})\, z\, dx, \ \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \\ \displaystyle V_\sigma(z) = \int_\Omega |D_\sigma z| := \sup\left\{ \int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot D_\sigma z \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{\varphi} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \\ |\boldsymbol{\varphi}| \le 1 \ \text{ on } \ \Omega \end{array} \right\}, \end{cases}$$

ここで特に $z \in BV(\Omega)$ ならば $V_\sigma(z) = \displaystyle\int_\Omega \sigma(x)\, |\nabla z|$ となる。

(iii) ベクトル値関数 $\boldsymbol{\nu} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ を、$\sigma\boldsymbol{\nu}$ が Ω 内でコンパクトな台を持つ Lipschitz 連続関数となる様に選ぶ。このとき 任意の $z \in D(V_\sigma)$ に対し、

$$\langle \boldsymbol{\nu} \cdot D_\sigma z, \varphi \rangle := -\int_\Omega z \operatorname{div}(\sigma\boldsymbol{\nu}\varphi)\, dx, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega);$$

によって定義される超関数 $\boldsymbol{\nu} \cdot D_\sigma z$ は Ω 上の Radon 測度となり、更に次の不等式が成立する:

$$\left| \int_\Omega \boldsymbol{\nu} \cdot D_\sigma z \right| \le |\boldsymbol{\nu}|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^2)} \int_\Omega |D_\sigma z|.$$

Φ_σ を (1.4) で定義される $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数とし、$D(\Phi_\sigma)$ を汎関数 Φ_σ の有効領域とする。

本節では主に、発展方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の解が持つ基本的な性質を紹介する。

定義 2.1 (解の定義) 関数 $\theta \in L^2_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ に対し、関数 u が以下の条件を満足するとき u は発展方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の解であるという。

(s1) $u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega))$, $V_\sigma(u) \in L^1_{loc}[0, +\infty)$.

(s2) $\Phi_\sigma(u(t)) - \displaystyle\int_\Omega (u + \theta - u_t)(t)\, u(t)\, dx \le \Phi_\sigma(z) - \int_\Omega (u + \theta - u_t)(t)\, z\, dx$,
$\forall z \in D(\Phi_\sigma)$, a.e. $t > 0$.

このとき、Brézis [2] の一般論から直ちに次の命題が導かれる。

命題 2.1 (初期値問題の可解性) $\theta \in L^2_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ とする。このとき任意の $u_0 \in D(\Phi_\sigma)$ に対し、初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす様な発展方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の解 u が一意的に存在する。

次の命題は比較定理とも呼ばれ、発展方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の解の挙動を調べる上で非常に重要な役割を果たす命題である。

命題 2.2 (比較定理) 2つの関数 $\theta_i \in L^2_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ $(i = 1, 2)$ に対し、対応する発展方程式 $(E_\sigma; \theta_i)$ の解を u_i とする。このとき:

$$\theta_1 \le \theta_2, \text{ a.e. in } Q, \ \text{ and } \ u_1(0) \le u_2(0), \text{ a.e. in } \Omega \implies u_1 \le u_2, \text{ a.e. in } Q.$$

次に発展方程式 $(E_\sigma;\theta)$ における時間が十分経過したときの解の挙動（漸近挙動）について考える。

任意の $R>0$ に対し、$L_V(R;\Phi_\sigma) := \left\{ z \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \Phi_\sigma(z) \le R \right\}$ と置く。この集合は Φ_σ のレベル集合と呼ばれるが、解の漸近挙動の解析にはこのレベル集合のコンパクト性を保障することが非常に重要である。しかし、注意 2.1 (i) から読み取れる様にこのコンパクト性は σ が零点を持つ場合には一般に成立しない。このため、本論文では関数 σ に対して次の条件を仮定する。

(A1) $\sigma : \overline{\Omega} \longrightarrow [0,+\infty)$ Lipschitz 連続, s.t. $\mathscr{L}^2(\sigma^{-1}(0)) = 0$.

この仮定を用いると、次の命題を示すことが出来る。

命題 2.3 条件 (A1) を仮定するとき、次の 2 つが成立する。

(I) 任意の $R>0$ に対し、レベル集合 $L_V(R;\Phi_\sigma)$ は $L^2(\Omega)$ の位相でコンパクトとなる。

(II) $\theta \in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$, $\theta(t) \to 0$ in $L^2(\Omega)$ as $t \to +\infty$ ならば 任意の $(E_\sigma;\theta)$ の解 u に対し、集合：

$$\omega(u) := \left\{ z \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{c} u(t_n) \to z \text{ in } L^2(\Omega) \text{ for some } \{t_n\} \subset (0,+\infty) \\ \text{with } t_n \nearrow +\infty \text{ as } n \to +\infty \end{array} \right\};$$

は次の 2 つの性質を持つ：

(i) $\omega(u) \neq \emptyset$, $\omega(u)$ は $L^2(\Omega)$ 内で連結かつコンパクト;

(ii) 任意の $w \in \omega(u)$ は次の関係式を満たす

$$\partial\Phi_\sigma(w) \ni w \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{2.1}$$

3 自由エネルギーの最小元と時間発展する解の例

方程式 (2.1) は (1.2) において $\theta \equiv 0$ としたときの自由エネルギー $\mathscr{F}_0$ の Euler-Lagrange 方程式であり、命題 2.3 は (2.1) が発展方程式 $(E_\sigma;\theta)$ の解の極限を支配する方程式であることを示唆している。この意味から、方程式 (2.1) はしばしば発展方程式 $(E_\sigma;\theta)$ に対する定常問題と呼ばれ、その解は $(E_\sigma;\theta)$ の定常解と呼ばれる。このとき汎関数 $\mathscr{F}_0$ の最小元はすべて定常解となるが、発展方程式 $(E_\sigma;\theta)$ は自由エネルギーの勾配流であるから、この最小元は勾配流が生成する力学系において特に強い安定性を示すことが考えられる。

本節の前半では、関数 σ をある特別なクラスに限定して考え、このときに現れる 汎関数 $\mathscr{F}_0$ の最小元の例をいくつか紹介する。

定義 3.1 2 つの正数 $h>0, r>0$ に対し $\overline{\Omega}$ 上の Lipschitz 連続関数 $\sigma_{r,h}$ を:

$$\sigma_{h,r}(x) := h - \frac{h}{r}\mathrm{dist}(x, \Sigma_{r,h}),\ \forall x \in \overline{\Omega},\ \text{where}$$
$$\Sigma_{h,r} := \left\{ (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \xi_1 = 3kr \text{ or } |\xi_1 + 6kr| = \sqrt{3}|\xi_2|,\ k \in \mathbb{Z} \right\};$$

と定義し、Lipschitz 連続関数のクラス $\mathcal{S}_h(r)$ を $\mathcal{S}_h(r) := \left\{ \sigma_{h,\tilde{r}} \,\middle|\, \tilde{r} > r \right\}$ と定める。

注意 3.1 2つの正数 $r, h > 0$ に対し、集合 $\Sigma_{r,h} \cap \overline{\Omega}$ は関数 $\sigma_{r,h}$ の零点の集合 $\sigma_{r,h}^{-1}(0)$ と一致するが、定義から直ちに $\mathscr{L}^2(\sigma_{r,h}^{-1}(0)) = \mathscr{L}^2(\Sigma_{r,h} \cap \overline{\Omega}) = 0$ となる。このことより $\sigma \in \mathcal{S}_h(r)$ を満たす様な関数 σ はすべて条件 (A1) を満たしていることがわかる。

$\sigma \in \mathcal{S}_h(r)$ $(r, h > 0)$ となる場合、汎関数 $\mathscr{F}_0$ の最小元の代表的な例として次の様な階段関数が挙げられる。

例 3.1 ($\mathscr{F}_0$ の最小元の例) c_* を $|c_*| = 1$ となる様な定数とし、$D_* \subset \Omega$ を Lipschitz 連続な境界 ∂D_* を持つ Ω の部分領域とする。

2つの正数 h, r に対して 条件：

$$\begin{cases} \sigma \in \mathcal{S}_h(r),\ \partial D_* \subset \sigma^{-1}(0), \\ \inf\limits_{x \in \Gamma} \mathrm{dist}(x, D_*) \geq r; \end{cases} \tag{3.1}$$

が成り立つとき、階段関数：

$$w_{D_*} := c_*(\chi_{D_*} - \chi_{\Omega \setminus D_*}) \ \big(\in BV(\Omega) \big); \tag{3.2}$$

は汎関数 $\mathscr{F}_0$ の最小元となる。

注意 3.2 上の例において、関数 σ の零点の集合は $\mathbb{R}^2$ 内の三角形格子の部分集合となる。よって条件 (3.1) を満たす様な領域 D_* の境界 ∂D_* には色々な形状（パターン）が当てはまるが、その中には図1に示される様なパターンも含まれる。

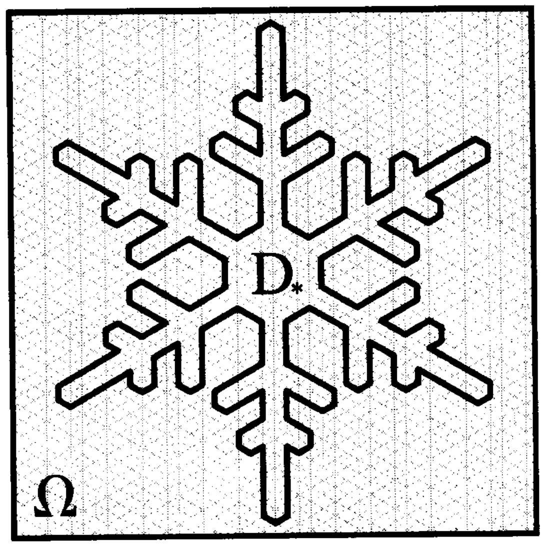


図 1

他方 発展方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の時間発展する解に関しても、いくつかの具体的な表現を見つけることが出来る。このとき 目星をつけた関数が方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の解であるかどうかの判定は、次の定理の中で挙げられる条件を基準にして行われる。

定理 3.1 (解の判定基準) $\theta \in L^2_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega))$, σ を $\overline{\Omega}$ 上で非負の値を持つ Lipschitz 連続関数とする。このとき関数 $u : [0, +\infty) \longrightarrow D(\Phi_\sigma)$ with $u \in W^{1,2}_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ に対し、次の4つの条件を満たすベクトル値関数 $\boldsymbol{\nu}^*_u \in L^\infty(Q; \mathbb{R}^2)$ が存在すれば、関数 u は発展方程式 $(E_\sigma; \theta)$ の解となる。

(a) $|\boldsymbol{\nu}^*_u| \leq 1$, a.e. in Q;

(b) $\sigma \boldsymbol{\nu}^*_u(t) : \overline{\Omega}$ 上で Lipschitz 連続, $\mathrm{spt}\,(\sigma \boldsymbol{\nu}^*_u(t)) \subset \Omega$: コンパクト, a.e. $t > 0$;

(c) $-\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\,(\sigma \boldsymbol{\nu}^*_u(t))\, z \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{\nu}^*_u(t) \cdot D_\sigma z \leq \Phi_\sigma(u(t))$, $\forall z \in D(\Phi_\sigma)$,

特に $-\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\,(\sigma \boldsymbol{\nu}^*_u(t))\, u(t) \, dx = \Phi_\sigma(u(t))$, a.e. $t > 0$;

(d) $$-\mathrm{div}\,(\sigma \boldsymbol{\nu}^*_u)(t, x) \begin{cases} \leq (u + \theta - u_t)(t, x), \ \text{if } u(t, x) = 1, \\ = (u + \theta - u_t)(t, x), \ \text{if } -1 < u(t, x) < 1, \quad \text{a.e. } (t, x) \in Q. \\ \geq (u + \theta - u_t)(t, x), \ \text{if } u(t, x) = -1, \end{cases}$$

定理 3.1 を手がかりにすると、発展方程式 $(E_\sigma;\theta)$ の解の例として 次の様な時間発展する関数を見つけることが出来る。

例 3.2 (時間発展する解の例) 例 3.1 と同じ設定において、任意の $0<\varepsilon<1$ に対し 関数 $u_\varepsilon:[0,+\infty)\longrightarrow D(\Phi_\sigma)$ を次の様に定める:

$$u_\varepsilon(t):=\begin{cases} c_*\left(\varepsilon e^t\chi_{D_*}-\chi_{\Omega\setminus D_*}\right), & \text{if } 0\le t\le -\log\varepsilon,\\ w_{D_*}, & \text{if } t>-\log\varepsilon, \end{cases} \qquad \text{a.e. in } \Omega.$$

このとき、関数 u_ε は $\theta\equiv 0$ としたときの発展方程式 $(E_\sigma;0)$ の解となる。

※. この事実の確認には、定理 3.1 中の条件 (a)~(d) を満たす様な関数 $\boldsymbol{\nu}_{u_\varepsilon}\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^2)$ として 定ベクトル値関数 $\boldsymbol{\nu}_{u_\varepsilon}\equiv\mathbf{0}$ (in Q) が用いられる。

4 自由エネルギーの最小元の安定性解析

本節では例 3.1 で示された汎関数 $\mathscr{F}_0$ の最小元に的を絞り、このタイプの最小元がパラメータの揺らぎに対して持つ復元力の強さ (安定性) を評価する。

安定性の解析において焦点となるのは 復元力が実効力を持つ揺らぎの範囲と 揺らぎが復元されるまでにかかる時間を知ることであるが、ここではこのことを整理した形で捉えるために次の様な安定性の概念を導入する。

定義 4.1 (局所安定性) σ を $\overline{\Omega}$ 上で非負な値を持つ Lipschitz 連続関数とする。このとき、Ω の部分領域 D と定数 $-1\le c\le 1$ の組 (D,c) が次の条件 $(*)$ を満足するとき、(D,c) は局所安定であるという：

$(*)$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists t_\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0$ s.t.

$$\left[\begin{array}{c} t\ge t_\varepsilon,\quad |\theta|_{L^\infty(Q)}<\delta_\varepsilon,\\ u:|u(0)-c|_{L^\infty(\Omega)}<\delta_\varepsilon \text{ を満たす } (E_\sigma;\theta) \text{ の解} \end{array}\right] \Longrightarrow |u(t)-c|_{L^\infty(D)}<\varepsilon.$$

注意 4.1 (3.2) で与えられる $\mathscr{F}_0$ の最小元 w_{D_*} において、定義 4.1 中の定数 c には w_{D_*} の定数値が対応し D には各定数値の定義域の連結部分が対応する。即ち本論文では 最小元 w_{D_*} の安定性は、w_{D_*} のグラフの各連結部分の安定性を別々に議論することによって特徴づけされる。

注意 4.2 定義 4.1 では揺らぎを与えた後の解の挙動を評価する基準が与えられているという見方も出来るが、実際に解の挙動を評価する際には 2 節で紹介された命題 2.2 (比較定理) が用いられる。このとき比較の基準となる発展方程式の解 (比較関数) を構成する必要が生じるが、この解は定理 3.1 で紹介された解の判定条件を用いれば比較的容易に見つけることが出来る。

上記の定義 4.1, 注意 4.1, 4.2 などの手法に基づいて 汎関数 $\mathscr{F}_0$ の最小元 w_{D_*} の安定性解析を行うと次の定理を導くことが出来る。

定理 4.1 （w_{D_*} のグラフに現れる局所安定性） c_* は $|c_*| = 1$ となる様な定数とする。$D_* \subset \Omega$ を Lipschitz 連続な境界 ∂D_* を持つ Ω の部分領域、σ を $\overline{\Omega}$ 上で非負な値を持つ Lipschitz 連続関数とし、更に D_*, σ は 2 つの正数 r, h with $r > 4h$ に対し条件 (3.1) を満たすと仮定する。任意の $0 \le \rho < r/2$ に対し、D_* の境界 ∂D_* の近傍 $C_*(\rho)$ を

$$C_*(\rho) := C(\rho) \cup \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \mathrm{dist}(x, \Omega \setminus C(2\rho)) \ge \rho \right\},$$
$$\text{where } C(\rho) := \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \mathrm{dist}(x, \partial D_*) \le \rho \right\}.$$

と定め、この近傍をくりぬくことによって D_* の内と外に現れる 2 つの領域をそれぞれ：

$$D_*(\rho) := D_* \setminus C_*(\rho), \; D_*^{ex}(\rho) := \Omega \setminus (D_* \cup C_*(\rho));$$

と置く。このとき、2 つの組 $(D_*(\rho), c_*)$ と $(D_*^{ex}(\rho), -c_*)$ はどちらも局所安定となる。

この定理を更に噛み砕いて議論すると次の系を得る。

系 4.1 （w_{D_*} の安定性） 定理 4.1 と同じ条件を仮定する。このとき、2 つの正定数 δ_*, ρ_* が存在して次の条件 (**) を満たす：

(**) $0 \le \forall \rho < \rho_*, 0 < \forall \delta < \delta_*, \exists \tau_{\rho,\delta} > 0$, s.t.

$$|\theta|_{L^\infty(Q)} < \delta, \text{ and } |u(0) - w_{D_*}|_{L^\infty(\Omega \setminus C_*(\rho))} < \delta \tag{4.1}$$
$$\Longrightarrow \; u(t,x) = w_{D_*}, \text{ a.e. } x \in \Omega \setminus C_*(\rho), \forall t \ge \tau_{\rho,\delta}.$$

上の系は、最小元 w_{D_*} に対して加えられる揺らぎが (4.1) の範囲を出なければ、開集合 $\Omega \setminus C_*(\rho)$ 内での揺らぎの復元はある有限時間 $\tau_{\rho,\delta}$ で実現することを意味している。

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems,* Oxford Science Publications (2000).

[2] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espace de Hilbert,* North-Holland, Amsterdam (1973).

[3] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton (1992).

[4] F. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation,* Monographs Math., Vol. 80, Birkhäuser, Basel, 1984.

[5] K. Shirakawa, Interfacial energies in two dimensional phase field models and related variational problems, Variational Problems and Related Topics, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, No. 1347 (2003), pp. 73-95.

Generation of corner-layer of Lotka-Volterra competition model with large interaction

中島　主恵　東京海洋大学 海洋科学部
若狭　徹　早稲田大学大学院 理工学研究科

1 Introduction

次の Lotka-Volterra competition model について考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u(a-u) - \dfrac{b}{\epsilon^3}uv & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ v_t = D\Delta v + v(d-v) - \dfrac{c}{\epsilon^3}uv & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x)>0,\ v(x,0)=v_0(x)>0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで Ω は $\mathbf{R}^N$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き法線ベクトル, D,a,b,c,d,ϵ は全て正の数であり本講演では特に $0<\epsilon<<1$ として考える. 未知関数 $u=u(x,t)$, 及び $v=v(x,t)$ は 2 種の競合する生物の個体数密度を表し, (P) は空間領域 Ω 上でのこれら 2 種類の生物の密度分布の時間変化を記述する反応-拡散型モデルの 1 つである.

数理生態学としての問題, 例えば競合する生物の棲み分けのメカニズムに対して数学的な説明を試みることを目的とした研究は今までに数多く, このような観点から Lotka-Volterra competition model を初めとする競合系モデルに対して多くの研究結果が得られてきた. 例えば定常的な棲み分けに関して, 拡散係数が小さく空間領域 Ω が凸ではなく適度にくびれていれば (dambell-shaped domain, etc.), くびれの部分を境とする棲み分けが可能である (空間非一様な安定定常解の存在) ことが知られている (Matano-Mimura [5]). 従ってこのような条件下では競合系モデルの解は時間経過とともにその棲み分け状態に漸近していくことが予想される. Ω が凸である場合はこのような安定な棲み分けは存在しないので (Kishimoto-Weinberger [3]), 定常的な棲み分け状態への漸近については期待できない. 一方これらは定常的な棲み分けに関する結果であり, 我々は今回非定常な (領域の形状に無関係) 棲み分けに関して考察する. さて問題 (P) において条件 $0<\epsilon<<1$ は競合系モデルの意味合いとしては, 2 種の生物間の個体数密度の相互作用 (種族間競争) が他の要因 (各々の拡散, 繁殖) と比べて個体数密度の時間変化に非常に大きく寄与することを表しており, これら 2 種の生物の密度分布は次のように変化していくことが直感的に期待される:

- 競争により棲み分けが進み, それぞれの存在領域 Ω_u, Ω_v を形成する (第 1 段階).
- 競争は存在領域の境界付近のみで生じ, 縄張りが時間と共に変化する (第 2 段階).

今回の発展方程式若手セミナーでは仮定を満たす任意の初期値に対して ϵ を十分小さく選べば (P) の解の挙動が第 1 段階に従うことについて報告した.

2 Known Results

一般の反応拡散系において, 界面と呼ばれる解の空間非一様性が大きく変化する部分 (transition-layer,spike 等) に着目し解のダイナミクスを調べる研究は近年盛んに行われているが, 今回のような相互作用 (競合) が非常に強い場合に対して, 解の性質を調べる研究はあまり行われていない. 問題 (P) における棲み分けの過程に関しては Dancer-Hilhorst-Mimura-Peletier [2] が H^1 の枠組みにて弱形式を用いて議論を行っている. 一方 Iida-Karali-Mimura-Nakashima-Yanagida [1] では古典解 (連続関数) の枠組みにおいて第 2 段階における棲み分けの境界近傍での解 (corner-layer) の挙動について考察を行っている. これによれば第 1 段階の後, すなわち適当な時間経過の後で u, v がある程度存在領域を形成した際に境界近傍での解の挙動がある自由境界問題に近似的 ($O(\epsilon|\log\epsilon|)$ 程度) に従うことが示されている. つまり存在領域の変化はその自由境界問題を解くことにより近似的に定まると言える (実は上述の自由境界問題は局所解の存在・一意性などが未解決であり, [1] では自由境界問題の解の存在・一意性を仮定した上で証明をしている).

我々の研究では任意の初期値から (初期) 存在領域の形成に至るまでのプロセスについて扱っており [1] とこの結果を合わせて (P) の解の挙動に関する一連の結果が得られることになる.

3 Formal analysis

まず (P) における解の挙動について形式的に考える. まず $0 < \epsilon << 1$ であるとき (P) の 2 つの方程式においては u 及び v の値が ϵ と比べて十分小さくならない限り相互作用項以外の項の影響は無視できる程小さい. これを踏まえて 2 つの関数 $(\phi,\psi) = (\phi(\tau;\xi,\eta), \psi(\tau;\xi,\eta))$ を次の常微分方程式系の解とする:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -b\phi\psi, & \phi(0) = \xi > 0, \\ \dot{\psi} = -c\phi\psi, & \psi(0) = \eta > 0. \end{cases} \tag{ODEs.}$$

u 及び v の値が ϵ と比べて十分小さくならない限り $u(x,t)$, 及び $v(x,t)$ は $\phi\Big(\dfrac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\Big)$, 及び $\psi\Big(\dfrac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\Big)$ により近似されると考えられる. ここで (ODEs.) は保存量として

$$A(\phi,\psi) := c\phi - b\psi \ (= A(\xi,\eta))$$

を持つことに注意したい. これより ϕ は次の 2-parameter ξ, η に関する常微分方程式

$$\dot{\phi} = (A(\xi,\eta) - c\phi)\phi, \quad \phi(0) = \xi, \tag{1}$$

を満たすため求積可能となり次で与えられる:

$$\phi(\tau;\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\xi A(\xi,\eta)}{c\xi - b\eta e^{-A\tau}} & (A \neq 0) \\ \dfrac{\xi}{1 + c\xi\tau} & (A = 0) \end{cases} \tag{2}$$

同様にして ψ も求積可能である (対称性を考慮すれば (1), (2) で A を $-A$, (b,c) を (c,b), 及び (ξ,η) を (η,ξ) と置き換えればよい). ここで

$$\lim_{\tau\to+\infty}\phi(\tau;\xi,\eta)=\max\left\{\frac{A(\xi,\eta)}{c},0\right\},$$
$$\lim_{\tau\to+\infty}\psi(\tau;\xi,\eta)=\max\left\{0,-\frac{A(\xi,\eta)}{b}\right\}$$

が成り立ち (ϕ,ψ) の収束の仕方は A の符号によって定まる. これによりもとの (P) においても $A(u_0(x),v_0(x))$ の符号が棲み分けを生じさせる, すなわち (P) の初期値 $(u_0(x),\ v_0(x))$ から定まる 2 つの領域 $\{x\in\Omega\mid A(u_0(x),v_0(x))>0\}$, $\{x\in\Omega\mid A(u_0(x),v_0(x))<0\}$ により u, v の (初期) 存在領域が (近似的に) 決定され, 適当な時刻 $T(\epsilon)$ において,

$$u(x,T(\epsilon))=\max\left\{\frac{A(u_0(x),v_0(x))}{c},0\right\}+O(\epsilon),$$
$$v(x,T(\epsilon))=\max\left\{0,-\frac{A(u_0(x),v_0(x))}{b}\right\}+O(\epsilon)$$

が成立することが予想される.

4 Main Results

順序保存系における比較定理を用いることで Section 3 の形式的議論は数学的に正当化される. 次の定理が今回の講演における主結果である.

Theorem 1. $u_0,\ v_0\in C^2(\Omega)$ で集合 $\{x\in\Omega|A(u_0(x),v_0(x))=0\}$ は余次元 1 の滑らかな超曲面であるとする. このとき, $\epsilon_0>0,\quad C_i>0\ (i=1,\cdots,4)$ が存在して $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ に対して次が成立する:

$$\left\|u_\epsilon(\cdot,t)-\phi\Big(\frac{t}{\epsilon^3};u_0(\cdot),v_0(\cdot)\Big)\right\|_{L^\infty(\Omega)}<C_1\epsilon,\qquad \text{for}\quad (0,\epsilon^2)),$$
$$\left\|v_\epsilon(\cdot,t)-\psi\Big(\frac{t}{\epsilon^3};u_0(\cdot),v_0(\cdot)\Big)\right\|_{L^\infty(\Omega)}<C_1\epsilon,\qquad \text{for}\quad (0,\epsilon^2),$$
$$\left\|u(\cdot,\epsilon^2)-\max\left\{\frac{A(u_0(\cdot),v_0(\cdot))}{c},0\right\}\right\|_{L^\infty(\Omega)}<C_3\epsilon,$$
$$\left\|v(\cdot,\epsilon^2)-\max\left\{0,-\frac{A(u_0(\cdot),v_0(\cdot))}{b}\right\}\right\|_{L^\infty(\Omega)}<C_4\epsilon.$$

Theorem 1 のと [1] の結果から (P) の解の挙動について次が得られたことになる:

- まず解は各 $x\in\Omega$ において対応する常微分方程式系の解にそって変化する.
- $O(\epsilon^2)$ の時間経過後, 解は $\left(\max\left\{\frac{A(u_0(x),v_0(x))}{c},0\right\},\max\left\{0,\frac{-A(u_0(x),v_0(x))}{b}\right\}\right)$ に少なくとも $O(\epsilon)$ の空間オーダーで近づく.
- 棲み分け形成後, 解は $\left(\max\left\{\frac{A(u_0(x),v_0(x))}{c},0\right\},\max\left\{0,\frac{-A(u_0(x),v_0(x))}{b}\right\}\right)$ を初期値とする自由境界問題の解によって近似される (第 2 段階への移行).

5 Order-Preserving system

通常の半線形放物型方程式系では単独の方程式の場合と異なり比較定理は成立しないが, 特別な条件を満たすものについては, 解はある種の単調性を持つ. このような系は順序保存系と呼ばれており, H.Matano はさらに強い性質を持つ強順序保存系と呼ばれる系に関して単独の場合と類似の内容を持つ力学系理論を構築している ([4],[5]). 次の反応拡散系 (competition-diffusion type) について考える:

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u + f(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\
v_t = D\Delta v + g(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\
u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
\tag{RD}
$$

ここで $f,\ g : U \to \mathbf{R}$ ($U \subset \mathbf{R}^2$; domain) は C^1-級であり, 次の仮定を満たすものとする:

$$
f_v(u,v) < 0, \quad g_u(u,v) < 0 \quad \text{for } (u,v)\ \in U. \tag{A}
$$

Definition 1 (upper-lower solution). $f,\ g$ が (A) を満たす反応拡散系 (RD) において $(\overline{u}(x,t), \overline{v}(x,t)) \in C^2(\Omega \times (0,T); U)$ が (RD) の upper-solution であるとは

$$
\begin{cases}
\overline{u}_t \geq \Delta\overline{u} + f(\overline{u},\overline{v}) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\
\overline{v}_t \leq D\Delta\overline{v} + g(\overline{u},\overline{v}) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\
\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} \geq 0, \quad \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial \nu} \leq 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T)
\end{cases}
$$

を満たすときである. $(\underline{u}, \underline{v})$ が (RD) の lower-solution であることも同様に定義する.

Proposition 5.1. $f,\ g$ が (A) を満たす反応拡散系 (RD) において $(\overline{u}(x,t), \overline{v}(x,t))$ 及び $(\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t))$ は (RD) の upper-solution, 及び lower-solution であるとする. このとき,

$$
\underline{u}(x,0) \leq \overline{u}(x,0), \quad \underline{v}(x,0) \geq \overline{v}(x,0)
$$

ならば

$$
\underline{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t), \quad \underline{v}(x,t) \geq \overline{v}(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T).
$$

Proof. upper-lower solution の定義より次が成立する.

$$
\begin{aligned}
(\overline{u} - \underline{u})_t \geq \Delta(\overline{u} - \underline{u}) &+ \int_0^1 f_u(s\overline{u} + (1-s)\underline{u}, \overline{v})ds \cdot (\overline{u} - \underline{u}) \\
&- \int_0^1 f_v(\underline{u}, s\overline{v} + (1-s)\underline{v})ds \cdot (\underline{v} - \overline{v}) \\
(\underline{v} - \overline{u})_t \geq D\Delta(\underline{v} - \overline{v}) &- \int_0^1 g_u(s\underline{u} + (1-s)\overline{u}, \underline{v})ds \cdot (\overline{u} - \underline{u}) \\
&+ \int_0^1 g_v(\overline{u}, s\underline{v} + (1-s)\overline{v})ds \cdot (\underline{v} - \overline{v})
\end{aligned}
$$

境界条件についても同様の不等式が得られる. これらに単独の放物型方程式の比較定理を用いることで定理は証明される. □

従って Proposition 5.1 から $U = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,|u \geq 0, v \geq 0\}$ として正の初期値を持つ (P) の upper-lower solution に対して順序保存が成立することがわかる.

6 Proof of Theorem 1

Section 5 より (P) に対してよい性質を持つ比較関数を構成できれば Theorem 1 の証明が完成する. ここでは $\left(\phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right), \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right)\right)$ を (u,v) の第 1 近似解とし, この第 1 近似解にさらに摂動を加えた次の形の関数

$$\begin{cases} \Phi(x,t) := \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t,\epsilon), v_0(x) - s_2(t,\epsilon)\right), \\ \Psi(x,t) := \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t,\epsilon), v_0(x) - s_2(t,\epsilon)\right) \end{cases} \tag{3}$$

に対し適当な $s_1(t,\epsilon)$ 及び $s_2(t,\epsilon)$ をみつけることで (P) の比較関数を構成した.

Proposition 6.1. $s_1(t,\epsilon) := C\epsilon \exp\frac{t}{\epsilon^2}$, $s_2(t,\epsilon) = 0$ とおくとき $(C > 0)$, (3) は $t \in (0, \epsilon^2)$ において (P) の upper-solution となる. $s_1(t,\epsilon) := 0$, $s_2(t,\epsilon) = C\epsilon\exp\frac{t}{\epsilon^2}$ とおくとき (3) は $t \in (0, \epsilon^2)$ において (P) の lower-solution となる.

Proposition 6.1 を証明するために次の 2 つの Lemma を証明する.

Lemma 6.1. $\tau > 0, \xi > 0, \eta > 0$ に対して次が成立する:

$$0 < \phi_\xi(\tau;\xi,\eta) < 1, \quad -\frac{b}{c} < \phi_\eta(\tau;\xi,\eta) < 0,$$
$$-\frac{c}{b} < \psi_\xi(\tau;\xi,\eta) < 0, \quad 0 < \psi_\eta(\tau;\xi,\eta) < 1.$$

Proof. 方程式 (1) より ϕ_ξ は次の方程式を満たす:

$$\dot{\phi_\xi} = (A - 2c\phi)\phi_\xi + c\phi, \quad \phi_\xi(0;\xi,\eta) = 1.$$

適当な $\tau > 0$ に対して $\phi_\xi(\tau) = 1$ となるとすると上の方程式から

$$\begin{aligned} \dot{\phi_\xi}(\tau) =& A(\xi,\eta) - c\phi(\tau) \\ =& A(\xi,\eta) - (A(\phi(\tau),\psi(\tau)) + b\psi(\tau)) \\ =& -b\psi(\tau) < 0 \end{aligned}$$

となるため矛盾が生じる. 従って $\phi_\xi(\tau) < 1$ である. 同様にして $\phi_\xi(\tau) > 0$ も言える. 残りの不等式に関しても同様に常微分方程式の簡単な議論によって示すことができる. □

Lemma 6.2. i, j, k には ξ, η のいずれかが入るものとし, ϕ_k, ϕ_{ij} は ϕ の ξ, η に関する 1 階微分, 及び 2 階微分のいずれかを表し, ψ に関しても同様とする. このとき $\tau > 0$, $\xi > 0$, $\eta > 0$ に対して

$$\left|\frac{\phi}{\phi_k}\right| < M_i^k(1+\tau), \quad \left|\frac{\phi_{ij}}{\phi_k}\right| < M_{ij}^k(1+\tau),$$
$$\left|\frac{\psi}{\psi_k}\right| < L_i^k(1+\tau), \quad \left|\frac{\psi_{ij}}{\psi_k}\right| < L_{ij}^k(1+\tau)$$

となる M_i^k, $M_{ij}^k = M(\xi) > 0$, L_i^k, $L_{ij}^k = L(\eta) > 0$ が存在する.

Proof. $\dfrac{\phi}{\phi_\xi}$ 及び $\dfrac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi}$ の評価のみについて証明の概略を述べる. ここでは便宜上 ϕ を変数 ξ 及び変数 A に関する関数として表すことにする. まず (2) より

$$\phi(\tau;\xi,\eta) = \frac{\xi A}{c\xi - b\eta e^{-A\tau}} = \frac{\xi A e^{A\tau}}{A + c\xi(e^{A\tau}-1)}$$

となるため直接計算により次を得る.

$$\phi_\xi = \frac{A^2(1+c\xi\tau) + c^2\xi^2(e^{A\tau}-1-A\tau)}{(A+c\xi(e^{A\tau}-1))^2} \tag{4}$$

$$\frac{\phi}{\phi_\xi} = \frac{\xi A(A+c\xi(e^{A\tau}-1))}{A^2(1+c\xi\tau)+c^2\xi^2(e^{A\tau}-1-A\tau)} \tag{5}$$

ここで不等式 $e^{A\tau}-1-A\tau>0$ $(A\in\mathbf{R},\tau>0)$ が成立するので (5) より次の評価が従う:

$$0 < \frac{\phi}{\phi_\xi} \le \xi + \max\left\{\frac{A(\xi,\eta)}{c}, 0\right\} + c\xi^2\tau$$

次に 2 階微分について (4) を直接計算 (対数微分) することで次を得る.

$$\frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi} = \frac{cK_1(\xi,A)+cK_2(\xi,A)+cK_3(\xi,A)}{[A+c\xi(e^{A\tau}-1)]\cdot[A^2(1+c\xi\tau)+c^2\xi^2(e^{A\tau}-1-A\tau)]} \tag{6}$$

ただし, K_1, K_2, K_3 は

$$\begin{aligned}
K_1(\xi,A) =& 2c\xi\left(e^{A\tau}-1-A\tau-\frac{1}{2}A^2\tau^2\right)\cdot[A+c\xi(e^{A\tau}-1)]\\
&(=o(A^3))\\
K_2(\xi,A) =& 2\tau A\left[A^2(1+c\xi\tau)+c^2\xi^2\left(e^{A\tau}-1-A\tau\right)\right]\\
&\left(=(2\tau+2c\xi\tau^2+c^2\xi^2\tau^3)A^3+o(A^3)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3(\xi,A) =& -2A^2(e^{A\tau}-1)+2c\xi A\left[(e^{A\tau}-1-A\tau)-A\tau(e^{A\tau}-1)\right]\\
&-c^2\xi^2\left[2e^{A\tau}\left(e^{A\tau}-1-A\tau-\frac{1}{2}A^2\tau^2\right)-2A\tau(e^{A\tau}-1-A\tau)+A^2\tau^2(e^{A\tau}-1)\right]\\
&-c^3\xi^3\tau\left[2\left(e^{A\tau}-1-A\tau-\frac{1}{2}A^2\tau^2\right)-A\tau(e^{A\tau}-1-A\tau)\right]\\
&\left(=\left(\frac{1}{6}c^3\xi^3\tau^4-\frac{1}{3}c^2\xi^2\tau^3-c\xi\tau^2-2\tau\right)A^3+o(A^3)\right)
\end{aligned}$$

により与えられる. これを評価する際には項の形状によりいくつか評価の仕方が異なるが, K_3 における $e^{A\tau}-1-A\tau-\frac{1}{2}A^2\tau^2$ を持つ項を除く項に関しては符号を考慮して指数関数の部分がキャンセルするように変形を行えばよく, $e^{A\tau}-1-A\tau-\frac{1}{2}A^2\tau^2$ を含むものについては関数 $\dfrac{e^s-1-s-\frac{1}{2}s^2}{s(e^s-1-s)}$ が $\mathbf{R}$ 上有界となることを用いればよい. 以上の議論により

$$\left|\frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi}\right| < M^\xi_{\xi\xi}(1+\tau)$$

となることがわかる ($M^\xi_{\xi\xi}$ 等は ξ, ξ^{-1} に高々多項式の order で依存することに注意). □

Proof of Proposition 6.1. upper-solution の場合についてのみ証明する.

$$L_1(u,v) := u_t - \Delta u - u(a-u) - \frac{buv}{\epsilon^3},$$
$$L_2(u,v) := v_t - D\Delta v - v(d-v) - \frac{cuv}{\epsilon^3}$$

とおくとき

$$\begin{cases} \overline{\Phi}(x,t) = \phi\Big(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t,\epsilon), v_0(x)\Big), \\ \overline{\Psi}(x,t) = \psi\Big(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t,\epsilon), v_0(x)\Big) \end{cases} \tag{7}$$

に対して

$$L_1(\overline{\Phi},\overline{\Psi}) = \phi_\xi\Big(\dot{s_1}(t,\epsilon) - \frac{\phi}{\phi_\xi}(a-\phi) - \frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi}|\nabla u_0|^2 - 2\frac{\phi_{\xi\eta}}{\phi_\xi}\nabla u_0 \nabla v_0 - \frac{\phi_{\eta\eta}}{\phi_\xi}|\nabla v_0|^2\Big),$$
$$L_2(\overline{\Phi},\overline{\Psi}) = \psi_\xi\Big(\dot{s_1}(t,\epsilon) - \frac{\psi}{\psi_\xi}(d-\phi) - D\frac{\psi_{\xi\xi}}{\psi_\xi}|\nabla u_0|^2 - 2D\frac{\psi_{\xi\eta}}{\psi_\xi}\nabla u_0 \nabla v_0 - D\frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\xi}|\nabla v_0|^2\Big)$$

となる. Lemma 6.1-6.2 により s_1 として

$$\dot{s_1}(t,\epsilon) \geq M(\xi + s_1(t,\epsilon)) \cdot \Big(1 + \frac{t}{\epsilon^3}\Big)$$

を満たすものが取れればよい ($M(\xi)$ は ξ, ξ^{-1} に高々多項式の order で依存する正の定数). ここで $s_1(t,\epsilon) = C\epsilon \exp\frac{t}{\epsilon^2}$ ととれば $t \in (0,\epsilon)$ で上の条件を満たす. 従って $L_1(\overline{\Phi},\overline{\Psi}) \geq 0$, $L_2(\overline{\Phi},\overline{\Psi}) \leq 0$ を得る. □

Propotition 6.1 の成立から Theorem 1 を証明するには upper-solution と第 1 近似解との差の order 及び $t = \epsilon^2$ における第 1 近似解の極限への収束の order を調べればよい. 後者については (2) より容易に従い, また前者については Lemma 6.1 による ϕ_ξ 等の有界性から例えば

$$\Big|\overline{\Phi}(x,t) - \phi\Big(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0, v_0\Big)\Big| \leq s_1(t,\epsilon) \cdot \int_0^1 |\phi_\xi(s(u_0+s_1) + (1-s)u_0)| ds$$
$$\leq s_1(t,\epsilon) \quad (C > 0)$$

が従う. 以上の議論により Theorem 1 の証明が完成する.

参考文献

[1] Iida-Karali-Mimura-Nakashima-Yanagida, in preparation.

[2] Dancer-Hilhorst-Mimura-Peletier, Europian J. Appl. Math., **10** (1999), 97-115.

[3] Kishimoto-Weinberger, J. Differential Equations, **58** (1985), 15-21.

[4] H.Matano, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **30** (1984), 645-673.

[5] Matano-Mimura, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **19** (1983), 1049-1079.

非局所 Allen-Cahn 方程式の特異極限解析

岡田 浩嗣
広島大学大学院理学研究科

1 序

1.1 非局所 Allen-Chan 方程式. 凝固・融解過程を記述するモデルに次の phase-field 系がある.

$$\text{(PF)} \qquad \begin{cases} u_t = \epsilon^2 \Delta u + f(u) - v, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \sigma v_t = \Delta v + \lambda u_t, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial u/\partial \mathbf{n} = 0 = \partial v/\partial \mathbf{n}, & t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ 内の滑らかな有界領域, $\mathbf{n}$ は境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル, f は滑らかな 2 重井戸ポテンシャル W に対して $f(u) := -W'(u)$ で定義される非線形関数 (典型例は $f(u) = u - u^3$) であり, $\epsilon, \sigma, \lambda > 0$ はパラメータを表す.

いま, 方程式 (PF) において $\sigma \to 0, \lambda \to 0$ という状況を考えよう. まず形式的に $\sigma = 0$ とおいて v を消去すれば,

$$\text{(VCH)} \qquad \begin{cases} \lambda u_t = -\Delta[\epsilon^2 \Delta u + f(u) - u_t], & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial u/\partial \mathbf{n} = \partial \Delta u/\partial \mathbf{n} = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

が得られる. ここで項 Δu_t は粘性効果を表し, 特にこの粘性効果を無視すれば Cahn-Hilliard 方程式になることから, (VCH) は「粘性 Cahn-Hilliard 方程式」とよばれている ([9, 10] 参照). さらに方程式 (VCH) において形式的に $\lambda = 0$ とすれば, 簡単な計算から非局所 Allen-Cahn 方程式が得られる:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} u_t^\epsilon = \epsilon^2 \Delta u^\epsilon + f(u^\epsilon) - \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega f(u^\epsilon)\, dx, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial u^\epsilon/\partial \mathbf{n} = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで $|\Omega|$ は Ω の体積を表す. 特に, 非局所項の存在と境界条件により, 解の空間平均は保存されることに注意する.

$$\text{(CP)} \qquad \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u^\epsilon(t,x)\, dx \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u^\epsilon(0,x)\, dx, \qquad t > 0.$$

Rubinstein と Sternberg は, 異なる時間スケールを用い, 方程式 (1.1) の解ダイナミクスを 3 段階に分けて議論した ([13] 参照). そのダイナミクスはおおよそ次のように要約される.

1. 解は, ある界面の $O(\epsilon)$-近傍に内部遷移層を生成する.
2. その界面は, 界面方程式とよばれる運動法則にしたがって動き出す (界面方程式は [13] の (2.15) 式で与えられる).
3. その後界面は「体積保存型平均曲率流方程式」とよばれる界面方程式 ([13] の (3.2) 式) にしたがって運動する. 界面は, それが囲む領域の体積を常に一定に保ちながら, 最終的に球面に近づく.

本稿で述べる結果は，方程式 (1.1) の**第 2 段階における解ダイナミクス**に関するものである．以下，界面とは $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 内に埋め込まれた滑らかな余次元 1 の閉曲面を意味するものとし，界面は領域の境界 $\partial\Omega$ から一様に離れている状況のみ考察することにする．

注意. 第 3 段階で界面が最終的に球面に近づくと，対応する球状の遷移層解（bubble 解）がその形状を保ったまま指数的に遅いスピードで境界 $\partial\Omega$ に近づいてゆくような運動が新たに現れる (bubble 運動)．この運動の詳細については，例えば [15, 16] などを参照されたい．

1.2 界面方程式. 第 2 段階におけるダイナミクスを捉えるには，方程式 (1.1) の時間 t を $t \to \epsilon^{-1}t$ でリスケールすることによって得られる次の方程式をとり扱うのが適当である:

$$\text{(RD)} \qquad \begin{cases} \epsilon u_t^\epsilon = \epsilon^2 \Delta u^\epsilon + f(u^\epsilon) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega f(u^\epsilon)\,dx, & t>0,\ x\in\Omega, \\ \partial u^\epsilon/\partial\mathbf{n} = 0, & t>0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

方程式 (RD) に対応する界面方程式は文献 [13] の (2.15) 式としてすでに与えられているが，その表現は陰的であるために必ずしも満足できるものではない．そこで，陽的な界面方程式を改めて導出することにする．そのため補助的な変数 $v \in \mathbb{R}$ を導入して (RD) を

$$(1.2) \qquad \epsilon u_t^\epsilon = \epsilon^2\Delta u^\epsilon + f(u^\epsilon) - v^\epsilon; \qquad v^\epsilon(t) := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u^\epsilon(t,x))\,dx$$

と書く．この書き換えにより，(1.2) 第一式においては $f(u)-v$ を改めて非線形項とみることができる．もともと方程式 (RD) の非線形項 f は 2 重井戸ポテンシャル W から導かれたものであったから，(1.2) 第一式の $f(u)-v$ は次の性質をみたすと仮定しても一般性を失わない．

(A1) 関数 $f(u)$ は滑らかで，ヌルクライン $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,|\, f(u)-v=0\}$ は三つの解ブランチ

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^- &= \{(u,v)\,|\,u=h^-(v),\ v\in I^- := (\underline{v},\infty)\}, \\ \mathcal{C}^+ &= \{(u,v)\,|\,u=h^+(v),\ v\in I^+ := (-\infty,\overline{v})\}, \\ \mathcal{C}^0 &= \{(u,v)\,|\,u=h^0(v),\ v\in I^v := I^-\cap I^+ = (\underline{v},\overline{v})\} \end{aligned}$$

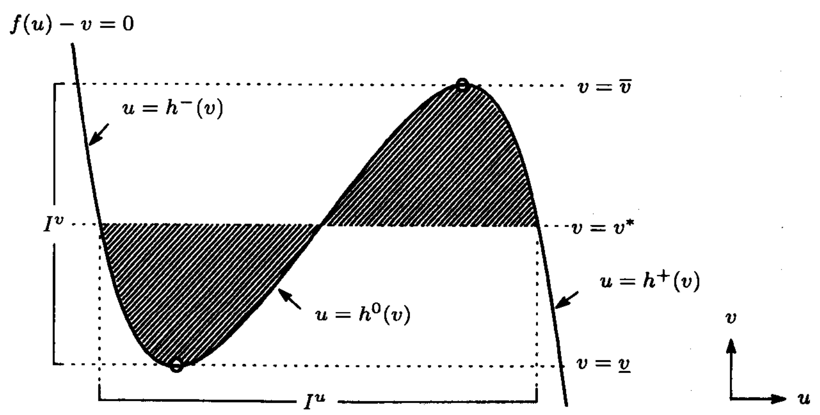
からなり，区間 I^v 上で次の不等式が成り立つ．

$$h^-(v) < h^+(v), \quad h_v^\pm(v) < 0, \qquad v\in I^v.$$

(A2) 各 $v \in I^v$ に対して

$$\mathcal{J}(v) := \int_{h^-(v)}^{h^+(v)} f(u) - v\,du$$

とする．このとき $\mathcal{J}(v^*)=0$ および $\mathcal{J}'(v^*)<0$ をみたす $v^* \in I^v$ がただ一つ存在する．



仮定 **(A1)** のもとで $v \in I^v$ をパラメータとする非線形固有値問題

$$\begin{cases} Q_{zz} + cQ_z + f(Q) - v = 0, & z \in (-\infty, \infty), \\ Q(\pm\infty) = h^{\pm}(v), \quad Q(0) = 0 \end{cases}$$

はただ一つの解 $(Q(z; v), c(v))$ をもつことが知られている (例えば [8] 参照). 文献 [7] の手法にしたがえば, 界面方程式はこの関数 $c(v)$ を用いて次のように表現される:

$$\mathbf{v}(x; \Gamma(t)) = c(v(t)), \qquad t > 0,\ x \in \Gamma(t). \tag{1.3}$$

ここで $\Gamma(t)$ は領域 Ω を $\Omega = \Omega^-(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega^+(t)$ のように分ける界面, $\mathbf{v}(x; \Gamma(t))$ は $x \in \Gamma(t)$ における $\Gamma(t)$ の法線速度 (ただしその符号は $\Omega^+(t)$ の内部に向かう向きを正とする) を表し, $v(t)$ は方程式 (1.2) における非局所項 $v^\epsilon(t)$ の $\epsilon \to 0$ に関する極限関数に相当するものである.

界面 $\Gamma(t)$ は関数 $v(t)$ によってその運動が決定されるから, さらに $\Gamma(t)$ と $v(t)$ の関係式をもう一つ導く必要がある. そのため, 方程式 (RD) の解がもつ性質

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^\epsilon(t, x)\, dx\Big) \equiv 0 \tag{1.4}$$

を用いよう. 再び [7] によると, 解 u^ϵ のプロファイルは

$$u^\epsilon(t, x) \approx h^{\pm}(v(t)), \qquad t > 0,\ x \in \Omega^{\pm}(t) \tag{1.5}$$

となると期待される. そこで形式的に (1.5) を (1.4) に代入して (1.3) を用いれば,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\int_\Omega u^\epsilon(t, x)\, dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega^-(t)} h^-(v(t))\, dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega^+(t)} h^+(v(t))\, dx \\ &= \int_{\Omega^-(t)} h_v^-(v(t))\, \dot{v}(t)\, dx + \int_{\Gamma(t)} h^-(v(t))\, \mathbf{v}(x; \Gamma(t))\, dS_x^{\Gamma(t)} \\ &\qquad + \int_{\Omega^+(t)} h_v^+(v(t))\, \dot{v}(t)\, dx - \int_{\Gamma(t)} h^+(v(t))\, \mathbf{v}(x; \Gamma(t))\, dS_x^{\Gamma(t)} \qquad \Big(\dot{} := \frac{d}{dt}\Big) \\ &= \Big[h_v^-(v(t))|\Omega^-(t)| + h_v^+(v(t))|\Omega^+(t)|\Big]\, \dot{v}(t) - \Big[h^+(v(t)) - h^-(v(t))\Big]\, c(v(t))\, |\Gamma(t)| \end{aligned}$$

となる. ここで $dS_x^{\Gamma(t)}$, $|\Gamma(t)|$, $|\Omega^{\pm}(t)|$ はそれぞれ $x \in \Gamma(t)$ における $\Gamma(t)$ の面積要素, $\Gamma(t)$ の表面積, $\Omega^{\pm}(t)$ の体積を表す. 仮定 **(A1)** により $v(t) \in I^v$ に対して $h_v^{\pm}(v(t)) < 0$ が成り立つので, 上から

$$\dot{v}(t) = \frac{h^+(v(t)) - h^-(v(t))}{h_v^-(v(t))|\Omega^-(t)| + h_v^+(v(t))|\Omega^+(t)|}\, c(v(t))\, |\Gamma(t)|, \qquad t > 0 \tag{1.6}$$

が得られる. このようにして, 方程式 (RD) に対応する界面方程式は, 次の方程式系で陽的に表現されることがわかる.

$$\text{(IE)} \qquad \begin{cases} \mathbf{v}(x; \Gamma(t)) = c(v(t)), & t > 0,\ x \in \Gamma(t), \\[2ex] \dot{v}(t) = \dfrac{h^+(v(t)) - h^-(v(t))}{h_v^-(v(t))|\Omega^-(t)| + h_v^+(v(t))|\Omega^+(t)|}\, c(v(t))\, |\Gamma(t)|, & t > 0, \\[2ex] \Gamma(0) = \Gamma_0, \quad v(0) = v_0. \end{cases}$$

この界面方程式 (IE) は, ある常微分方程式系に対する初期値問題に帰着することができ, その常微分方程式系を解析することによって次のことがわかる (証明は [11, 12] などを参照のこと).

定理 ([11, 12]). **(A1)**, **(A2)** が成り立つとし，初期データ (Γ_0, v_0) は次の条件をみたすとする:

(C1) Γ_0 は滑らかで $\Omega = \Omega_0^- \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^+$，$\Gamma_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$,

(C2) $v_0 \in I^v$,

(C3) $m_0 \in I^u := (h^-(v^*), h^+(v^*))$.

ただし m_0 は $m_0 := h^-(v_0)\dfrac{|\Omega_0^-|}{|\Omega|} + h^+(v_0)\dfrac{|\Omega_0^+|}{|\Omega|}$ で定義される定数である．このとき以下が成り立つ．

(1) (IE) の滑らかな解 (Γ, v) がある区間 $[0, T]$ でただ一つ存在する．

(2) v^* の近傍 I^* $(\subset I^v)$ が存在して，$v_0 \in I^*$ ならば (1) の解は区間 $[0, \infty)$ に延長される．特にこのとき滑らかな界面 Γ^* が存在して $t \to \infty$ のとき $(\Gamma(t), v(t)) \to (\Gamma^*, v^*)$ となる．

(3) (Γ_0, v_0) が (IE) の平衡解となるのは $v_0 = v^*$ のときで，またそのときに限る．平衡解 (Γ_0, v^*) は (常微分方程式系の意味で) 漸近安定である．

2 主結果

十分小さい $\delta > 0$ に対して界面 $\Gamma(t)$ の δ-近傍を

$$\Gamma(t)^\delta := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}\,(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

とし，定数 $T > 0$ に対して時空間領域 Γ_T^δ および $\Omega_T^\pm$ をそれぞれ

$$\Gamma_T^\delta := \bigcup_{t \in [0,T]} \{t\} \times \Gamma(t)^\delta, \qquad \Omega_T^\pm := \bigcup_{t \in [0,T]} \{t\} \times \Omega^\pm(t)$$

で定義する．われわれの主結果は

$\epsilon \to 0$ のとき，反応拡散方程式 (RD) の解 u^ϵ は界面方程式 (IE) の解 (Γ, v) に収束する

ことを表すものである．

定理 (収束定理 [12]). (Γ, v) は，ある有限区間 $[0, T]$ における (IE) の解とする．このとき (RD) の解 u^ϵ の族が存在して次が成り立つ:

$$\lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon = h^\pm(v) \quad (\text{各 } \delta > 0 \text{ に対して } \overline{\Omega_T^\pm} \setminus \Gamma_T^\delta \text{ 上で一様}).$$

次の節で，この定理の証明を概説することにする．

注意. Allen-Cahn 方程式に対する収束定理に関しては例えば [3, 6] などの結果があるが，それは「方程式の優解 (super-solution) と劣解 (sub-solution) を構成し，それらで解を上下から挟み込んで比較原理を適用する」という手法を用いて証明されたものであった．もし非局所項をもつ Allen-Cahn 方程式 (RD) に対しても比較原理が成り立つのであれば，上の収束定理を [3] にならって証明することは可能であるかもしれない．しかしながら，(RD) に対する比較原理が成立するのか否かがよくわからなかった．

一方で，方程式 (RD) はパラメータ操作を通じて (PF) や (VCH) から導出されたが，これら 2 つの方程式に対しては比較原理が成り立たないことが知られている．したがって，仮に (RD) に対する比較原理があったとしても，(PF) や (VCH) の解との相互関係を研究する上では比較原理を用いずに理論を構築してゆく方がむしろ望ましいと思われる．

このような理由から，次節では比較原理にはよらない方法で上の収束定理を証明することにする．

3 収束定理の証明

まず, (IE) の解 (Γ, v) に収束するような (RD) の高精度近似解を先に構成してしまう. そのためには文献 [11] で得られた詳細な漸近展開の情報が必要となるがここでは紙面の都合上割愛する. そこでは, §1.2 で形式的に導出した界面方程式 (IE) は, 近似解を滑らかなものにするための最低次整合条件として自然に現れる. このような情報を基に次の結果が得られる.

命題 3.1 (近似解の構成 [12]). (Γ, v) は, ある有限区間 $[0,T]$ における (IE) の解とする. このとき任意の $k \geq 1$ に対して (RD) の近似解 u_A^ϵ の族が存在して次の性質をみたす.

$$\max_{[0,T]} \left\| \epsilon \frac{\partial u_A^\epsilon}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta u_A^\epsilon - f(u_A^\epsilon) + \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(u_A^\epsilon)\, dx \right\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\epsilon^{k+1}),$$

$$\frac{\partial u_A^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad ([0,T] \times \partial\Omega \text{ 上}),$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} u_A^\epsilon = h^\pm(v) \quad (\text{各 } \delta > 0 \text{ に対して } \overline{\Omega}_T^\pm \setminus \Gamma_T^\delta \text{ 上で一様}).$$

第一式および第二式は, 実際 u_A^ϵ が方程式 (RD) を近似していることを意味する. 特に $k \geq 1$ は任意であるから, いくらでも高い近似が得られることを表している. 第三式は u_A^ϵ が (Γ, v) に収束することを意味する.

この近似解 u_A^ϵ のすぐ近くに真の解 u^ϵ は存在するであろう (それが期待できないのならそもそも「近似解」とはよべなくなってしまうが $\cdots$). どのくらい近いのかは, 近似解からのズレ (摂動) $u^\epsilon - u_A^\epsilon$ を見ればよい.

命題 3.2 (摂動の評価 [12]). u_A^ϵ は上で構成された (RD) の近似解とする. このとき (RD) の解 u^ϵ の族が存在して次の評価が成り立つ.

$$\max_{[0,T]} \|u^\epsilon - u_A^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \epsilon^{k - \frac{3N}{2p}}.$$

ここで $M > 0$ は $\epsilon > 0$ によらない定数, また p は $p \geq 3N$ をみたす定数である.

指数 $k - \frac{3N}{2p}$ は $k \geq 1$ と $p \geq 3N$ から正となることがわかるので $\epsilon \to 0$ のとき $\epsilon^{k-\frac{3N}{2p}} \to 0$ である. したがって命題 3.2 が証明できれば収束定理はこれと命題 3.1 第三式から直ちにしたがう. 以下, 命題 3.2 を証明しよう. 証明は文献 [14] の方針にならう.

変数 $t \in [0,T]$ を固定し, (RD) を近似解 u_A^ϵ のまわりで線形化したときの線形化作用素を $\mathcal{L}^\epsilon(t)$ で表す. $\mathcal{L}^\epsilon(t)$ は次で定義される線形作用素である.

$$\mathcal{L}^\epsilon(t)\varphi := \epsilon\Delta\varphi + \epsilon^{-1}\Big[f'(u_A^\epsilon(t,\cdot))\varphi - \langle f'(u_A^\epsilon(t,\cdot))\varphi \rangle\Big].$$

以下, Ω にわたる空間平均を "$\langle\ \rangle$" で表すことにする. 作用素 $\mathcal{L}^\epsilon(t)$ の時間変数 t を $t = \epsilon^2\tau$ でリスケールし, (RD) の解 u^ϵ を u_A^ϵ からの摂動として

$$u^\epsilon(\epsilon^2\tau, \cdot) = u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau, \cdot) + \varphi^\epsilon(\tau)(\cdot), \qquad \tau \in [0, T/\epsilon^2]$$

と表す. さらに (RD) を $\varphi^\epsilon(\tau)$ の発展方程式

$$\dot{\varphi}^\epsilon(\tau) = \mathcal{A}^\epsilon(\tau)\varphi^\epsilon(\tau) + \mathcal{N}^\epsilon(\tau, \varphi^\epsilon(\tau)) + \mathcal{R}^\epsilon(\tau) \tag{3.1}$$

に書き換える. ここでドット "$\cdot$" は時間変数 τ に関する微分を表し, $\mathcal{A}^\epsilon(\tau)$, $\mathcal{N}^\epsilon(\tau, \varphi)$, $\mathcal{R}^\epsilon(\tau)$ はそれ

ぞれ次のように定義されるものである.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^\epsilon(\tau)\varphi &:= \epsilon^3\Delta\varphi + \epsilon\Big[f'(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot))\varphi - \langle f'(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot))\varphi\rangle\Big],\\
\mathcal{N}^\epsilon(\tau,\varphi) &:= \epsilon\Big[f(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot)+\varphi) - f(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot)) - f'(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot))\varphi\\
&\qquad -\Big\langle f(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot)+\varphi) - f(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot)) - f'(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot))\varphi\Big\rangle\Big],\\
\mathcal{R}^\epsilon(\tau) &:= \epsilon\Big[\epsilon^2\Delta u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot) + f(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot)) - \langle f(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot))\rangle - \epsilon\frac{\partial u_A^\epsilon}{\partial t}(\epsilon^2\tau,\cdot)\Big].
\end{aligned}$$

特に $\mathcal{A}^\epsilon(\tau)\varphi = \epsilon^2\mathcal{L}^\epsilon(\epsilon^2\tau)\varphi$ は線形項 (主要項), $\mathcal{N}^\epsilon(\tau,\varphi)$ は線形化によって現れる 2 次以上の非線形項, $\mathcal{R}^\epsilon(\tau)$ は近似解 u_A^ϵ の精度に関係する剰余項であり, 区間 $[0,T/\epsilon^2]$ 上で次の評価が成り立つ.

$$\mathcal{N}^\epsilon(\tau,\varphi)/\epsilon = O(|\varphi|^2), \tag{3.2}$$

$$\|\mathcal{R}^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\epsilon^{k+2}). \tag{3.3}$$

方程式 (3.1) が解 $\varphi^\epsilon(\tau)$ をもつことはすでにわかっているので, あとは $[0,T/\epsilon^2]$ 上で $\|\varphi^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$ を評価することだけである.

さて, 斉次 Neumann 条件をみたす φ に対しては $\langle\mathcal{A}^\epsilon(t)\varphi\rangle\equiv 0$ となること, また $\langle\mathcal{N}^\epsilon(\tau,\varphi)\rangle\equiv 0$ および $\langle\mathcal{R}^\epsilon(\tau)\rangle = O(\epsilon^{k+2})\approx 0$ が成り立つことに注意すると, 方程式 (3.1) を扱う際に「平均 0-空間」が重要な役割を果たすと考えられる. そこで

> 「滑らかな関数 $u(x)$ は, 空間平均が 0 となる成分 $u_1(x)$ と空間に関して定数となる成分 u_2 を用いて $u(x) = u_1(x) + u_2$ と一意に表現される」

という性質に注目して $\varphi^\epsilon(\tau)$ を

$$\varphi^\epsilon(\tau)(\cdot) = \varphi_1^\epsilon(\tau)(\cdot) + \varphi_2^\epsilon(\tau) \tag{3.4}$$

(ただし $\varphi_1^\epsilon(\tau)$ は平均 0-成分, $\varphi_2^\epsilon(\tau)$ は空間に関して定数となる成分) に分解し, 方程式 (3.1) から「平均 0-空間上の発展方程式」と「$\mathbb{R}$ 上の常微分方程式」をとり出してみよう.

$$\dot{\varphi}_1^\epsilon(\tau) = \mathcal{A}^\epsilon(\tau)\varphi_1^\epsilon(\tau) + \mathcal{N}^\epsilon(\tau,\varphi_1^\epsilon(\tau)+\varphi_2^\epsilon(\tau)) + \overline{\mathcal{R}}^\epsilon(\tau,\varphi_2^\epsilon(\tau)), \tag{3.5}$$

$$\dot{\varphi}_2^\epsilon(\tau) = \langle\mathcal{R}^\epsilon(\tau)\rangle. \tag{3.6}$$

ここで $\overline{\mathcal{R}}^\epsilon(\tau,\varphi_2)$ は空間に関して定数となる φ_2 に対して

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}}^\epsilon(\tau,\varphi_2) &:= \mathcal{R}^\epsilon(\tau) - \langle\mathcal{R}^\epsilon(\tau)\rangle + \mathcal{A}^\epsilon(\tau)\varphi_2\\
&= \mathcal{R}^\epsilon(\tau) - \langle\mathcal{R}^\epsilon(\tau)\rangle + \epsilon\Big[f'(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot)) - \langle f'(u_A^\epsilon(\epsilon^2\tau,\cdot))\rangle\Big]\varphi_2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

で与えられる (特に $\langle\overline{\mathcal{R}}^\epsilon(\tau,\varphi_2)\rangle\equiv 0$ が成り立つ). この分解によって, 問題は $[0,T/\epsilon^2]$ 上で $\|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$ および $|\varphi_2^\epsilon(\tau)|$ を評価することに帰着される. 方程式 (3.6) の右辺において $\langle\mathcal{R}^\epsilon(\tau)\rangle = O(\epsilon^{k+2})\approx 0$ であるから, 定数成分 $\varphi_2^\epsilon(\tau)$ のダイナミクスは極めて遅いことがわかる. つまり方程式 (3.1) の解の情報は, ほぼ平均 0-空間に集約されているといってよい.

発展方程式 (3.5) を扱うために適当な関数空間を設定しよう. 平均 0-関数からなる空間を $\mathbf{M}$ で表し, 基礎空間 X_0^ϵ および作用素 $\mathcal{A}^\epsilon(\tau)$ の定義域 X_1^ϵ をそれぞれ次のように定義する.

$$X_0^\epsilon := L^p(\Omega)\cap\mathbf{M}, \quad X_1^\epsilon := W_{\epsilon,B}^{2,p}(\Omega)\cap\mathbf{M} \qquad (p\geq 2).$$

ここで $W^{2,p}_{\epsilon,\mathcal{B}}(\Omega)$ は通常の Sobolev 空間

$$W^{2,p}_{\mathcal{B}}(\Omega) := \{u \in W^{2,p}(\Omega)\,;\, \partial u/\partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}$$

に重み付きノルム

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\epsilon,\mathcal{B}}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \epsilon^{\frac{3}{2}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} + \epsilon^3\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.8}$$

を導入した空間である ($\mathcal{A}^\epsilon(\tau)$ における Δ に ϵ^3 がかかっていることに動機付けられる).

次に X^ϵ_α, $\alpha \in (0,1)$, を X^ϵ_0 と X^ϵ_1 の実補間空間とする. すなわち

$$X^\epsilon_\alpha := (X^\epsilon_0, X^\epsilon_1)_{\alpha,p}.$$

補間空間 X^ϵ_α に対しては次の埋め込みが成り立つ (ただし重み付きノルム (3.8) のおかげで埋め込み定数は $\epsilon > 0$ に依存しないようにとれる).

$$0 \le \alpha < \beta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad X^\epsilon_\beta \hookrightarrow X^\epsilon_\alpha.$$

さらに, 方程式 (3.5) における非線形項 $\mathcal{N}^\epsilon(\tau,\varphi)$ を扱うため $\beta \in (0,1)$ に対して重み付き Hölder 空間 $C^\beta_{\epsilon,p}(\overline{\Omega})$ を定義する. この空間は通常の Hölder 空間 $C^\beta(\overline{\Omega})$ に重み付きノルム

$$\|u\|_{C^\beta_{\epsilon,p}(\overline{\Omega})} := \epsilon^{\frac{3N}{2p}}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon^{\frac{3}{2}(\beta+\frac{N}{p})}[u]_{C^\beta(\overline{\Omega})} \tag{3.9}$$

を導入した空間である. 特に空間 X^ϵ_α と $C^\beta_{\epsilon,p}(\overline{\Omega})$ に対して次の埋め込みが成り立つ (ただし重み付きノルム (3.8), (3.9) によってこの埋め込み定数もまた $\epsilon > 0$ に依存しないようにとれる).

$$2\alpha - \frac{N}{p} > \beta \quad \Longrightarrow \quad X^\epsilon_\alpha \hookrightarrow C^\beta_{\epsilon,p}(\overline{\Omega}). \tag{3.10}$$

まず常微分方程式 (3.6) の解 $\varphi^\epsilon_2(\tau)$ に対する評価から始めよう. 解は

$$\varphi^\epsilon_2(\tau) = \varphi^\epsilon_2(0) + \int_0^\tau \langle \mathcal{R}^\epsilon(\sigma)\rangle\, d\sigma \tag{3.11}$$

で与えられる. 初期値 $\varphi^\epsilon_2(0)$ を

$$|\varphi^\epsilon_2(0)| = O(\epsilon^{k+1}) \tag{3.12}$$

がみたされるように十分小さくとれば, (3.11) と (3.3) から $\varphi^\epsilon_2(\tau)$ は

$$\begin{aligned} |\varphi^\epsilon_2(\tau)| &\le |\varphi^\epsilon_2(0)| + \int_0^\tau \|\mathcal{R}^\epsilon(\sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}\, d\sigma \\ &\le M\epsilon^{k+1} + M\epsilon^{k+2}\cdot\frac{T}{\epsilon^2} \quad . \end{aligned}$$

をみたす. したがって次の評価をみたす解 $\varphi^\epsilon_2(\tau)$ が得られる.

$$|\varphi^\epsilon_2(\tau)| = O(\epsilon^k), \quad \tau \in [0, T/\epsilon^2]. \tag{3.13}$$

この $\varphi^\epsilon_2(\tau)$ を発展方程式 (3.5) に代入し, $\varphi^\epsilon_1(\tau)$ の評価に移る. 以後 u の X^ϵ_α-ノルムと有界作用素 $B : X^\epsilon_\alpha \to X^\epsilon_\beta$ の作用素ノルムをそれぞれ $\|u\|_\alpha$ と $\|B\|_{\alpha,\beta}$ で表すことにする. まず作用素 $\mathcal{A}^\epsilon(\tau) - \mathcal{A}^\epsilon(\sigma)$ はかけ算作用素と積分作用素からなり, いかなる微分作用素も含まないことに注意すれば, 差 $\mathcal{A}^\epsilon(\tau) - \mathcal{A}^\epsilon(\sigma)$ の作用素ノルムは次のように特徴付けられる.

補題 3.3. 各 $\alpha \in [0,1/2)$ に対してある定数 $M>0$ が存在して

$$\|\mathcal{A}^\epsilon(\tau)-\mathcal{A}^\epsilon(\sigma)\|_{1,\alpha} \le M\epsilon^2(\tau-\sigma) \qquad (0\le\sigma\le\tau\le T/\epsilon^2)$$

が成り立つ.

一方, 斉次 Neumann 条件のもと作用素 $\mathcal{L}^\epsilon(t)$ は $L^2(\Omega)\cap\mathbf{M}$ において自己共役作用素となり, 特に固有値は実となることがわかる. さらに文献 [1, 4, 5] のアイデアを用いて $\mathcal{L}^\epsilon(t)$ の最大固有値の $\epsilon\to 0$ に伴う振る舞いを調べれば $\mathcal{L}^\epsilon(t)$ の $L^2(\Omega)$ におけるレゾルベント評価が得られる. この評価を $L^p(\Omega)$ 版に拡張したのち時間変数を $t=\epsilon^2\tau$ でリスケールすれば次の結果が得られる.

補題 3.4. 作用素 $\mathcal{A}^\epsilon(\tau)$, $\tau\in[0,T/\epsilon^2]$, はセクトリアル作用素である. すなわち, ある定数 $\lambda_*>0$, $\theta_*\in(0,\pi/2)$, $M_*>0$ が存在して

$$S_* := \{\lambda\in\mathbb{C};\, \lambda\ne\epsilon^2\lambda_*,\ |\arg(\lambda-\epsilon^2\lambda_*)|<\pi/2+\theta_*\}\subset\rho(\mathcal{A}^\epsilon(\tau))$$

およびレゾルベント評価

$$\|(\lambda-\mathcal{A}^\epsilon(\tau))^{-1}\|_{0,0}\le\frac{M_*}{|\lambda-\epsilon^2\lambda_*|}\quad(\lambda\in S_*)$$

がすべての $\tau\in[0,T/\epsilon^2]$ について成り立つ.

補題 3.3 と補題 3.4 を用いれば, 作用素の族 $\{\mathcal{A}^\epsilon(\tau)\}_{\tau\in[0,T/\epsilon^2]}$ に関する発展作用素 $\Phi^\epsilon(\cdot,\cdot)$ の評価が得られる.

補題 3.5. 各 $0\le\alpha\le\beta\le 1$ に対して定数 $M>0$ が存在してすべての $0\le\sigma\le\tau\le T/\epsilon^2$ について

$$\|\Phi^\epsilon(\tau,\sigma)\|_{\alpha,\beta}\le M(\tau-\sigma)^{\alpha-\beta}e^{\epsilon^2(\lambda_*+K)(\tau-\sigma)},\quad(\alpha,\beta)\ne(0,1)$$

が成り立つ. ここで $K>0$ はある定数である.

補題 3.5 を用いて $\|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_\alpha$ を評価しよう. 定数変化法の公式を (3.5) に適用すると

$$\begin{aligned}\varphi_1^\epsilon(\tau) &= \Phi^\epsilon(\tau,0)\varphi_1^\epsilon(0)+\int_0^\tau\Phi^\epsilon(\tau,\sigma)\mathcal{N}^\epsilon(\sigma,\varphi_1^\epsilon(\sigma)+\varphi_2^\epsilon(\sigma))\,d\sigma\\ &\quad+\int_0^\tau\Phi^\epsilon(\tau,\sigma)\overline{\mathcal{R}}^\epsilon(\sigma,\varphi_2^\epsilon(\sigma))\,d\sigma\end{aligned}\tag{3.14}$$

が得られる. いま $p\ge 3N$ かつ $\alpha\in(1/2,1)$ となるように p と α を選べば $2\alpha-N/p>\beta$ をみたす $\beta\in(0,1)$ がとれる. したがって (3.2) において (3.13) と埋め込み $X_\alpha^\epsilon\hookrightarrow C^\beta_{\epsilon,p}(\overline{\Omega})$ および $X_\alpha^\epsilon\hookrightarrow X_0^\epsilon$ を用いれば次の評価が $\sigma\in[0,T/\epsilon^2]$ に対して成り立つことがわかる.

$$\|\mathcal{N}^\epsilon(\sigma,\varphi_1^\epsilon(\sigma)+\varphi_2^\epsilon(\sigma))\|_0\le M\Big(\epsilon^{1-\frac{3N}{2p}}\|\varphi_1^\epsilon(\sigma)\|_\alpha^2+\epsilon^{k+1-\frac{3N}{2p}}\|\varphi_1^\epsilon(\sigma)\|_\alpha+\epsilon^{2k+1}\Big).$$

さらに (3.7) において (3.3) と (3.13) を用いれば

$$\|\overline{\mathcal{R}}^\epsilon(\sigma,\varphi_2^\epsilon(\sigma))\|_0\le M\epsilon^{k+1}$$

が得られる. これら二つの評価と補題 3.5 から得られる $\|\Phi^\epsilon(\tau,0)\|_{\alpha,\alpha}$ および $\|\Phi^\epsilon(\tau,\sigma)\|_{0,\alpha}$ の評価を

(3.14) に用いれば

$$
\begin{aligned}
(3.15)\qquad r^\epsilon(\tau) &\le M\Big(r^\epsilon(0)+\epsilon^{1-\frac{3N}{2p}}\int_0^\tau(\tau-\sigma)^{-\alpha}r^\epsilon(\sigma)^2\,d\sigma \\
&\quad +\epsilon^{k+1-\frac{3N}{2p}}\int_0^\tau(\tau-\sigma)^{-\alpha}r^\epsilon(\sigma)\,d\sigma+\epsilon^{k+2\alpha-1}\Big),\qquad \tau\in[0,T/\epsilon^2]
\end{aligned}
$$

が導かれる．ただし $r^\epsilon(\tau)$ は

$$
(3.16)\qquad r^\epsilon(\tau):=\|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_\alpha\, e^{-\epsilon^2(\lambda_*+K)\tau}
$$

で定義される $[0,T/\epsilon^2]$ 上の連続関数である．

いま $\varphi_1^\epsilon(0)$ を

$$
(3.17)\qquad r^\epsilon(0)=\|\varphi_1^\epsilon(0)\|_\alpha=O(\epsilon^{k+1})
$$

がみたされるように十分小さくとれば $r^\epsilon(\tau)$ の連続性から

$$
(3.18)\qquad r^\epsilon(\tau)\le\epsilon^k
$$

が小さい $\tau>0$ に対して成り立つ．ここで $T_0:=\sup\{\tau\in[0,T/\epsilon^2]\,|\,r^\epsilon(\sigma)\le\epsilon^k,\ \ \forall\sigma\in[0,\tau]\}$ とおくと $r^\epsilon(T_0)=\epsilon^k$ あるいは $T_0=T/\epsilon^2$ のどちらか一方が成り立つ．実は $\epsilon>0$ が十分小さいときには前者は成り立たないことがわかる．実際 $k\ge1,\ p\ge3N,\ \alpha\in(1/2,1)$ に注意すれば (3.15) から

$$
\epsilon^k=r^\epsilon(T_0)\le\epsilon^k\Big(M\epsilon+\frac{2MT^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\epsilon^{k-\frac{3N}{2p}+2\alpha-1}+M\epsilon^{2\alpha-1}\Big)\le\frac{\epsilon^k}{2}
$$

となって矛盾が導かれる．したがって (3.18) は $[0,T/\epsilon^2]$ 上で成り立ち, (3.16) によって

$$
\|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_\alpha\le Me^{(\lambda_*+K)T}\epsilon^k=O(\epsilon^k)
$$

が成り立つ．さらにこれと (3.9), (3.10) によって

$$
(3.19)\qquad \|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}=O(\epsilon^{k-\frac{3N}{2p}}),\qquad \tau\in[0,T/\epsilon^2]
$$

となる．このようにして $\|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$ および $|\varphi_2^\epsilon(\tau)|$ の評価 (3.19) と (3.13) を得ることができた．

これらの評価と (3.4) から

$$
\begin{aligned}
\max_{[0,T/\epsilon^2]}\|\varphi^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le \max_{[0,T/\epsilon^2]}\|\varphi_1^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}+\max_{[0,T/\epsilon^2]}|\varphi_2^\epsilon(\tau)| \\
&= O(\epsilon^{k-\frac{3N}{2p}})+O(\epsilon^k) \\
&= O(\epsilon^{k-\frac{3N}{2p}})
\end{aligned}
$$

となり，時間変数を $t=\epsilon^2\tau\in[0,T]$ に戻せば求める評価が得られる． □

注意． 方程式 (1.1) の第 3 段階におけるダイナミクスを捉えるには, (1.1) を $t\to\epsilon^{-2}t$ でリスケールして得られる方程式

$$
(\text{RD-s})\qquad \epsilon^2u_t^\epsilon=\epsilon^2\Delta u^\epsilon+f(u^\epsilon)-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u^\epsilon)\,dx
$$

を扱うとよい．この方程式に対応する界面方程式は「体積保存型平均曲率流方程式」

$$
(\text{IE-s})\qquad \mathbf{v}(x;\Gamma(t))=-\kappa(x;\Gamma(t))+\frac{1}{|\Gamma(t)|}\int_{\Gamma(t)}\kappa(x;\Gamma(t))\,dS_x^{\Gamma(t)}
$$

となる [13]．ここで $\kappa(x;\Gamma(t))$ は点 $x\in\Gamma(t)$ における $\Gamma(t)$ の主曲率の和を表す (ただしその符号は曲率球の中心が領域 $\Omega^-(t)$ にあるとき正とする)．Bronsard と Stoth は [2] において (RD-s) の球対称な解が $\epsilon\to0$ で (IE-s) の解に収束することを変分的手法を用いて証明した．本稿で述べたわれわれの手法は，この第 3 ステージに対しても有効である．

参考文献

[1] N. D. Alikakos, G. Fusco and V. Stefanopoulos, *Critical Spectrum and Stability of Interfaces for a Class of Reaction-Diffusion Equations*, J. Differential Equation **126** (1996), 106–167.

[2] L. Bronsard and B. Stoth, *Volume-Preserving Mean Curvature Flow as a Limit of a Nonlocal Ginzburg-Landau Equation*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), 769–807.

[3] X. Chen, *Generation and Propagation of Interfaces for Reaction-Diffusion Equations*, J. Differential Equations **96** (1992), 116–141.

[4] X. Chen, *Spectrum for the Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, and Phase-Field Equations for Generic Interfaces*, Comm. in Partial Differential Equation **19** (1994), 1371–1395.

[5] P. de Mottoni and M. Schatzman, *Geometrical Evolution of Developed Interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1533–1589.

[6] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Phase Transitions and Generalized Motion by Mean Curvature*, Comm. Pure. Appl. Math. **45** (1992), 1097–1123.

[7] P. C. Fife, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. **53**, SIAM, Philadelphia, 1988.

[8] P. C. Fife and J. B. McLeod, *The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.

[9] A. Novick-Cohen, *On the Viscous Cahn-Hilliard Equation*, Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Mathematical Problems (J. Ball ed.), 329–342, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1988.

[10] A. Novick-Cohen, *The Cahn-Hilliard Equation: Mathematical and Modelling Perspectives*, Advances in Math. Sci. and Appl. **8** (1998), 965–985.

[11] K. Okada, *Approximation of a Reaction-Diffusion Equation with a Nonlocal Term*, 数理解析研究所講究録 1347, Variational Problems and Related Topics, 44–54, 京都大学数理解析研究所, 2003.

[12] K. Okada, *Intermediate Dynamics of Internal Layers for a Nonlocal Reaction-Diffusion Equation*, preprint (2004).

[13] J. Rubinstein and P. Sternberg, *Nonlocal Reaction-Diffusion Equations and Nucleation*, IMA J. Appl. Math. **48** (1992), 249–264.

[14] K. Sakamoto, *Interfaces in Activator-Inhibitor Systems –Asymptotics and Degeneracy–*, preprint (2003).

[15] M. J. Ward, *Metastable Bubble Solutions for the Allen-Cahn Equation with Mass Conservation*, SIAM J. Appl. Math. **56** (1996), 1247–1279.

[16] M. J. Ward, *The Dynamics of Localized Solutions of Nonlocal Reaction-Diffusion Equations*, Canad. Math. Bull. **43** (2000), 477–495.

非柱状領域内での phase field 方程式の弱解と移流項のクラスについて

深尾 武史 (鳥羽商船高専)
E-mail:fukao@toba-cmt.ac.jp

Abstract

本報告集では, 非柱状領域内でのある偏微分方程式の初期値境界値問題のシステムに対して解の存在と一意性について報告する. 方程式は移流項と呼ばれる非線形項をそれぞれ持ち, さらにその係数が不連続な場合の考察である. 片方の方程式は多価で極大単調な非線形項を摂動項として持っており, そのため例えば近似問題を考察して近似解を構成し, その関数列の極限として解を捕まえる際の一様評価に難しさが出てくる. そのため, 関数列のコンパクト性を得るためによく用いられる Aubin のコンパクト性定理と同値な条件を用意し, 難しさを回避して解の存在を証明していく.

1 導入

$0 < T < +\infty$, $t \in [0,T]$ そして $\Omega_m(t) \subset \mathbf{R}^3$ を有界で十分なめらかな境界 $\Gamma_m(t)$ を持つ時間依存領域とする. 未知関数を $\theta := \theta(t,x)$ と $\chi := \chi(t,x)$ として次の問題を考えよう.

$$\begin{aligned} D_t(\theta+\chi) - \Delta\theta &= f \qquad \text{in } Q_m := \bigcup_{t\in(0,T)} \{t\} \times \Omega_m(t), \\ D_t\chi - \Delta\chi + \omega + \gamma(\chi) &= \theta \qquad \text{in } Q_m, \\ \omega &\in \beta(\chi) \quad \text{in } Q_m, \end{aligned}$$

ここであるベクトル $\mathbf{v} := (v_1, v_2, v_3)$ に対して $D_t := \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$ と定義する. ただし $\nabla := (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. さらに $\Delta := \sum_{i=1}^{3} (\partial^2/\partial x_i^2)$, f は Q_m 上で与えられた関数である. この偏微分方程式系は phase field (フェイズ・フィールド) 方程式と呼ばれるもので Fix [8] や Caginalp [4] らによって Stefan 問題と呼ばれる問題の弱解によるアプローチの拡張として提唱された方程式である. その後, 様々な観点からの研究がなされており, Damlamian, Kenmochi, Sato [5, 6] らは Blowey, Elliott [2] が拡張した phase field 方程式について結果を残している. $\beta : \mathbf{R} \to 2^{\mathbf{R}}$ は多価で極大単調な実数値関数でその有効領域は $D(\beta) = [-1, 1]$ とし, $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は一価で有界, 片側 Lipschitz 連続な実数値関数とする. これは Fix や Caginalp らが提唱した phase filed 方程式において方程式の導出の際に登場するポテンシャルと呼ばれる量にある種の制限を加えたものであった. その結果は弱解の存在と一意性の定理で, Visintin [12] によるアイデアをもとに時間依存劣微分作用素を含んだ発展方程式の抽象理論によって証明されている. そこでは θ の時間微分は Sovolev 空間 H^1 の部分空間の共役空間上でとらえられており, その設定が本質的な部分の一つであった. 彼らは Hilbert 空間であるその部分空間からその共役空間への双対写像が負のラプラシアンと同一視できるというよく知られた性質を利用している. そのアイデアは, もし与えられたベクトル $\mathbf{v}$ が十分なめらかであれば我々の問題にも応用することが可能で, 実際には近似解の構成にそのアイデアを用いることもできる. 近年 Schimperna [10] によって phase field 方程式の抽象的な取り扱いを Brézis [3] の極大単調作用素の結果からまとめており我々も近似解の構成にはその結果を利用する.

まず, 我々の時間依存領域について述べる. 領域は次の意味で十分なめらかに変形していると仮定しよう:

(A1) ある変換 $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^2(\overline{Q_m}) := C^2(\overline{Q_m})^3$ が存在し, 任意の $t \in [0,T]$ に対して $\mathbf{y}(t,\cdot) := (y_1(t,\cdot), y_2(t,\cdot), y_3(t,\cdot))$ は $\Omega_m(t)$ から $\Omega_{m0} := \Omega_m(0)$ の上への C^2 微分同相写像で以下を満たす.

$$\mathbf{y}(t, \overline{\Omega_m(t)}) = \overline{\Omega_{m0}} \quad {}^\forall t \in [0,T],$$

特に $\mathbf{y}(0,\cdot)$ は $\overline{\Omega_{m0}}$ 上恒等写像. また, $\mathrm{vol}(\Omega_m(t)) = \mathrm{vol}(\Omega_{m0})$ ${}^\forall t \in [0,T]$.

我々の問題では移流を表すベクトル $\mathbf{v}$ は不連続である場合を考える．よって $\mathbf{v}$ は (A1) で与えられる領域の変形に則した速度 $\mathbf{v}_D$ である必要はない．ちなみに $\mathbf{v}_D := [\partial\mathbf{x}/\partial t\circ\mathbf{y}]$ によって定義され，$\mathbf{x} := \mathbf{y}^{-1}$ としておき，$[\partial x_i/\partial t\circ\mathbf{y}](t,x) := \partial x_i/\partial t(t,\mathbf{y}(t,x))$ $(i=1,2,3)$ のように定義しておく．この仮定の下，問題は柱状領域 $Q_T := (0,T)\times\Omega_{m0}$ 上の問題に書き直すことができる．その際，任意の $(t,y)\in Q_T$ に対して $\bar{\theta}(t,y) := [\theta\circ\mathbf{x}](t,y)$ や $\bar{\chi}(t,y) := [\chi\circ\mathbf{x}](t,y)$ とすれば第2の方程式は

$$\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ij}(t,y)\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y_i} + \tilde{v}_i(t,y)\bar{\chi}\right) + \sum_{i=1}^{3} b_i(t,y)\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y_i} + \beta(\bar{\chi}) + \gamma(\bar{\chi}) \ni \bar{\theta} \quad \text{in } Q_T,$$

となる．ここで a_{ij} や b_i は (A1) より連続な係数となり，$\tilde{v}_i$ は $\mathbf{v}$ の条件によって不連続な係数となっている．我々は方程式に Neumann 境界条件と初期条件を課して可解性の議論を行っていく．一般に領域の時間依存性は係数の時間依存性として表れることが分かるが，方程式が線形であれば，時間依存性の可解性への影響はさほど大きくない．しかし，方程式が非線形性を持つ場合には，そもそも非線形の問題に対する可解性の議論が個々の問題によって異なるという性質からも時間依存性の可解性への影響は小さくない．たとえ $\tilde{v}_i$ の近似を行い，近似解を見つけたとしても近似解の収束の議論に必要なコンパクト性を得ることは簡単ではない．具体的には Schimperna [10] が行ったように $\bar{\chi}$ の時間微分の評価を得て Aubin のコンパクト性の定理を応用するアプローチでは β が非有界な多価関数であることから $\bar{\chi}$ の時間微分の評価が難しいということである．この難しさを解消するため，Aubin の定理の時間判定条件と同値な条件に注目していこう．

2 主要定理と近似問題

本節では我々の問題に対して主要定理を述べ，その証明のための近似問題について記述していく．我々の問題は次の初期値境界値問題 (P):= $\{(2.1)\text{-}(2.4)\}$ である．

$$D_t(\theta+\chi) - \Delta\theta = f \quad \text{in } Q_m, \tag{2.1}$$

$$D_t\chi - \Delta\chi + \beta(\chi) + \gamma(\chi) \ni \theta \quad \text{in } Q_m, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \Sigma_m, \tag{2.3}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \chi(0) = \chi_0 \quad \text{in } \Omega_{m0}, \tag{2.4}$$

ここで $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ は外向き法線方向微分を表し，Σ_m は Q_m の側面とする．$\beta:\mathbf{R}\to 2^{\mathbf{R}}$ は多価で極大単調な実数値関数でその有効領域は $D(\beta) = [-1,1]$ とする．しかし $(-1,1)$ においては β は一価で有界としておく．そしてある適正下半連続な凸関数 $\hat{\beta}$ が存在し $\mathbf{R}$ 上 $\partial_{\mathbf{R}}\hat{\beta} = \beta$ と表現できており，さらに $\hat{\beta}(0) = 0$ と仮定しておき

$$\hat{\beta}(r) \geq c_1|r|^2 \quad {}^{\forall}r\in\mathbf{R}, \tag{2.5}$$

を満たすとする．ここで c_1 は正定数である．この β の例としては $\beta(r) = \partial_{\mathbf{R}} I_{[-1,1]}(r)$ があげられるであろう．ただし $\partial_{\mathbf{R}}$ は $\mathbf{R}$ 上の劣微分を表し，$I_{[-1,1]}$ は $[-1,1]$ 上の指示関数である．一方，$\gamma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は一価で有界，片側 Lipschitz 連続な実数値関数とする．つまり，

$$\gamma(r) \leq c_2(|r|+1) \quad {}^{\forall}r\in\mathbf{R}, \tag{2.6}$$

$$(\gamma(r)-\gamma(r_1))(r-r_1) \geq -c_2'|r-r_1|^2 \quad {}^{\forall}r, r_1\in\mathbf{R}, \tag{2.7}$$

ここで c_2 や c_2' は正定数とする．さて，問題 (P) ではすでに領域の変形が (A1) の意味で時間に関してなめらかに与えられているので，ここではさらに移流 $\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(Q_m)$ に対して次の仮定を用意しよう．任意の $q, r\in[1,+\infty]$ と $t\in[0,T]$ に対して，

(A2;r,q) $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega_m(t))$ かつ $\mathrm{div}\mathbf{v}(t) = 0$ を a.e. $t \in [0,T]$ に対して満たし, $[0,T]$ 上 $\mathbf{L}^2(\Omega_m(t))$ の値をとる関数として弱連続で, さらに適合条件 $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = v_{\Sigma_m}$ を境界 Σ_m 上で満たす. また同じく上の条件を満たすある関数列 $\{\mathbf{v}_\varepsilon\} \subset \mathbf{C}^1(\overline{Q_m})$ が存在し

$$\mathbf{v}_\varepsilon \to \mathbf{v} \quad \text{weakly in } \mathbf{L}^2(Q_m) \quad \text{as } \varepsilon \to 0, \tag{2.8}$$

$$\int_0^T |\mathbf{v}_\varepsilon(t)|^r_{\mathbf{L}^q(\Omega_m(t))}dt \quad \text{は任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して有界}, \tag{2.9}$$

もし $r = +\infty$ ならば (2.9) は $\mathrm{ess\ sup}_{t\in(0,T)}|\mathbf{v}_\varepsilon(t)|_{\mathbf{L}^q(\Omega_m(t))}$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対して有界と書き直す. ここで $v_{\Sigma_m} := \mathbf{v}_D \cdot \boldsymbol{\nu}$ は境界の法線方向速度を表す.

次に (P) の解を定義し主定理を述べる.

定義 2.1. ある $\theta, \chi \in H^1(Q_m)$ なる関数の対 $\{\theta, \chi\}$ が以下を満たすとき (P) の解であると定義する: χ は $\chi \in [-1,1]$ a.e. on Q_m, $\hat{\beta}(\chi(t)) \in L^1(\Omega_m(t))$ for a.e. $t \in [0,T]$ を満たし, さらにある $\omega \in L^2(Q_m)$ が存在して $\omega \in \beta(\chi)$ a.e. on Q_m. また θ と χ は

$$\sup_{t\in(0,T)} |\theta(t)|_{H^1(\Omega_m(t))} < +\infty, \quad \int_0^T |\theta(t)|^2_{H^2(\Omega_m(t))}dt < +\infty, \tag{2.10}$$

$$\sup_{t\in(0,T)} |\chi(t)|_{H^1(\Omega_m(t))} < +\infty, \quad \int_0^T |\chi(t)|^2_{H^2(\Omega_m(t))}dt < +\infty, \tag{2.11}$$

そして θ, χ, ω は (2.1)-(2.4) を満たす.

定理 2.2. $r = +\infty$, $q \geq 3$ とする. (A1) と (A2;r,q) を仮定し, さらに $f \in L^2(Q_m)$, $\theta_0 \in H^1(\Omega_{m0})$ そして $\chi_0 \in H^2(\Omega_{m0})$, ただし $\hat{\beta}(\chi_0) \in L^1(\Omega_{m0})$ が成り立っているとする. このとき, (P) の一意解が存在する.

定理の証明のため, まずは近似問題を考察しよう. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して新しい変数 $e_\varepsilon := \theta_\varepsilon + \chi_\varepsilon$ を定義し $\bar{e}_\varepsilon = [e_\varepsilon \circ \mathbf{x}]$ と置く. また (A2;r,p) に登場するなめらかな関数 $\mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{C}^1(\overline{Q_m})$ を用意して, $\mathbf{v}$ を $\mathbf{v}_\varepsilon$ で置き換えた問題に対して, 以下のような弱形式を満たす $\theta_\varepsilon, \chi_\varepsilon \in H^1(Q_m)$ が一意的に存在することが分かる:

$$-\int_{Q_m} e_\varepsilon D_t\eta dxdt + \int_{Q_m} \nabla\theta_\varepsilon \cdot \nabla\eta dxdt = \int_{Q_m} f\eta dxdt + \int_{\Omega_{m0}} e_0\eta(0)dx, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}-\int_{Q_m} \chi_\varepsilon D_t\eta dxdt + \int_{Q_m} \nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla\eta dxdt + \int_{Q_m} \omega_\varepsilon\eta dxdt + \int_{Q_m} \gamma(\chi_\varepsilon)\eta dxdt \\ = \int_{Q_m} \theta_\varepsilon\eta dxdt + \int_{\Omega_{m0}} \chi_0\eta(0)dx,\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\omega_\varepsilon \in \beta(\chi_\varepsilon) \quad \text{in } Q_m, \tag{2.14}$$

ここで $e_0 := \theta_0 + \chi_0$. 実際, この弱形式を柱状領域 $Q_T := (0,T) \times \Omega_0$ に変換すればある発展方程式に帰着できる. $H := L^2(\Omega_{m0}), V := H^1(\Omega_{m0})$ と置き, V^* を V の共役空間とするとそこには稠密でコンパクトな埋め込み $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ があることが分かる. この設定の元, 近似問題 $(\bar{\mathrm{P}})_\varepsilon := \{(2.15)\text{-}(2.17)\}$ の一意解が存在することが証明できる: a.e. $t \in [0,T]$ に対して

$$\bar{e}'_\varepsilon(t) + A(t, \bar{\theta}_\varepsilon(t)) + B_\varepsilon(t, \bar{e}_\varepsilon(t)) = \bar{f}(t) \quad \text{in } V^*, \tag{2.15}$$

$$\bar{\chi}'_\varepsilon(t) + A(t, \bar{\chi}_\varepsilon(t)) + B_\varepsilon(t, \bar{\chi}_\varepsilon(t)) + \partial_H J(\bar{\chi}_\varepsilon(t)) + \gamma(\bar{\chi}_\varepsilon(t)) \ni \bar{\theta}_\varepsilon(t) \quad \text{in } V^*, \tag{2.16}$$

$$\bar{\theta}_\varepsilon(0) = \theta_0, \quad \bar{\chi}_\varepsilon(0) = \chi_0 \quad \text{in } V^*, \tag{2.17}$$

ここで任意の $t \in [0,T]$ と $\bar{z} \in V$ に対して $A(t,\cdot): V \to V^*$ は

$$\langle A(t,\bar{z}), \bar{z}_1 \rangle_{V^*,V} := \int_{\Omega_{m0}} \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(t) \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_i} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial y_j} dy + \int_{\Omega_{m0}} \sum_{i=1}^{3} b_i(t) \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_i} \bar{z}_1 dy \quad {}^\forall \bar{z}_1 \in V,$$

で a_{ij}, b_i は十分なめらか. また, 任意の $\bar{z} \in H$ に対して $B_\varepsilon(t,\cdot): H \to V^*$ は

$$\langle B_\varepsilon(t,\bar{z}), \bar{z}_1 \rangle_{V^*,V} := \int_{\Omega_{m0}} \sum_{j=1}^{3} (\tilde{v}_\varepsilon)_j(t) \bar{z} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial y_j} dy + \int_{\Omega_{m0}} \tilde{v}_\varepsilon(t) \bar{z} \bar{z}_1 dy \quad {}^\forall \bar{z}_1 \in V,$$

$$(\tilde{v}_\varepsilon)_j(t,y) := \sum_{i=1}^{3} ((\bar{v}_D)_i(t,y) - (\bar{v}_\varepsilon)_i(t,y)) \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \circ \mathbf{x} \right] (t,y) \quad \text{for } j = 1,2,3,$$

$$\tilde{v}_\varepsilon(t,y) := \sum_{i,j=1}^{3} ((\bar{v}_D)_i(t,y) - (\bar{v}_\varepsilon)_i(t,y)) \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \circ \mathbf{x} \right] (t,y).$$

ただし $(t,y) \in Q_T$. 実際 Schimperna [10] の結果などにより証明でき, さらに近似解は $\bar{\theta}_\varepsilon, \bar{\chi}_\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega_{m0}))$ のクラスで得ることができる.

3 コンパクト性の定理と一様評価

本節では, 近似解の一様評価を得ながら鍵となるコンパクト性の定理についてふれる. $\{\bar{\theta}_\varepsilon, \bar{\chi}_\varepsilon\}$ を前節で得た近似問題 $(\bar{\mathrm{P}})_\varepsilon$ の解とする. この極限によって問題 (P) の解を構成していくのだが, そのためにまずは Aubin のコンパクト性の定理を用いてみよう. 始めに次の評価を得る.

補題 3.1. $\varepsilon > 0$ に依存しないある正定数 M_1 が存在して

$$|\bar{e}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;H)} + |\bar{e}_\varepsilon|_{L^2(0,T;V)} + |\bar{\chi}_\varepsilon|_{L^\infty(Q_T)} + |\bar{\chi}_\varepsilon|_{L^2(0,T;V)} < M_1. \tag{3.1}$$

補題 3.2. $r = +\infty$ そして $q \geq 3$ とする. このとき, $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to +\infty$ なる部分列 $\{\varepsilon_n\}$ とある関数 $\bar{e} \in L^2(0,T;V^*)$ が存在し

$$\bar{e}_n := \bar{e}_{\varepsilon_n} \to \bar{e} \quad in\ L^2(0,T;H) \quad as\ n \to +\infty. \tag{3.2}$$

さらに $\{\bar{e}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $[0,T]$ から V^* への関数として同程度一様連続である.

証明. 補題 3.1 の証明は略. 補題 3.2 を示すには $\varepsilon > 0$ に依存しない正定数 M_2 が存在して $|\bar{e}_\varepsilon'|_{L^2(0,T;V^*)} \leq M_2$ を満たすことを示せば十分である. 実際, そのとき Aubin のコンパクト性の定理, 例えば Simon [11], が補題 3.1 の元で応用できる. さらに Ascoli-Arzela の定理によって 2 つめの要請が成り立つ. 方程式 (2.15) において補題 3.1 と $A(t,\cdot)$ の定義から

$$\int_0^T |\langle A(t,\bar{\theta}_\varepsilon(t)), \xi \rangle_{V^*,V}| dt \leq M_1' |\xi|_{L^2(0,T;V)} \quad {}^\forall \xi \in L^2(0,T;V),$$

が成り立つ. ここで M_1' は M_1 に依存する正定数. 次に $\varepsilon > 0$ に依存しない正定数 c_3 が存在して

$$\int_0^T \int_{\Omega_{m0}} \sum_{j=1}^{3} (\tilde{v}_\varepsilon)_j \bar{e}_\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial y_j} dy dt \leq c_3 |\bar{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^3(\Omega_{m0}))} |\bar{e}_\varepsilon|_{L^2(0,T;L^6(\Omega_{m0}))} |\xi|_{L^2(0,T;V)},$$

を満たすことから仮定 (A2;r,q) の (2.9) を用いて

$$\int_0^T |\langle B_\varepsilon(t,\bar{e}_\varepsilon(t)), \xi \rangle_{V^*,V}| dt \leq M_1' |\xi|_{L^2(0,T;V)} \quad {}^\forall \xi \in L^2(0,T;V),$$

が示され, よって $|\bar{e}'_\varepsilon|_{L^2(0,T;V^*)} \le M_2$ が $M_2 := 2M'_1 + |\bar{f}|_{L^2(Q_T)}$ に対して成り立つ. □

次に $\{\chi_\varepsilon\}$ のコンパクト性を証明しよう. しかし β があるため補題 3.2 と同様の議論はできない. 例えばその難しさを解消するために Damlamian, Kenmochi, Sato [5], [6] では H を軸に V から V^* への双対写像 F が負のラプラシアンと同一視できるというよく知られた性質を利用して時間依存劣微分作用素を含む発展方程式の抽象理論の結果を応用した. しかし非柱状領域の問題では負のラプラシアンに相当するのは $A(t)$ となり, もはや F によってその役割を担うことはできない. そこで, 我々は Aubin のコンパクト性の定理の時間判定条件の同値条件 (Simon [11], Theorem 3 参考) を求めてこの難しさを回避する. いま, 任意の $s,t \in [0,T]$ と $x \in \Omega_m(t)$ に対して $\Theta_{t,s}(x) := \mathbf{x}(s, \mathbf{y}(t,x))$, $\tau_h u(t,x) := u(t+h, \Theta_{t,t+h}(x))$ と置き, さらに任意の $h \in \mathbf{R}$ に対して $Q_m - h := \{(s,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3; (s+h,x) \in Q_m\}$, $Q^*_m(h) := Q_m \cap (Q_m - h)$ と定義しておく.

補題 3.3. $\bar{F}$ を $L^2(0,T;V)$ で有界とし,

$$|\tau_h u - u|_{L^2(Q^*_m(h))} \to 0 \quad \textit{as } h \to 0, \textit{ uniformly for } u \in F := \{u; \bar{u} \in \bar{F}\}, \tag{3.3}$$

を満たすとする. このとき $\bar{F}$ は $L^2(0,T;H)$ で相対コンパクトである.

証明. 任意の $\alpha \in (0,T)$ に対して, ある $C([0,T-\alpha];H)$ で相対コンパクトな集合が存在して, $\bar{F}$ は $L^2(0,T;H)$ の位相でその集合の一様極限として表現されることを示せばよい. 任意の $\alpha \in (0,T)$ に対してその集合を $(M_\alpha \bar{u})(t) := 1/\alpha \int_t^{t+\alpha} \bar{u}(s)ds$ のように右側平均として定義しよう. このとき, $0 \le t_1 \le t_2 \le T-\alpha$ に対して

$$\begin{aligned}
&|M_\alpha \bar{u}(t_2) - M_\alpha \bar{u}(t_1)|_{L^2(\Omega_{m0})} \\
&\le \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^{t_1+\alpha} \left\{ \int_{\Omega_{m0}} \left| u(s+t_2-t_1, \Theta_{s,s+t_2-t_1}(x)) - u(s,x) \right|^2 \mathrm{det}.J_{\mathbf{y}(s)} dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\le \frac{c_4}{\alpha} \int_0^{T-(t_2-t_1)} |\tau_{t_2-t_1} u - u|_{L^2(\Omega_m(s))} ds,
\end{aligned}$$

ここで c_4 は $\mathbf{y}$ に依存する正定数. このとき (3.3) が集合 $M_\alpha \bar{F} := \{M_\alpha \bar{u}; \bar{u} \in \bar{F}\}_{\alpha \in (0,T)}$ は $[0,T-\alpha]$ から H への関数として上同程度一様連続であることを意味している. いま, $\bar{F}$ は $L^2(0,T;V)$ で有界集合なので $\{\int_t^{t+\alpha} \bar{u}(s)ds\}$ は H 上相対コンパクトであり, Ascoli-Arzela の定理によって $M_\alpha \bar{F}$ は $C([0,T-\alpha];H)$ 上相対コンパクトであることが分かる. 次に

$$\begin{aligned}
|M_\alpha \bar{u} - \bar{u}|_{L^2(0,T-\alpha;H)} &\le c_4 \left| \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\tau_h u - u) dh \right|_{L^2(Q^*_m(\alpha))} \\
&\le \sup_{0 \le h \le \alpha} |\tau_h u - u|_{L^2(Q^*_m(h))},
\end{aligned}$$

によって $\alpha \to 0$ としたとき, $\bar{F}$ は $L^2(0,T;H)$ の位相に関して $M_\alpha \bar{F}$ の一様極限で表現される. □

定理 2.2 の証明. まず始めに近似解の集合 $\{\chi_\varepsilon\}$ が補題 3.3 を満たすことを示す. 固定された $h \in [0,T)$ に対して $\chi_\varepsilon(t)$, $\mathbf{v}_\varepsilon(t)$ そして $\Omega_m(t)$ を

$$\chi_\varepsilon(t) := \left(1 + \frac{t}{T}\right) \chi_0, \ \mathbf{v}_\varepsilon(t) = 0, \ \Omega_m(t) = \Omega_{m0} \quad {}^\forall t \in [-h, 0),$$

で拡張しておく. さらに $\theta^*(t) := t/T\chi_0 - (1+t/T)\Delta\chi_0 + \beta((1+t/T)\chi_0) + \gamma((1+t/T)\chi_0)$ と置くと, 任意の $t \in (-T,0)$ に対して関係式 $0 < 1 + t/T < 1$ より $\chi_\varepsilon(s-h) \in (-1,1)$ ${}^\forall s \in (0,h]$ であることから β は一価で有界である. もし,

$$\theta^*_\varepsilon(t) := \begin{cases} \theta_\varepsilon(t) & \text{if } t \in [0,T], \\ \theta^*(t) & \text{if } t \in (-T,0), \end{cases}$$

と置けば χ_ε は任意の $s \in [-h, T]$ に対して次の方程式を満たすことが分かる.

$$\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t}(s) + \mathbf{v}_\varepsilon(s)\cdot\nabla\chi_\varepsilon(s) - \Delta\chi_\varepsilon(s) + \beta(\chi_\varepsilon(s)) + \gamma(\chi_\varepsilon(s)) \ni \theta_\varepsilon^*(s) \quad \text{a.e. on } \Omega_m(s).$$

この方程式と時間 $s-h$ における方程式の差を取りテスト関数として $\chi_\varepsilon(s) - \tau_{-h}\chi_\varepsilon(s)$ を選び, x と s に関して $Q_m(0,t)$ 上で積分すると β の単調性から

$$\begin{aligned}
&|\chi_\varepsilon(t) - \tau_{-h}\chi_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_m(t))} \\
&\leq\ 2(c_2'+1)\int_0^t |\chi_\varepsilon(s) - \tau_{-h}\chi_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega_m(s))}ds + M(h) + \frac{h^2}{T^2}|\chi_0|_H^2 \quad {}^\forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

ここで $M(h) > 0$ は h の関数で $h \to 0$ としたときに $M(h) \to 0$ となるものである. 実際に

$$\begin{aligned}
&\int_h^t \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_m(s))}ds + \int_0^h \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_m(s))} \\
&=\ \frac{1}{2}|\chi_\varepsilon(t) - \tau_{-h}\chi_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_m(t))} - \frac{1}{2}\left|\chi_0 - \left(1 + \frac{-h}{T}\right)\chi_0\right|_H^2,
\end{aligned}$$

また $|\bar{\chi}_\varepsilon|_{L^\infty(Q_T)} \leq M_1$ を用いて

$$\begin{aligned}
&\int_h^t\int_{\Omega_m(s)}\Big((\mathbf{v}_\varepsilon - \tau_{-h}\mathbf{v}_\varepsilon)\cdot\nabla\chi_\varepsilon\Big)(\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon)dxds \\
&\leq\ M_1''\sum_{j=1}^3\int_h^t\left((\bar{v}_\varepsilon)_j(s) - (\bar{v}_\varepsilon)_j(s-h), \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial y_j}(s)\right)_H ds,
\end{aligned}$$

ここで M_1'' は M_1 と c_4 に依存する正定数. 仮定 (A2;r,q) の弱連続性を用いれば $h \to 0$ のとき右辺は 0 に収束する. さらに

$$\int_0^t\int_{\Omega_m(s)}(\gamma(\chi_\varepsilon) - \gamma(\tau_{-h}\chi_\varepsilon))(\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon)dxds \geq -c_2'\int_0^t|\chi_\varepsilon(s) - \tau_{-h}\chi_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega_m(s))}ds,$$

で θ_ε^* の定義より

$$\begin{aligned}
&\int_h^t\int_{\Omega_m(s)}(\theta_\varepsilon^* - \tau_{-h}\theta_\varepsilon^*)(\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon)dxds + \int_0^h\int_{\Omega_m(s)}(\theta_\varepsilon^* - \tau_{-h}\theta_\varepsilon^*)(\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon)dxds \\
&\leq\ \frac{c_4}{2}\int_h^t|\bar{\chi}_\varepsilon(s) - \bar{\chi}_\varepsilon(s-h))|_V^2ds + \frac{c_4}{2}\int_h^t|\bar{e}_\varepsilon(s) - \bar{e}_\varepsilon(s-h))|^2_{V^*}ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^h|\theta_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega_m(s))}ds + \frac{h}{2}\max_{0\leq s\leq h}|\tau_{-h}\theta^*(s)|^2_{L^2(\Omega_m(s))} \\
&\quad + \int_0^t|\chi_\varepsilon(s) - \chi_\varepsilon(s-h))|^2_{L^2(\Omega_m(s))}ds,
\end{aligned}$$

ここで右辺の 2, 3, 4 番目の項は $h \to 0$ のとき 0 に収束する. 以上から Gronwall の不等式を用いてその結果を t に関して $[h,T]$ 上で積分すれば, 時間判定条件として

$$\begin{aligned}
|\chi_\varepsilon - \tau_{-h}\chi_\varepsilon|^2_{L^2(Q^*(-h))} &\leq \left(\frac{h^2}{T^2}|\chi_0|_H^2 + M(h)\right)2(c_2'+1)\exp(2T(c_2'+1)) \\
&\to\ 0 \quad \text{as } h \to 0 \text{ uniformly for } \varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. よって空間判定条件として補題 3.2 から $\{\bar{\chi}_\varepsilon\}$ が $L^2(0,T;V)$ で有界であることが分かっているので補題 3.3 を用いればある関数 $\bar{\chi} \in L^2(0,T;H)$ が存在して

$$\bar{\chi}_n := \bar{\chi}_{\varepsilon_n} \to \bar{\chi} \quad \text{in } L^2(0,T;H) \quad \text{as } n \to 0, \tag{3.4}$$

が得られる．さらに補題 3.2 は $\bar{\chi} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(Q_T)$ でさらに $\bar{\chi} \in W^{1,2}(0,T;H)$ であることを意味している．もし $\chi := [\bar{\chi} \circ \mathbf{y}]$, $\bar{\theta} := \bar{e} - \bar{\chi}$ さらに $\theta := [\bar{\theta} \circ \mathbf{y}]$ と置けば $\bar{\theta} \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ であるので弱形式 (2.12)-(2.14) において $\varepsilon \to 0$ とすれば，θ と χ は (2.1)-(2.4) の弱形式を満たすことが分かる．また熱方程式の一般的な解のクラスを上げる方法により，つまり β の吉田近似を用いて，テスト関数として Δe や $\Delta \chi$ を選ぶ方法で解のクラスが上がり，$\{\theta, \chi\}$ が (P) の解であることが証明できる．一意性の証明は省略する． □

References

[1] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.

[2] J. F. Blowey and C. M. Elliott, A phase-field model with a double obstacle potential, pp.1–22 in *Motion by Mean Curvature and Related Topics*, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[3] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. Stud., **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[4] G. Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal., **92**(1986), 205-245.

[5] A. Damlamian, N. Kenmochi and N. Sato, Phase field equations with constraints, pp.391–404 in *Nonlinear Mathematical Problems in Industry*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **Vol.2**, Gakkōtosho, Tokyo, 1993.

[6] A. Damlamian, N. Kenmochi and N. Sato, Subdifferential operator approach to a class of nonlinear systems for Stefan problems with phase relaxation, Nonlinear Anal., **23**(1994), 115–142.

[7] C. M. Elliott and S. Zheng, Global existence and stability of solutions to the phase field equations, pp.46–58 in *Free Boundary Problems*, Internat. Ser. Numer. Math., **Vol.95**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[8] G. J. Fix, Phase field methods for free boundary problems, pp 580–589 in *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Pitman Rese. Notes Math. Ser., **Vol.79**, Longman, London, 1983.

[9] T. Fukao and N. Kenmochi, Degenerate parabolic equations with convection in non-cylindrical domains, Adv. Math. Sci. Appl., **14**(2004), 139–150.

[10] G. Schimperna, Abstract approach to evolution equations of phase-field type and applications, J. Differential Equations **164**(2000), 395–430,

[11] J. Simon, Compact sets in the spaces $L^p(0,T;B)$, Ann. Mate. Pura. Appl., **146** (1987), 65–96.

[12] A. Visintin, Stefan problems with phase relaxation, IMA J. Appl. Math., **34**(1985), 225–245.

4日目午前のセッションの総括

横田 智巳 (東京理大・理)

4日目午前のセッションでは, 放物型方程式及び楕円型方程式に関する研究成果が報告された. 最終日ではあったが, 参加者の集まりも良く, 講演者と聴衆との間で活発な議論が展開された. 以下, 日本大学の五十嵐威文, 東京都立大学の間庭正明, 早稲田大学の高市恭治, 北海道大学の山内雄介の4氏の講演を振り返る.

まず, 五十嵐威文氏は「反応拡散方程式の時間大域解の存在・非存在について」という題目で講演した. 講演の前半では, Fujita (1966) の結果の拡張について非常に良く整理された結果が報告された. 後半では, その結果をシステムの場合にまで拡張する試みが行われた. システムの場合への拡張については, まだ部分的にしか成功しておらず課題が残っているが, 今後の進展が十分期待できる様子だった. 単純な内容ではないにもかかわらず非常に分かりやすい講演をされたので, 聴衆の反応はとても良かった.

間庭正明氏は, 「Uniqueness and existence of positive solutions for some semilinear elliptic systems」という題目で講演した. 半線型楕円型方程式系の正値解の一意存在について, Dalmasso (2000) による2本のシステムの場合の結果を N 本の場合に拡張した結果が報告された. 非線型項のベキに現れる指数から構成される行列の性質に注目した点が成功の鍵だったようである. 専門外の者にとっては, 今回の結果が Dalmasso の結果の拡張になっていることが分かりづらかったかもしれない. 講演後に, 証明中の評価式について議論がなされた.

高市恭治氏は, 「非有界領域における非線形熱方程式の解の漸近挙動について」という題目で講演した. 同氏により前回の発展方程式若手セミナーにおいて報告された結果の拡張が与えられた. 拡張された点は, 境界条件が斉次ディリクレ条件から第三種境界条件になったことと, 解の範囲も非負値解から符号変化する解まで拡げられたことのようである. 導入, 主結果及びその証明 (phase plane method) の全てにおいて非常に分かりやすい説明をされたので, 聴衆の反応はとても良かった.

最後に, 山内雄介氏が「反応拡散方程式系の初期値問題における爆発解について」という題目で講演した. 考える問題は, 五十嵐氏の講演の後半に登場した問題と似ていたが, 非線型項が少し異なっていた. 解が爆発するための条件に関して, Escobedo-Levine (1995) の結果の拡張が報告された. 非常に精密な結果で, 爆発の条件式には多くの文字が含まれていたが, 良く整理されていた. 講演では, 方程式の形から結論を解釈しようという試みが随所に見られ, 感覚的に理解できた人も多かったのではないかと思う.

反応拡散方程式の時間大域解の存在・非存在について

五十嵐 威文（日本大学大学院理工学研究科数学専攻）

E-mail: igarashi@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

1 反応拡散方程式

次の初期値問題 (IVP) を考える。

$$\text{(IVP)}\begin{cases} u_t - \Delta u = k(x,t)u + h(x,t)u^p & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = a(x) \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^n \end{cases}$$

但し，$k \in C(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$, $k \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $h \in C(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$, $h(x,t) \geq 0$, $a \in C^2(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$, $p > 1$ とする。また，$a(x) \geq 0 \Longrightarrow u(x,t) \geq 0$ である。

反応拡散方程式の時間大域解の存在・非存在は，1966 年に藤田宏先生 [2] によって最初に研究された。それ以来，多くの研究者によって現在まで盛んに研究されている。ここで，(IVP) の時間大域解の存在・非存在に関するこれまでの結果を歴史的に概観し，我々の最近の結果も述べる。

Fujita [2] は，$k(x,t) \equiv 0$，$h(x,t) \equiv 1$ の場合について，次のような結果を得た：

- $p < 1 + \frac{2}{n} \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して，(IVP) は時間大域解をもたない。
- $p > 1 + \frac{2}{n} \Longrightarrow$ 十分に小さな $a(x)$ に対して，(IVP) は時間大域解をもつ。

Hayakawa [3] は，$k(x,t) \equiv 0$，$h(x,t) \equiv 1$ で $n = 1, 2$ の場合について，次のような結果を得た：

- $p = 1 + \frac{2}{n}$ $(p = 2, 3) \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して，(IVP) は時間大域解をもたない。

Kobayashi-Sirao-Tanaka [6] は，$k(x,t) \equiv 0$，$h(x,t) \equiv 1$（一般の n 次元）の場合について，次のような結果を得た：

- $p = 1 + \frac{2}{n} \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して，(IVP) は時間大域解をもたない。

Definition 1 (臨界指数)
次の状況を満たすような定数 p^* を**臨界指数** (critical exponent) という。

- $p < p^* \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して，(IVP) は時間大域解をもたない。
- $p > p^* \Longrightarrow$ 十分に小さな $a(x)$ に対して，(IVP) は時間大域解をもつ。

Definition 1 から，Fujita [2] の臨界指数は，$p^* = 1 + \frac{2}{n}$ ということになる。

ここで，今までに得られた (IVP) の結果を歴史的にまとめると，次のようになる。

1966 Fujita [2] : $k(x,t) \equiv 0$，$h(x,t) \equiv 1 \Longrightarrow p^* = 1 + 2/n$
$p = p^* \Longrightarrow ?$（後に，Hayakawa [3], Kobayashi-Shirao-Tanaka [6] で解決）

1973 Hayakawa [3] : $k(x,t) \equiv 0$, $h(x,t) \equiv 1$ で, $n = 1, 2$ のとき, $p = p^* \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。

1977 Kobayashi-Shirao-Tanaka [6] : $k(x,t) \equiv 0$, $h(x,t) \equiv 1$ で, $p = p^* \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。

1990 Meier [7] : $k(x,t) \equiv 0$, $h(x,t) = h(t)$ 但し, $h(t) \sim t^q$ $(q > -1) \Longrightarrow p^* = 1 + (2+2q)/n$
$p = p^* \Longrightarrow ?$

1997 Pinsky [10] : $k(x,t) \equiv 0$, $h(x,t) = h(x)$ 但し, $h(x) \sim |x|^\sigma$ for large $|x|$ ($n = 1$ ならば $\sigma > -1$, $n \geq 2$ ならば $\sigma > -2$) $\Longrightarrow p^* = 1 + (2+\sigma)/n$
$p = p^* \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。

1998 Qi [11] : $k(x,t) \equiv 0$, $h(x,t) = |x|^\sigma t^q$, $(\sigma > -2,\ q \geq 0) \Longrightarrow p^* = 1 + (2 + \sigma + 2q)/n$
$p = p^* \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。

2001 Zhang [13] : $k(x,t) \equiv k(x)$, $h(x,t) \equiv 1$ 但し, $0 \leq k(x) \leq \delta/(1+|x|^{b_1})$ ($b_1 > 2$, 十分小 $\delta > 0$) または $-a/(1+|x|^{b_1}) \leq k(x) \leq 0$ ($b_1 > 2$, $a > 0$) $\Longrightarrow p^* = 1 + 2/n$
$p = p^* \Longrightarrow ?$

2004 Igarashi [4] : 以下の Theorems が成り立つ :

Theorem 1 (時間大域解の非存在)
$k(x,t) \geq 0$ または $k(x,t) = k(x)$ で $-a/(1+|x|^{b_1}) \leq k(x) \leq 0$ ($b_1 > 2$, $a > 0$) とする。また, $h(x,t) \geq c(t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r$ ($c > 0$, $a_1 > 1$, $q > -1$, $r \in \mathbf{R}$) とする。このとき, 次が成り立つ。

1. $p < 1 + (2+2q)/n \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。
2. $p = 1 + (2+2q)/n$ かつ $r > 0 \Longrightarrow$ 任意の $a(x) \not\equiv 0$ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。

Theorem 2 (時間大域解の存在)
$k(x,t) = k(x)$ で $0 \leq k(x) \leq \delta/(1+|x|^{b_1})$ ($b_1 > 2$, 十分小 $\delta > 0$) または $-a/(1+|x|^{b_1}) \leq k(x) \leq 0$ ($b_1 > 2$, $a > 0$) とする。また, $0 \leq h(x,t) \leq c(t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r$ ($c > 0$, $a_1 > 1$, $q > -1$, $r \in \mathbf{R}$) とする。このとき, 次が成り立つ。

1. $p > 1 + (2+2q)/n \Longrightarrow$ 十分に小さな $a(x)$ に対して, (IVP) は時間大域解をもつ。
2. $p = 1 + (2+2q)/n$ かつ $r < -1 \Longrightarrow$ 十分に小さな $a(x)$ に対して, (IVP) は時間大域解をもつ。

Theorems 1 and 2 から, $h(x,t) \sim (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r \Longrightarrow p^* = 1 + (2+2q)/n$

$$p = p^* \Longrightarrow \begin{cases} r > 0 & \Longrightarrow \text{任意の } a(x) \not\equiv 0 \text{ に対して, (IVP) は時間大域解をもたない。} \\ r < -1 & \Longrightarrow \text{十分に小さな } a(x) \text{ に対して, (IVP) は時間大域解をもつ。} \end{cases}$$

Theorems 1 and 2 の詳しい証明等は, [4] を参照して下さい。

2 反応拡散方程式系

次の初期値問題 (IVPS) を考える。

$$
\text{(IVPS)} \begin{cases} u_t = \Delta u + t^{q_1}|x|^{\sigma_1}v^{p_1}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ v_t = \Delta v + t^{q_2}|x|^{\sigma_2}u^{p_2}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n \end{cases}
$$

但し，$p_1, p_2 \geq 1$, $p_1p_2 > 1$, $q_1, q_2 \geq 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ とする。また，

$$
\alpha_1 = \frac{2(p_1+1)}{p_1p_2-1}, \quad \alpha_2 = \frac{2(p_2+1)}{p_1p_2-1}, \quad \delta_1 = \frac{\sigma_2 p_1 + \sigma_1}{p_1p_2-1}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma_1 p_2 + \sigma_2}{p_1p_2-1},
$$

$$
\beta_1 = \frac{2(q_2p_1+q_1)}{p_1p_2-1}, \quad \beta_2 = \frac{2(q_1p_2+q_2)}{p_1p_2-1}
$$

とおく。

反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在は，1991 年に，$q_1 = q_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ のタイプの方程式に対して，Escobedo-Herrero [1] によって最初に研究された。また，1995 年には，$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ のタイプの方程式に対して，Uda [12] によって研究された。

$a \geq 0$ に対し，次の関数空間を導入する：

$$
\begin{aligned}
I^a &= \left\{\xi \in C(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) < \infty \right\}, \\
I_a &= \left\{\xi \in C(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) > 0 \right\}。
\end{aligned}
$$

また，ノルム $\|\cdot\|_{\infty,a}$ を

$$
\|\xi\|_{\infty,a} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \langle x\rangle^a |\xi(x)|
$$

と定義する。但し，$\langle x\rangle^a = (1+|x|^2)^{a/2}$ である。

これらの関数空間 I^a, I_a を導入したものとしては，1998 年に，$q_1 = q_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ のタイプの方程式に対して，Mochizuki [8] によって研究され，$q_1 = q_2 = 0$, $0 \leq \sigma_1 < n(p_1-1)$, $0 \leq \sigma_2 < n(p_2-1)$ のタイプの方程式に対して，Mochizuki-Huang [9] によって研究された。(IVPS) は Mochizuki [8] や Mochizuki-Huang [9] のタイプの方程式の拡張である。以下の Theorems は [8] や [9] の結果の拡張である。

Theorem 3 (時間局所解の存在)
$(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ とする。このとき，ある $T > 0$ に対して $\mathbf{R}^n \times (0,T)$ において (IVPS) の時間局所解 (u,v) が一意的に存在する。

Theorem 4 (時間大域解の存在)
$\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} < n$ とする。また，$(u_0, v_0) \in I^{a_1} \times I^{a_2}$ とする。このとき，$a_1 > \alpha_1+\delta_1+\beta_1$, $a_2 > \alpha_2+\delta_2+\beta_2$ ならば，十分小さな $\|u_0\|_{\infty,a_1} + \|v_0\|_{\infty,a_2}$ に対して (IVPS) は時間大域解 (u,v) をもつ。

Theorems 3 and 4 は，Mochizuki [8] や Mochizuki-Huang [9] の手法を適用できるよう改良することにより得られる。

また，時間大域解の非存在については Kirane-Qafsaoui [5] の結果から，次のことがいえる：

Remark 1 (時間大域解の非存在)
$\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} \geq n$ とする。このとき，(IVPS) は非自明な時間大域解 (u,v) をもたない。

さらに，$q_1=q_2=0$, $0 \leq \sigma_1 < n(p_1-1), 0 \leq \sigma_2 < n(p_2-1)$ のときに，Mochizuki-Huang [9] によって以下のことが知られている：

Remark 2 (時間大域解の非存在)
$q_1=q_2=0$, $0 \leq \sigma_1 < n(p_1-1), 0 \leq \sigma_2 < n(p_2-1)$ とし，$\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} < n$ とする。また，$u_0 \in I_{a_1}$ または $v_0 \in I_{a_2}$ とする。このとき，$u_0 \in I_{a_1}$ に対して $a_1 < \alpha_1+\delta_1+\beta_1$ または $v_0 \in I_{a_2}$ に対して $a_2 < \alpha_2+\delta_2+\beta_2$ ならば，(IVPS) は時間大域解 (u,v) をもたない。

上記の Mochizuki-Huang [9] の結果で，$q_1=q_2=0$, $0 \leq \sigma_1 < n(p_1-1), 0 \leq \sigma_2 < n(p_2-1)$ という条件を外した場合については，今後の課題の 1 つである。

References

[1] M.Escobedo and M.A.Herrero, Boundness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system, *J. Diff. Eqns.* **89** (1991), 176-202.

[2] H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math.* **16** (1966), 109-124.

[3] K.Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, *Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 503-505.

[4] T.Igarashi, Existence and nonexistence of global solutions for $u_t - \Delta u = k(x,t)u + h(x,t)u^p$ in $\mathbf{R}^n$, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* Vol.14, No.2 (2004).

[5] M. Kirane and M.Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **268** (2002), 217-243.

[6] K.Kobayashi, T.Sirao and H.Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), 407-424.

[7] P.Meier, On the critical exponent for reaction-diffusion equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **109** (1990), 63-71.

[8] K.Mochizuki, Blow-up, life-span and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, *Adv. Math. Appl. Sci.* **48**, World Scientific 1998, 175-198.

[9] K.Mochizuki and Q.Huang, Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, *Methods and Applications of Analysis* **5** (2) 1998, 109-124.

[10] R.G.Pinsky, Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in $\mathbf{R}^n$, *J. Differential Equations* **133** (1997), 152-177.

[11] Y.-W.Qi, The critical exponents of parabolic equations and blow-up in $\mathbf{R}^n$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* **128A** (1998), 123-136.

[12] Y.Uda, The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations, *Z.Angew Math. Phys.* **46** (1995), 366-383.

[13] Qi S.Zhang, The quantizing effect of potentials on the critical number of reaction-diffusion equations, *J. Diff. Eq.* **170** (2001), 188-214.

Uniqueness and existence of positive solutions for some semilinear elliptic systems

間庭正明　(東京都立大学大学院 D5)

1 Introduction

今回では、次のような半線形楕円型方程式系に対する、正値解の一意性・存在の結果を報告する。

$$
(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u_i = \displaystyle\prod_{j=1}^{N} u_j^{p_{ij}} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u_i = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \end{cases}
$$

但し、指数 p_{ij} は非負定数、$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ は $C^{2,\alpha}$ 級 $(\alpha \in (0,1))$ の有界領域とする。
$N = 2$ の場合に対しては、すでに多く研究されている。Dalmasso [D] は
$N = 2,\ p_{11} = p_{22} = 0,\ 0 < p_{12}p_{21} < 1$ (Sublinear Case) に対し、正値解の一意性・存在を示した。$p_{12},\ p_{21} > 1$ (Superlinear case) の場合では、Zou [Z] が空間次元 $n = 3$ に対し正値解の存在のみ、また、Peletier & Van der Vorst [PV] は、$n \geq 4,\ \Omega = B_R$ でさらに

$$
p_{12} \geq 1, p_{21} \geq 1,\ \frac{1}{p_{12}+1} + \frac{1}{1+p_{21}} > \frac{n-2}{n}
$$

の条件の下で、球対称 $(u(x) = u(|x|))$ な正値解の一意性・存在を示している。
今回では $N = 2$ の場合での正値解の一意性・存在の結果を N 本のシステムに拡張することが目標である。証明の手法は Dalmasso [D] の方法に基づいているが、今回の方法では M-matrix と呼ばれる行列の概念を新たに用い、特に一意性では Dalmasso の方法よりも簡略化されている。
以下、行列に関する 2 つの定義を述べる。

定義 1. I を単位行列とする。行列 A が、

$$A = cI - B,\ c > 0,\ B \geq 0,\ c \geq \rho(B)$$

の形式で表現されるとき、実 $N \times N$ 行列 A は ***M-matrix*** と呼ばれる。但し、$B \geq 0$ とは各成分が非負のことをいい、$\rho(B)$ は B のスペクトル半径（*i.e.* B の固有値の絶対値の最大値）で、さらに $c > \rho(B)$ ならば A は ***nonsingular M-matrix*** と呼ばれる。

定義 2. C, E を正方行列として、

$$\text{ある置換行列 } Q \text{ に対し、} QAQ^t = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

をみたすとき、実 $N \times N$ 行列 A, $(N \geq 2)$ は ***reducible matrix***（可約行列）と呼ばれる。そうでない行列は ***irreducible matrix***（既約行列）と呼ばれる。

P を $N \times N$ 非負正方行列 (p_{ij}) $(1 \leq i, j \leq N)$ とする。ここでは P は **irreducible**
(既約) であるとする。なぜならば、P が可約であれば、(1) は 2 つの既約な sub-system に分解できるからである。
以上のような行列の概念を用いて、次の主結果を得ることができた。

定理 1. 実行列 $I - P$ は ***nonsingular irreducible M-matrix*** であるとする。このとき、*(1)* はただ一つの正値解 $u_i \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(i = 1, \cdots, N)$ をもつ。

注意 1. *Li, Liu, Xie (2003)* では、対応する半線型放物型方程式系に対し、定理 *1* と同じ仮定の下で時間大域的かつ有界な解の存在が示されているが、定常解に関してはこれまで議論されていない。

注意 2.

$$(1)' \begin{cases} -\Delta u_i(x) = K_i(x) \displaystyle\prod_{j=1}^{N} u_j(x)^{p_{ij}} \quad in \ \ \Omega, \\ u_i = 0 \quad on \ \ \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \end{cases}$$

但し、$K_i(x) \geq 0,\ K_i(x) \not\equiv 0$, かつ、ある $\alpha > 0$ に対し、$K_i \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

また、*nonlocal type* と呼ばれるシステム

$$(1)'' \begin{cases} -\Delta u_i(x) = \displaystyle\int_{\Omega} \prod_{j=1}^{N} u_j(x)^{p_{ij}} dx \quad in \ \ \Omega, \\ u_i = 0 \quad on \ \ \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \end{cases}$$

のいずれの場合も、定理 *1* と同じ仮定の下で正値解の一意性・存在を示すことができる。

2　定理 1 の証明

定理 1 の証明を与える前に、2 つの補題を準備する。
$v \in C(\bar{\Omega})$ に対し、w を次で定義する。

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x, y) v(y) dy, \ x \in \bar{\Omega}.$$

但し、$G(x, y)$ は Ω 上の $-\Delta$ のグリーン関数。
w に関し、次のような基本的な評価を得る。

補題 1. $v \in C(\bar{\Omega})$ に対し、$w \in C^1(\bar{\Omega})$.　また、ある $C' > 0$ があって、

$$\|w\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq C' \|v\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

補題 1 の証明は、例えば [GT, Chapter 4] を参照。

補題 2. $n=1$ なら $v \in C(\bar{\Omega})$, $n \geq 2$ なら $v \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$ $(\beta \in (0,1))$ とする。

(i) w は $-\Delta w = v$ *in* Ω, $w = 0$ *on* $\partial\Omega$ の唯一つの解であり、ある $C' > 0$ が存在して、

$$\|w\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C'\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \ (n=1),$$
$$\|w\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C'\|v\|_{C^{\beta}(\bar{\Omega})} \ (n \geq 2).$$

(ii) $v \geq 0$ かつ $v \not\equiv 0$ なら、ある $C > 0$ が存在して、

$$w(x) \geq Cd(x, \partial\Omega) \ \textit{for} \ x \in \bar{\Omega}.$$

(i) は [GT, Chapter 6] を、(ii) は [D, Lemma 1] を参照。

$\psi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ を、

$$-\Delta\psi = 1 \text{ in } \Omega, \ \psi = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

をみたす torsion function とする。このとき補題 2 により、ある $C_0 > 0$ が存在して、

$$\|\psi\|_{\infty} \leq C_0. \tag{2}$$

次に、補題 1 と補題 2 を用いて定理 1 を証明する。

存在の証明:　まず、補題 1,2 により、$u_i \in C(\bar{\Omega})$ が

$$u_i(x) = \int_{\Omega} G(x,y) \prod_{j=1}^{N} u_j^{p_{ij}}(y)dy \ (i = 1, \cdots, N)$$

をみたすとき、$u_i \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ が (1) の解であることに注意する。
$\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ を、$\phi \not\equiv 0$, $0 \leq \phi \leq 1$ をみたすものとする。

$$m = \min_{z \in supp\phi} d(z, \partial\Omega)$$

とし、写像 T と集合 Z を次で定義する。

$$[T(u_1, \cdots, u_N)]_i = \int_{\Omega} G(x,y) \prod_{j=1}^{N} u_j^{p_{ij}}(y)dy,$$

$$
\begin{aligned}
Z = \{(u_1, \cdots, u_N) \in (C(\bar{\Omega}))^N \ ; \\
a_1 d(x, \partial\Omega) \le u_1(x) \le b_1 \\
, \cdots, a_N d(x, \partial\Omega) \le u_N(x) \le b_N\},
\end{aligned}
$$

但し、$[T(u_1, \cdots, u_N)]_i$ は $T(u_1, \cdots, u_N)$ の第 i 成分、a_j, b_j $(j = 1, \cdots, N)$ は後に定められる正定数。このとき、Z はバナッハ空間 $X = (C(\bar{\Omega}))^N$ の有界閉凸部分集合。補題2より、ある $C_1 > 0$ が存在して、

$$\int_\Omega G(x, y)\phi(y)dy \ge C_1 d(x, \partial\Omega), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

$(u_1, \cdots, u_N) \in Z$ とする。T の定義と上の不等式から、

$$
\begin{aligned}
[T(u_1, \cdots, u_N)]_i &= \int_\Omega G(x, y) \prod_{j=1}^N u_j^{p_{ij}}(y)dy \\
&\ge \int_\Omega G(x, y) \prod_{j=1}^N u_j^{p_{ij}}(y)\phi(y)dy \\
&\ge C_1 \prod_{j=1}^N (a_j m)^{p_{ij}} d(x, \partial\Omega) \\
&= C_2 \prod_{j=1}^N a_j^{p_{ij}} d(x, \partial\Omega),
\end{aligned}
$$

但し、$C_2 = C_1 \prod_{j=1}^N m^{p_{ij}}$. 他方、(2) より

$$[T(u_1, \cdots, u_N)]_i \le C_0 \prod_{j=1}^N b_j^{p_{ij}}.$$

Claim. 次のように a_i を十分小、b_i を十分大に取ることができる。

$$
\begin{cases}
a_i \le C_2 \displaystyle\prod_{j=1}^N a_j^{p_{ij}}, \\
b_i \ge C_0 \displaystyle\prod_{j=1}^N b_j^{p_{ij}}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Claimの証明: $I-P$: nonsingular irreducible M-matrix より、$(I-P)^{-1}$ は非負かつ既約となる。これより、Perron-Frobeniusの定理を用いると、ある正のベクトル
$\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_N)$, $v_j>0$が存在して、

$$(I-P)^{-1}\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{v}, \tag{4}$$

但し、$\lambda_1=\rho((I-P)^{-1})>0$.
$a_j=\varepsilon^{v_j}$, $b_j=L^{v_j}$ とおくと、(4) より、

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N} a_j^{\delta_{ij}-p_{ij}} &= \varepsilon^{\sum_{j=1}^{N}(\delta_{ij}-p_{ij})v_j}\\ &= \varepsilon^{\lambda_1{}^{-1}v_i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N} b_j^{\delta_{ij}-p_{ij}} &= L^{\sum_{j=1}^{N}(\delta_{ij}-p_{ij})v_j}\\ &= L^{\lambda_1{}^{-1}v_i}.\end{aligned}$$

を得る。εを十文小、Lを十分大にとると、
$\varepsilon^{\lambda_1{}^{-1}v_i}\le C_2$, $L^{\lambda_1{}^{-1}v_i}\ge C_0$ $(\forall i=1,\cdots,N)$
となり、Claimの証明が完結する。□
a_j,b_j $(j=1,\cdots,N)$が(3)を満たすように選ぶ。このとき、任意の$(u_1,\cdots,u_N)\in Z$に対し、$T(u_1,\cdots,u_N)\in Z$が成り立つ。$T:Z\to Z$はコンパクト写像となることから、Schauderの不動点定理より、ある$(u_1,\cdots,u_N)\in Z$が存在して、

$$T(u_1,\cdots,u_N)=(u_1,\cdots,u_N).$$

となり、存在の証明が完了する。□

一意性の証明: $(u_1^j,\cdots,u_N^j)$ $(j=1,2)$ を(1)の2つの正値解とする。Hopfの補題より、$\tau>0$を

$$u_i^1\ge\tau u_i^2 \text{ in } \bar{\Omega}$$

となるように取れる。以下、次を示す。

$$u_i^1\ge\tau^{a_{ik}}u_i^2 \text{ for any } k\ge 1. \tag{5}$$

但し、$\{a_{jk}\}_{j=1}^{N}$は次のように帰納的に定義される。

$$
\begin{pmatrix} a_{1(k+1)} \\ \vdots \\ a_{N(k+1)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{Nk} \end{pmatrix},
$$

$$
a_{11} = \cdots = a_{N1} = 1.
$$

$k=1$ に対しては、(5) の成立は明らか。ある $k(\geq 1)$ に対し、(5) の成立を仮定する。このとき

$$
\begin{aligned}
u_i^1(x) &= \int_\Omega G(x,y)\prod_{j=1}^{N}(u_j^1(y))^{p_{ij}}dy \\
&\geq \tau^{\sum_{j=1}^{N} a_{jk}p_{ij}} \int_\Omega G(x,y)(u_j^2(y))^{p_{ij}}dy \\
&= \tau^{a_{i(k+1)}} u_i^2(x).
\end{aligned}
$$

これより帰納法によって、任意の $k \geq 1$ に対し (5) が示された。
$I-P$ は nonsingular M-matrix より、$\rho(P) < 1$. これより $P^k \to O$ as $k \to \infty$ を得る。よって、$a_{ik} \to 0$ as $k \to \infty$ $(\forall i \in \mathbb{N})$ となり、

$$
u_i^1 \geq u_i^2 \text{ in } \bar{\Omega}
$$

を得る。同様の議論から、$u_i^2 \geq u_i^1$ が得られ、一意性の証明が完結する。 □

参考文献

[D] R. Dalmasso, Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems, Nonlinear Anal., **39** (2000), 559-568.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag 1977, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 224.

[LLX] Y. Li, Q. Liu, and C. Xie, Semilinear reaction-diffusion systems of several components, J. Differential Equations, **187** (2003), 510-519.

[PV] L.A. Peletier and R.C.A.M. van der Vorst, Existence and non-existence of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation, Diff. Int. Eqns., **5** (1992), 747-767.

[Z] H. Zou, A priori estimates for a semilinear elliptic system without variational structure and their applications, Math. Ann., **323** (2002), 713-735.

非有界領域における半線形熱方程式の解の漸近挙動について

K.Takaichi[a]

[a]Graduate School of science and Engineering, Waseda University, 3-4-1, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-8555 Japan

We consider the initial-boundary value problem of some semilinear parabolic equations with superlinear and subcritical nonlinear terms. In this paper, we consider global solutions, which could be sign-changing, and estimate the dependence of upper bounds of global solutions on some norm of the initial data. Furthermore, we allow (possibly unbounded) general domain with boundary.

1. INTRODUCTION

In this note, we consider the following initial-boundary value problem of the following semi-linear heat equations.

$$
(\mathbf{P})\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;-\; \Delta u(x,t) \;=\; f(x,u(x,t)), & (x,t)\in\Omega\times[0,\infty) \\
u(x,0) \;=\; u_0(x), & x\in\Omega \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) \;+\; \sigma u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\infty),\ \sigma>0.
\end{cases}
$$

Here Ω is a general domain, which could be unbounded, with uniformly $C^{2,\alpha}$-class smooth boundary $\partial\Omega$.
The nonlinearity to be considered here is given as follows:

$$
(f)\begin{cases}
\text{f}(\cdot,\cdot)\text{ is a continuous function from }\Omega\times\mathbb{R}^1\text{ into }\mathbb{R}^1\text{ and there exist} \\
\text{constants }K_i(i=0,1,2)\text{ and numbers }p\in(2,2^*),\ \delta>0\text{ and }\epsilon>0 \\
\text{such that} \\
\text{(i) } |f(x,u)|\le K_0(|u|+|u|^{p-1}),\quad \forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^1, \\
\text{(ii) } \int_0^u f(x,t)dt\ge K_1\,|u|^{2+\delta}-K_2,\quad \forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^1, \\
\text{(iii) } uf(x,u)\ge(2+\varepsilon)\int_0^u f(x,t)dt,\ \forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^1,
\end{cases}
$$

where 2^* is the Sobolev's critical exponent given by ∞ for the cases $N=1$ or 2, and $2N/(N-2)$ for the cases $N\ge3$.
The initial data u_0 is always taken from $L^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ and is not necessarily assumed to be of definite sign.
We here recall that standard argument assures the existence of unique local solution. We denote by T_m the "maximal existence time" of the solution.

Then the first possible case is that T_m is finite, that is to say, T_m gives the blow up time of the solution. It is well known that the L^∞-norm of solution tends to infinity as t approaches the blow up time T_m.
Concerning this case, there are many studies on the blow up rate as well as the profile of blow up solutions.
The other case is that T_m is equal to infinity, in other words, the solution can be continued globally.
For example, if Ω is bounded and the initial data is taken small enough, then the problem admits a global solution.
Our main interest here is the asymptotic behavior of global solutions. More precisely, the problem admits a growing up solution or not? Here by the growing up solution, we mean a global solution whose norm (say L^∞-norm) tend to infinity as t goes to infinity. For this question, the anser is no and so we can show the boundedness of solution.
Futheremore we may ask how is the dependence of the bound on the initial data. For this question, under additional assumptions, the answer is yes and the supremun of the norm of solution is some constant which depends on the norm of the initial data.
The boundedness of global solution was first reported by M.Otani[1] in 1980. He proved the H_0^1-norm boundedness of global solutions for superlinear and subcritical power nonlinearity.
Ni-sacks-Tavantzis[2] obtained the L^∞-norm boundedness, but they assumed that the solution is positive, the domain is convex and the power nonlinearity should be strictly less than $2 + 2/N$.
Cazenave-Lions[3] also derived the L^∞-norm boundedness for a fairly general nonlinearity of subcritical growth order.
As for the bound dependence on the initial data. Cazenave-Lions[3] also showed that the bound depends only on the L^∞ norm of initial data, if the growth order p is strictly less than 2_*, which is given such that $2_* = \infty$ for $N = 1$; $2_* = 2 + 12/(3N - 4)$ for $N \geq 2$, (2_* is always less than 2^*).
Giga[4] excluded this restriction up to the subcritical case for positive solutions, and Quittner[5] extended Giga's result also for sign- changing solutions.
The results quoted above are all concerned with bounded domains and homogeneous Dirichlet boundary conditions.
Recently Otani and T[6] excluded the boundedness condition on domains for nonnegative solutions.
The main purpose of this note is to discuss another type of boundary condition in general domains.

2. MAIN RESULTS

Our main results are stated as follows.
Theorem I Let (f) be satisfied and u be a global solution of (P) such that $u \in V \equiv W_{loc}^{1,2}([0,\infty); L^2(\Omega)) \bigcap L_{loc}^2([0,\infty); H^2(\Omega))$. Then there exists a positive constant $C_0 = C_0(|u_0|_{H^1}, K_0, K_1, K_2, \delta, \varepsilon)$ such that

$$(1) \quad \sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^2} \leq C_0,$$

(2) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{H^1} < +\infty$,

(3) There exists a number T_1 such that $\sup_{t\geq T_1} |u(t)|_{H^1} \leq C_0$,

(4) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{H^1} \leq C_0$, provided that $p \in (2, 2_*)$,
where $2_* = \infty$ for $N = 1$ and $2_* = 2 + 12/(3N-4)$ for $N \geq 2$.

Theorem II Let (f) be satisfied and u be a global solution of (P) such that $u \in L^\infty_{loc}([0,\infty); L^\infty(\Omega)) \bigcap W^{1,2}_{loc}((0,\infty); L^2(\Omega)) \bigcap L^2_{loc}((0,\infty); H^2(\Omega))$. Then there exists a positive constant $C_1 = C_1(|u_0|_{L^2}, |u_0|_{L^\infty}, K_0, K_1, K_2, \delta, \varepsilon)$ such that

(5) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^\infty} < +\infty$,

(6) There exists a number T_1 such that $\sup_{t\geq T_1} |u(t)|_{L^\infty} \leq C_1$,

(7) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^\infty} \leq C_1$, provided that $p \in (2, 2_*)$.

3. ENERGY IDENTITY AND INEQUALITY

Our basic tools here are energy estimates and the phase plane argument. We first prepare one energy identity and another energy inequality. The first one is derived from the multiplication of the equation by u_t.

$$\int_\Omega u_t^2 dx - \int_\Omega \Delta u \cdot u_t = \int_\Omega f(x,u) \cdot u_t dx$$

As for the second term of the left-hand side, we apply the integration by parts to get two integrations on the boundary $\partial\Omega$ and in Ω.

$$\int_\Omega \Delta u \cdot u_t dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_t d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t$$

On the boundary $\partial\Omega$, by virtue of the boundary condition, $\partial u/\partial n$ can be replaced by -σ·u,

$$= \int_{\partial\Omega} -\sigma \cdot u_t - \int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla u)_t dx$$

Then, it is clear that these two terms can be expressed as the time-derivative of the functional given by,

$$= -\frac{d}{dt}\{\frac{\sigma}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\}$$

Using this positive definite functional $(\frac{\sigma}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)$ denoted by $A(u)$ and the primitive function $F(\cdot)$ of f(x,t) evaluated at u(x), we get

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t^2 dx &= -\frac{d}{dt}\{\frac{\sigma}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,t) dt dx\} \\ &= -\frac{d}{dt}\{A(u(t)) - F(u(t))\} \end{aligned}$$

Thus, by putting $J(u) = A(u) - F(u)$, we obtain the energy identity:

$$(8) \quad \frac{d}{dt}J(u) = -\int_{\Omega} u_t^2 dx$$

In particular, this identity implies that $J(u(t))$ is monotone decreasing in time t and this imformation plays an essential role in the following arguments.

To get the second energy inequality, we multiply the equation by u.

$$\int_{\Omega} u_t \cdot udx - \int_{\Omega} \Delta u \cdot udx = \int_{\Omega} f(x,u) \cdot udx$$

Then, again by the integration by parts, we get the identity (here and henceforth we denote the L^2-norm by $\|\cdot\|$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &= \int_{\partial\Omega} -\sigma u \cdot u - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla udx + \int_{\Omega} f(x,u) \cdot udx \\
&= -\|\nabla u\|^2 - \sigma\|u\|^2 + \int_{\Omega} f(x,u) \cdot udx \\
&= -2A(u(t)) + \int_{\Omega} f(x,u) \cdot udx
\end{aligned}$$

Moreover, by using the third condition of the structure condition of f,

$$\geq (2+\varepsilon)F(u(t)) - 2A(u(t))$$

$$(9) \qquad \equiv j(u(t))$$

4. PHASE PLANE

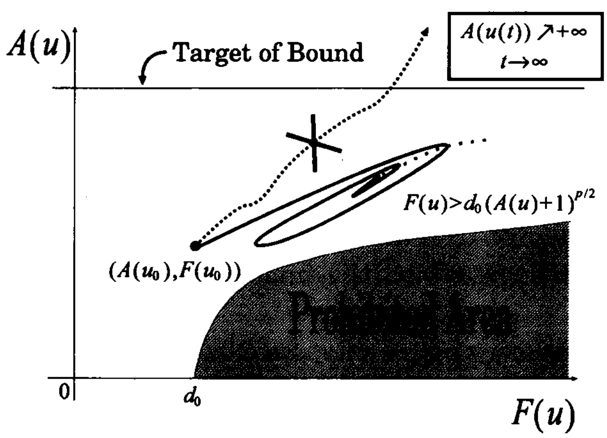


Figure 1.

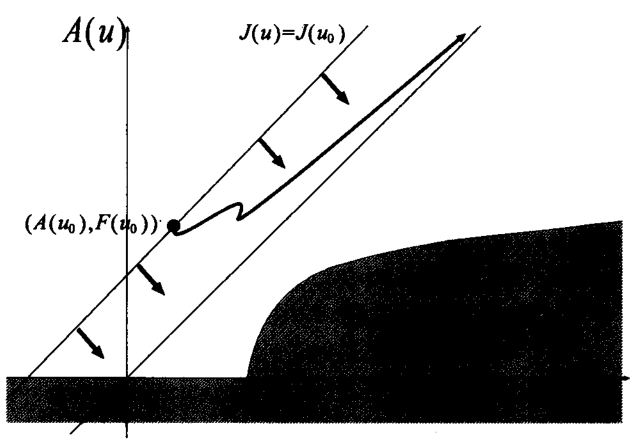


Figure 2.

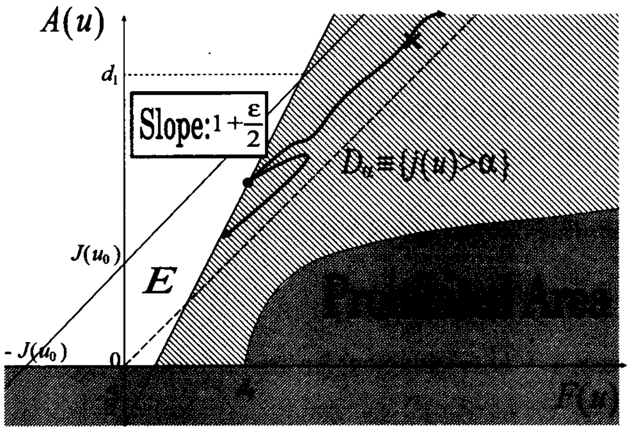


Figure 3.

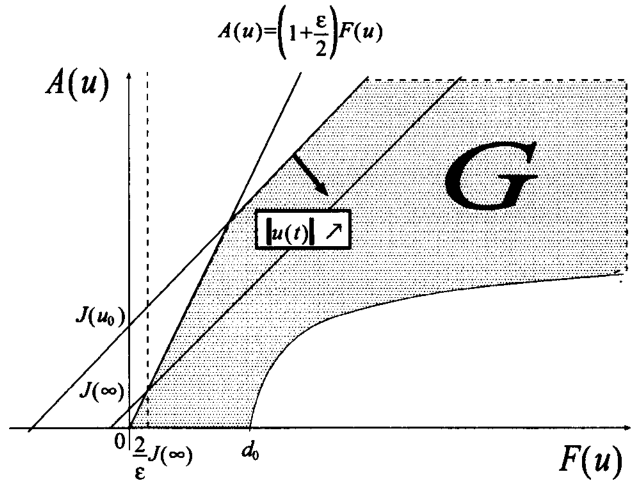


Figure 4.

We here introduce the phase-plane where we work. The vertical axis designates A(u), which is defined by $\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\sigma\|u\|^2_{L^2(\partial\omega)}$. The horizontal axis designates F(u), which is defined by $\int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,t)dtdx$. By the subcriticality of nonlinear term f and Sobolev's embedding theorem, F(u) is bounded by $d_0(A(u)+1)^{p/2}$, where d_0 depends only on k_0 and p. In fact, we have

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,t)dtdx \le \int_\Omega \int_0^{|u(x)|} |f(x,t)|dtdx \le \int_\Omega \int_0^{|u(x)|} K_0(|t| + |t|^{p-1})dtdx \\ &= K_0 \int_\Omega (\frac{1}{2}|u(x)|^2 + \frac{1}{p}|u(x)|^p)dx = \frac{K_0}{2}\|u\|^2 + \frac{K_0}{p}\|u(x)\|_p^p \\ &\le \frac{K_0}{2}\|u\|^2 + \frac{K_0}{p}(\|u\| + \|\nabla u\|)^p \le d_0'(\|u\| + \|\nabla u\| + 1)^p \le d_0(A(u)+1)^{p/2}. \end{aligned}$$

Therefore, there is no element of H_0^1 in the dotted region in Fig. 1, which we call "prohibited area". Thus the initial data should be located outside of this region and the orbit of any sulotion can not enter into this prohibited area. If the orbit of solution grows up in such way along the dotted curve, A(u) may go to infinity.
On the other hand, if we can show that the orbit stays on the bounded curve, we can obtain the a proiri bound for A(u(t)).

In order to analyze the trajectory of the solution, we first introduce $J(u)$-line. By the definition of the energy functional $J(u) = A(u) - F(u)$, the slope of $J(u)$-line is one. Furtheremore, the first energy identity (8) tells us that J(u) is monotone decreasing. Therefore, if the initial data is located on the $J(u_0)$-line, the orbit of the corresponding solution should be confined below the $J(u_0)$-line. However, there still exists a possibility that A(u) may grow up if the orbit goes far away along the curve drawn in Fig.2.
In order to exclude this possibility, we need the additional arguments. To this end, we introduce a new region D_α characterized by the value of $j(u)$ as follows.

Our new shaded region D_α is defined as the area where $j(u) > \alpha$.(Fig.3)

It is clear that if u stays outside of D_α, say in E, then A(u) is bounded.
Furthermore, in the following arguments, we are going to show that u can not stay in the region D_α long enough to grow up to infinity.

5. KEY LEMMA

First of all, we derive the boundedness of the L^2-norm of solutions. To do this, we rely on the argument due to Phillip Souplet[7].

Lemma

Let $p > 1$ and u(x,t) be a global solution of this problem. Then for any positive number ε', there exists a large enough time t_1 such that

$$F(u(t_1)) \leq \frac{2}{\epsilon} J(\infty) + \varepsilon'$$

(Sketch of Proof)

Set $\int_\Omega u^2(t)dx = f(t)$, then

$$\frac{f(t) - f(s)}{2} = \int_s^t \int_\Omega u \cdot u_t dx dt$$

By the Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_s^t \int_\Omega u_t^2\right)^{1/2} \left(\int_1^t u^2\right)^{1/2} \\ &\leq (J(u(s)) - J(\infty))^{1/2} \left(\int_1^t f(s)ds\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Here, by Levine's result[8], it is known that $J(u)$ is bounded below and $J(u(t))$ converges to $J(\infty)$. Hence it is easy to see that $f(t)$ should behave as small order of t as t tends to ∞. Multiplying the equation by u and integrating on Ω, we get

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \geq \varepsilon F(u) - 2J(u),$$

Then

$$\frac{1}{2}(\|u(T+1)\|^2 - \|u(1)\|^2) \geq \varepsilon \int_1^{T+1} F(u)dt$$

Therefore,

$$\frac{1}{T}\int_1^{T+1} F(u)dt \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{f(T+1) - f(1)}{2T} + \frac{2}{T}\int_1^{T+1} J(u)dt\right)$$

Hence, for any $\varepsilon' > 0$ we can find a large enough time t_1, such that

$$F(u(t_1)) \leq \frac{2}{\varepsilon} J(\infty) + \varepsilon' \qquad Q.E.D.$$

Since, in the region G(Fig.4), the L^2-norm of u is increasing, and this lemma says that u comes back around $J(u) = \frac{2}{\varepsilon} J(\infty)$ line at the time $t = t_1$, we can conclude that the L^2-norm of u should be bounded.

6. H^1 BOUND

Next, we are going to show that the growth rate of $A(u)$ can be controlled for a short time. To see this, we multiply the equation by $-\Delta u$, then we get

$$\frac{d}{dt}A(u(t)) + \|\Delta u(t)\|^2 \le C \cdot \|F(u)\|| \cdot \|\Delta u\|$$

Here, by virtue of the subcritical growth condition on f, we can obtain

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + M(A(u)),$$

where $M(\cdot)$ is a monotone increasing function. Plugging this estimate to the previous inequality, we get

$$\frac{d}{dt}A(u(t)) \le C \cdot M(A(u(t)))$$

Hence, it is rather easy to show that by putting $T(r) = 1/2M(r+1)$, we see

$$(10) \quad A(u(t)) \le A(u(t_0)) + 1 \qquad \text{for all} t \in [t_0, t_0 + T(A(u(t_0)))]$$

We here claim that
Solution u(t) cannot stay in Region D_α longer than $T(d_1)$.
(Sketch of Proof)
By the definition of $D_\alpha = \{A(u) < (1+\frac{\epsilon}{2})F(u) - \alpha\}$, we can easily find that if the solution remains in the domain D_α during $[t_0, t_1]$, then $j(u) > \alpha$ holds for all $t \in [t_0, t_1]$. Integrating the both side from t_0 to t_1, we get

$$\alpha(t_1 - t_0) \le \int_{t_0}^{t_1} j(u(t))dt$$

By the energy inequality (9),

$$\le \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 dt \quad \le \int_{t_0}^{t_1} \|u_t(t)\| \cdot \|u(t)\| dt$$

Using the L^2-bound of the solution, we have

$$\le K_4(t_1 - t_0)^{1/2}(\int_{T_0}^{\infty} \|u_t(t)\|^2)^{1/2}, \quad \forall t_1 > t_0 \ge T_0$$

On the other hand, there exists T_0 such that

$$(t_1 - t_0) \le K_4^2 \int_{T_0}^{\infty} \|u_t(t)\|^2 dt \le T(d_1)$$

Hence by virtue of (10), we obtain

$$A(u(t)) \le d_1 + 1 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Thus a priori bound for $A(u(t))$ is derived.
Now the rest part of Theorem I and Theorem II can be proved by the same arguments in Ôtani[9].

REFERENCES

1. Ôtani, M.: *Existence and asymtotic stability of strong sllution of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai,*,**30**, Qualitative theory of differentail equations, North Holland, 1980.795-809.
2. Ni, W.M, Sacks, P.E., and Tavantzis J.: *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equation of parabolic type*, J. Differ. Equations **54**(1984), 97-120.
3. Cazenave, T. and Lions, P.L.: *Solutions glolales d'équations de la chaleur semi linéaires*, ibid., **9**(1984), 955-978.
4. Giga, Y.: *A bound for global solutions of semilinear heat equations* , Comm.Math.Phys.,**103**(1986), 415-421.
5. Quittner, P.: *A priori bound for global solutions of a semilinear parabolic problem*, Acta Math.Univ.Comenianae,**30**(1999). 195-203.
6. Ôtani,M. and Takaichi,K.: *Upper Bounds of Global Solutions for Some Semilinear Parabolic Equations*, preprint.
7. Souplet, P.: *On the asymptotics of global solutions for a semi-linear heat equation in unbounded domains*, C.R.Acad.Sci.Paris,**323**(1996).877-882.
8. Levine, H.A., *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch.Rational Mech. Anal.**51**(1973), 371-386.
9. Ôtani, M.: *Bounds for global solutions of some semilinear parabolic equations*,SūrikaisekikenkyūshoKōkyūroku.**698**(1989), 36-50.

反応拡散方程式系の初期値問題における爆発解について

北海道大学大学院理学研究科　山内　雄介

1 導入

以下の反応拡散方程式系の非負解の非存在条件について考える.

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = |x|^{\sigma_1} u^{p_1} v^{q_1}, && x \in \boldsymbol{R}^N,\ t > 0, && (1.1)\\
&v_t - \Delta v = |x|^{\sigma_2} u^{p_2} v^{q_2}, && x \in \boldsymbol{R}^N,\ t > 0, && (1.2)\\
&u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, && x \in \boldsymbol{R}^N, &&\\
&v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, && x \in \boldsymbol{R}^N. &&
\end{aligned}
$$

ただし p_j, $q_j \geq 0$, $\sigma_j \geq 0$ $(j = 1, 2)$, u_0, $v_0 \in L^\infty(\boldsymbol{R}^N)$.

本研究では、初期値問題 (1.1)-(1.2) の非負解が有限時間で爆発するための条件を考える. 非線型項が u^p, $u^{p_j} v^{q_j}$ や, $|x|^{\sigma_j} u^{p_j}$ のタイプの方程式系については Escobedo-Herrero [2], Escobedo-Levine [3], Mochizuki-Huang [4] でそれぞれ結果が示されているが, (1.1)-(1.2) はそれらの拡張となっている. 特に Escobedo-Levine [3] においては, p_1, q_2 がそれぞれ 1 を境にして爆発の条件式が大きく異なるという結果が示されている. その性質を (1.1)-(1.2) も有していることが今回得られた. 一方, Aoyagi-Tsutaya [1] においては, 条件 $p_j, q_j > 1$ $(j = 1, 2)$ のもとで (1.1)-(1.2) の時間大域解の存在条件が示されている.

2 主結果

指数 (α, β) を次で定義する.

$$
\alpha = \frac{q_1(\sigma_2 + 2) + (1 - q_2)(\sigma_1 + 2)}{2\{p_2 q_1 - (1 - p_1)(1 - q_2)\}}, \quad \beta = \frac{p_2(\sigma_1 + 2) + (1 - p_1)(\sigma_2 + 2)}{2\{p_2 q_1 - (1 - p_1)(1 - q_2)\}}.
$$

また, $a > 0$ に対し,

$$
I_a = \{w \in BC(\boldsymbol{R}^N); w(x) \geq 0,\ \liminf_{|x| \to \infty} |x|^a w(x) > 0\},
$$

と定義する.

主定理は以下の通りである.

Theorem 1. *Let* $p_1 < 1$, $q_2 < 1$ *and* $p_2q_1 - (1-p_1)(1-q_2) > 0$.
(i) *If* $\max(\alpha, \beta) \geq N/2$, *then the nontrivial global solution does not exist.*
(ii) *If* $u_0 \in I_a$ $(a < 2\alpha)$ *or* $v_0 \in I_b$ $(b < 2\beta)$, *then the global solution does not exist.*
(iii) *Assume that* $u_0(x) \geq C\exp(-\nu|x|^2)$. *For any* $\nu > 0$, *there exists large* $C > 0$ *such that the global solution does not exist.*

Theorem 2. *Let* $p_1 > 1$, $q_2 < 1$.
(i) *If* $\alpha \geq N/2$ *or* $p_1 + q_1 \leq 1 + (2+\sigma_1)/N$, *then the nontrivial global solution does not exist.*
(ii) *If* $u_0 \in I_a$ $(a < \max((\sigma_1 + 2 - Nq_1)/(p_1 - 1),$
$-\{q_1(\sigma_2+2) + (1-q_2)(\sigma_1+2) - p_2q_1N\}/\{(1-p_1)(1-q_1)\})$, *then the global solution does not exist.*
(iii) *Assume that* $u_0(x) \geq C\exp(-\nu|x|^2)$. *For any* $\nu > 0$, *there exists large* $C > 0$ *such that the global solution does not exist.*

Theorem 3. *Let* $p_1 > 1$, $q_2 > 1$.
(i) *If* $p_1 + q_1 \leq 1 + (2+\sigma_1)/N$ *or* $p_2 + q_2 \leq 1 + (2+\sigma_2)/N$, *then the nontrivial global solution does not exist.*
(ii) *If* $u_0 \in I_a$ $(a < (\sigma_1 + 2 - Nq_1)/(p_1 - 1))$ *or* $v_0 \in I_b$ $(b < (\sigma_2 + 2 - Np_2)/(q_2 - 1))$, *then the global solution does not exist.*
(iii) *Assume that* $u_0(x) \geq C\exp(-\nu|x|^2)$. *For any* $\nu > 0$, *there exists large* $C > 0$ *such that the global solution does not exist.*

また, 主定理を Escobedo-Levine type [3] に書きかえると次のようになる.

Corollary 1. *Assume that*

$$\frac{p_1 + q_1 - 1}{\sigma_1 + 2} \leq \frac{p_2 + q_2 - 1}{\sigma_2 + 2}, \tag{2.1}$$

and let $p_1 < 1$, $q_2 \neq 1$.
(i) *If* $\max(\alpha, \beta) \geq N/2$, *then no nontrivial global solution exists.*
(ii) *If* $0 < \max(\alpha, \beta) < N/2$, *then the global solution does not exist for large data.*

Corollary 2. *Assume* (2.1), *and let* $p_1 > 1$, $q_2 \neq 1$.
(i) *If* $p_1 + q_1 \leq 1 + (2 + \sigma_1)/N$, *then no nontrivial global solution exists.*
(ii) *If* $p_1 + q_1 > 1 + (2 + \sigma_1)/N$, *then the global solution does not exist for large data.*

なお, 以下には Theorem 1 の証明の概略を示す.

3 証明の準備

証明の前に, いくつかの補題を準備する. これらを示すためには, (1.1) と (1.2) に付随する以下の積分方程式系を用いる.

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)|\cdot|^{\sigma_1} u(s)^{p_1} v(s)^{q_1} ds,$$
$$v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)|\cdot|^{\sigma_2} u(s)^{p_2} v(s)^{q_2} ds.$$

ただし,

$$S(t)f(x) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\boldsymbol{R}_N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) dy.$$

Lemma 3.1. 正定数 $C > 0$ が存在し次を満たす.

$$u(x,t) \geq C(1+t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \qquad (t > 0), \qquad (3.1)$$
$$v(x,t) \geq C(1+t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right). \qquad (t > 0). \qquad (3.2)$$

次に, 臨界指数の場合における解の下からの評価を準備する.

Lemma 3.2.[5] 次を仮定する.

$$u(x,t) \geq C_1(1+t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{t}\right), \qquad (t > 0),$$
$$v(x,t) \geq C_2(1+t)^{m} \exp\left(-\frac{C_3|x|^2}{t}\right), \qquad (t > t_0),$$

ただし, C_1, C_2, $C_3 > 0$, $t_0 \geq 0$, $m \in \boldsymbol{R}$. このとき, もし m が

$$-\frac{Np_1}{2} + mq_1 + \frac{\sigma_1 + 2}{2} = -\frac{N}{2},$$

を満たしているならば, 正定数 $C_4,\ C_5>0$ と $t_1>t_0$ が存在し

$$u(x,t)\geq C_4(1+t)^{-\frac{N}{2}}\log(1+t)\exp\left(-\frac{C_5|x|^2}{t}\right),\qquad (t>t_1),\qquad (3.3)$$

を満たす.

次の 2 つの補題は sublinear の場合のものである.

Lemma 3.3. $0\leq q_2<1$ とし,

$$\bar{v}(x,t)=Ct^{\frac{\sigma_2+2}{2(1-q_2)}}\left(S(t)u_0(x)^{\varepsilon}\right)^{\frac{p_2}{\varepsilon(1-q_2)}}.$$

と定義する. もし C と ε が十分に小さいならば, $\bar{v}(x,t)$ は次の方程式の *subsolution* となる.

$$\begin{aligned} &v_t-\Delta v=|x|^{\sigma_2}u^{p_2}v^{q_2}, && x\in \boldsymbol{R}^N,\ t>0,\\ &v(x,0)=v_0(x), && x\in \boldsymbol{R}^N. \end{aligned}$$

Lemma 3.4. $0\leq q_2<1$ とする. このとき, 正定数 $C_1,\ C_2>0$ が存在し次が成立する.

$$v(x,t)\geq C_1t^{\frac{\sigma_2+2}{2(1-q_2)}}(1+t)^{-\frac{p_2N}{2(1-q_2)}}\exp\left(-\frac{C_2|x|^2}{t}\right),\qquad (t>0).\qquad (3.4)$$

4 Theorem 1 の証明

Necessary condition for the global existence (u,v) が (1.1), (1.2) の時間大域解であると仮定する. 仮定 $p_1<1,\ q_2<1,\ p_2q_1-(1-p_1)(1-q_2)>0$ から, $(1-q_2)/p_2<k<q_1/(1-p_1)$ を満たす正定数 $k>0$ をとることができる. この k に対し, 正定数 $r_1, r_2>0$ を次を満たすようにとる.

$$\begin{aligned} &r_2=kr_1,\\ &r_1<\min\left\{1-p_1,\ p_2,\ \frac{N(q_1-k(1-p_1))}{k\sigma_1}\right\},\\ &r_2<\min\left\{1-q_2,\ q_1,\ \frac{N(kp_2-(1-q_2))}{k\sigma_2}\right\}. \end{aligned}$$

また, $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\varepsilon|x|^2}\right) & (|x| < \varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \\ 0 & (|x| \geq \varepsilon^{-\frac{1}{2}}), \end{cases}$$

また,

$$F_\varepsilon(t) = \left(\int_{\boldsymbol{R}^N} u(x,t)^{r_1} \rho_\varepsilon(x) dx\right)^{\frac{1-p_1}{r_1}}, \tag{4.1}$$

$$G_\varepsilon(t) = \left(\int_{\boldsymbol{R}^N} v(x,t)^{r_2} \rho_\varepsilon(x) dx\right)^{\frac{1-q_2}{r_2}}, \tag{4.2}$$

と定義する. ここで, $\Delta\rho_\varepsilon \geq -C\varepsilon\rho_\varepsilon$ を任意の時間 $t > 0$ で満たすような正定数 $C > 0$ が存在することに注意をする. すると, この $F_\varepsilon(t)$ と $G_\varepsilon(t)$ に対し次の常微分不等式系が成立する.

Lemma 4.1. 正定数 C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ が存在し, 次が成立する.

$$F'_\varepsilon(t) \geq -C_1\varepsilon F_\varepsilon(t) + C_2\varepsilon^{-\frac{\sigma_1}{2}} G_\varepsilon(t)^{\frac{q_1}{1-q_2}}, \tag{4.3}$$

$$G'_\varepsilon(t) \geq -C_3\varepsilon G_\varepsilon(t) + C_4\varepsilon^{-\frac{\sigma_2}{2}} F_\varepsilon(t)^{\frac{p_2}{1-p_1}}. \tag{4.4}$$

Proof (1.1) の両辺を $u^{r_1-1}\rho_\varepsilon$ 倍し, x に関し $\boldsymbol{R}^N$ 上積分をすると, (4.3) を得る. 実際, 逆 Hölder 不等式 と Hölder 不等式より右辺第二項は,

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}^N} \rho_\varepsilon |x|^{\sigma_1} u^{r_1-(1-p_1)} v^{q_1} dx \\
&\geq \left(\int_{|x|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \rho_\varepsilon v^{r_2} dx\right)^{\frac{q_1}{r_2}} \left(\int_{|x|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \rho_\varepsilon |x|^{\frac{r_2\sigma_1}{r_2-q_1}} u^{\frac{r_2(r_1-(1-p_1))}{r_2-q_1}} dx\right)^{\frac{r_2-q_1}{r_2}} \\
&\geq G_\varepsilon^{\frac{q_1}{1-q_2}} \left(\int_{|x|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \rho_\varepsilon u^{r_1} dx\right)^{\frac{r_1-(1-p_1)}{r_1}} \left(\int_{|x|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \rho_\varepsilon |x|^{-\frac{r_1r_2\sigma_1}{r_1q_1-r_2(1-p_1)}} dx\right)^{-\frac{r_1q_1-r_2(1-p_1)}{r_1r_2}} \\
&= C\varepsilon^{-\frac{\sigma_1}{2}} F_\varepsilon(t)^{-\frac{(1-p_1)-r_1}{1-p_1}} G_\varepsilon(t)^{\frac{q_1}{1-q_2}}.
\end{aligned}$$

となるので, さらに両辺を $F_\varepsilon(t)^{\frac{(1-p_1)-r_1}{1-p_1}}$ 倍すれば求める式を得る. また同様にして, (1.2) の両辺を $u^{r_2-1}\rho_\varepsilon$ 倍し, x に関し $\boldsymbol{R}^N$ 上積分をすると, (4.4) を得る. □

さらに, 二次元力学系の議論 [4] と比較原理により次の評価が成り立つ.

Proposition 4.2. (upper bounds)　正定数 $A, B > 0$ が存在し, 任意の $t, \varepsilon > 0$ に対し次が成立する.

$$F_\varepsilon(t) < A\varepsilon^{\alpha(1-p_1)}, \tag{4.5}$$

$$G_\varepsilon(t) < B\varepsilon^{\beta(1-q_2)}. \tag{4.6}$$

Theorem 1(i) の証明　$\alpha \geq N/2$ の場合のみを考える. Lemma 3.1, 3,4, 3.2, と F_ε の定義 (4.1) から $F_\varepsilon(\varepsilon^{-1})$ の下からの評価を得る.

$$F_\varepsilon(\varepsilon^{-1}) \geq \begin{cases} C_5\varepsilon^{\frac{N(1-p_1)}{2}}, & (\alpha > \frac{N}{2}), \\ C_6\varepsilon^{\frac{N(1-p_1)}{2}}\{\log(1+\varepsilon^{-1})\}^{1-p_1}, & (\alpha = \frac{N}{2}). \end{cases} \tag{4.7}$$

実際 $\alpha = N/2$ の場合は,

$$u(x,t) \leq C(1+t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{t}\right), \qquad (t > 0),$$

$$v(x,t) \leq C(1+t)^{\frac{\sigma_2+2-p_2N}{2(1-q_2)}} \exp\left(-\frac{C|x|^2}{t}\right), \qquad (t > 1),$$

を Lemma 3.1 と Lemma 3.4 からそれぞれ得る. ここで Lemma 3.2 を適用すると,

$$u(x,t) \leq C(1+t)^{-\frac{N}{2}} \log(1+t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{t}\right), \qquad (t > t_0), \tag{4.8}$$

がある $t_0 > 1$ に対し成立する. この評価を定義 (4.1) に代入することによって, (4.7) が得られる. しかし, これは 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し (4.5) に矛盾する. □

Theorem 1(ii) の証明 $\liminf_{|x|\to\infty} |x|^a u_0(x) > 0$ $(a < 2\alpha)$ の場合を考える. 定義 (4.1) より,

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(0) &= \left(\int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)^{r_1}\rho_\varepsilon(x)dx\right)^{\frac{1-p_1}{r_1}} \\ &= \left(\int_{|x|<1} u_0(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x)^{r_1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)dx\right)^{\frac{1-p_1}{r_1}}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

を得るので, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し次が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-\alpha(1-p_1)} F_\varepsilon(0) \\
&\geq \varepsilon^{-\alpha(1-p_1)} \left(\int_{1/2<|x|<1} u_0(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}x)^{r_1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx \right)^{\frac{1-p_1}{r_1}} \\
&\geq C\varepsilon^{(-\alpha+\frac{a}{2})(1-p_1)} \left(\int_{1/2<|x|<1} |x|^{-ar_1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx \right)^{\frac{1-p_1}{r_1}} \\
&> A. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$
F_\varepsilon(0) > A\varepsilon^{\alpha(1-p_1)}, \qquad (4.11)
$$

が成立するが, これは (4.5) に矛盾する. □

Theorem 1(iii) の証明　十分大きい $C > 0$ に対し $u_0(x) \geq C\exp(-\nu_0|x|^2)$ が成立していると仮定する. $\varepsilon = 1, t = 0$ とすることにより, 定義 (4.1) から次を得る.

$$
\begin{aligned}
F_1(0) &= \left(C\int_{|x|<1} \exp\left(-\nu_0 r_1 |x|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx \right)^{\frac{1-p_1}{r_1}} \\
&> A. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

しかし, これは (4.5) に矛盾する.□

参考文献

[1] Y.Aoyagi and K.Tsutaya, in preparation

[2] M.Escobedo and M.A.Herrero, *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system*, J. Diff. Eqns. **89** (1991), 176-202.

[3] M.Escobedo and H.A.Levine, *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations.*, Arch. Rational. Mech. Anal. **129** (1995), 47-100.

[4] K.Mochizuki and Q.Huang, *Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Methods Appl. Anal. **5** (1998), 109-124.

[5] Ross G.Pinsky, *Existence and nonexistence of global solutions for* $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ *in* R^d, J. Diff. Eqns. **133** (1997), 152-177.