第25回
発展方程式若手セミナー
報 告 書

2004年１月

第25回
発展方程式若手セミナー
報告集

２００４年１月

報告集発刊にあたって

発展方程式若手セミナーは、「発展方程式及びその周辺分野の将来の方向を探るための若手研究者の討論と情報交換の場」という主旨で、１９７９年の夏に第１回目が開催されました。その後、幹事を交代しながら毎年夏に定期的に行われ、２００３年の8月5日（火）に四半世紀目にあたる２５回目を迎えることとなりました。私の手許には歴代の幹事の方から脈々と受け継がれてきた資料があるわけですが、それも段ボール１箱の分量となっており、このセミナーを支えてこられた方々の魂に感銘を受けるばかりです。

さて、今回の第２５回発展方程式若手セミナーは歴代のセミナーとしては日本最西端の福岡県太宰府市（国民年金 健康保養センター「太宰府」）にて開催されました。学問の神様 菅原道真公の足跡をたどりながら発展方程式の研究に心いくまでいそしみたいということが当初の目的でありましたが、奇しくも台風１０号接近のため文字どおり「風雲急を告げる」セミナーとなってしまいました。その結果、3泊4日の日程を2泊3日に切り詰めるという事態に陥ることとなり、遠路はるばるご参加下さった方の中には日帰りを余儀無くされた方や、プログラムの短縮による影響で突然のご講演をお願させていただいた講演者、帰りの交通手段確保にお骨折り下さった方など参加者にはご迷惑をお掛けすることとなりました。この場をお借りして再度お詫び申し上げます。

かような慌ただしい状況下で、特別講演者の石井克幸先生（神戸大・海事科学部）におかれましては「非線形偏微分方程式に対する粘性解について」というタイトルで粘性解の利点・素性について丁寧にお話しいただいたばかりか、粘性解の行く末に至るまでご示唆下さり、感謝の念にたえません。そして、一般講演では２６名の方に Short Communication では１２名の学生に用意周到に興味深い結果をご御講演いただき、聴講者の今後の研究活動に刺激を与えて下さったものと信じております。この報告集には上記の皆さんから寄せられました講演内容を取りまとめてあります。普段の研究活動でふと気になることが生じたとき、あるいは他分野の内容を概観したいときなどに、この報告集に収められている内容・参考文献が一助となれば幸いです。

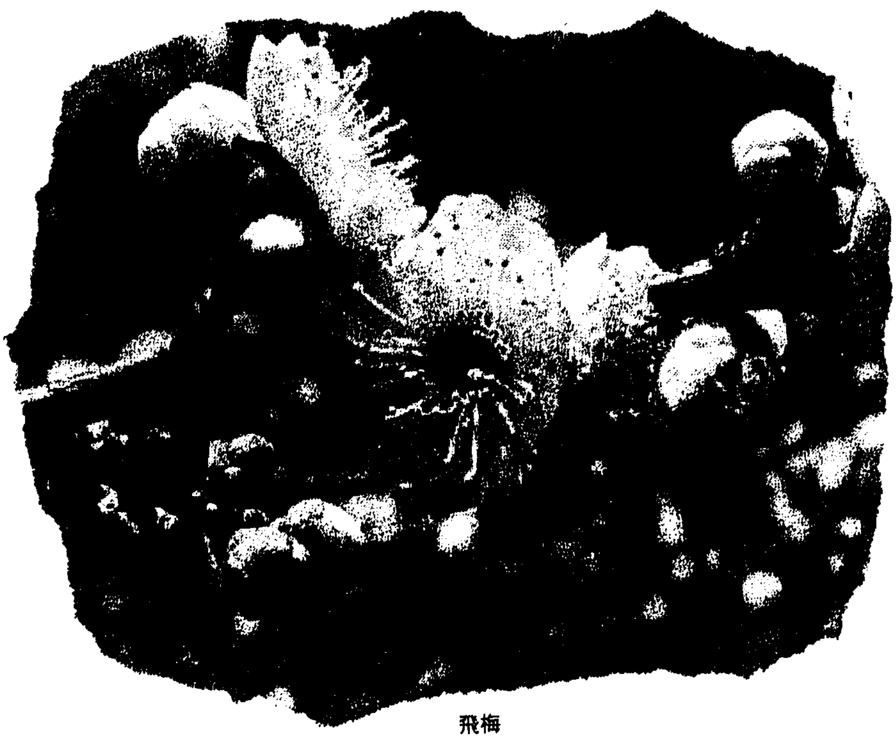
発展方程式若手セミナーは様々な方々の援助に支えられています。特に科研費にて学生の旅費と会議室使用料の援助をお引き受け下さった堤誉志雄先生（東北大学）[1]、各学生を指導されている先生方、煩雑な事務手続きを処理して下さった安達雪絵さん（東北大・数学事

[1] 基盤研究Ａ「非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の構造」課題番号１５２０４００８（研究代表者：堤誉志雄教授）

務)、この報告集作成の費用を校費で賄って下さった九州大学大学院数理学研究院に厚く御礼申し上げます。また、私一人で進路を決めかねていたときにアドバイスを下さった前回セミナー幹事の伊藤昭夫先生（近畿大学)、不安がつのる中で親身に相談にのって励ましてくれた中村能久氏（熊本大・学振研究員）にも感謝の意を表します。さらに、九州大学数理学府の大学院生の皆さんには肉体労働を強いたり、叱り飛ばしたりといろいろ辛い目に会わせてしまいました。ごめんなさい。

次回の幹事は工学院大学の竹内慎吾先生です。皆様の変わらぬご支援とご協力をお願いして序文の言葉を締めくくらせていただきます。

２００４年1月
第２５回発展方程式若手セミナー幹事
九州大学大学院数理学研究院　北　直泰



飛梅

第２５回発展方程式若手セミナー
参加者名簿（敬称略）

* 乾　勝也	（北大・D2）
* 山田　計幸	（北大・D1）
* 笹山　智司	（北大・D1）
* 山崎　教昭	（室蘭工大）
* 佐藤　得志	（東北大）
池田　幸太	（東北大・M1）
大谷　光春	（早稲田大）
* 高木　悟	（早稲田大）
* 高市　恭治	（早稲田大・D4）
* 大屋　博一	（早稲田大・D3）
* 松浦　啓	（早稲田大・D2）
* 若狭　徹	（早稲田大・D1）
* 浦野　道雄	（早稲田大・D1）
* 佐藤　典弘	（早稲田大・D1）
門田　智仁	（早稲田大・M2）
風間　章譲	（早稲田大・M1）
吉村　康宏	（早稲田大・M1）
* 白川　健	（東京電機大）
竹内　慎吾	（工学院大）
横田　智巳	（東京理科大）
* 伊藤　直子	（東京理科大・D2）
下村　明洋	（学習院大）
* 嶋野　和史	（都立大・D4）
* 田岡　志婦	（中央大・D4）
* 中村　徹	（東京工大・D4）
* 五十嵐威文	（日本大・D3）
井上　弘	（足利工大）
剣持　信幸	（千葉大）
* 深尾　武史	（千葉大）
* Emil Minchev	（千葉大・D3）
* 岡崎　貴宣	（千葉大・D3）
* 阿曽　雅泰	（千葉大・D2）
佐久間淳一	（千葉大・M2）
浅川　秀一	（岐阜大）
四ツ谷晶二	（龍谷大）
岩田　順敬	（大阪大・D2）
上原　勉	（大阪大・M2）
川原雄一朗	（大阪大・M2）
丸尾　健二	（神戸大）
♯ 石井　克幸	（神戸大）
* 町原　秀二	（島根大）
永井　敏隆	（広島大）
角谷　敦	（修道大）
大崎　浩一	（宇部高専）
山田　直記	（福岡大）
黒木場正城	（福岡大）
* 瀬片　純市	（九州大・D2）
* 細野　敬史	（九州大・D1）
岡本竜太郎	（九州大・M3）
工藤　賢一	（九州大・M2）
林　英彦	（九州大・M1）
原本　和夫	（九州大・M1）
三沢　正史	（熊本大）
* 中村　能久	（熊本大・PDF）
北　直泰	（九州大）

※ *印は一般講演者。♯印は特別講演者。

目次 (CONTENTS)

≪ 特別講演 ≫

石井　克幸（神戸大・海事科学部）

非線形偏微分方程式に対する粘性解について　p. 1

≪ 一般講演 ≫

瀬片　純市（九州大）

4 階非線形 Schrödinger 型方程式の初期値問題について　p. 24

中村　能久（熊本大）

Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential　p. 33

町原　秀二（島根大）

非線型 Dirac 方程式の初期値問題　p. 38

田岡　志婦（中央大）

Well-posedness of the Cauchy problem for the semilinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity　p. 44

佐藤　典弘（早稲田大）

Gray-Scott モデルにおける進行波解について　p. 51

浦野　道雄（早稲田大）

Transition layers and spikes for a bistable reaction-diffusion equation　p. 58

若狭　徹　（早稲田大）

Gierer-Meinhardt shadow system に現れる定常パターンの安定性と Hopf 分岐について　p. 64

大屋　博一（早稲田大）

非有界領域におけるある準線形楕円型方程式について　p. 72

佐藤　得志（東北大）

On positive solutions to semilinear elliptic equations with exponentially growing nonlinearities involving nonnegative forcing terms　p. 79

山田　計幸（北大）

On viscous conservation laws with growing initial data　p. 87

松浦　啓　（早稲田大）

極性流体の方程式について　p. 94

乾　勝也（北大）

An operatorial approach to the Navier-Stokes equations in a half space with non-decaying initial data　p. 102

中村　徹　（東工大）
Asymptotic behavior of spherically symmetric solutions to the compressible Navier-Stokes equations with external forces　p. 109
深尾　武史（千葉大）
Stefan 問題と Navier-Stokes 方程式のシステムの可解性について　p. 118
細野　敬史（九州大）
半線形 Damped wave equation に関する初期値問題の解の漸近挙動　p. 125
伊藤　直子（東京理科大）
低階の微分項をもつ非線形熱方程式の時間大域解の存在について　p. 136
笹山　智司（北大）
凸領域における半線形熱方程式の爆発解の増大度　p. 142
五十嵐威文（日大）
非線形熱方程式の大域解の存在・非存在について　p. 152
高市　恭治（早稲田大）
Bounds for global solutions of some semilinear parabolic problems on general domains　p. 162
嶋野　和史（都立大）
Homogenization and penalization for infinite systems of first-order PDE　p. 168
高木　悟　（早稲田大）
Some remarks on dissipative solutions　p. 176
阿曽　雅泰（千葉大）
ある種の相変化問題に関連する非線形発展方程式について　p. 183
白川　健　（東京電機大）
全変動流を含む非等温系相転移モデルと２次元定常解の安定性　p. 191
Emil Minchev（千葉大）
On a system of nonlinear PDE's for phase transitions with vector order parameter and convective effect　p. 198
岡崎　貴宣（千葉大）
ある相転移現象を記述する常微分方程式系について　p. 205
山崎　教昭（室蘭工大）
漸近周期時間依存劣微分作用素支配された発展方程式に対応する多価力学系について　p. 212

特別講演

菅原道真公

菅原氏は古代豪族の土師氏の出身で、道真公の曾祖父古人公が土師を菅原と改姓するとともに、文道をもって朝廷に仕える家柄となりました。時代は嵯峨天皇の時代を頂点として、「文書経国」すなわち学問を盛んにして国をつくるという方針のもと、唐風文化の最盛期を迎えていました。

道真公は清公（きよきみ）公、是善（これよし）公と続く文章博士（もんじょうはかせ）の家系に生まれました。母は少納言（大伴）氏の出身です。わずか5歳で和歌を詠み、１０歳を過ぎて漢詩を創作し、神童と称されました。１８歳で文章生、２３歳で文章得業生、２６歳でついに方略式に合格し、３０歳の頃、島田宣来子を妻に迎え、３３歳で式部少輔、文章博士となり学者としては最高の栄進を続けました。一時、讃岐守という地方官へまわされましたが、そこでむしろ慈父のごとき善政を行い住民に慕われたのです。京へ戻ると宇多天皇の厚い信任を受け、蔵人頭などの政治の中心で活躍しました。５０歳のときには、唐の国情不安と文化の衰退を理由に遣唐使停止を建議し中国に渡ることはありませんでした。そして、５５歳で右大臣、さらには延喜元年１月７日に藤原時平とともに従二位に叙せられましたが、その直後急転して太宰府左遷となりました。

太宰府では左遷というより配流に近い窮迫の日々を送りながらも、天を怨まず国家の安泰と天皇さまの御平安をお祈りし、ひたすら謹慎され、配所から一歩も出ることはなかったようです。劣悪の環境のなかで健康を損ない、道真公を京で待っているはずの夫人の死去の知らせが届くと、ますます病は重くなり、延喜3年（９０３年）２月２５日、白梅の花びらが散るように亡くなったのです。

御遺骸は門弟の味酒安行によって太宰府の東北の地に埋葬され、太宰府天満宮が創建されました。その後、朝廷でも罪無きことが判明し、人から神の御位に昇り、天満天神・学問の神・文化の神として現代に至るまで永く人々の信仰を集めています。

非線形偏微分方程式に対する粘性解について

石井 克幸 (神戸大学 海事科学部)

1 序

本稿では非線形 2 階楕円型/放物型偏微分方程式に対する粘性解理論を扱う.

粘性解とは偏微分方程式に対する弱解の概念の 1 つである. 偏微分方程式に対する弱解と言えば Schwartz 超関数の意味でのそれを指すことが多いが, 粘性解はそれとは違う由来を持った弱解の概念である.

粘性解の概念は Hamilton-Jacobi 方程式に対する大域解の一意存在を考えるために Crandall & Lions [12] によって導入された. その後, Lions [31] によって粘性解の概念が非線形 2 階楕円型/放物型偏微分方程式に対しても使えることが示された. 粘性解を用いた偏微分方程式の研究は最適制御, 微分ゲーム等と関連したものが多いが, 解析的な研究は 1980 年代後半から盛んになった. 特に 2 階偏微分方程式に対する粘性解の解析的研究は Jensen [27], H. Ishii [22], H. Ishii & Lions [25] によって大幅に進展した. また, Evans & Spruck [13], Chen, Giga & Goto [8] では平均曲率流の時間大域的弱解の構成に粘性解理論が応用され, 現在では均質化理論, 数理ファイナンス等の研究にも応用されている. Caffarelli [4] による内部正則性の研究が動機となり, Caffarelli, Crandall, Kocan, & Święch [6] による L^p 理論が作られた. この結果を基にした粘性解の正則性の研究も進んでいる.

粘性解理論やその進展・応用に関する成書等は Crandall, H. Ishii & Lions [11] をはじめとして, Fleming & Soner [14], Barles [2], Caferelli & Cabré [5], Capuzzo-Dolcetta & Lions [7], Bardi & Capuzzo-Dolzetta [1], Giga [16] 等がある. また, Koike [29] も用意されつつある. 日本語による粘性解理論の解説は H. Ishii [21, 23, 24] がある.

これらの書物等には遠く及ばないが, 本稿では理論構築の際の技術的な困難, それを克服したアイディア等の説明を交えながら粘性解理論の初歩的な解説を試みたい.

本稿で扱う方程式は次のような (一般には) 非発散形のものである.

$$u + F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

但し, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域で, $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_N})$, $D^2u = (u_{x_ix_j})_{1\leq i,j\leq N}$ とおく. また, 特に断らない限り, F は $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ ($\mathbb{S}^N = N$ 次実対称行列の全体) で定義された連続関数で, 以下のような 退化楕円性 を仮定する.

退化楕円性 $(x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ を固定する. このとき任意の $X, Y \in \mathbb{S}^N$ に対して, $Y \geq O$ ($\Leftrightarrow Y$ は半正定値行列) ならば

$$F(x, r, p, X + Y) \leq F(x, r, p, X)$$

本稿では方程式 (1.1) を扱うが, その理由は, 粘性解理論において, 退化楕円型という条件の下では 1 階偏微分方程式の取り扱いと 2 階楕円型/放物型偏微分方程式の取り扱いには区別があまりなく, 本稿で扱う範囲の内容は 1 階偏微分方程式/ 2 階放物型偏微分方程式の場合でも少しの修正で得られるからである.

解の一意存在等が粘性解の枠組みで考えられている具体的な方程式の例を挙げる.

例 1.1 Isaccs 方程式: $u = u(x)$ として

$$u + \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{\alpha\beta}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^{\alpha\beta}(x) u_{x_i} - f^{\alpha\beta}(x) \right\} = 0.$$

ここで $(a_{ij}^{\alpha\beta}(x))$ は各 $x \in \Omega$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ に対して半正定値行列とする. 半正定値性より, この方程式は $(a_{ij}^{\alpha\beta}(x)) \equiv O$, 即ち 1 階偏微分方程式の場合も含んでいる.

例 1.2 平均曲率流に対する等高面方程式: $u = u(t, x)$ として

$$u_t - \Delta u + \frac{\langle D^2 u Du, Du \rangle}{|Du|^2} = 0.$$

この方程式は $Du(t,x) \neq 0$ のときは主要部が $Du(t,x)$ 方向に退化している. また, $Du(t,x) = 0$ となる (t,x) では方程式が定義されないが, うまく修正することにより, そのような点でも連続になるように延長できる.

これらの例は非発散形で退化した方程式である. 退化した方程式は<u>一般には古典解を持たない</u>. 以下に簡単な例を挙げておこう.

例 1.3 2 階偏微分方程式に対する境界値問題

$$\max\{-u'', u - \psi\} = 0 \quad \text{in } (-1,1),\ u(\pm 1) = 0. \tag{1.2}$$

但し, $\psi(x) = 2x^2 - 1$ とする. この問題は $(-1,1)$ 全体での古典解を持たないことが証明できる. この例では以下の関数が重要である.

$$u(x) = \begin{cases} (2\sqrt{2} - 4)(x+1) & (-1 \leq x < 1/\sqrt{2} - 1), \\ \psi(x) & (|x| \leq 1 - 1/\sqrt{2}), \\ (4 - 2\sqrt{2})(x-1) & (1 - 1/\sqrt{2} < x \leq 1), \end{cases} \tag{1.3}$$

境界値問題 (1.2) はゴム紐の両端を水平になるように固定し, 上から指で軽く押したとき, 弾性エネルギーを最小にするゴム紐の形状を調べる問題をモデル化したものである. 関数 (1.3) はその際のゴム紐が作るグラフを表す関数である. 数学的に言うと, この関数は $u \leq \psi$ in $(-1,1)$ という制限条件の下でエネルギー $\int_{-1}^{1} |u'(x)|^2 dx$ を最小にする関数である.

例 1.3 において, 関数 (1.3) は応用上意味がある. 従って, このような関数が元の方程式の解となるような適切な弱解の概念が必要であり, その 1 つが粘性解の概念である.

次節では粘性解の概念を導入し, 例 1.3 で挙げた関数が元の方程式の粘性解となっていることを示す. 第 3 節で粘性解の基本的な性質を紹介し, 第 4 節では粘性解理論の主要な結果を解説する.

2　弱解の概念の導入

微分可能でない関数を微分方程式の解とみなすにはどうすればよいか, というのが弱解を考える理由である. この解決策としては Schwartz の意味での超関数解がよく知られている. これは方程式にテスト関数と呼ばれる滑らかな関数をかけて部分積分し, 未知関数の微分をテスト関数に肩代わりさせることによって定義される弱解の概念である. この概念は発散形の方程式に対しては非常に有効であるが, 扱いたい方程式は非発散形なので部分積分ができないため使えない. 従って別の方法によって弱解を定義する必要がある. そこで, 部分積分を最大値原理に置き換えることにより, 未知関数の微分をテスト関数に肩代わりさせることを考える. 本稿では, 最大値原理とは以下の命題を指すことにする.

最大値原理　$f \in C^2(\Omega)$ が $x_0 \in \Omega$ で最大値 (or 極大値) を取るならば,

$$Df(x_0) = 0,\ D^2 f(x_0) \le O \quad (\Leftrightarrow -D^2 f(x_0) \text{ が半正定値行列})$$

この最大値原理を使って未知関数の微分がテスト関数のそれに肩代わりされる様子を見てみよう. 方程式 (1.1) を考える. $u \in C^2(\Omega)$ が

$$u + F(x, u, Du, D^2 u) \le 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{2.1}$$

を満たしていると仮定する. 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して, $u - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極大値を取ったとする. このとき, 最大値原理により次が成り立つ.

$$Du(x_0) = D\varphi(x_0),\ D^2 u(x_0) \le D^2 \varphi(x_0).$$

よって, この関係と F の退化楕円性より

$$u(x_0) + F(x_0, u(x_0), \varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \le u(x_0) + F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2 u(x_0)) \le 0$$

となる.

同様に, $u \in C^2(\Omega)$ が

$$u + F(x, u, Du, D^2 u) \ge 0 \quad \text{in } \Omega,$$

を満たしているとき, 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して, $u - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極小値を取っていれば

$$u(x_0) + F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \ge 0$$

が成り立つことがわかる.

これらのことから u が微分可能でなくても $u - \varphi$ の極大値や極小値を取る点では u の微分をテスト関数に肩代わりさせることによって, 弱解が定義できそうである. 弱解の定義を与えるために, 記号を用意する. 有界な関数 $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$u^*(x) = \lim_{r \to 0} \sup\{u(y) \mid y \in \overline{\Omega},\ |y - x| < r\}, \tag{2.2}$$

$$u_*(x) = \lim_{r \to 0} \sup\{u(y) \mid y \in \overline{\Omega},\ |y - x| < r\}. \tag{2.3}$$

とする. u^*, u_* はそれぞれ u の上半連続包, 下半連続包という.

定義 2.1 関数 $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を有界とする. u が (1.1) の粘性解であるとは以下の 2 つを満たすときをいう.

(1) 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $u^* - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極大値を取るとき,

$$u^*(x_0) + F(x_0, u^*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

を満たす (このとき u を粘性劣解という).

(2) 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $u_* - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極小値を取るとき,

$$u_*(x_0) + F(x_0, u_*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

を満たす (このとき u を粘性優解という).

注意 2.1 (1) 粘性劣解の定義において極大値を最大値, 狭義極大値, 狭義最大値におきかえてよい. 粘性優解の場合も同じことが言える.
(2) F の退化楕円性より, (1.1) の古典解は粘性解になる. また, (1.1) の粘性解が $C^2(\Omega)$ に属すれば, 古典解になる.
(3) u が $u + F = 0$ in Ω の粘性解であっても, $-u - F = 0$ in Ω の粘性解とは限らない. 何故ならば, 符号が変わると, テスト関数の符号も変わってしまうからである.
(4) u^* (resp., u_*) は $\overline{\Omega}$ で上半連続 (resp., 下半連続) であり, $u_* \leq u \leq u^*$ on $\overline{\Omega}$ が成り立つ. また, u が $\overline{\Omega}$ 上で上半連続 (resp., 下半連続) であることと $u = u^*$ (resp., $u = u_*$) on $\overline{\Omega}$ は同値であり, u が $\overline{\Omega}$ で連続であることと $u = u^* = u_*$ on $\overline{\Omega}$ は同値である.
(5) 粘性解の名前は Hamilton-Jacobi 方程式に対する大域解の存在を粘性消滅法によって示すことに由来する. 詳細は Crandall & Lions [12] を参照.

例 1.3 で挙げた境界値問題 (1.2) に対して関数 (1.3) が粘性解になることを簡単に確認してみよう. 任意の $\varphi \in C^2(-1,1)$ を固定し, $u - \varphi$ が $x_0 \in (-1,1)$ で極大値を取ったとする. $x_0 \neq \pm(1 - 1/\sqrt{2})$ のとき, u は $x = x_0$ の近傍で C^2 なので,

$$u'(x_0) = \varphi'(x_0),\ u''(x_0) \leq \varphi''(x_0)$$

を満たす. u は $x = x_0$ で (1.2) を古典的な意味で満たすことと, 上の 2 式より (1.2) の粘性劣解であることが言える.

$x_0 = -1 + 1/\sqrt{2}$ のとき, $u \in C^1(-1,1)$ より

$$\varphi'(x_0) = u'(x_0) = 2\sqrt{2} - 4. \tag{2.4}$$

また, Taylor 展開を使って $h \to 0$ とすると

$$u(x_0 + h) \leq u(x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0) = u(x_0) + \varphi'(x_0)h + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)h^2 + o(|h|^2)$$

がわかるので, (2.4) と $u(x)$ の定義より $\varphi''(x_0) \geq 4$ となる. これと $u(x_0) = \psi(x_0)$ とあわせると

$$\max\{-\varphi'', u - \psi\} = 0 \quad \text{at } x_0$$

を得る. $x_0 = 1 - 1/\sqrt{2}$ の場合も同様である.

$u - \varphi$ が $x_0 \in (-1, 1)$ で極小値を取ったとする. $x_0 \neq \pm(1 - 1/\sqrt{2})$ のときは先程と同じ議論により, u は (1.2) を粘性優解であることが示せる. $x_0 = -1 + 1/\sqrt{2}$ と仮定する. このとき, $u(x_0) = \psi(x_0)$ なので, $\varphi''(x_0)$ がどのような値であっても

$$\max\{-\varphi'', u - \psi\} \geq 0 \quad \text{at } x_0$$

を得る. $x_0 = 1 - 1/\sqrt{2}$ の場合も同様である.

この議論から粘性解の概念の 1 つの特徴として次のことが挙げられる.

> **粘性解の概念の 1 つの特徴** 未知関数が微分可能でない点に関しても方程式を粘性劣解, 粘性優解の意味で満たすことを要請している.

これによって弱解の候補となる関数が選別され, 解の一意性が導かれていると思われる.

ところで, 定義 2.1 では $u - \varphi$ の極大点, 極小点において未知関数 u の微分をテスト関数 φ の微分に置き換えているが, この事を詳しく見てみよう. $u \in C(\Omega)$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ として, $u - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極大値を取ったとする. このとき, 不等式 $u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0)$ と φ の Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &\leq u(x_0) + \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \\ &\leq u(x_0) + \langle D\varphi(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x_0)h, h\rangle + o(|h|^2) \\ &\qquad \text{as } h \to 0 \text{ such that } x_0 + h \in \Omega \end{aligned}$$

を得る. これに着目し, $x_0 \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &\leq u(x_0) + \langle p, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle + o(|h|^2) \\ &\qquad \text{as } h \to 0 \text{ such that } x_0 + h \in \Omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ が存在するとしよう. このとき, u が x_0 の近傍で C^2 ならば, u を x_0 で Taylor 展開した式とこの不等式より, $Du(x_0) = p$, $D^2u(x_0) \leq X$ が示せる. 従って u が $C^2(\Omega)$ に属し, (2.1) を満たせば, (2.5) を満たす (p, X) に対して

$$u(x_0) + F(x_0, u(x_0), p, X) \leq 0$$

を導くことができる. 同様に

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &\geq u(x_0) + \langle p, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle + o(|h|^2) \\ &\qquad \text{as } h \to 0 \text{ such that } x_0 + h \in \Omega \end{aligned}$$

となる $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ が存在すれば,

$$u(x_0) + F(x_0, u(x_0), p, X) \geq 0$$

を得る.

この考察より, 関数 $u:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して集合 $J^{2,\pm}u(x)$ を導入する.

$$J^{2,+}u(x)=\left\{(p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N \;\middle|\; \begin{array}{c} u(x+h)\le u(x)+\langle p,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Xh,h\rangle+o(|h|^2) \\ \text{as } h\to 0, x+h\in\Omega \end{array}\right\},$$

$$J^{2,-}u(x)=\left\{(p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N \;\middle|\; \begin{array}{c} u(x+h)\ge u(x)+\langle p,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Xh,h\rangle+o(|h|^2) \\ \text{as } h\to 0, x+h\in\Omega \end{array}\right\}.$$

u が Ω で上半連続 (resp., 下半連続) ならば, $\{x\in\Omega\mid J^{2,+}u(x)\neq\emptyset\}$, (resp., $\{x\in\Omega\mid J^{2,-}u(x)\neq\emptyset\}$) は Ω で稠密である. 従って, u が Ω 全体で微分可能でなくても, $J^{2,\pm}u(x)$ が空でない $x\in\Omega$ は多いといえるだろう.

更に, これらの集合の graph closure $\overline{J}^{2,\pm}u(x)$ を定義する.

$$\overline{J}^{2,+}u(x)=\left\{(p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists(x_n,p_n,X_n)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N \text{ such that} \\ (x_n,u(x_n),p_n,X_n)\longrightarrow(x,u(x),p,X) \text{ as } n\to+\infty \\ \text{and } (p_n,X_n)\in J^{2,+}u(x_n) \end{array}\right\},$$

$$\overline{J}^{2,-}u(x)=\left\{(p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists(x_n,p_n,X_n)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N \text{ such that} \\ (x_n,u(x_n),p_n,X_n)\longrightarrow(x,u(x),p,X) \text{ as } n\to+\infty \\ \text{and } (p_n,X_n)\in J^{2,-}u(x_n) \end{array}\right\}.$$

$J^{2,\pm}u(x)$, $\overline{J}^{2,\pm}u(x)$ を用いた, 定義 2.1 と同値な命題を述べておく.

命題 2.1 関数 $u:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$ は有界とする.

(1) u が (1.1) の粘性劣解であることと次が成り立つことは同値である: 任意の $x\in\Omega$, $(p,X)\in\overline{J}^{2,+}u^*(x)$ に対して

$$u^*(x_0)+F(x_0,u^*(x_0),p,X)\le 0.$$

(2) u が (1.1) の粘性優解であることと次が成り立つことは同値である: 任意の $x\in\Omega$, $(p,X)\in\overline{J}^{2,-}u_*(x)$ に対して

$$u_*(x_0)+F(x_0,u_*(x_0),p,X)\ge 0.$$

証明は H. Ishii [23] 等を参照.

命題 2.2 関数 $u:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$ は有界とする.

(1) u が (1.1) の粘性劣解であることと次が成り立つことは同値である: 任意の $x\in\Omega$, $(p,X)\in\overline{J}^{2,+}u^*(x)$ に対して

$$u^*(x_0)+F(x_0,u^*(x_0),p,X)\le 0.$$

(2) u が (1.1) の粘性優解であることと次が成り立つことは同値である: 任意の $x\in\Omega$, $(p,X)\in\overline{J}^{2,-}u_*(x)$ に対して

$$u_*(x_0)+F(x_0,u_*(x_0),p,X)\ge 0.$$

証明は簡単なので省略する. この命題は **4** 節で述べる比較定理の証明に必要である.

3 粘性解の基本的性質

この節では粘性解の基本的性質をいくつか挙げる. 以下の命題は M. G. Crandall & P.-L. Lions [12], Crandall, Evans & Lions [9], Lions [31] 等に述べられている.

命題 3.1 関数 $u:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ は有界とし, (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) とする. このとき, 任意の開集合 $\Omega' \subset \Omega$ に対して u は (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) である.

これは粘性解の概念が局所的なものであることを意味している.

命題 3.1 の証明. u が (1.1) の粘性劣解の場合のみを証明する. 粘性優解の場合も同様に示せる.

任意の $\varphi \in C^2(\Omega')$ に対して $u^* - \varphi$ が $x_0 \in \Omega'$ で極大値を取ったとする. $r > 0$ を $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega'$ となるように取り, $\widetilde{\varphi} \in C^2(\Omega)$ を $\widetilde{\varphi} = \varphi \text{ in } B(x_0, r)$ を満たすものとする. このとき, $u^* - \widetilde{\varphi}$ は x_0 で Ω における極大値を取り, $D\widetilde{\varphi}(x_0) = D\varphi(x_0)$, $D^2\widetilde{\varphi}(x_0) = D^2\varphi(x_0)$ である. 従って u が (1.1) の粘性劣解であることより

$$u^*(x_0) + F(x_0, u^*(x_0), \varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) = u^*(x_0) + F(x_0, u^*(x_0), D\widetilde{\varphi}(x_0), D^2\widetilde{\varphi}(x_0)) \leq 0.$$

□

命題 3.2 $\mathcal{S}$ を空でない (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) の集合とする.

$$u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in \mathcal{S}\} \text{ (resp., } = \inf\{v(x) \mid v \in \mathcal{S}\})$$

とおく. このとき, u が有界ならば, それは (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) である.

この命題は **4.2** 節で述べる粘性解の存在証明で用いられる.

命題 3.2 の証明. 粘性劣解の場合のみを証明する. 粘性優解の場合も証明は同様である.

任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $u^* - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極大値を取ったとする. 簡単のため, $x_0 = 0$ としておく. $r > 0$ を $\overline{B(0, r)} \subset \Omega$ かつ, 0 が $\overline{B(0, r)}$ における $u^* - \varphi$ の最大点となるように選んでおく. 更に, $\varphi(x)$ を $\varphi(x) + u^*(0) - \varphi(0) + |x|^4$ と修正することで,

$$u^*(0) - \varphi(0) = 0, \; u^*(x) - \varphi(x) \leq -|x|^4 \quad (\forall x \in \overline{B(0, r)})$$

としてよい.

u^* の定義 (2.2) より $\{x_n\}_{n\in} \subset B(0, r)$ を $x_n \to 0$, $u(x_n) \to u^*(0)$ $(n \to +\infty)$ となるように取れる. また, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $u(x_n) - 1/n < v_n(x_n) \leq u(x_n)$ を満たす $v_n \in \mathcal{S}$ がある. $y_n \in \overline{B(0, r)}$ を $v_n^* - \varphi$ の $\overline{B(0, r)}$ における最大点とする. このとき, $x_n \in B(0, r)$ なので

$$u(x_n) - \frac{1}{n} - \varphi(x_n) \leq v_n^*(x_n) - \varphi(x_n) \leq v_n^*(y_n) - \varphi(y_n) \leq u^*(y_n) - \varphi(y_n) \leq -|y_n|^4 \leq 0$$

が成り立つ. $n \to +\infty$ としたときの最左辺の極限は $0 = u^*(0) - \varphi(0)$ であることより

$$y_n \longrightarrow 0,\ v_n^*(y_n) - \varphi(y_n) \longrightarrow u^*(0) - \varphi(0) \quad (n \to +\infty)$$

となる. これらと φ の連続性より

$$v_n^*(y_n) \longrightarrow u^*(0) \quad (n \to +\infty)$$

を得る.

十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $y_n \in B(0,r)$ なので, $v_n \in \mathcal{S}$ と命題 3.1 より

$$v_n^*(y_n) + F(y_n, v_n^*(y_n), D\varphi(y_n), D^2\varphi(y_n)) \leq 0$$

が言える. この不等式で $n \to +\infty$ とすれば, 上で求めた極限と F の連続性より

$$u^*(0) + F(0, u^*(0), D\varphi(0), D^2\varphi(0)) \leq 0$$

となり結論が示される. □

最後に安定性に関する命題を述べよう. 方程式 (1.1), 及び次の方程式を考える.

$$u + F_n(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

ここで, F_n は $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ で連続, かつ退化楕円型とする.

命題 3.3 有界な関数 $u_n \in C(\Omega)$ を (3.1) の粘性解とする. $n \to +\infty$ とするとき, $\{F_n\}_{n\in}$ は F に $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ 上で広義一様収束し, $\{u_n\}_{n\in}$ は有界な関数 $u \in C(\Omega)$ に Ω で広義一様収束すると仮定する. このとき, u は (1.1) の粘性解となる.

命題 3.3 の証明. u が (1.1) の粘性劣解であることを示す. 粘性優解であることは同じ方法で示せるので省略する.

任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $u - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極大値を取ったと仮定する. 簡単のため, $x_0 = 0$ とおく. $r > 0$ を $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$ かつ, 0 が $\overline{B(0,r)}$ における $u^* - \varphi$ の最大点となるように選んでおく. 更に, φ を修正することで

$$u(0) - \varphi(0) = 0,\ u(x) - \varphi(x) \leq -|x|^4 \quad (\forall x \in \overline{B(0,r)}) \tag{3.2}$$

としてよい.

$u_n - \varphi$ の $\overline{B(0,r)}$ における最大点を y_n とする. このとき,

$$\begin{aligned} u_n(0) - \varphi(0) &\leq u_n(y_n) - \varphi(y_n) \leq u(y_n) - \varphi(y_n) + \|u_n - u\|_{C(\overline{B(0,r)})} \\ &\leq -|y_n|^4 + \|u_n - u\|_{C(\overline{B(0,r)})} \leq \|u_n - u\|_{C(\overline{B(0,r)})} \end{aligned}$$

が成り立つ. u_n の広義一様収束性より $n \to +\infty$ としたときの最左辺と最右辺の極限は 0 である. これと φ の連続性より

$$y_n \longrightarrow 0,\ u_n(y_n) \longrightarrow u(0) \quad (n \to +\infty)$$

が得られる.

十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $y_n \in B(0,r)$ なので, u_n に対して粘性劣解の定義と命題 3.1 より

$$u_n(y_n) + F_n(y_n, u_n(y_n), D\varphi(y_n), D^2\varphi(y_n)) \leq 0$$

が言える. この不等式で $n \to +\infty$ とすれば, F_n の広義一様収束性と上で求めた極限より

$$u(0) + F(0, u(0), D\varphi(0), D^2\varphi(0)) \leq 0$$

となり結論が示される. □

4 粘性解理論の主要結果

方程式 (1.1) に対する粘性解についての主要な結果は次の 3 つである.

(1) 解の比較定理

(2) 解の存在

(3) 解の安定性

4.1 解の比較

粘性解理論でよく知られている結果が比較定理の成立である. 粘性解の比較定理とは次のようなものである.

定理 4.1 F の連続性と退化楕円性に加えて, 以下のような仮定をおく.

(F1) 各 $(x,p,X) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ に対して $r \mapsto F(x,r,p,X)$ は非減少.

(F2) $\omega(0) = 0$ かつ非減少な $\omega \in C([0,+\infty))$ が存在して次を満たす: 各 x, $y \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, X, $Y \in \mathbb{S}^N$ に対して

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

ならば,

$$F(y,r,\alpha(x-y),Y) - F(x,r,\alpha(x-y),X) \leq \omega(\alpha|x-y|^2 + |x-y|)$$

となる.

u, v をそれぞれ (1.1) の粘性劣解, 粘性優解とする. このとき $u^* \leq v_*$ on $\partial\Omega$ ならば, $u^* \leq v_*$ on $\overline{\Omega}$ が成り立つ.

F に置いた仮定の中で (F2) は一見しただけでは理解しにくいかもしれない. これに関しては後で説明することにして, 定理 4.1 の証明を説明しながら, その困難な点やそれをどのように克服したかを見ていくことにする.

証明の大まかな方針は u, v の差 $u(x)-v(x)$ を考え, $\sup_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-v(x))\leq 0$ を示すことである. 話を簡単にするため, $F=F(x,p,X)$ (r によらない), u, $v\in C(\overline{\Omega})$ とする. 順番に考えていくために, まず $v\in C^2(\Omega)$ を仮定する.

定理 4.1 の証明 Part I. $\overline{\Omega}$ における $u(x)-v(x)$ の最大点を z とする. $z\in\partial\Omega$ ならば, $u\leq v$ on $\partial\Omega$ より証明が終わるので $z\in\Omega$ としてよい.

u に対して v をテスト関数とすると粘性劣解の定義より

$$u(z)+F(z,Dv(z),D^2v(z))\leq 0$$

また, v は滑らかなので $v(z)+F(z,Dv(z),D^2v(z))\geq 0$ を満たすことより, 2 つの不等式を引くと

$$u(z)-v(z)\leq 0$$

を得るので定理 4.1 の結論が示された. □

さて, 今度は u, v が滑らかでないとする. この場合は u, v の差 $u(x)-v(x)$ を取ると, どんな滑らかな関数を引いてもテスト関数が取れないので先程と同じ議論ができない. そこで $u(x)-v(x)$ の代わりに <u>変数を増やして $u(x)-v(y)$ を考える</u>. 更に $\varphi(x,y)$ の形の滑らかな関数を導入し, 関数 $u(x)-v(y)-\varphi(x,y)$ を考察する. こうすることで, <u>φ を u, v 両方のテスト関数として使うことができる</u>.

定理 4.1 の証明 Part II. 上で述べたアイディアを使う. そのために

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-v(x))=\theta>0 \tag{4.2}$$

を仮定する. $\alpha>0$ として

$$\Phi(x,y)=u(x)-v(y)-\frac{\alpha}{2}|x-y|^2 \quad \text{on } \overline{\Omega}\times\overline{\Omega} \tag{4.3}$$

を考え, $(x_\alpha,y_\alpha)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ を Φ の最大点とする. このとき, $\Phi(x,x)\leq\Phi(x_\alpha,y_\alpha)$ より

$$\alpha|x_\alpha-y_\alpha|^2\leq 4(\|u\|_{C(\overline{\Omega})}+\|v\|_{C(\overline{\Omega})})$$

を得る. よって

$$|x_\alpha-y_\alpha|\longrightarrow 0 \quad (\alpha\to+\infty) \tag{4.4}$$

が言える. また, $\overline{\Omega}$ がコンパクトなので, $\{(x_\alpha,y_\alpha)\}$ は収束部分列 $\{(x_{\alpha_k},y_{\alpha_k})\}$ ($\alpha_k\to+\infty$ as $k\to+\infty$) を持つ. (4.4) より

$$x_{\alpha_k},y_{\alpha_k}\longrightarrow \exists z\in\overline{\Omega} \quad (k\to+\infty) \tag{4.5}$$

を得る. u, v の連続性より

$$(4.6)\qquad u(x_{\alpha_k}) \longrightarrow u(\overline{z}),\ v(y_{\alpha_k}) \longrightarrow v(\overline{z}) \quad (k \to +\infty)$$

となるので, $\theta = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \Phi(x,x) \le \Phi(x_{\alpha_k}, y_{\alpha_k})$ において $k \to +\infty$ とすると,

$$(4.7)\qquad \theta \le u(\overline{z}) - v(\overline{z}) \le \theta.$$

よって $\overline{z}$ は $u(x) - v(x)$ の最大点である. 更に $\theta > 0$ と $u \le v$ on $\partial\Omega$ より $\overline{z} \in \Omega$ も言える. 記号を簡単にするために $\{(x_{\alpha_k}, y_{\alpha_k})\}$ を単に $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ と書くことにする. $\overline{z} \in \Omega$ なので $\alpha \gg 1$ のとき, x_α, $y_\alpha \in \Omega$ である. また, $\Phi(\overline{z}, \overline{z}) \le \Phi(x_\alpha, y_\alpha)$ が成り立つことから, (4.6) を使って

$$(4.8)\qquad \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 \le u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - u(\overline{z}) + v(\overline{z}) \longrightarrow 0 \quad (\alpha \to +\infty)$$

を得る.

ここからは 1 階偏微分方程式の場合の証明と 2 階偏微分方程式の場合で技術的な違いが現れてくるので別々に考察しよう. まず, 1 階偏微分方程式の場合を考える.

$F(x,p,X) = F(x,p)$ とする. このとき, 仮定 (F2) は

$$(4.9)\qquad F(y, \alpha(x-y)) - F(x, \alpha(x-y)) \le \omega(\alpha|x-y|^2 + |x-y|)$$

となる.

1 階偏微分方程式の場合は $\Phi(x,y)$ を次のように扱う.

関数

$$(4.10)\qquad x \mapsto \Phi(x, y_\alpha) = u(x) - \left\{ v(y_\alpha) + \frac{\alpha}{2}|x - y_\alpha|^2 \right\}$$

は $x = x_\alpha$ で最大値を取り, 関数

$$(4.11)\qquad y \mapsto -\Phi(x_\alpha, y) = v(y) - \left\{ u(x_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y|^2 \right\}$$

は $y = y_\alpha$ で最小値を取る.

u, v はそれぞれ $F(x,p,X) = F(x,p)$ とした (1.1) の粘性劣解, 粘性優解であることより

$$\begin{aligned} u(x_\alpha) + F(x_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) &\le 0, \\ v(y_\alpha) + F(y_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) &\ge 0, \end{aligned}$$

が得られる. この 2 式の差を取ると仮定 (4.9) より

$$\begin{aligned} \theta \le u(x_\alpha) - v(y_\alpha)) &\le F(y_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) - F(x_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \\ &\le \omega(\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + |x_\alpha - y_\alpha|) \end{aligned}$$

となる. ここで $\alpha \to +\infty$ とすると, (4.5), (4.8) より $\theta \le 0$ となり, (4.2) に矛盾する. 従って $u \le v$ on $\overline{\Omega}$ が証明できた. □

この方法により, かなり一般な 1 階偏微分方程式に対する粘性解の一意性を示すことができる (Crandall & Lions [12]).

次に 2 階偏微分方程式の場合の証明を見ていこう. 基本的には **Part II** で採った方法と同じであるが, そのまま真似する訳にはいかない. 簡単のために次のような線形方程式

$$u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を取り上げ, どこに障害が出てくるか考えよう. **Part II** と同じように考えると粘性劣解, 粘性優解の定義より

$$u(x_\alpha) - \alpha N \leq 0, \ v(y_\alpha) + \alpha N \geq 0$$

を得る. 2 式を引くと

$$u(x_\alpha) - v(y_\alpha) \leq 2\alpha N \longrightarrow +\infty \quad (\alpha \to +\infty)$$

となり, 何も得られない.

その原因は 2 つの変数 x, y の関数 $\Phi(x,y)$ を (4.10), (4.11) のように 1 つの変数の関数として扱ったためである. そこで, <u>2 つの変数 x, y の関数のままで $\Phi(x,y)$ を扱ってみる.</u> まず, この考えを $u, v \in C^2(\Omega)$ の場合に使ってみよう.

定理 4.1 の証明 Part III. $\Phi(x,y)$, x_α, y_α 等は **Part II** で定義したものと同じとする. 最大値原理より (x_α, y_α) で

$$D_{x,y}\Phi = (D_x\Phi, D_y\Phi) = 0, \ D^2_{x,y}\Phi = \begin{pmatrix} D_xD_x\Phi & D_yD_x\Phi \\ D_xD_y\Phi & D_yD_y\Phi \end{pmatrix} \leq O$$

となる. 実際に微分を計算すると

$$(4.12) \quad Du(x_\alpha) = Dv(y_\alpha) = \alpha(x_\alpha - y_\alpha), \ \begin{pmatrix} D^2u(x_\alpha) & O \\ O & -D^2v(y_\alpha) \end{pmatrix} \leq \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

となる. また, $u, v \in C^2(\Omega)$ を仮定していることと, (4.5) より $\{D^2u(x_\alpha)\}_{\alpha>0}$, $\{D^2v(y_\alpha)\}_{\alpha>0}$ は有界なので, 十分大きな $\alpha > 0$ に対して

$$-\alpha \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} D^2u(x_\alpha) & O \\ O & -D^2v(y_\alpha) \end{pmatrix}$$

も成り立つ.

u は (1.1) の粘性劣解, v は (1.1) の粘性優解であることより

$$\begin{aligned} u(x_\alpha) + F(x_\alpha, Du(x_\alpha), D^2u(x_\alpha)) &\leq 0, \\ v(y_\alpha) + F(y_\alpha, Dv(y_\alpha), D^2v(y_\alpha)) &\geq 0, \end{aligned}$$

を得る. この 2 式の差を取り (4.12), (F2) を使って

$$\begin{aligned} \theta \leq u(x_\alpha) - v(y_\alpha) &\leq F(y_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), D^2v(y_\alpha)) - F(x_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), D^2u(x_\alpha)) \\ &\leq \omega(\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + |x_\alpha - y_\alpha|) \end{aligned}$$

となる．従って $\alpha \to +\infty$ とすると，(4.5), (4.8) より $\theta \le 0$ となり，(4.2) に矛盾するので定理 4.1 の結論が得られる．□

さて，u, v が滑らかでない場合を考えよう．

定理 4.1 の証明 Part IV. $\Phi(x,y)$, x_α, y_α 等は Part II で定義したものと同じとする．要点は (4.12) における $D^2u(x_\alpha)$, $D^2v(y_\alpha)$ に相当するものが取れるかどうかである．実際には以下を満たす $X, Y \in \mathbb{S}^N$ が取れる．

$$(\alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \in \overline{J}^{2,+}u(x_\alpha), (\alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) \in \overline{J}^{2,-}v(y_\alpha), \tag{4.13}$$

$$-3\alpha\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \le 3\alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

X, Y がそれぞれ $D^2u(x_\alpha)$, $D^2v(y_\alpha)$ に相当する．

u, v は各々 (1.1) の粘性劣解，粘性優解なので

$$u(x_\alpha) + F(x_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \le 0,$$
$$v(y_\alpha) + F(y_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) \ge 0,$$

を得る．この 2 式の差を取り，(F2) を使うと

$$\begin{aligned} \theta \le u(x_\alpha) - v(y_\alpha) &\le F(y_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) - F(x_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \\ &\le \omega(\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + |x_\alpha - y_\alpha|) \end{aligned}$$

となる．ここで $\alpha \to +\infty$ とすると，(4.5), (4.8) より $\theta \le 0$ となり，(4.2) に対する矛盾が導け，定理 4.1 の証明が終わる．□

注意 4.1 (1) (4.13), (4.14) に関して，その原型は H. Ishii [22] によって初めて得られた．その後，Crandall & H. Ishii [10] によって詳しく考察され，半連続関数に対する最大値原理と呼ばれるものになった．

(2) 仮定 (F2) は F の係数に関する連続性と関係している．それを説明するために，F を

$$F(x,p,X) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)X_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)p_i - f(x) \tag{4.15}$$

としよう．但し，$X = (X_{ij})_{1\le i,j\le N} \in \mathbb{S}^N$, $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ とする．ここで $(a_{ij}(x))$, $(b_i(x))$, $f(x)$ には以下の仮定をおく．

(A1) $\sigma \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{S}^N)$ が存在して

$$(a_{ij}(x)) = {}^t\sigma(x)\sigma(x) \qquad (\forall x \in \Omega)$$

を満たす．

(A2) $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$.

さて, x, $y \in \Omega$, $\alpha > 0$ とし, $X = (X_{ij})$, $Y = (Y_{ij}) \in \mathbb{S}^N$ を (4.1) を満たす行列とする.

$$\begin{pmatrix} {}^t\sigma(x)\sigma(x) & {}^t\sigma(x)\sigma(y) \\ {}^t\sigma(y)\sigma(x) & {}^t\sigma(y)\sigma(y) \end{pmatrix} \geq O$$

なので (4.1) の不等式の左からこの行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} {}^t\sigma(x)\sigma(x) & {}^t\sigma(x)\sigma(y) \\ {}^t\sigma(y)\sigma(x) & {}^t\sigma(y)\sigma(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} {}^t\sigma(x)\sigma(x) & {}^t\sigma(x)\sigma(y) \\ {}^t\sigma(y)\sigma(x) & {}^t\sigma(y)\sigma(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

となる. 行列の積を計算して trace をとると

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)X_{ij} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(y)Y_{ij} &\leq 3\alpha \operatorname{tr}({}^t(\sigma(x)-\sigma(y))(\sigma(x)-\sigma(y))) \\ &\leq 3\alpha \|D\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |x-y|^2 \end{aligned}$$

を得る. 最後の不等式を得るために (A1) を使った. 一方, (A2) より

$$\begin{aligned} &\alpha \left(\sum_{i=1}^N b_i(x)(x-y)_i - \sum_{i=1}^N b_i(y)(x-y)_i \right) + f(x) - f(y) \\ &\leq \alpha \|Db\|_{L^\infty(\Omega)} |x-y|^2 + \omega_f(|x-y|) \end{aligned}$$

となる. ω_f は f の連続度である. 従って F が (4.15) の場合は

$$\omega(s) = (3\|D\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|Db\|_{L^\infty(\Omega)})s + \omega_f(s)$$

とおくことで (F2) が満たされる. **1** 節で挙げた例についても適当な仮定の下で (F2) が満たされることは容易にわかる.

4.2 解の存在

粘性解の存在を示す方法は概ね次の 3 つである.

(i) 最適制御, 微分ゲームの方法を用いる.

(ii) 方程式の形に応じて近似方程式を作って近似解を構成し, 極限をとる.

(iii) Perron の方法を用いる.

(i) については Fleming & Soner [14], Bardi & Capuzzo-Dolzetta [1] 等を参照してほしい. (ii) は命題 3.3 の応用と言える. ここでは最後の (iii) について説明する.

Perron の方法は, 元々は, 劣調和関数の族から調和関数を構成する方法である. 粗く言うと, $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ を優調和関数として

$$\mathcal{P} = \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v \text{ は } \Omega \text{ で劣調和, かつ } v \le \varphi \text{ on } \overline{\Omega}\}(\neq \emptyset \text{ とする}),$$
$$u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in \mathcal{P}\}$$

とするとき, u は Ω で調和関数になるというものである. 詳細は Gilberg-Trudinger [18] 等を参照して欲しいが, これを証明する上で鍵となることは次の 2 つの事柄である.

(H1) $B \subset \mathbb{R}^N$ を任意の開球とし, g を ∂B で連続な関数とする. このとき境界値問題

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } B, \ u = g \quad \text{on } \partial B$$

には古典解が存在する.

(H2) 調和関数の (広義) 一様収束極限もまた調和関数である

粘性解には (広義) 一様収束極限もまた粘性解になるという性質 (命題 3.3) があることより, 調和関数に対する Perron の方法が粘性解の存在証明に応用できないか, という動機で粘性解に対する Perron の方法が H. Ishii [20] によって開発された. 以下ではこれについて述べる.

$\underline{u}, \overline{u}$ を $\overline{\Omega}$ 上で有界な関数で, それぞれ, (1.1) の粘性劣解, 粘性優解とする. 更に $\underline{u}^* \le \overline{u}_*$ on $\overline{\Omega}$ を仮定する. 集合 $\mathcal{S}$ と関数 u を次のように定義する.

$$\mathcal{S} = \{u : (1.1) \text{ の粘性劣解} \mid \underline{u}_* \le u \le \overline{u}^* \text{ on } \overline{\Omega}\},$$
$$u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in \mathcal{S}\} \quad (x \in \overline{\Omega}). \tag{4.16}$$

u については次のことがすぐにわかる.

補題 4.1 u は (1.1) の粘性劣解, 即ち $u \in \mathcal{S}$ である.

補題 4.1 の証明. $\underline{u} \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S} \neq \emptyset$ に注意しておく. また, $\underline{u}_* \le u \le \overline{u}^*$ on $\overline{\Omega}$ と u が $\overline{\Omega}$ 上で有界であることは明らかである. よって, 命題 3.2 を使うと $u \in \mathcal{S}$ が示される. □

補題 4.2 $v \in \mathcal{S}$ が (1.1) の粘性優解でないとすると, $w \in \mathcal{S}, y \in \Omega$ が存在して $v(y) < w(y)$ が成り立つ.

補題 4.2 の証明. $v \in \mathcal{S}$ が (1.1) の粘性優解でないとする. このとき, $\varphi \in C^2(\Omega)$, $v_* - \varphi$ の極小点 $x_0 \in \Omega$ と $\delta > 0$ が存在して

$$v_*(x_0) + F(x_0, v_*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \le -\delta < 0 \tag{4.17}$$

が成り立つ. 簡単のため, $x_0 = 0$ とし, $r_0 > 0$ を $\overline{B(0, r_0)} \subset \Omega$ かつ, 0 が $v_* - \varphi$ の $\overline{B(0, r_0)}$ における最小点となるように取る. 更に, φ を修正することで

$$v_*(0) - \varphi(0) = 0, v_*(x) - \varphi(x) \ge |x|^4 \quad (\forall x \in \overline{B(0, r_0)}) \tag{4.18}$$

としてよい.

$v_*(0)=\overline{u}_*(0)$ ならば, $\overline{u}_*-\varphi$ は $x=0$ で極小値を取る. このとき, (4.17) は粘性優解の定義の不等式に反する. 従って $v_*(0)<\overline{u}_*(0)$ である. (4.17), (4.18) より十分小さな $r\in(0,r_0)$ が取れて

$$\varphi(x)+\frac{r^4}{16}<\overline{u}_*(x) \quad \text{in } B(0,r), \tag{4.19}$$

$$\varphi(x)+\frac{r^4}{16}+F\left(x,\varphi(x)+\frac{r^4}{16},D\varphi(x),D^2\varphi(x)\right)\le 0 \quad \text{in } B(0,r) \tag{4.20}$$

が成り立つ. (4.20) は $\varphi(x)+r^4/16$ が $B(0,r)$ で (1.1) の粘性劣解であることを意味する. また, (4.18) を使って

$$v(x)\ge v_*(x)>\varphi(x)+|x|^4\ge\varphi(x)+\frac{r^4}{16} \quad \text{in } B(0,r)\backslash B(0,r/2) \tag{4.21}$$

となる. そこで w を

$$w(x)=\begin{cases}\max\left\{v(x),\varphi(x)+\dfrac{r^4}{16}\right\} & \text{if } |x|<r,\\ v(x) & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおくと, 命題 3.1, 3.2 より w は $B(0,r)$ における (1.1) の粘性劣解である. また, w の定義, (4.19), 及び $v\in\mathcal{S}$ をあわせると $w\in\mathcal{S}$ が言える.

ところで, 下半連続包の定義 (2.3) より, $(x_n,v(x_n))\to(0,v_*(0))$ as $n\to+\infty$ となる点列 $\{x_n\}_{n\in}\subset\Omega$ が取れるので, $\varphi(0)=v_*(0)$ を思い出すと

$$\lim_{n\to+\infty}(w(x_n)-v(x_n))\ge\varphi(0)+\frac{r^4}{16}-v_*(0)>0.$$

よって, $w(x_n)>v(x_n)$ を満たす $x_n\in B(0,r)$ が存在し, それを y とおけばよい. □

補題 4.1, 4.2 より Perron の方法による粘性解の存在定理は以下のように述べられる.

定理 4.2 $\underline{u},\overline{u}$ を $\overline{\Omega}$ 上で有界な関数で, それぞれ, (1.1) の粘性劣解, 粘性優解とし, $\underline{u}^*\le\overline{u}_*$ on $\overline{\Omega}$ を仮定する. このとき, (4.16) で定義した u は (1.1) の粘性解となる.

定理 4.2 の証明. u の定義 (4.16) より

$$\underline{u}_*\le u_*\le u\le u^*\le\overline{u}^* \quad \text{on } \overline{\Omega} \tag{4.22}$$

となる. 補題 4.1 とこの不等式より $u\in\mathcal{S}$ となる. u が (1.1) の粘性優解でないとすると, 補題 4.2 より $w(y)<u(y)$ を満たすような $w\in\mathcal{S}$, $y\in\Omega$ が存在するが, これは u の極大性に矛盾する. よって u は (1.1) の粘性優解でもある. □

定理 4.2 の系として (1.1) の Dirichlet 境界値問題に対する粘性解の一意存在を示す.

系 4.1 (1.1) に対して粘性解の比較定理が成り立つとする．また，g を $\partial\Omega$ で連続な関数とする．$\underline{u}$, $\overline{u}$ を $\overline{\Omega}$ 上で有界な関数で，それぞれ，(1.1) の粘性劣解，粘性優解とする．更に $\underline{u}_* = \underline{u}^* = \overline{u}_* = \overline{u}^* = g$ on $\partial\Omega$ を仮定する．このとき，(4.16) で定義した u は境界条件 $u = g$ on $\partial\Omega$ を満たす (1.1) の一意な粘性解である．更に $u \in C(\overline{\Omega})$ となる．

系 4.1 の証明. 比較定理と，$\underline{u}^* = \overline{u}_*$ on $\partial\Omega$ より $\underline{u}^* \le \overline{u}_*$ on $\overline{\Omega}$ が言える．定理 4.2 より (4.16) で定義された関数 u は (1.1) の粘性解である．また $\underline{u}_* = \overline{u}^* = g$ on $\partial\Omega$ と (4.22) より $u_* = u^* = g$ on $\partial\Omega$ となる．よって比較定理より u は $\overline{\Omega}$ 上で連続，かつ境界条件 $u = g$ on $\partial\Omega$ を満たす (1.1) の一意な粘性解となる．□

4.3 解の安定性

数値計算を念頭においた近似問題の収束，均質化理論や特異摂動問題における解の漸近解析等，応用面で最もよく用いられているのが粘性解の安定性である．

粘性解の安定性については命題 3.3 がある．この命題より粘性解は (広義) 一様収束に関して安定である．命題 3.3 を使うためには (少なくとも部分列を取ることによって) $\{u_n\}_{n\in}$ の広義一様収束性を示すことが鍵になる．これは，多くの場合，$\{u_n\}_{n\in}$ の一様有界性と同程度連続性を示すことによって為される．

ところが Barles & Perthame [3] では以下で述べるような，$\{u_n\}_{n\in}$ の一様有界性のみで十分な極限操作法が考案された．方程式 (1.1)，及び次の方程式を考える．

$$u + F_n(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

ここで，F_n は $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ で連続，かつ退化楕円型とする．$u_n \in C(\overline{\Omega})$ を方程式 (4.23) の粘性解とし，

$$\sup_{n\in} \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \tag{4.24}$$

を仮定する．$\overline{u}$, $\underline{u}$ を

$$\overline{u}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k(y) \mid y \in \overline{\Omega}, |y - x| < 1/n, k > n\},$$
$$\underline{u}(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k(y) \mid y \in \overline{\Omega}, |y - x| < 1/n, k > n\},$$

と定義する．このとき，次の定理が得られる．

定理 4.3 $n \to +\infty$ とするとき，$\{F_n\}_{n\in}$ は F に $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ 上で広義一様収束すると仮定する．$u_n \in C(\Omega)$ を (4.23) の粘性解とし，(4.24) を仮定する．このとき，$\overline{u}$ は (1.1) の粘性劣解であり，$\underline{u}$ は (1.1) の粘性優解である．

この系として次のような粘性解の安定性を得る．

系 4.2 (1.1) に対して粘性解の比較定理が成り立つと仮定する. このとき, $\overline{u} = \underline{u}$ on $\partial\Omega$ ならば $\underline{u} = \overline{u} = u \in C(\overline{\Omega})$ となり, u は (1.1) の粘性解になる. 更に

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{unif. on } \overline{\Omega} \quad (n \to +\infty) \tag{4.25}$$

となる.

これを標語的に言うと次のようになる.

粘性解の安定性 近似解の一様有界性 + 極限方程式の比較定理 $\longrightarrow$ 近似解の (広義) 一様収束

定理 4.3, 系 4.2 を証明しよう. 仮定 (4.24) より $\underline{u}, \overline{u}$ は $\overline{\Omega}$ 上で有界である. まず, 次の補題を示そう.

補題 4.3 $\overline{u}, \underline{u}$ は $\overline{\Omega}$ 上でそれぞれ上半連続, 下半連続になる.

補題 4.3 の証明. $\overline{u}$ の上半連続性のみを示す. $\underline{u}$ の場合も同様に証明できる.

$$\overline{u}_j(x) = \sup\{u_k(y) \mid y \in \overline{\Omega}, |y - x| < 1/j, k \geq j\}$$

とおく. このとき, 各 $x \in \Omega$ に対して $\{\overline{u}_j(x)\}$ は j に関して単調減少列である. $\varepsilon > 0$ と $x \in \overline{\Omega}$ を固定する. すると

$$|\overline{u}_{j_0}(x) - \overline{u}(x)| < \varepsilon \tag{4.26}$$

となる $j_0 \in \mathbb{N}$ を取ることができる. $k \geq 3j_0$, $|y - x| < 1/3j_0$ を満たす任意の $k \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$ に対して

$$u_k(z) \leq \overline{u}_{j_0}(x) \qquad (\forall z \in B(y, 1/3j_0))$$

が言える. 従って, $\overline{u}_{3j_0}(y) \leq \overline{u}_{j_0}(x)$ $(\forall y \in B(x, 1/3j_0))$ となるので, $\{\overline{u}_j(y)\}$ の単調減少性, (4.26), 及びこの不等式を使って

$$\overline{u}(y) \leq \overline{u}_{3j_0}(y) \leq \overline{u}_{j_0}(x) < \overline{u}(x) + \varepsilon \quad (\forall y \in B(x, 1/3j_0))$$

がわかり, $\overline{u}$ の上半連続性が言えた. □

定理 4.3 の証明. $\overline{u}$ が (1.1) の粘性劣解であることを示す. $\underline{u}$ の場合も同様に証明できるので省略する. 方針は補題 4.1 のそれと同じである.

任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $\overline{u} - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で極大値を取ったと仮定する. 簡単のため, $x_0 = 0$ とする. $r > 0$ を $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$ かつ, 0 が $\overline{B(0,r)}$ における $u^* - \varphi$ の最大点となるように選んでおく. 更に, φ を修正することで

$$\overline{u}(0) - \varphi(0) = 0, \overline{u}(x) - \varphi(x) \leq -|x|^4 \quad (\forall x \in \overline{B(0,r)})$$

としてよい. $\overline{u}$ の定義より

$$k_j \longrightarrow +\infty,\ x_{k_j} \longrightarrow 0,\ u_{k_j}(x_{k_j}) \longrightarrow \overline{u}(0) \quad \text{as } j \to +\infty$$

となる $\{k_j\}_{j\in} \subset \mathbb{N}$, $\{x_{k_j}\}_{j\in} \subset \overline{B(0,r)}$, $\{u_{k_j}\}_{j\in}$ が存在する. 簡単のため, $k_j = j$ としておく. $u_j - \varphi$ の $\overline{B(0,r)}$ における最大点を y_j とする. このとき, $\overline{B(0,r)}$ がコンパクトであることと (4.24) より (必要ならば部分列を取って)

$$y_j \longrightarrow \exists x_1 \in \overline{B(0,r)} \quad (j \to +\infty) \tag{4.27}$$

とできる. ここで, $u_j(x_j) - \varphi(x_j) \leq u_j(y_j) - \varphi(y_j)$ より

$$\begin{aligned}
0 = \overline{u}(0) - \varphi(0) &= \lim_{j\to+\infty}(u_j(x_j) - \varphi(x_j)) \leq \liminf_{j\to+\infty}(u_j(y_j) - \varphi(y_j)) \\
&\leq \limsup_{j\to+\infty}(u_j(y_j) - \varphi(y_j)) \\
&\leq \lim_{l\to+\infty} \sup\{u_k(y) - \varphi(y) \mid k \geq l, y \in \Omega, |y - x_1| < 1/l\} \\
&= \overline{u}(x_1) - \varphi(x_1) \leq -|x_1|^4 \leq 0
\end{aligned}$$

を得る. この不等式と φ の連続性より

$$y_j \longrightarrow 0,\ u_j(y_j) \longrightarrow \overline{u}(0) \quad (j \to +\infty)$$

が示される. u_j は (4.23) の粘性劣解であることと命題 3.1 より,

$$u_j(x_j) + F_j(x_j, u_j(x_j), D\varphi(x_j), D^2\varphi(x_j)) \leq 0$$

となるので, $j \to +\infty$ とすると F_j の広義一様収束性より

$$\overline{u}(0) + F(0, \overline{u}(0), D\varphi(0), D^2\varphi(0)) \leq 0$$

が得られる. □

系 4.2 の証明. 定理 4.3 と $\overline{u} = \underline{u}$ on $\partial\Omega$ より比較定理を使って $\overline{u} = \underline{u} = u$ on $\overline{\Omega}$, $u \in C(\overline{\Omega})$ がわかる.

(4.25) を示す. そのためには $x_n \in \overline{\Omega}$ を

$$\|u_n - u\|_{C(\overline{\Omega})} = |u_n(x_n) - u(x_n)|$$

として $|u_n(x_n) - u(x_n)| \to 0$ $(n \to +\infty)$ を証明すればよい. これが成り立たないすると $\varepsilon_0 > 0$ と $\{n_k\}_{k\in}$ が存在して

$$n_k \longrightarrow +\infty \quad (k \to +\infty),\ |u_{n_k}(x_{n_k}) - u(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

記号を簡単にするため, $n_k = k$ としておく. $\overline{\Omega}$ がコンパクトなので (部分列をとることによって)

$$x_k \longrightarrow x_0 \quad (k \to +\infty) \tag{4.28}$$

となる. 更に

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty} u_k(x_k) &\leq \lim_{l\to+\infty} \sup\{u_n(y) \mid n \geq l, y \in \Omega, |y-x_0| < 1/l\} \\ &= \overline{u}(x_0) = u(x_0) = \underline{u}(x_0) \\ &= \lim_{l\to+\infty} \inf\{u_n(y) \mid n \geq l, y \in \Omega, |y-x_0| < 1/l\} \\ &\leq \liminf_{k\to+\infty} u_k(x_k)\end{aligned}$$

より, $u_k(x_k) \to u(x_0)$ $(k \to \infty)$ も得られる. これと, (4.28), u の連続性より

$$0 < \varepsilon_0 \leq \lim_{k\to+\infty} |u_k(x_k) - u(x_k)| = |u(x_0) - u(x_0)| = 0$$

を得るが, これは矛盾である. □

5 あとがき

粘性解の概念が生まれて 20 年以上経ち, それに関する成書が多く出ている現在, 粘性解の一意存在, 安定性といった基礎理論はほぼ完成し, 何らかの非線形問題を考察するための道具となった感がある. となると, 今後はどのような方向に研究を進めていくのがよいだろうか？ 浅学な筆者が簡単に思いつくこととしては以下のような方向があるだろう.

(1) 従来のものとは異なる, 退化した方程式, 或いは特異性をもつ問題への応用

粘性解は退化した偏微分方程式に対する解の一意存在を考えるために導入された弱解の概念であった. ところが, 1990 年代以降の研究を眺めると, 退化した方程式だけでなく, 平均曲率流に対する等高面方程式をはじめとする, 特異性を持つ問題に対する可解性の研究にも応用されている. 最近の応用に関しては Jensen [28], Fukagai, Ito & Narukawa [15], Ishibashi & Koike [19], Giga [17], H. Ishii & Shimano [26] 等を参照.

これらの研究のように退化性や特異性を持っている問題への応用は重要であろう.

(2) 粘性解の正則性

1 節でも触れたが, Caffarelli [4] は一様楕円型偏微分方程式に対する粘性解の内部正則性を最大値原理と Calderón-Zygmund 分解を使って得た. それを受けて Caffarelli, Crandall, Kocan, & Święch [6] では L^p-粘性解の概念が導入され, 粘性解に対する L^p 理論の基礎が与えられた. これによって係数が可測関数であるような非発散形偏微分方程式に対する粘性解が定義できるようになり, 実解析的方法を使った粘性解の正則性の研究が始まった. その中で Koike & Święch [30] では Du に関して 2 次の増大度を持つ場合に Hölder 連続な L^p-粘性解の存在が示されている.

今までに培われてきた偏微分方程式に対する L^p 理論の成果を使いながら, 粘性解のより高い正則性や退化した方程式への応用を考えるのは意味があると思われる.

当然のことながら, これらとは全く別の方向に研究が進展することもあるだろうし, 思いがけない分野から面白い問題を得ることもあるだろう.

最後に, 本稿を読んで粘性解理論に興味を持たれた方にはしっかりした内容をもつ成書を勉強されて, 御自身の道具の 1 つとして備えてもらえれば幸いである.

謝辞 この原稿は発展方程式若手セミナーでの特別講演での内容を大幅に修正・加筆したものである. 特別講演の機会を与えていただいた幹事の北直泰氏 (九州大学大学院数理学研究院) に感謝の意を表します. 台風接近にもかかわらず, 北氏はこのセミナーを無事に終了させるために適切な対応をしていただきました. このことにも感謝したいと思います。また, 北氏の下でセミナーの運営にあたっていただいた九州大学大学院数理学府院生諸氏にも紙上を借りてお礼申し上げます.

参考文献

[1] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equatoins, Sysytem & Control.* Birkhäuser, Boston, 1999.

[2] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi, Mathématiques & Applications 17.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] G. Barles and B. Perthame. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping problems. *Math. Model. Numer. Anal.*, 21:557–579, 1987.

[4] L. A. Caffarelli. Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations. *Ann. Math.*, 130:189–213, 1989.

[5] L. A. Caffarelli and X. Cabré. *Fully Nonlinear Elliptic Equations, Colloquium Publications 43.* Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1997.

[6] L. A. Caffarelli, M. G. Crandall, M. J. Kocan, and A. J. Święch. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49:365–397, 1996.

[7] I. Capuzzo-Dolcetta and P.-L. Lions. *Viscosity solutions and Applications, Lecture Note in Mathematics 1660.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geometry*, 33:749–786, 1991.

[9] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P.-L.Lions. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. A. M. S.*, 282:487–502, 1984.

[10] M. G. Crandall and H. Ishii. The maximum principle for semicontinuous functions. *Differential Integral Equations*, 3:1001–1014, 1990.

[11] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. A. M. S.*, 27:1–67, 1992.

[12] M. G. Crandall and P.-L.Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. A. M. S.*, 277:1–43, 1983.

[13] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. *J. Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.

[14] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Applications of Mathematics 25.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] N. Fukagai, M. Ito, and K. Narukawa. Limit as $p \to \infty$ of p-Laplace eigenvalue problems and L^∞-inequality of the Poincaré type. *Differential Integral Equations*, 12:183–206, 1999.

[16] Y. Giga. Surface Evolution Equations – a level set method. Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics 71, 2002.

[17] Y. Giga. Viscosity solutions with shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56:431–480, 2002.

[18] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] T. Ishibashi and S. Koike. On fully nonlinear PDEs derived from variational problems of L^p norms. *SIAM J. Math. Anal.*, 33:545–569, 2001.

[20] H. Ishii. Perron's method for Hamilton-Jacobi equations. *Duke Math. J.*, 55:369–384, 1987.

[21] H. Ishii. ハミルトン・ヤコビ方程式の解の存在と一意性について. **第 *8* 回発展方程式若手セミナー報告集**, 00:1–34, 1987.

[22] H. Ishii. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:14–45, 1989.

[23] H. Ishii. 非線形偏微分方程式の粘性解について. **数学**, 46:144–157, 1994.

[24] H. Ishii. 粘性解とその応用. **数学**, 47:97–110, 1995.

[25] H. Ishii and P.-L. Lions. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *J. Differential Equations*, 83:26–78, 1990.

[26] H. Ishii and K. Shimano. Asymptotic analysis for a class of infinite systems of first-order PDE: nonlinear parabolic PDE in the singular limit. *Comm. Partial Differential Equations*, 28:409–438, 2003.

[27] R. Jensen. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 101:1–27, 1988.

[28] R. Jensen. Uniqueness of Lipschitz extenstions: Minimizing the sup norm of the gradient. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 123:51–74, 1993.

[29] S. Koike. A Beginner's guide to the Theory of Viscosity Solutions. preprint, 2003.

[30] S. Koike and A. Święch. Maximum principle and existence of L^p-viscosity solutions for fully nonlinear uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms. NoDEA (to appear), 2001.

[31] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Equations, part ii: Viscosity solutions and uniqueness. *Comm. Partial Differential Equations*, 8:1229–1276, 1983.

一 般 講 演

流され侍りけるとき、家の梅の花を見侍て　贈太政大臣

東風(こち)吹かば にほひをこせよ 梅の花 主(あるじ)なしとて 春な忘れそ

（『拾遺和歌集』巻第十六・雑春・千六）

≪口語訳≫流された時、家の梅の花を見て　贈太政大臣（菅原道真）

東から春風が吹く時期になれば、香りを（風に乗せて、西の果て九州の地まで）送りよこしなさい、梅の花よ主人がいないからといって、春を忘れるなよ

4 階非線形 Schrödinger 型方程式の初期値問題について

瀬片 純市 (Jun-ichi Segata)
九州大学大学院数理学府
Graduate School of Mathematics,
Kyushu university

1 Introduction

4 階非線形 Schrödinger 型方程式の初期値問題について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + \nu\partial_x^4 u = F(u, \overline{u}, \partial_x u, \partial_x \overline{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \overline{u}), & t,\ x \in \mathbf{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで非線形項 F は次で与えられる.

$$\begin{aligned} F(u, \overline{u}, \partial_x u, \partial_x \overline{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \overline{u}) = & -\frac{1}{2}|u|^2 u + \lambda_1 |u|^4 u + \lambda_2 (\partial_x u)^2 \overline{u} + \lambda_3 |\partial_x u|^2 u \\ & + \lambda_4 u^2 \partial_x^2 \overline{u} + \lambda_5 |u|^2 \partial_x^2 u, \end{aligned}$$

また $\lambda_1 = 3\mu/4, \lambda_2 = 2\mu - \nu/2, \lambda_3 = 4\mu + \nu, \lambda_4 = \mu, \lambda_5 = 2\mu - \nu$ であり ν, μ は実定数とする.

細長い渦管のことを渦糸と呼ぶ. 方程式 (1.1) は境界のない無限領域を満たす非圧縮, 非粘性流体中の渦糸の 3 次元運動を記述する既存のモデル(Da Rios モデル [7])

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = -\frac{1}{2}|u|^2 u,$$

にさらに渦核断面が楕円形に変形することを考慮したモデルとして Fukumoto-Moffatt [9] により提唱された.

また, (1.1) は $\mu + \nu/2 = 0$ のとき完全可積分となり次のような保存量を持つことが知られている(Langer-Perline [10] 参照):

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} |u|^2 dx, \qquad \Phi_2(u) = -\frac{i}{2}\int_{\mathbf{R}} (\partial_x u)\overline{u} dx,$$
$$\Phi_3(u) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (\partial_x^2 u)\overline{u} dx - \frac{1}{8}\int_{\mathbf{R}} |u|^4 dx, \cdots.$$

ここでは, 初期値問題 (1.1) の Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$, $s \in \mathbf{R}$ での時間局所適切性及び大域的適切性について得られた結果を報告する. Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ は次のように定義される:

$$H^s(\mathbf{R}) = \{u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R});\ (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_0(\xi) \in L^2\}.$$

また初期値問題 (1.1) が $H^s(\mathbf{R})$ で時間局所適切であるとは次のように定義される.

Definition. 初期値問題 (1.1) が $H^s(\mathbf{R})$ で時間局所適切である.
$\rightleftharpoons$ $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ が存在し, 時間区間 $[-T, T]$ で (1.1) を満たす $u(t)$ が一意に存在する. さらに $u(t)$ は次の性質を満たす.
(i) $u \in C([-T, T];\ H^s(\mathbf{R})) \cap Y_T = X_T$,
(ii) data-solution flow-map $H^s(\mathbf{R}) \to X_T$ $(u_0 \mapsto u(t))$ は連続である, すなわち

$$\forall u_0 \in H^s(\mathbf{R}),\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon,\ \|u_0\|_{H^s}) > 0; \qquad \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s} < \delta \Rightarrow \|u - \tilde{u}\|_{X_T} < \epsilon,$$

ここに, $\tilde{u}$ は初期値を $\tilde{u}_0$ とする (1.1) の解. また T を任意に大きくとれるとき (1.1) は $H^s(\mathbf{R})$ で時間大域的に適切であるという.

主定理を述べる前にいくつか記号を導入する. 関数 $u(x,t)$ に対して空間変数 x についての Fourier 変換を $\hat{u} = \mathcal{F}_x u$ と表す. 時間変数 t についても同様に定義する. 時間及び空間両辺数についての Fourier 変換を $\widehat{\widehat{u}}(\tau,\xi) = \mathcal{F}_t\mathcal{F}_x u(\tau,\xi)$ と表す. 作用素 D_x, $\langle D_x\rangle$ を $D_x = \mathcal{F}_x^{-1}|\xi|\mathcal{F}_x$ 及び $\langle D_x\rangle = \mathcal{F}_x^{-1}\langle\xi\rangle\mathcal{F}_x$ で定義する, ただし $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ とする. 簡単のため関数空間 $L_t^p(\mathbf{R}; L_x^q(\mathbf{R}))$ を $L_t^p(L_x^q)$, $H_t^p(\mathbf{R}; H_x^q(\mathbf{R}))$ を $H_t^p(H_x^q)$ と表すことにする. 関数 $\psi(t)$ を区間 $[-1,1]$ 上の cut-off function, すなわち, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\psi(t) \equiv 1$ for $|t| \le 1, \equiv 0$ for $|t| \ge 2$. $\delta > 0$ に対し $\psi_\delta(t) = \psi(t/\delta)$ とおく. $W_\nu(t)$ を (1.1) の線形化方程式により生成される unitary 群とする.

Duhamel の原理より (1.1) は次の積分方程式に書き換えられる.

$$u(t) = W_\nu(t)u_0 - i\int_0^t W_\nu(t-t')F(u,\overline{u},\partial_x u,\partial_x\overline{u},\partial_x^2 u,\partial_x^2\overline{u})(t')dt'. \tag{1.2}$$

主結果は以下の通りである.

Theorem 1.1 **[21]** $\nu < 0$ とする. $s > 7/12$, $b \in (1/2, 3/4)$ ならば任意の $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$ に対して $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ が存在し, 時間区間 $[-T,T]$ で (1.2) を満たす $u(t)$ が以下のクラスで一意的に存在する.

$$\begin{aligned} u \in\, & C([-T,T]; H^s(\mathbf{R})), \\ \psi_T W_\nu(-t)u \in\, & H_t^b(\mathbf{R}; H_x^s(\mathbf{R})), \\ \psi_T W_\nu(-t)F \in\, & H_t^{b-1}(\mathbf{R}; H_x^s(\mathbf{R})). \end{aligned}$$

さらに与えられた $T' \in (0,T)$ に対しdata-solution flow-map $H^s(\mathbf{R}) \longrightarrow C([-T',T']; H^s(\mathbf{R}))$ $(u_0 \longmapsto u)$, $H^s(\mathbf{R}) \longrightarrow H_t^b(\mathbf{R}; H_x^s(\mathbf{R}))$ $(u_0 \longmapsto \psi_{T'}W_\nu(-t)u)$ はそれぞれ Lipschitz 連続になる.

とくに $\lambda_5 = 2\mu - \nu = 0$ のときは初期データのクラスをさらに広くとることができる. より正確には

Theorem 1.2 **[20]** $\nu < 0$, $\lambda_5 = 2\mu - \nu = 0$ とする. このとき (1.1) は $H^s(\mathbf{R})$, $s \ge 1/2$ において時間局所適切である.

先で述べたように方程式 (1.1) は $\mu + \nu/2 = 0$ のとき完全可積分であるが, 保存量 Φ_3 および Gagliardo-Nirenberg の不等式, Young の不等式:

$$\|u\|_{L^4}^4 \le C\|u\|_{L^2}^3\|\partial_x u\|_{L^2} \le \frac{C^2}{2}\|u\|_{L^2}^6 + \frac{1}{2}\|\partial_x u\|_{L^2},$$

により H^1 a priori 評価を得る. したがって次を得る.

Corollary 1.3 **[21]** $\nu < 0$, $\mu + \nu/2 = 0$ とする. このとき (1.1) は $H^1(\mathbf{R})$ において時間大域的に適切である.

方程式 (1.1) は非線形項に u の導関数を含んでいるため derivative loss という困難を生じる. この困難を回避するために Kato's smoothing effect と呼ばれる線形化方程式の解の持つ平滑化効果を用いる:

$$\|D_x^{3/2}W_\nu(t)u_0\|_{L_x^\infty(L_t^2)} \le C\|u_0\|_{L_x^2}.$$

しかしながら, 上の平滑化効果において吸収できる微分のオーダーは 3/2 であり, このままでは 2 階微分を含む項 ($u^2\partial_x^2\bar{u}$ と $|u|^2\partial_x^2 u$) を処理することができない. そこでわれわれは Bourgain [4], Kenig-Ponce-Vega [13], [15] Klainerman-Machedon [17], [18]によって確立された Fourier restriction method とよばれる方法を用いた. 従来非線形 Schrödinger 方程式などを解く際, 時間変数, 空間変数を個別に扱った空間上において縮小写像の原理が用いられてきた (Kenig-Ponce-Vega [14] 等参照) が Bourgain らは線形項の主要項が生成する発展作用素をノルムに組み込むことにより(以下の $X_{s,b}^{\nu}$ の定義 (1.3) 参照) 個々の方程式に特化した関数空間で考えた. このノルムを用いることによりわれわれは非線形項に u の 2 階導関数 $\partial_x^2 u$, $\partial_x^2\bar{u}$ が含まれているにも関わらず縮小写像の原理により解の存在を示すことができた.

上で述べたようにTheorem 1.1 及び Theorem 1.2 を証明するために Bourgain らにより導入された Fourier restriction norm method を用いるが, (1.1) に対して Fourier restriction space $X_{s,b}^{\nu}$ を次のように定義する. $b, s, \nu \in \mathbf{R}$ に対し $\phi_\nu(\xi) = \xi^2 - \nu\xi^4$ とおく. このとき $\tau + \phi_\nu(\xi)$ は (1.1) の線形化方程式の symbol を表していることに注意する. $X_{s,b}^{\nu}$ を次のように定義する.

$$X_{s,b}^{\nu} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2); \|u\|_{X_{s,b}^{\nu}} < \infty\},$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{X_{s,b}^{\nu}} &= \|\langle\tau + \phi_\nu(\xi)\rangle^b \langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L_\xi^2(L_\tau^2)} \\ &= \|W_\nu(-t)u(t)\|_{H_t^b(H_x^s)}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

積分方程式 (1.2) を介して Fourier restriction space $X_{s,b}^{\nu}$ のある閉球上で Banach の不動点定理を用いることにより (1.1) の解の存在を示す.

2 Linear Estimates

ここでは Theorem 1.1 及び Theorem 1.2 を証明するために必要となる線形評価について述べる.

Proposition 2.1 (Kenig-Ponce-Vega [13], [15]) $s \in \mathbf{R}$, $1/2 < b < b' < 1$, $\delta \in (0,1)$ とする. このとき次の不等式が成立する.

$$\|\psi_\delta W(t)u_0\|_{X_{s,b}} \le C\delta^{(1-2b)/2}\|u_0\|_{H^s}, \tag{2.1}$$

$$\|\psi_\delta F\|_{X_{s,b-1}} \le C\delta^{b'-b}\|F\|_{X_{s,b'-1}}, \tag{2.2}$$

$$\left\|\psi_\delta \int_0^t W(t-t')F(t')dt'\right\|_{X_{s,b}} \le C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X_{s,b-1}}, \tag{2.3}$$

$$\left\|\psi_\delta \int_0^t W(t-t')F(t')dt'\right\|_{L_t^\infty((0,T);H_x^s)} \le C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X_{s,b-1}}. \tag{2.4}$$

Proposition 2.2 $\nu < 0$, $b > 1/2$ とする. また *supp* $u(\cdot, x) \subset (-T, T), T < 1$ とする. このとき次の不等式が成立する.

$$\|D_x^{\alpha\beta\gamma/2}u\|_{L_x^q(L_t^p)} \le C\|u\|_{X_{0,b}^{\nu}}, \quad (Strichartz\ estimate) \tag{2.5}$$

$$\|D_x^{-1/4}u\|_{L_x^4(L_t^\infty)} \le C\|u\|_{X_{0,b}^{\nu}}, \quad (Kenig-Ruiz\ estimate) \tag{2.6}$$

$$\|D_x^{3/2}u\|_{L_x^\infty(L_t^2)} \le C\|u\|_{X_{0,b}^{\nu}}, \quad (Kato\ type\ smoothing\ effect) \tag{2.7}$$

$$\|\langle D_x\rangle^{-1-\epsilon}u\|_{L_x^2(L_t^\infty)} \le C\|u\|_{X_{0,b}^\nu}, \quad (\mathit{Maximal\ function\ estimate}) \tag{2.8}$$

ここに $(\alpha,\beta,\gamma)\in[0,1]\times[0.1]\times[0,1]$, $(q,p)=(8/(\alpha(\beta+1)),2/(1-\alpha))$, $\epsilon>0$.

Remark. とくに Strichartz 評価 (2.5) において $(\alpha,\beta,\gamma)=(2/3,1,0)$, $(4/5,0,0)$ とすると次の不等式を得る.

$$\|u\|_{L_x^6(L_t^6)} \le C\|u\|_{X_{0,b}^\nu}, \tag{2.9}$$

$$\|u\|_{L_x^{10}(L_t^{10})} \le C\|u\|_{X_{0,b}^\nu}. \tag{2.10}$$

また Kato type smoothing effect (2.7) 及び Plancherel の等式 $\|u\|_{L_x^2(L_t^2)}=\|u\|_{X_{0,0}^\nu}$ を補間することにより $b'>1/4$ に対し次が成り立つ.

$$\|D_x^{3/4}u\|_{L_x^4(L_t^2)} \le C\|u\|_{X_{0,b'}^\nu}. \tag{2.11}$$

Proposition 2.2 の不等式 (2.5)-(2.7) の証明については本質的には Kenig-Ponce-Vaga [11] による([20] 参照). 不等式 (2.8) の証明については [21] 参照.

3 Crucial Nonlinear Estimates and Proof of Main Theorems

ここではまず Theorem 1.1 及び Theorem 1.2 を証明するために必要となる非線形評価について述べる.

Proposition 3.1 $\nu<0$ とする. また $supp\ u(\cdot,x)\subset(-T,T)$, $T<1$ とする.
$s\ge -1/2, a\in(-1/2,-1/4], b>1/2$ ならば

$$\||u|^2u\|_{X_{s,a}^\nu} \le C\|u\|_{X_{s,b}^\nu}^3, \tag{3.1}$$

$s\ge 0, a\le 0, b>1/2$ ならば

$$\||u|^4u\|_{X_{s,a}^\nu} \le C\|u\|_{X_{s,b}^\nu}^5, \tag{3.2}$$

$s\ge 1/2, a\in(-1/2,-1/4], b>1/2$ ならば

$$\|(\partial_x u)^2\bar{u}\|_{X_{s,a}^\nu} \le C\|u\|_{X_{s,b}^\nu}^3, \tag{3.3}$$

$$\||\partial_x u|^2u\|_{X_{s,a}^\nu} \le C\|u\|_{X_{s,b}^\nu}^3, \tag{3.4}$$

$s\ge 1/2, a\in(-1/2,-3/8], b>1/2$ ならば

$$\|u^2\partial_x^2\bar{u}\|_{X_{s,a}^\nu} \le C\|u\|_{X_{s,b}^\nu}^3, \tag{3.5}$$

$s>7/12, a<-1/4, b>1/2$ ならば

$$\||u|^2\partial_x^2u\|_{X_{s,a}^\nu} \le C\|u\|_{X_{s,b}^\nu}^3, \tag{3.6}$$

が成立する.

Proof of Proposition 3.1. ここでは高階の項 $u^2\partial_x^2\bar{u}$, $|u|^2\partial_x^2 u$ に対する評価, すなわち, 不等式 (3.5) 及び (3.6) についてのみ証明する．まず最初に不等式 (3.6) について証明する. $X_{s,b}^{\nu}$ の定義 (1.3) 及び双対性より不等式 (3.6) は次の不等式を示すことにより得られる: 任意の $0 \le f_4 \in L_\tau^2(L_\xi^2)$ に対し,

$$I \equiv \int_{\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_\xi} \frac{\langle\xi_4\rangle^s|\xi_3|^2}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s} \frac{\prod_{j=1}^4 f_j(\tau_j,\xi_j)}{\prod_{j=1}^3\langle\tau_j+(-1)^j\phi_\nu(\xi_j)\rangle^b\langle\tau_4+\phi_\nu(\xi_4)\rangle^{|a|}} \le \prod_{j=1}^4 \|f_j\|_{L_\tau^2(L_\xi^2)}. \tag{3.7}$$

ここに f_j $(j=1,2,3)$ は次のように定義される.

$$f_j(\tau,\xi) = \langle\xi\rangle^s\langle\tau+(-1)^j\phi_\nu(\xi)\rangle^b|\hat{u}((-1)^j\tau,(-1)^j\xi)|,$$

また Γ_τ, Γ_ξ は$\mathbf{R}^4$ 上の超平面を表す:

$$\Gamma_\tau = \{(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)\in\mathbf{R}^4; \tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4=0\},$$
$$\Gamma_\xi = \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in\mathbf{R}^4; \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0\}.$$

I の積分領域を $|\xi_4|\ge 1$ と $|\xi_4|\le 1$ の2つに分ける.
<u>$|\xi_4|\ge 1$ の場合.</u> ここでは不等式 (3.6) を $7/12 < s < 3/4$ の時のみ証明する. $s \ge 3/4$ の場合も同様に証明することができる. 便宜上 $|\xi_1|,|\xi_2|,|\xi_3|$ を大きい方から順に $|\xi_{max}|,|\xi_{med}|,|\xi_{min}|$ とおく. このとき $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$ ならば $|\xi_{max}|\ge|\xi_4|/3$ であることに注意すると,

$$\frac{|\xi_3|^2\langle\xi_4\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s} \le \frac{|\xi_3|^2|\xi_4|^{3/4}}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s} \le \frac{|\xi_{\max}|^2|\xi_4|^{3/4}}{|\xi_{med}|^{1/4}\langle\xi_{min}\rangle^{3s-3/4}|\xi_{max}|^{1/2}}, \tag{3.8}$$

を得る. 一般性を失うことなく $|\xi_1|=|\xi_{min}|$, $|\xi_2|=|\xi_{med}|$, $|\xi_3|=|\xi_{max}|$ としてよい.

$$\hat{\hat{F}}_{j,b}(\tau,\xi) = \frac{f_j(\tau_j,\xi_j)}{\langle\tau_j+(-1)^j\phi_\nu(\xi_j)\rangle^b}, \qquad \text{for } j=1,\cdots,4, \tag{3.9}$$

とおく. Proposition 2.2 (2.6), (2.7), (2.8), (2.11), Plancherel の等式および Hölder の不等式を用いると, この領域における積分値 I は次のように評価される

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_\xi} \frac{f_1(\tau_1,\xi_1)}{\langle\tau_1-\phi_\nu(\xi_1)\rangle^b\langle\xi_1\rangle^{3s-3/4}} \frac{f_2(\tau_2,\xi_2)}{\langle\tau_2+\phi_\nu(\xi_2)\rangle^b|\xi_2|^{1/4}} \frac{|\xi_3|^{3/2}f_3(\tau_3,\xi_3)}{\langle\tau_3-\phi_\nu(\xi_3)\rangle^b} \frac{|\xi_4|^{3/4}f_4(\tau_4,\xi_4)}{\langle\tau_4+\phi_\nu(\xi_4)\rangle^{|a|}}\\
\le& C\int_{\mathbf{R}^2} |\langle D_x\rangle^{-3s+3/4}F_{1,b}(t,x)||D_x^{-1/4}F_{2,b}(t,x)||D_x^{3/2}F_{3,b}(t,x)||D_x^{3/4}F_{4,|a|}(t,x)|dtdx\\
\le& \|\langle D_x\rangle^{-3s+3/4}F_{1,b}\|_{L_x^2(L_t^\infty)}\|D_x^{-1/4}F_{2,b}\|_{L_x^4(L_t^\infty)}\|D_x^{3/2}F_{3,b}\|_{L_x^\infty(L_t^2)}\|D_x^{3/4}F_{4,|a|}\|_{L_x^4(L_t^2)}\\
\le& C\prod_{j=1}^4\|f_j\|_{L_\tau^2(L_\xi^2)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで $-3s+3/4 < -1$ であることを用いた.
<u>$|\xi_4|\le 1$ の場合.</u> この場合は $|\xi_4|\ge 1$ の場合より容易である. 前の場合と同様に $|\xi_1|\le|\xi_2|\le|\xi_3|$ と仮定してよい.

$$\frac{|\xi_3|^2\langle\xi_4\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s} \le \frac{|\xi_3|^2}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s} \le \frac{|\xi_{\max}|^2}{|\xi_{med}|^{1/4}|\xi_{min}|^{1/4}|\xi_{max}|^{1/2}}. \tag{3.11}$$

であることが容易にわかるので Proposition 2.2 (2.6), (2.7) を用いると, この領域における積分値 I は次のように評価される

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_\xi} \frac{f_1(\tau_1,\xi_1)}{\langle\tau_1-\phi_\nu(\xi_1)\rangle^b|\xi_1|^{1/4}} \frac{f_2(\tau_2,\xi_2)}{\langle\tau_2+\phi_\nu(\xi_2)\rangle^b|\xi_2|^{1/4}} \frac{|\xi_3|^{3/2}f_3(\tau_3,\xi_3)}{\langle\tau_3-\phi_\nu(\xi_3)\rangle^b} f_4(\tau_4,\xi_4)\\
\le& C\int_{\mathbf{R}^2} |D_x^{-1/4}F_{1,b}(t,x)||D_x^{-1/4}F_{2,b}(t,x)||D_x^{3/2}F_{3,b}(t,x)||F_{4,0}(t,x)|dtdx\\
\le& \|D_x^{-1/4}F_{1,b}\|_{L_x^4(L_t^\infty)}\|D_x^{-1/4}F_{2,b}\|_{L_x^4(L_t^\infty)}\|D_x^{3/2}F_{3,b}\|_{L_x^\infty(L_t^2)}\|F_{4,0}\|_{L_x^2(L_t^2)}\\
\le& C\prod_{j=1}^4 \|f_j\|_{L_\tau^2(L_\xi^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

(3.10) 及び (3.12) より不等式 (3.6) を得る.

次に不等式 (3.5) について証明する. 不等式 (3.6) 同様, 双対性により不等式 (3.5) は次の不等式を示すことにより得られる: 任意の $0\le f_4\in L_\tau^2(L_\xi^2)$ に対し,

$$
II\equiv\int_{\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_\xi}\frac{\langle\xi_4\rangle^s|\xi_2|^2}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s}\frac{\prod_{j=1}^4 f_j(\tau_j,\xi_j)}{\prod_{j=1}^3\langle\tau_j+(-1)^j\phi_\nu(\xi_j)\rangle^b\langle\tau_4+\phi_\nu(\xi_4)\rangle^{|a|}}\le\prod_{j=1}^4\|f_j\|_{L_\tau^2(L_\xi^2)}. \tag{3.13}
$$

不等式 (3.13) を示す際本質的となるのが次の不等式である.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\langle\xi_4\rangle^s|\xi_2|^2}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s}\frac{1}{\prod_{j=1}^3\langle\tau_j+(-1)^j\phi_\nu(\xi_j)\rangle^b\langle\tau_4+\phi_\nu(\xi_4)\rangle^{|a|}}\\
\le& Ch_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\chi_{A\cup B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)+C\sum_{i=1}^4 h_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\chi_{R_i}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4),
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

ここに

$$
h_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\frac{\max\{\langle\xi_j\rangle,\langle\xi_k\rangle,\langle\xi_l\rangle\}^{7/4}}{\langle\xi_j\rangle^{1/4}\langle\xi_k\rangle^{1/4}\langle\xi_l\rangle^{1/4}}\frac{1}{\prod_{m\in\{j,k,l\}}^3\langle\tau_m+(-1)^m\phi_\nu(\xi_m)\rangle^b},
$$

$$
\begin{aligned}
A&\equiv\Big\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\Big|\ |\xi_1+\xi_2|\le 1\Big\},\\
B&\equiv\Big\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\Big|\ |\xi_1+\xi_4|\le 1\Big\},\\
C&\equiv\Big\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\Big|\ |\xi_1+\xi_2|\ge 1,\text{and } |\xi_1+\xi_4|\ge 1\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
R_i=\Big\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in C\Big|\ \max_{1\le j\le 4}\{|\tau_j+(-1)^j\phi_\nu(\xi_j)|\}=|\tau_i+(-1)^i\phi_\nu(\xi_i)|\Big\},
$$

for $i=1,2,3,4$, $\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$.

(3.14) の証明は複雑なのでここでは省略するが次の代数的な計算が point となる: $\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4=0$, $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$, $\nu<0$ ならば

$$
\begin{aligned}
&|\tau_1-\phi_\nu(\xi_1)|+|\tau_2+\phi_\nu(\xi_2)|+|\tau_3-\phi_\nu(\xi_3)|+|\tau_4+\phi_\nu(\xi_4)|\\
\ge&|\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4-\phi_\nu(\xi_1)+\phi_\nu(\xi_2)-\phi_\nu(\xi_3)+\phi_\nu(\xi_4)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&|-\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2+\xi_4^2+\nu(\xi_1^4-\xi_2^4+\xi_3^4-\xi_4^4)| \\
\geq&2|\xi_1+\xi_2||\xi_1+\xi_4|\left|-\nu\left\{\frac{1}{2}\xi_1^2+\frac{1}{2}\xi_2^2+\frac{1}{2}\xi_3^2+\frac{1}{2}\xi_4^2+(\xi_1+\xi_3)^2\right\}+1\right| \\
\geq&-\nu|\xi_1+\xi_2||\xi_1+\xi_4|(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2).
\end{aligned}
$$

あとは (3.13) の左辺に代数不等式 (3.14) を適用し, (3.10) 及び (3.12) と同様のステップを踏むことにより不等式 (3.5) を示すことができる (詳細は [20] 参照). □

Proof of Theorem 1.1 and Theorem1.2. $r=\|u_0\|_{H^s}$ とおく. $T\in(0,1)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(r)=&\{u\in\mathcal{S}'\ ;\ \|u\|_{X^\nu_{s,b}}\leq 2Cr\}, \\
\Phi(u)=&\psi(t)W_\nu(t)u_0-i\psi(t)\int_0^t W_\nu(t-t')\psi_T(t')F(t')dt',
\end{aligned}
$$

とおく. b,b' を Theorem 1.1 に対し$1/2<b<b'<3/4$, Theorem 1.2 に対し $1/2<b<b'<5/8$ とすると Proposition 2.1, Proposition 3.1 により $u\in\mathcal{B}(r)$ に対し, 次の不等式を得る:

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{X^\nu_{s,b}}\leq&\|\psi(t)W_\nu(t)u_0\|_{X^\nu_{s,b}}+\|\psi(t)\int_0^t W_\nu(t-t')\psi_T(t')F(t')dt'\|_{X^\nu_{s,b}} \\
\leq&C_0r+C_1\|\psi_TF\|_{X_{s,b-1}} \\
\leq&C_0r+C_1T^{b'-b}\|F\|_{X_{s,b-1}} \\
\leq&C_0r+C_1T^{b'-b}(\|u\|^3_{X_{s,b}}+\|u\|^5_{X_{s,b}}) \\
\leq&C_0r+C_1T^{b'-b}(1+r^2)r^3.
\end{aligned}
$$

したがって T を $T^{b'-b}\leq C_0\{(1+r^2)r^2C_1\}^{-1}$ と選ぶことにより $\Phi(u)\in\mathcal{B}(r)$ を得る. 同様にして $T>0$ を十分小さくとることにより Φ が $\mathcal{B}(r)$ 上縮小写像であることが示される. したがって Banach の不動点定理により $\mathcal{B}(r)\subset X^\nu_{s,b}$ において (1.1) の解の存在が言えた. $X^\nu_{s,b}$ 全体における解の一意性については [3] の4章を参照する. [3] と同様に次のようなノルムを定義する:

$$
\|u\|_{X_T}=\inf_w\{\|w\|_{X_{s,b}};\ w\in X_{s,b}\text{ such that }u(t)=w(t),\ t\in[-T,T]\text{ in }H^s(\mathbf{R})\}.
$$

$\|u-u'\|_{X_T}=0$ ならば $u(t)=u'(t)$ in $H^s(\mathbf{R})$ for $t\in[-T,T]$ である. 一意性の証明についての詳細は [3] を参照されたい. 解の persistency は Sobolev embedding $H^b_t(\mathbf{R};H^s_x(\mathbf{R}))\hookrightarrow C(\mathbf{R};H^s_x(\mathbf{R}))$ より直接したがう. □

4 Remark on the local well-posedness

この節ではわれわれの方法 (縮小写像の原理) により Theorem 1.2 が改良できない, すなわち, H^s, $s<1/2$ における時間局所適切性が示せないことを証明する.

Proposition 4.1 $s<1/2$ とし, $T>0$ とする. このとき次を満たす関数空間 X_T は存在しない.

$$X_T\hookrightarrow C([-T,T];H^s(\mathbf{R})), \tag{4.1}$$

$$\|W_\nu(t)u_0\|_{X_T}\leq C\|u_0\|_{H^s}, \tag{4.2}$$

$$\left\|\int_0^t W_\nu(t-t')\partial_x^2(|u|^2u)(t')dt'\right\|_{X_T}\leq C\|u\|^3_{X_T}. \tag{4.3}$$

Proposition 4.1 より H^s, $s < 1/2$ のとき (1.1) の data-solution flow-map が C^3-differentiable でないことが言える. より正確には次の Corollary を得る.

Corollary 4.2 $s < 1/2$ とする. このとき次を満たす $T > 0$ は存在しない: (1.1) の data-solution flow-map

$$S_t : u_0 \longmapsto u(t), \qquad t \in [-T, T],$$

は $H^s(\mathbf{R})$ 上の写像として原点において C^3 (Fréchet) differentiable である.

Proposition 4.1, Corollary 4.2 の証明には Molinet-Saut-Tzvetkov [19] のアイデアを用いる. 証明は背理法による. (4.1)-(4.3) を満たす関数空間 X_T があったとする. u_0 として次のようなものを考えることにより矛盾を導く.

$$u_0(x) = \gamma^{-1/2} N^{-s} \int_{|\xi - N| \le \gamma} e^{ix\xi} d\xi,$$

すなわち

$$\mathcal{F}_x u_0(\xi) = \gamma^{-1/2} N^{-s} \chi_{[N-\gamma, N+\gamma]}(\xi).$$

詳細は [20] 参照.

参考文献

[1] Ben-Artzi M. Koch H. and Saut J. C., *Dispersion estimates for fourth order Schrödinger equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), 87–92.

[2] Bekiranov D. Ogawa T. and Ponce G., *Weak solvability and well posedness of the coupled Schrödinger Korteweg-de Vries equations in the capillary-gravity interaction waves*, Proc, Amer. Math. Soc. **125** no.10 (1997), 2907-2919.

[3] Bekiranov D. Ogawa T. and Ponce G., *Interaction equations for short and long dispersive waves*, J. Funct. Anal. **158** (1998), 357-388.

[4] Bourgain J., *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I Schrödinger equations, II The KdV equation*, Geom, Funct. Anal. **3** (1993), 107-156, 209-262.

[5] Colliander J. Keel M. Staffilani G. Takaoka H. and Tao T., *A refined global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative*, SIAM Math. Anal. **34** (2002), 64-86

[6] Constantin P. and Saut J. C.,*Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), 413-439.

[7] Da Rios.,*On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape*, [in Italian] Rend, Circ. Mat. Palermo. **22** (1906), 117-135.

[8] Fukumoto Y.,*Three dimensional motion of a vortex filament and its relation to the localized induction hierarchy*, Eur. Phys. J. **B. 29** (2002), 167–171.

[9] Fukumoto Y. and Moffatt H. K., *Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part I. A higher-order asymptotic formula for the velocity*, J. Fluid. Mech. **417** (2000), 1-45.

[10] Langer J. and Perline R., *Poisson geometry of the filament equation*, J. Nonlinear Sci. **1** (1991), 71-93.

[11] Kenig C. E. Ponce G. and Vega L., *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 33–69.

[12] Kenig C. E. Ponce G. and Vega L., *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction mapping principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527-620.

[13] Kenig C.E. Ponce G. and Vega L., *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math J. **71** (1993), 1-21.

[14] Kenig C. E. Ponce G. and Vega L., *Small solution to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **10** (1993), 255–288.

[15] Kenig C. E. Ponce G. and Vega L., *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 573–603.

[16] Kenig C. E. Ponce G. and Vega L., *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Math. J. **106** (2001), 617-633.

[17] Klainerman S. and Machedon M.,*Space-time eatimates for null forms and tne local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1221–1268.

[18] Klainerman S. and Machedon M.,*Smoothing estimates for null forms and applications*, Duke Math. J., **81** (1995), 99–133.

[19] Molinet L. Saut J. C. and Tzvetkov N., *Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 982–988.

[20] Segata J., *Well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation related to the vortex filament*, Diff. and Integral Equations. **16** (2003), 841-864

[21] Segata J.,*Remark on well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation*, preprint. 2003

[22] Sjölin P., *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. **55** (1987), 699–715.

[23] Takaoka H., *Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces*, Electronic J. Diff. Eq. **42** (2001), 1-23.

[24] Takaoka H., *Well-posedness for the higher order nonlinear Schrödinger equation*, Adv in Math Sci and Appl. **10** (2000), 149-171.

[25] Vega L., *Schrödinger equations: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 874–878.

Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential

Rémi Carles(Bordeaux Univ., France)
中村能久[1] (熊本大 工)

1 Introduction

本稿では次のポテンシャル付きの非線形シュレディンガー方程式について考える.

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(x)u + \lambda|u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0 \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

ここで u は複素数値関数, $V(x) = E \cdot x$, $E \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は定ベクトル, $p > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ である. ボーズアインシュタイン凝縮の研究など, 近年ポテンシャル付きの非線形シュレディンガー方程式に関する多くの研究が為されている ([3, 4, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 19] 参照). 多くの場合, 空間に関して下に有界なポテンシャル, たとえば調和振動子の場合に議論が展開される. ポテンシャルが下に有界である仮定の下でエネルギーが正定値であるという事が導かれ, さらに局所解を大域的に接続するという議論が可能となる. 本稿では空間に関して非有界なポテンシャル $V(x) = E \cdot x$ に対して議論を進める.

$V(x) = E \cdot x$ は電場もしくは重力場を表し, 物理的にはシュタルク効果なる現象が起こる. 特に $\sigma(H_0) = [0, \infty)$ に対し $\sigma(H_E) = \mathbb{R}$, ただし $E \neq 0$, となるようにスペクトルの構造が著しく変わる (H_0, H_E は以下で定義). 線形ポテンシャル散乱理論においては短距離型と長距離型の臨界冪が自由粒子の場合のそれと異なるという結果が得られている ([1, 2, 9, 10, 16, 17, 18]). 証明においては次の Avron-Herbst の公式が用いられる. なお簡単のため, $E = (-1, 0, \dots, 0)$ とおく.

Theorem 1 ([2, 7]) *Let H_E be the closure of $(-1/2)\Delta - x_1$ on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Then H_E is self-adjoint, and for $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*

$$(\exp(-itH_E)f)(t,x) = \exp(-\frac{it^3}{6})\exp(itx_1)(\exp(-itH_0)f)(t, x + \frac{t^2}{2}E), \tag{1.3}$$

where $H_0 = (-1/2)\Delta$.

この公式を用いてシュタルクポテンシャルを伴った非線形シュレディンガー方程式について考える.

[1]Supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.
E-mail address:hisa@math.sci.kumamoto-u.ac.jp

2 Main Results

Definition 2 *The pair (q, r) of real numbers is said to be admissible if $1/r + 2/nq = 1/2$ with $2 \leq r \leq 2n/(n-2)$ when $n \geq 3$, $2 \leq r < \infty$ when $n = 2$, $2 \leq r \leq \infty$ when $n = 1$. We set $q \equiv \delta(r) = 4r/n(r-2)$.*

$$\begin{aligned}
&\Sigma(k) \\
&= \{f \in L^2 | \sum_{|\alpha+\beta| \leq k} \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_2^2 = \|f\|_{\Sigma(k)}^2 < \infty\}, \\
&k = 0, 1, \dots, \quad \Sigma \equiv \Sigma(1)
\end{aligned}$$

Avron-Herbst の公式 (1.3) を適用する事により非線形方程式 (1.1),(1.2) は

$$i\partial_t v = -\frac{1}{2}\Delta v + \lambda |v|^{p-1} v, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

$$v(0) = u_0 \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

に帰着される (正確には $u(t,x) = \exp(-it^3/6)\exp(itx_1)v(t, x + (t^2/2)E))$. したがってポテンシャルのない非線形シュレディンガー方程式に対してよく知られている事実より，次の結果が自動的に得られる.

Corollary 3 (L^2-Global existence) *Let $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $0 < p < 1 + 4/n$. Then (1.1) and (1.2) has a unique solution*

$$u \in C(\mathbb{R}; L^2) \cap L_{\mathrm{loc}}^{2/\delta(p+1)}(\mathbb{R}; L^{p+1}).$$

and satisfies $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ for $t \in \mathbb{R}$.

Corollary 4 (H^1-local existence) *Let $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $p > 1$, with $p < 1 + 4/(n-2)$ if $n \geq 3$. Then there exist $T_*(u_0), T^*(u_0) > 0$ such that (1.1) and (1.2) has a unique solution*

$$u \in C((-T_*, T^*); H^1) \cap C^1((-T_*, T^*); H^{-1})$$

Indeed

$$u, \nabla_x u \in C(I; L^2) \cap (\bigcap_{admissible(q,r)} L_{\mathrm{loc}}^q(I; L^r)),$$

where $I = (-T_*, T^*)$. And satisies

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \\
&\frac{1}{2}\|(tE - i\nabla_x)\, u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2\lambda}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla_x u_0\|_{L^2}^2 + \frac{2\lambda}{p+1}\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

If $T^* < \infty$ (resp. $T_* < \infty$), then $\|\nabla_x u(t)\|_{L^2} \to \infty$ as $t \uparrow T^*$ (resp. as $t \downarrow -T_*$). If in addition $u_0 \in \Sigma$, then $u \in C(I; \Sigma)$.

Corollary 5 (H^1-global existence) *In Corollary 4, we have $T^* = T_* = \infty$ under the following additional conditions.*

- *The nonlinearity is repulsive,* $\lambda \geq 0$.
- $\lambda < 0$ *and* $p < 1 + 4/n$.
- $\lambda < 0$, $p = 1+4/n$ *and* $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$, *where* Q *is the unique spherically symmetric solution of*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta Q + Q = -\lambda |Q|^{\frac{4}{n}} Q, \ in\ \mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad\qquad Q > 0, \ in\ \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- $\lambda < 0$, $p > 1 + 4/n$ *and* $\|u_0\|_{H^1}$ *is sufficiently small.*

Remark 6 エネルギー保存則 (2.3) は *Avron-Herbst* の公式を介して得られたものであるが, この方程式(1.1) に対してもう一つ「自然な」エネルギー等式が導かれる.

$$\frac{1}{2}\|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2\lambda}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \int V(x)|u(t,x)|^2 dx \ . \tag{2.4}$$

この等式が意味を持つような解 u のクラスは Σ より広い事に注意する.

Corollary 7 (Finite time blow up) *Let* $u_0 \in \Sigma$, $\lambda < 0$ *and* $p \geq 1 + 4/n$, *with* $p < 1 + 4/(n-2)$ *if* $n \geq 3$. *If*

$$\frac{1}{2}\|\nabla_x u_0\|_{L^2}^2 + \frac{2\lambda}{p+1}\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} < 0 \ ,$$

then the solution u *to* (1.1) *and* (1.2) *blows up in finite time, in the future and in the past.*

Corollary 8 (Scattering theory) *Let* $u_0 \in \Sigma$, $\lambda > 0$, *with* $p < 1 + 4/(n-2)$ *if* $n \geq 3$. *Assume moreover that*

$$p \geq \frac{2 + n + \sqrt{n^2 + 12n + 4}}{2n} \ .$$

- *For every* $u_- \in \Sigma$, *there exists a unique* $u_0 \in \Sigma$ *such that the solution* $u \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$ *to* (1.1) *and* (1.2) *satisfies*

$$\|\exp(-itH_E)u(t) - u_-\|_\Sigma \to 0, \quad as \quad t \to -\infty.$$

- *For every* $u_0 \in \Sigma$, *there exists a unique* $u_+ \in \Sigma$ *such that the solution* $u \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$ *to* (1.1) *and* (1.2)*satisfies*

$$\|\exp(-itH_E)u(t) - u_+\|_\Sigma \to 0, \quad as \quad t \to +\infty.$$

参考文献

[1] T. ADACHI AND H. TAMURA, *Asymptotic Completeness for Long-Range Many-Particle Systems with Stark Effect. II*, Comm. Math. Phys., **174** (1996) 537-559

[2] J.E. AVRON AND I.W. HERBST, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 239–254.

[3] A. DE BOUARD, *Nonlinear Schrödinger equations with magnetic fields*, Diffrential Integral Equations, **4** (1991), 73–88.

[4] R. CARLES, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), 757–772.

[5] R. CARLES, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal., to appear.

[6] R. CARLES AND Y. NAKAMURA, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential*, Hokkaido Math. J., to appear.

[7] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH AND B. SIMON, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, study ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] R. FUKUIZUMI AND M. OHTA, *Stability of standing waves for nonlinear Schrodinger equations with potentials*, Differential Integral Equations **16** (2003), 111-128.

[9] A. JENSEN AND K. YAJIMA, *On the long range scattering for Stark Hamiltonians*, J. Reine Angew. Math. **420** (1991), 179-193.

[10] A. JENSEN AND T. OZAWA, *Classical and quantum scattering for Stark Hamiltonians with slowly decaying potentials*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **54** (1991), 229-243.

[11] T. KATO, *Nonlinear Schrödinger equations*, in "Schrödinger operators", (H. Holden and A. Jensen eds.) Lecture Notes in Physics, **345** Springer-Verlag, Berlin-New York, (1989), 218-263.

[12] Y. NAKAMURA, *Local solvability and smoothing effects of nonlinear Schrödinger equations with magnetic fields*, Funkcial Ekvac. **44** (2001), 1–18.

[13] Y. NAKAMURA AND A. SHIMOMURA, *Local Well-posedness and Smoothing Effects of Strong Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations with Potentials and Magnetic Fields*, Hokkaido Math. J., to appear.

[14] ボーズ-アインシュタイン凝縮から高温超電導へ, 日本物理学会編, 日本評論社, 2003.

[15] Y.G. Oh, Cauchy problem and Ehrenfest's Law for nonlinear Schrödinger equations with potentials, J. Differential Equations, **81** (1989), 255-274.

[16] T. Ozawa, *Nonexistence of wave operators for Stark effect Hamiltonians*, Math. Z. **207** (1991), 335–339.

[17] T. Ozawa, *Space-time behavior of propagators for Schrödinger evolution equations with Stark effect*, J. Funct. Anal. **97** (1991), 264–292.

[18] K. Yajima, *Spectral and scattering theory for Schrodinger operators with Stark effect*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **26** (1979), 377–390.

[19] K. Yajima and G. Zhang, *Smoothing property for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity*, Comm. Math. Phys., **221** (2001), 573–590.

非線型 Dirac 方程式の初期値問題

島根大学総合理工学部　町原秀二

平成 15 年 8 月 5 日

本報告は、以降随時記すが、小澤徹氏 (北海道大学) 中西賢次氏 (名古屋大学) 中村誠氏 (東北大学) との共同研究に基ずく内容を取り扱う。

1　非線型 Dirac 方程式

1.1　Nonlinear Dirac equation

次の非線型 Dirac 方程式 (NLD) の初期値問題を考える。

$$\partial_t \psi = \alpha \nabla \psi + im\alpha_0 \psi + F_p(\psi) \tag{1}$$

$$\psi(0,x) = \phi(x) \tag{2}$$

ここで $\psi(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N(n)}$ は未知関数、$\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N(n)}$ は初期データ、非線型項 $F_p(\psi) = \lambda |(\alpha_0 \psi|\psi)|^{(p-1)/2}\psi$, $(\cdot|\cdot)$ は $\mathbb{C}^{N(n)}$ のエルミート内積、$\lambda \in \mathbb{C}, m \geq 0$. そして $\alpha\nabla = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_j$ で $\alpha_j, j = 0, 1, \cdots, n$ は $N(n) \times N(n)$ 行列で次を満たす:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} I. \tag{3}$$

但し δ_{jk} はクロネッカーのデルタで I は単位行列である。ここで $N(n)$ は次元 n により決まる整数。具体的な行列表示については [6] 等を参照。

1.2　Relation with the nonlinear Klein–Gordon equation

関係 (3) により (1) の両辺を時間 t で微分すると、方程式は非線型 Klein–Gordon 方程式

$$\partial_t^2 \psi = \Delta\psi - m^2\psi + \tilde{F}_p(\psi, \partial\psi) \tag{4}$$

になる。ここで非線型項 $\tilde{F}_p(\psi, \partial\psi)$ は ψ の 1 階微分の項を含むことに注意する。この 1 階微分を含んだ非線型項をもつ波動方程式 (m=0) の考察は例えば [10] に見られる。非線型 Dirac 方程式を調べることは、少なくとも我々の論法においては、1 階微分を含む非線型 Klein–Gordon 方程式を調べることと同等である。

2　初期値問題を考える関数空間とスケールによる考察

2.1　Several function spaces for NLD

我々の目標は初期値問題 (1)-(2) の解の一意存在を示すことである。解を Sobolev 空間や Besov 空間などの関数空間で捕まえることを考えるが、なるべく広いクラス、関数にあまり滑らかさを課さない空間で結論を得ることを目指す。具体的には例えば Sobolev 空間 H^s や Besov 空間 $B^s_{2,m}$ においてはなるべく小さい s での方程式の適切性を得たい。ここで、そして

これ以降 $H_r^s, \dot{H}_r^s, B_{r,m}^s, \dot{B}_{r,m}^s$ をそれぞれ非斉次 Sobolev、斉次 Sobolev、非斉次 Besov、斉次 Besov 空間とする, 正確な定義および基本的な性質は [1] を参照。

空間 3 次元における極座標 $x = r\theta$, $r = |x|, \theta \in S^2$ を用いたノルムを導入する。Δ_θ を S^2 上の Laplace–Beltrami 作用素とする。

$$\|u\|_{L_\theta^p} = \left(\int_{S^2} |f(\theta)|^p d\theta\right)^{1/p}, \quad \|u\|_{H_\theta^{s,p}} = \|(1-\Delta_\theta)^{s/2} f\|_{L_\theta^p}. \tag{5}$$

次のミックスノルムを使う。

$$\|u(x)\|_{L_r^p X_\theta} = \left(\int \|u(r\theta)\|_{X_\theta}^p r^2 dr\right)^{1/p}. \tag{6}$$

今回現れる時空ノルムは特に断りがない限り時間大域的なノルムとする。

$$\|f\|_{L_t^q Y_x} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R};Y_x)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t,\cdot)\|_{Y_x}^q dt\right)^{1/q}. \tag{7}$$

混乱の恐れがない場所では次の略を使う: $H_2^s = H^s, B_{r,2}^s = B_r^s, H_\theta^{s,2} = H_\theta^s$, ドット付きも同じ。

2.2 Scaling argument with $m = 0$

ここでスケールによる考察を与える。次を定義: $\psi_\gamma(t,x) = \gamma^{1/(p-1)}\psi(\gamma t, \gamma x)$, $\gamma > 0$. このとき

$$\psi_\gamma \text{は (1) の解} \iff \psi \text{は (1) の解} \tag{8}$$

である。また $\phi_\gamma(x) = \gamma^{1/(p-1)}\phi(\gamma x)$ に対して

$$\|\phi_\gamma\|_{\dot{H}^s} = \gamma^{s-n/2+1/(p-1)}\|\phi\|_{\dot{H}^s}. \tag{9}$$

ここで γ の冪に注目し

$$s_c := s_c(n,p) = n/2 - 1/(p-1) \tag{10}$$

を Scaling critical な指数と呼ぶことにする。そしてこの値を方程式の適切性における regularity の一つの "目安" とする。解の関数空間が (9) の関係を満たし、regularity の s が $s = s_c$ で解ければ critical な結果、$s > s_c$ で解ければ subcritical な結果と呼ぶことにする。

3 定理

ここではこれまでに得られている結果の中で特に critical な結果や subcritical であるがほぼ critical に近い結果を並べる。SDGS は Small Data Global Solution, LS は (large data)Local Solution の略。幾つか公表時期が前後して並べてある。

定理 1 $n = 3$, $p > 3$. Escobedo–Vega [3]
$m > 0$. 初期データ $\|\phi\|_{H^{s_c}}$ が十分小さければ *NLD* は次の一意解をもつ (SDGS)

$$\psi \in C(\mathbb{R}; H^{s_c}) \cap L^2(\mathbb{R}; L^\infty). \tag{11}$$

データのサイズが大きくても時間局所解は得られる (LS).

定理 2 $n \geq 4,\ p=3.$ 小澤-中村-町原 [6]
$m>0.$ 初期データ $\|\phi\|_{B^{s_c}_{2,1}}$ が十分小さければ *NLD* は次の一意解をもつ (SDGS)

$$\psi \in C(\mathbb{R}; B^{s_c}_{2,1}) \cap L^2(\mathbb{R}; L^\infty). \tag{12}$$

データのサイズが大きくても時間局所解は得られる (LS).

以下は $n=3, p=3$ の場合に対する結果。$n=3, p=3$ は量子場の理論において重要なモデルである。[2, 4, 11, 12, 15] 参照。

定理 3 $n=3,\ p=3.$ Escobedo–Vega [3]
$m>0, s>1.$ 初期データ $\phi \in H^s$ に対し $T=T(\|\phi\|_{H^s})$ が存在し *NLD* は次の一意解をもつ (LS)

$$\psi \in C(0,T; H^s) \cap L^2(0,T; L^\infty). \tag{13}$$

定理 4 $n=3,\ p=3.$ 小澤-中西-町原 [8]
$m>0, s>1.$ 初期データ $\|\phi\|_{H^s}$ が十分小さければ *NLD* は次の一意解をもつ (SDGS)

$$\psi \in C(\mathbb{R}; H^s) \cap L^2(\mathbb{R}; L^\infty). \tag{14}$$

注意 1 一般に $B^s_{2,1} \hookrightarrow H^s$ である。また $\dot{B}^s_{2,1}$ は関係 (9) を満たす。よって定理 *1*, 定理 *2* は *critical* な結果である。$n=3,\ p=3$ のとき $s_c=1$ なので定理 *3*, 定理 *4* は *subcritical* な結果である。

最近、以下の結果が得られた。

定理 5 $n=3,\ p=3.$ 小澤-中西-中村-町原 [7]
$m \geq 0, \varepsilon>0$ に対して初期データ $\|\phi\|_{H^1(H^\varepsilon_\theta)} := \|\phi\|_{L^2_r H^\varepsilon_\theta} + \|\nabla\phi\|_{L^2_r H^\varepsilon_\theta}$ が十分小さければ *NLD* は次の一意解をもつ (SDGS)

$$\psi \in C(\mathbb{R}; H^1(H^\varepsilon_\theta)) \cap L^2(\mathbb{R}; L^\infty). \tag{15}$$

データのサイズが大きくても時間局所解は得られる (LS).

注意 2 ノルム $\|\nabla\phi\|_{L^2_r H^\varepsilon_\theta}$ は関係 (9) を $s=1$ で満たす、ε には依らない。定理 *5* は *critical* な結果である。

4 証明 – 困難とその工夫点 –

4.1 Contraction mapping principle

Duhamel の原理より (1)-(2) は次の積分方程式に書き換えられる:

$$\psi(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)F_p(\psi(\tau))d\tau \tag{16}$$

$$U(t) = I\cos t(m^2-\Delta)^{1/2} + (\alpha\nabla + im\alpha_0)(m^2-\Delta)^{-1/2}\sin t(m^2-\Delta)^{1/2} \tag{17}$$

解の存在証明は縮小写像の原理により示すが 解作用素 $U(t)$ に対する次の評価を用いる。

補題 1 *Strichartz* 評価 [3, 6, 8, 16]

$$\|U(t)u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R};B^{-\sigma_1}_{r_1,k})} \lesssim \|u\|_{B^0_{2,k}}, \tag{18}$$

$$\left\| \int_{t>\tau} U(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{L^{q_2}(\mathbb{R};B^{-\sigma_2}_{r_2,k})} \lesssim \|f\|_{L^{q'_3}(\mathbb{R};B^{\sigma_3}_{r'_3,k})} \tag{19}$$

ここで $k=1,2$. $m \geq 0, 0 \leq \theta \leq 1$ で q_j, r_j, σ_j, $j=1,2,3$ は $0 \leq 1/q_j \leq 1/2$, $0 \leq 1/r_j \leq 1/2 - 2/(n-1+\theta)q_j$, $(n+\theta, q_j) \neq (3,2)$, そして次を満たす

$$\frac{n}{2} - \frac{n-1-\theta}{n-1+\theta}\frac{1}{q_j} - \sigma_j - \frac{n}{r_j} = 0. \tag{20}$$

注意 3 関係 (20) より $\theta=0$ のとき不等式 (18),(19) はスケールを保存する。$0<\theta\leq 1$ ではスケールは保存せず、この意味で θ が大きくなればなるほど二つの式は悪い評価となる。また $(n,\theta,q)=(3,0,2)$ においては評価の不成立が証明されている [9, 10]。

補題 1 を (16) に用いて

$$\|\psi(t)\|_{L^q_t B^{s-\sigma}_{r,k}} \leq \|U(t)\phi\|_{L^q_t B^{s-\sigma}_{r,k}} + \left\| \int_0^t U(t-\tau)F_p(\psi(\tau))d\tau \right\|_{L^q_t B^{s-\sigma}_{r,k}} \tag{21}$$

$$\lesssim \|\phi\|_{B^s_{2,k}} + \|F_p(\psi)\|_{L^1_t B^s_{2,k}} \tag{22}$$

$$\lesssim \|\phi\|_{B^s_{2,k}} + \|\psi\|^{p-1}_{L^{p-1}_t L^\infty} \|\psi\|_{L^\infty_t B^s_{2,k}}. \tag{23}$$

ここで (22) において評価式 (19) の右辺の指数が $\sigma_3 = 0$ つまり $q_3 = \infty, r_3 = 2$ としか取れないことに注意する。その結果 次の Leibniz–Hölder の不等式 (23) も自然な指数の選びとなる。つまり我々は ψ の $L^{p-1}_t L^\infty$ ノルムに直面する。この状況は非線型波動方程式に対する [10] の中の考察にも見られる。

4.2 Estimate for $L^{p-1}_t L^\infty$ norm

$\|\psi\|_{L^{p-1}_t L^\infty}$ を評価するとき次の 2 点に注意する。

- Sobolev のうめこみ不等式

$$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \|u\|_{H^s_r}, \qquad \text{if } s > n/r \tag{24}$$

  はスケールを保存しない。もし s が $s=n/r$ ならばスケールを保存するが真に大きく取らなくてはいけない。

- Strichartz 評価 (18), (19) は $n=3, p=3$ のとき $q=p-1=2$ の不成立点に対応してしまう。

これらの困難に対し次の様なアプローチがされてきた。

$n=3, p>3$ のとき L^∞ ノルムに対し次の不等式を用いた。

補題 2 複素補間不等式 [3]

$$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \|u\|^\delta_{\dot{H}^\alpha_{r_1}} \|u\|^{1-\delta}_{\dot{H}^\beta_{r_2}} \tag{25}$$

ここで $1 \leq r_1, r_2 \leq \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$, $0 < \delta < 1$, $\alpha > n/r_1$, $\beta < n/r_2$, そして次を満たす

$$\delta\left(\alpha - \frac{n}{r_1}\right) + (1-\delta)\left(\beta - \frac{n}{r_2}\right) = 0. \tag{26}$$

関係 (26) より (25) はスケールを保存する。そして $2 < q_1 < p-1 < q_2$ で

$$\|u\|_{L_t^{p-1}L^\infty} \lesssim \|u\|_{L_t^{q_1}H_{r_1}^\alpha}^\delta \|u\|_{L_t^{q_2}H_{r_2}^\beta}^{1-\delta} \tag{27}$$

として補題 1 を利用する。$\Longrightarrow$ 定理 1.

$n \geq 4$ のとき補題 1 において指数 $q = 2$ (i.e. $p = 3$) が取れる。しかしこれは $2 \leq q$ の端っこなので (27) の様な補間不等式は使えない。

よって次のスケールを保存する うめこみ不等式を用いる。

$$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \|u\|_{B_{r,1}^{n/r}}. \tag{28}$$

$\Longrightarrow$ 定理 2.

$n = 3, p = 3$ のとき上記二つの問題点に遭遇する。よって少し regularity を余分にとり, うめこみ不等式 (24) を用いた。[3] では補題 1 の $\theta = 0, q > 2$ の場合しか利用しておらず、時間方向の Hölder の不等式で時間局所解 $\Longrightarrow$ 定理 3. [8] では $\theta > 0$ とすることにより $q = 2$ がとれて時間大域解 $\Longrightarrow$ 定理 4.

4.3 Endpoint Strichartz estimate for $n = 3$

空間 3 次元での極座標 $x = r\theta$ における Strichartz 型評価を構成した。これは回転方向に regularity をもつ関数に対してはちょうど補題 1 の不成立点 $(n, \theta, q) = (3, 0, 2)$ に対応する評価である。

補題 3 *Endpoint Strichartz estimate.* $n = 3$ とする。

$$\|U(t)u\|_{L_t^2 L_r^\infty L_\theta^p} \lesssim \|u\|_{H^1} \tag{29}$$

ここで $m \geq 0, 1 \leq p < \infty$.

$\Longrightarrow$ これにより定理 5 が従う。

補題 3 の証明には TT* argument を用いる。実は補題 1 の不成立点 $(n, \theta, q) = (3, 0, 2)$ における評価が球対称な関数に対しては成立することが知られている [3]。そしてその証明には Hardy–Littlewood の極大関数定理が重要な役割を果たしていた。一般の関数が L_θ^p ノルムをとることにより球対称関数になることに着眼し、極大関数定理を TT*版に構成し直すことにより (29) を得た。

References

[1] J. BERGH AND J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces*, Springer, Berlin / Heiderberg / New York (1976).

[2] J. P. DIAS AND M. FIGUEIRA, *Global existence of solutions with small initial data in H^s for the massive nonlinear Dirac equations in three space dimensions*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7), 1 (1987), 861–874.

[3] M. Escobedo and L. Vega, *A semilinear Dirac equation in $H^s(R^3)$ for $s > 1$*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), no. 2, 338–362.

[4] R. Finkelstein, R. Lelevier, and M. Ruderman, *Nonlinear spinor fields*, Phys. Rev., **83** (1951), 326–332.

[5] S. Klainerman and M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), no. 9, 1221–1268.

[6] S. Machihara, M. Nakamura and T. Ozawa, *Small global solutions for the nonlinear Dirac equation in arbitrary space dimension*, in preparation.

[7] S. Machihara, M. Nakamura, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Endpoint Strichartz estimates and global solutions for the nonlinear Dirac equation*, submitted.

[8] S. Machihara, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Small global solutions and the nonrelativistic limit for the nonlinear Dirac equation*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), no. 1, 179–194.

[9] S. Montgomery-Smith, *Time decay for the bounded mean oscillation of solutions of the Schrödinger and wave equations*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 2, 393–408.

[10] G. Ponce and T. Sideris, *Local regularity of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), no. 1-2, 169–177.

[11] A. F. Rañada, *Classical nonlinear Dirac field models of extended particles*, in Quantum Theory, Groups, Fields and Particles, D. Reidel, Amsterdam, (1982).

[12] M. Soler, *Classical, stable nonlinear spinor field with positive rest energy*, Phys. Rev. D, **1** (1970), 2766–2769.

[13] T. Tao, *Spherically averaged endpoint Strichartz estimates for the two-dimensional Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), no. 7-8, 1471–1485.

[14] H. Triebel, *Theory of function spaces. II*, Monographs in Mathematics, **84**. Birkhauser Verlag, Basel, (1992).

[15] M. Wakano, *Intensely localized solutions of the classical Dirac–Maxwell field equations*, Progr. Theoret. Phys., **35** (1966), 1117–1141.

[16] B. Wang, *On existence and scattering for critical and subcritical nonlinear Klein–Gordon equation in H^s*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **31** (1998), 573–587.

Well-posedness of the Cauchy problem for the semilinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity

田岡志婦 (中央大学大学院理工学研究科)

1 定義と主な結果

半線型 Schrödinger 方程式の初期値問題,

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + N(u,\bar{u}), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

を考える.

非線型項が未知関数の 5 次以下の多項式の場合, Y.Tsutsumi ([8]) によって, L^2 での局所適切性が証明されている.

Kenig-Ponce-Vega ([5]) は, 非線型項が 2 次式の場合, Bourgain ([2]) の Fourier restriction norm を使って空間 1 次元の半線型 Schrödinger 方程式の時間局所解の存在を示し, Colliander-Delort-Kenig-Staffilani ([3]) は, 空間 2 次元の半線型 Schrödinger 方程式の時間局所解の存在を示した. また, 我々は, Besov 型ノルムを用いることにより, 非線型項が 2 次式の空間 d 次元の半線型 Schrödinger 方程式について時間局所解の存在を示した ([6], [7]).

非線型項が 3 次式で, 空間 1 次元の場合, Grünrock ([4]) により, $N(u,\bar{u}) = c_1u^3 + c_2\bar{u}^3$ のとき H^s $(s > -5/12)$ で, $N(u,\bar{u}) = cu\bar{u}^2$ のとき H^s $(s > -2/5)$ で, 局所適切であることが証明されている. また, $N(u,\bar{u}) = cu^2\bar{u}$ の場合は, Y.Tsutsumi ([8]) の結果から L^2 での局所適切がわかる. 尚, Bekiranov-Ogawa-Ponce ([1]) による評価, $\||u|^2u\|_{X^{s,a}} \le C\|u\|^3_{X^{s,b}}$ $(s \ge 0,\ a \le 0,\ 1/2 < b < 1)$ によっても, 直ちに L^2 での局所適切がわかる.

今回はこれまでと同様の方法により, 非線型項が $N(u,\bar{u}) = c_1u^3 + c_2\bar{u}^3$, $N(u,\bar{u}) = cu\bar{u}^2$ または $N(u,\bar{u}) = cu^2\bar{u}$ となる空間 1 次元半線型 Schrödinger 方程式の初期値問題を扱う.

まず, Besov 型ノルムの定義と結果を述べる.

Definition 1

$$\|f\|_{B^{(\rho,b)}_{p,(q_1,q_2),P}} := \|\{\rho(2^j)2^{bk}\|f_{jk,P}(x,t)\|_{L^p(R^{d+1})}\}\|_{\ell^{(q_1,q_2)}(\bar{\mathbb{N}}\times\bar{\mathbb{N}})}$$

とし，このノルムで定義した空間を，$B^{(\rho,b)}_{p,(q_1,q_2),P}$ とかく．ただし，ρ: $\mathbb{R}_+$ 上の重みの関数，$b \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q_1 \leq \infty, 1 \leq q_2 \leq \infty$, $P(\xi)$: C^∞ 級実数値関数，$\hat{f}_{jk,P}(\xi,\tau) := \varphi_j(|\xi|)\varphi_k(\tau - P(\xi))\hat{f}(\xi,\tau)$ とし，$\varphi_j(z), j = 0, 1, \cdots$, は

$$\varphi_j(z) = \varphi_j(-z), \mathrm{supp}\varphi_0 \subset \{z; |z| < 2\}, \mathrm{supp}\varphi_1 \subset \{z; 1 < |z| < 4\},$$
$$\varphi_k(z) = \varphi_1(2^{-k+1}z)\,(for\ k \geq 1),\ \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(z) = 1.$$

を満たす C^∞ 級関数とする．$\rho(t) = t^s$ のとき，$B^{(s,b)}_{p,(q_1,q_2),P}(\mathbb{R}^{d+1})$ と書き，$B^{(\rho,b)}_{p,(q,q),P} = B^{(\rho,b)}_{p,q,P}$ と書く．$P = 0$ のときは，P を省略する．

Main Results

Part (I). $N(u,\bar{u}) = c_1u^3 + c_2\bar{u}^3$, $u_0 \in B^{-5/12}_{2,3}(\mathbb{R})$ と仮定すると，$|t| \leq T$ のとき，$u(x,t) - W(t)u_0(x) \in B^{(-5/12,1/2)}_{2,(3,1),-|\xi|^2}(\mathbb{R} \times (-T,T))$ を満たす方程式 (1) の一意解 $u(x,t) \in B^{(-5/12,1/2)}_{2,(3,1),-|\xi|^2}(\mathbb{R}^2)$ と $T = T(\|u_0\|_{B^{-5/12}_{2,3}(\mathbb{R})})$ が存在する．ただし，$\rho(z) = \log(2+z)z^{-5/12}$,
$\{W(t)f\}(x,t) := \mathcal{F}_x^{-1}e^{-it|\xi|^2}\mathcal{F}_x f(x,t)$ とする．

Part (II). $N(u,\bar{u}) = cu\bar{u}^2$, $u_0 \in B^{-2/5}_{2,3}(\mathbb{R})$ と仮定すると，$|t| \leq T$ のとき，$u(x,t) - W(t)u_0(x) \in B^{(-5/12,1/2)}_{2,(3,1),-|\xi|^2}(\mathbb{R} \times (-T,T))$ を満たす方程式 (1) の一意解 $u(x,t) \in B^{(-5/12,1/2)}_{2,(3,1),-|\xi|^2}(\mathbb{R}^2)$ と $T = T(\|u_0\|_{B^{-5/12}_{2,3}(\mathbb{R})})$ が存在する．ただし，$\rho(z) = \log(2+z)z^{-2/5}$ とする．

Part (III). $N(u,\bar{u}) = cu^2\bar{u}$, $u_0 \in B^0_{2,3}(\mathbb{R})$ と仮定すると，方程式 (1) の一意解 $u(x,t) \in B^{(0,1/2)}_{2,(3,1),-|\xi|^2}(\mathbb{R}^2)$ と $T = T(\|u_0\|_{B^0_{2,3}(\mathbb{R})})$ が存在する．

(注) 定義により，$H^s = B^s_{2,2} \subset B^s_{2,3}$ および $L^2 = B^0_{2,2} \subset B^0_{2,3}$ が成り立つ．
(I) の場合の $H^{-5/12}$ での適切性，(II) の場合の $H^{-2/5}$ での適切性，および，(III) の場合の L^2 での適切性も同じ計算でわかる．

上の主結果は，次の評価 (Trilinear estimate) によって不動点定理を用いて得られる．

以下では $\|f\|_{B^{(\rho,b)}_{2,(3,1),P}} = \|f\|_{(\rho,b)}$ と略記し，$P(\xi) = |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}$, $\rho(z) = \log(2+z)z^s$ とする．

Theorem 1 *Part (I).* $c_1fgh + c_2\bar{f}\bar{g}\bar{h}$ の評価．
$-5/12 \leq s$ とすると，
$$\|c_1fgh + c_2\bar{f}\bar{g}\bar{h}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \leq c\|f\|_{(\rho,1/2)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,1/2)},$$

$$\begin{aligned}&\|c_1fgh + c_2\bar{f}\bar{g}\bar{h}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}}\\ &\leq\ c\{\|f\|_{(s,b)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,1/2)} + \|f\|_{(s,1/2)}\|g\|_{(s,b)}\|h\|_{(s,1/2)} + \|f\|_{(s,1/2)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,b)}\},\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $b>1/2$ と仮定する.

Theorem 2 *Part (II).* $cf\bar{g}\bar{h}$ の評価.
$-2/5 \le s$ とすると,

$$\|f\bar{g}\bar{h}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \le \begin{cases} c\|f\|_{(\rho,1/2)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,1/2)}, \\ c\|f\|_{(s,1/2)}\|g\|_{(\rho,1/2)}\|h\|_{(s,1/2)}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\|f\bar{g}\bar{h}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \\ &\quad \le \ c\{\|f\|_{(s,b)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,1/2)} + \|f\|_{(s,1/2)}\|g\|_{(s,b)}\|h\|_{(s,1/2)} + \|f\|_{(s,1/2)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,b)}\}, \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $b>1/2$ と仮定する.

Theorem 3 *Part (III).* $cfg\bar{h}$ の評価.
$0 \le s$ とすると,

$$\|fg\bar{h}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \le c\|f\|_{(s,1/2)}\|g\|_{(s,1/2)}\|h\|_{(s,1/2)},$$

が成り立つ.

2 Trilinear estimate の証明の概略, (I) の場合

$\|\bar{f}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} = \|f\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,-P}}$ であるから, 次の定理を示せばよい.

Theorem 4 $P(\xi)=\pm|\xi|^2$, $P_1=P_2=P_3=-P$ または, $P_1=P_2=P_3=P$,
$\rho(z)=\log(2+z)z^s$ とする. $s\ge -5/12$, $b>1/2$ とすれば,

$$\begin{aligned} \|fgh\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} &\le c\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,(3,1),P_1}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_2}}\|h\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_3}}, \\ \|fgh\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} &\le c\{\|f\|_{B^{(s,b)}_{2,(3,1),P_1}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_2}}\|h\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_3}} \\ &\quad +\|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_1}}\|g\|_{B^{(s,b)}_{2,(3,1),P_2}}\|h\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_3}} + \|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_1}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),P_2}}\|h\|_{B^{(s,b)}_{2,(3,1),P_3}}\}, \end{aligned}$$

が成り立つ.

$P_1=P_2=P_3=-P$ の場合.
簡単のため, $X_{\rho,-P} := B^{(\rho,1/2)}_{2,(3,1),-P}$, $X_{s,-P} := B^{(s,1/2)}_{2,(3,1),-P}$,
$N_{(j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3)} := \|f_{j_1k_1,-P}\|_{L^2}\|g_{j_2k_2,-P}\|_{L^2}\|h_{j_3k_3,-P}\|_{L^2}$,
$\varphi^{[P]}_{\ell m}(\xi,\tau) := \varphi_\ell(\xi)\varphi_m(\tau-P(\xi))$, $\hat{f}_{j_1k_1,Q}(\xi,\tau) := \varphi^{[Q]}_{j_1k_1}(\xi,\tau)\hat{f}(\xi,\tau)$ と書くことにする.
そうすると, $f=\sum_{j_1,k_1} f_{j_1k_1,Q}$, $g=\sum_{j_2,k_2} g_{j_2k_2,Q}$, $h=\sum_{j_3,k_3} g_{j_3k_3,Q}$, であるから

$$fgh = \sum_{j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3} f_{j_1k_1,-P}g_{j_2k_2,-P}h_{j_3k_3,-P}. \tag{1}$$

である．この fgh のノルムを分解する添え字の集合を次のようにわける．すなわち，

$$\begin{cases} I(1) := & \{(\ell, m, j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3);\ m \geq 4j+4\}, \\ I(2) := & \{(\ell, m, j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3);\ j-5 \leq \ell \leq j+3,\ m \leq 4j+3\}, \\ I(3) := & \{(\ell, m, j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3);\ \ell \leq j-6,\ m \geq k,\ m \leq 4j+3\}, \\ I(4) := & \{(\ell, m, j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3);\ \ell \leq j-6,\ k > m,\ m \leq 4j+3\}, \end{cases} \tag{2}$$

として，$F_\nu := \sum_{I(\nu)} \rho(2^\ell) 2^{-m/2} \|\varphi_{\ell m}^{[P]} \hat{f}_{j_1 k_1, -P} * \hat{g}_{j_2 k_2, -P} * \hat{h}_{j_3 k_3, -P}\|_{L^2}, \nu = 1, 2, 3, 4$ とおくと，

$$\|fgh\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \leq F_1 + F_2 + F_3 + F_4, \tag{3}$$

と表わせる．§3 の Lemma を使って，この F_ν を各々評価すれば Trilinear estimate が得られる．

$P_1 = P_2 = P_3 = P$ の場合も同様の方法で評価できる．

3 Lemmas

以下では，核 $K(x,y,z)$ に対して，

$$T(K; f, g, h)(x) := \iint K(x,y,z) h(x-y-z) f(y) g(z) dy dz,$$

$N_{tl}(K) := \sup \dfrac{\|T(K; f, g, h)\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \|h\|_{L^2}}$ と表わすことにする．

次の Lemma が容易に分かる．Lemma 3.2 は Schwarz の不等式と Lemma 3.1 を使って示すことができる．

Lemma 3.1 次の変換，
$K(x,y,z) \mapsto K(x,z,y)$, $K(x,y,z) \mapsto K(-y,-x,z)$, $K(x,y,z) \mapsto K(x, x-y-z, z)$
に関してノルム N_{tl} は不変である．

Lemma 3.2 核 $K(x,y,z)$ に対して，

$$N_{tl}(K) \leq \min\{C_1, C_2, C_3, C_1' C_{23}, C_1' C_{32}, C_2' C_{31}, C_2' C_{13}, C_3' C_{21}, C_3' C_{12}\},$$

が成り立つ．ただし，

$$
\begin{aligned}
C_1 &:= \|K\|_{L^\infty_x \times L^2_{(y,z)}},\ C_2 := \|K\|_{L^\infty_y \times L^2_{(x,z)}},\ C_3 := \|K\|_{L^\infty_z \times L^2_{(x,y)}}, \\
C_1' &:= \|\{\|K(x,y,z)\|^{1/2}_{L^1_x}\}\|_{L^\infty_{(y,z)}}, \\
C_2' &:= \|\{\|K(x,y,z)\|^{1/2}_{L^1_y}\}\|_{L^\infty_{(x,z)}}, \\
C_3' &:= \|\{\|K(x,y,z)\|^{1/2}_{L^1_z}\}\|_{L^\infty_{(x,y)}}, \\
C_{23} &:= \|\{\|K(x,x-y-z,z)\|^{1/2}_{L^1_z}\}\|_{L^\infty_{(x,y)}}, \\
C_{32} &:= \|\{\|K(x,y,x-y-z)\|^{1/2}_{L^1_y}\}\|_{L^\infty_{(x,z)}}, \\
C_{31} &:= \|\{\|K(x,y,x-y-z)\|^{1/2}_{L^1_x}\}\|_{L^\infty_{(y,z)}}, \\
C_{13} &:= \|\{\|K(x+y+z,y,z)\|^{1/2}_{L^1_z}\}\|_{L^\infty_{(x,y)}}, \\
C_{21} &:= \|\{\|K(x,x-y-z,z)\|^{1/2}_{L^1_x}\}\|_{L^\infty_{(y,z)}}, \\
C_{12} &:= \|\{\|K(x+y+z,y,z)\|^{1/2}_{L^1_y}\}\|_{L^\infty_{(x,z)}},
\end{aligned}
$$

とする．

また次のような記号を導入する．

$$
\begin{aligned}
&\gamma_0(\xi) := [-2,2] \text{ の定義関数}, \\
&\gamma_\ell(\xi) := [-2^{\ell+1}, -2^{\ell-1}] \cup [2^{\ell-1}, 2^{\ell+1}] \text{ の定義関数}, \\
&\gamma^{[P]}_{\ell m}(\xi,\tau) := \gamma_\ell(\xi)\gamma_m(\tau - P(\xi)), \\
&H^{[P_1,P_2,P_3]}_{j_1k_1j_2k_2j_3k_3}(\xi,\tau,\eta_1,\sigma_1,\eta_2,\sigma_2) := \gamma^{[P_1]}_{j_1k_1}(\eta_1,\sigma_1)\gamma^{[P_2]}_{j_2k_2}(\eta_2,\sigma_2)\gamma^{[P_3]}_{j_3k_3}(\eta_3,\sigma_3), \\
&\qquad\qquad \text{ただし}, \eta_3 = \xi - \eta_1 - \eta_2, \sigma_3 = \tau - \sigma_1 - \sigma_2 \text{ とする}, \\
&H^{[P,P_1,P_2,P_3]}_{\ell m j_1k_1j_2k_2j_3k_3}(\xi,\tau,\eta_1,\sigma_1,\eta_2,\sigma_2) := \gamma^{[P]}_{\ell m}(\xi,\tau)H^{[P_1,P_2,P_3]}_{j_1k_1j_2k_2j_3k_3}(\xi,\tau,\eta_1,\sigma_1,\eta_2,\sigma_2), \\
&j := \max\{j_1,j_2,j_3\}.
\end{aligned}
$$

Lemma 3.1 と Lemma 3.2 を使って，次の評価を得る．これを用いて，各 F_ν をその台に注意しながら評価すれば，Trilinear estimate が得られる．

Lemma 3.3 のみ証明する．

Lemma 3.3 $P(\xi) = \pm|\xi|^2$ とすると，

$$
N_{tl}(H^{[P,P,P]}_{j_1k_1j_2k_2j_3k_3}) \quad\leq\quad c2^{(k_1+k_2+k_3)/2} \tag{1}
$$

が成り立つ．

証明．まず，$\sigma_1' = \sigma_1 - P(\eta_1)$, $\sigma_2' = \sigma_2 - P(\eta_2)$, $r\cos\theta = \sqrt{3}(\eta_1+\eta_2-2\xi/3)$, $r\sin\theta = \eta_1 - \eta_2$ と変数変換する．さらに，$\zeta = \tau - \sigma_1' - \sigma_2' \mp r^2/2 \mp \xi^2/3$ と変換すると，

$\left| \dfrac{\partial(\eta_1,\eta_2)}{\partial(r,\theta)} \right| = \dfrac{r}{2\sqrt{3}}$, $\left| \dfrac{d\zeta}{dr} \right| = r$, であるから,

$$\begin{aligned}
&\iint \gamma_{k_3}(\tau - \sigma_1' - \sigma_2' - P(\xi - \eta_1 - \eta_2) - P(\eta_1) - P(\eta_2))d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \iint_0^{2\pi} \gamma_{k_3}(\tau - \sigma_1' - \sigma_2' \mp (\frac{r^2}{2} + \frac{\xi^2}{3}))rdrd\theta \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int \gamma_{k_3}(\zeta)d\zeta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{k_3+2}
\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
&\iiiint |H^{[P,P,P]}_{j_1k_1j_2k_2j_3k_3}(\xi,\tau,\eta_1,\sigma_1,\eta_2,\sigma_2)|^2 d\eta_1 d\sigma_1 d\eta_2 d\sigma_2 \\
&= \iint \gamma_{k_1}(\sigma_1')\gamma_{k_2}(\sigma_2')d\sigma_1' d\sigma_2' \iint \gamma_{k_3}(\tau - \sigma_1' - \sigma_2' - P(\xi - \eta_1 - \eta_2) - P(\eta_1) - P(\eta_2))d\eta_1 d\eta_2 \\
&\leq c 2^{k_1+k_2+k_3},
\end{aligned}$$

が成り立つから，Lemma 3.2 によって (1) を得る.

証明終.

Lemma 3.4 $P(\xi) = \pm|\xi|^2$, $P_j(\xi) = \epsilon_j P(\xi)$, $\epsilon_j = \pm 1$, $j = 1,2,3$ とし，$\ell \leq j - 6$ と仮定すると，

$$N_{tl}(H^{[P,P_1,P_2,P_3]}_{\ell m j_1k_1j_2k_2j_3k_3}) \leq 2^{(k_1+k_2+k_3+\ell-j)/2}, \tag{2}$$

$$N_{tl}(H^{[P,P_1,P_2,P_3]}_{\ell m j_1k_1j_2k_2j_3k_3}) \leq 2^{(m+k')/2+(\ell-j)/4}, \tag{3}$$

が成り立つ．ただし，$k' = \min\{k_1 + k_2, k_1 + k_3, k_2 + k_3\}$ とする.

4 解の構成について

時間局所解の存在は，scaling 論法によって示すことができる．$v(x,t) = u(\delta x, \delta^2 t)$ とおくと，v は積分方程式

$$v = W(t)v_0 + \delta^2 \int_0^t W(t-t')N(v,\bar{v})(x,t')dt'$$

をみたす．ただし，$\{W(t)f\}(x,t) := \mathcal{F}_x^{-1} e^{itP(\xi)} \mathcal{F}_x f(x,t)$, $v_0(x) = u_0(\delta x)$ とする．したがって，$v = W(t)v_0 + w$ とおき，通常の不動点定理にもちこめばよい.

参考文献

[1] D.Bekiranov, T.Ogawa, and G.Ponce, *Interaction equation for short and long dispersive waves*, J. Funct. Anal. **158** (1998), 357-388.

[2] J.Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, I, II*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), 107-156, 209-262.

[3] J.E.Colliander,J.M.Delort,C.E.Kenig, and G.Staffilani, *Bilinear estimates and applications to 2D NLS* , Trns. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3307–3325.

[4] A.Grünrock, *Some local wellposedness results for nonlinear Schrödinger equations below* L^2, preprint

[5] C.E.Kenig,G.Ponce and L.Vega,*Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans.Amer.Math.Soc. **348**(1996),3323–3353.

[6] T. Muramatu and S. Taoka,*The initial value problem for the 1-D semilinear Schrödinger equation in Besov spaces* , to appear in J.Math.Soc.Japan.

[7] S. Taoka,*Well-posedness of the Cauchy problem for the semilinear Schrödinger equation with quadratic nonlinearity in Besov spaces*,to appear in Hokkaido.Math.J.

[8] Y. Tsutsumi, *L^2-solution for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear group*, Funkcialaj Ekvacioj.**30**(1987),115-125.

Gray-Scott モデルにおける進行波解について

早稲田大学理工学研究科Ｄ１　佐藤典弘

1 Introduction

次の一般化された空間1次元 Gray-Scott モデルを考える:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - uv^\alpha + \lambda(1-u), & (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty), \\ \frac{\gamma}{d} v_t = \gamma v_{xx} + uv^\alpha - v, & (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1}$$

ここで λ, γ, d は正定数であり、$\alpha > 1$ である。通常の Gray-Scott モデルは、$\alpha = 2$ の場合で以下の化学反応を記述するものである。

$$\begin{cases} A + 2B \to 3B \\ B \to \mathit{inert\ product} \end{cases}$$

このモデルは、１９８３年に Gray と Scott([2]) によって提唱された非線形常微分方程式に拡散項をつけた反応拡散系であるが、近年化学物質の拡散係数が異なるときに自己複製パターンを示すことで注目されているモデルである。一方それらが等しい場合 ($d = 1$) の定常解に関する研究もなされている。([3][4][6]) 本公演では前年の研究結果（拡散係数が等しい場合）をある程度進めることができたので報告をする。

まず前年の結果を簡単に述べる。考えるパラメータ領域の条件として常に

$$\lambda\gamma = 1, \quad d = 1, \quad 0 < \gamma < \gamma_1 \tag{2}$$

を仮定する。ただし、γ_1 を

$$\gamma_1 = \frac{2^{1/(\alpha-1)}(\alpha-1)(\alpha+2)}{\{\alpha(\alpha+1)\}^{\alpha/(\alpha-1)}}$$

と定める。

(1) の定常問題

$$\begin{cases} u'' - uv^\alpha + \lambda(1-u) = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ \gamma v'' + uv^\alpha - v = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ (u,v)(\pm\infty) = (1,0). \end{cases}$$

に関して平行移動を除き一意に定常解が存在することが知られているが ([4])、前年の研究ではそれらが不安定であることを示した ([6])。それ以降では安定なパターンは現れないのかということに関して研究を進めてきたが、今回ある境界条件を満たす安定な進行波解が存在することがわかった。

(1) の進行波解

$$(u(x,t), v(x,t)) = (U(\xi), V(\xi)), \quad \xi = x - ct \, (c > 0)$$

は, 以下の常微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} U'' + cU' - UV^\alpha + \lambda(1-U) = 0, & \xi \in \mathbf{R}, \\ \gamma V'' + \frac{c\gamma}{d} V' + UV^\alpha - V = 0, & \xi \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3}$$

ただし、$'$ は ξ に関する微分を表す。境界条件として

$$(U(-\infty), V(-\infty)) = (1-\gamma V_+, V_+), \quad (U(+\infty), V(+\infty)) = (1,0) \tag{4}$$

を課す。ここで、V_+ は、

$$\gamma V^\alpha - V^{\alpha-1} + 1 = 0$$

の 2 解のうち大きい方の解とする。そのとき以下の二つの定理を得ることができた。

Theorem I λ, γ, d が (2) を満たすとする。そのとき、(3) と (4) を満たす $(U, V, c) = (\varphi, \psi, c_*)$ が一意に存在し、

$$\varphi' > 0, \quad \psi' < 0, \quad \varphi + \gamma\psi - 1 = 0$$

が成り立つ。

Theorem II Theorem I で得られた進行波解は線形化安定である。

2 Proof

この章では Theorem I,II の証明の概略を 2 つの節に分けて示す。

2.1 Proof of Theorem I

(2) のとき、(3) は

$$\begin{cases} U'' + cU' - UV^\alpha + \frac{1}{\gamma}(1-U) = 0, & \xi \in \mathbf{R}, \\ \gamma V'' + c\gamma V' + UV^\alpha - V = 0, & \xi \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{5}$$

となる。$P = U + \gamma V - 1$ とおくと、(5) より

$$P'' + cP' - \frac{1}{\gamma}P = 0$$

となる。P は $\xi \to \pm\infty$ で有界となるので

$$P = 0$$

となる。ゆえに、$U + \gamma V - 1 = 0$ を (5) の 2 番目の式に代入すると

$$V'' + cV' - \frac{1}{\gamma}V(1 - V^{\alpha-1} + \gamma V^\alpha) = 0 \tag{6}$$

となる。そのとき、Aronson etc([1]) の結果から方程式 (6) と境界条件

$$(V(-\infty), V(+\infty)) = (V_+, 0)$$

を満たす $(v, c) = (\psi, c_*)$ が一意に存在し、

$$\psi' < 0$$

となる。ゆえに Theorem I が証明された。 (証明終)

2.2 Proof of Theorem II

次の線形化スペクトル問題を考える。

$$\begin{cases} -u'' - cu' + (\psi^\alpha + \frac{1}{\gamma})u + (\alpha\varphi\psi^{\alpha-1})v = \mu u, \\ -v'' - cv' - \frac{1}{\gamma}\psi^\alpha u + \frac{1}{\gamma}(1 - \alpha\varphi\psi^{\alpha-1})v = \mu v. \end{cases} \tag{7}$$

ただし、φ, ψ は Theorem I で得られた進行波解で $c = c_*$ とおく。

証明のために次のよく知られた安定性に関する結果を用いる。

Theorem H([5]) L を $\zeta = (\varphi, \psi)$ に対する線形化作用素とし、スペクトル $\sigma(L) = \{0\} \cup \sigma^*$ について、0 は単純固有値で $\mathrm{Re}\,\sigma^* \le \nu < 0$ とする。そのとき、ζ は次の意味で安定である。すなわち、ζ の任意の小さな近傍 $U \subset C_B(\mathbf{R}) \times C_B(\mathbf{R})$ に対して、定数 $\kappa > 0, M > 0$ が存在して、U 内の任意の初期値に対応する (1) の解 $z(x,t) = (u(x,t), v(x,t))$ は以下を満たす:

$$\|z(\cdot,t) - \zeta(\cdot + \xi)\|_\infty \le M\|z(\cdot,0) - \zeta(\cdot)\|_\infty e^{-\kappa t}.$$

スペクトルはエッセンシャルスペクトルと有限重複度の孤立固有値に分けられ、それぞれの分布を調べることにする。

エッセンシャルスペクトル σ_e に関しては以下の補題が成り立つ。

Lemma 1

$$\sigma_e \subset \left\{ a + bi \in \mathbf{C} : a \ge \frac{b^2}{c^2} + A(\alpha,\gamma) \right\}.$$

ただし、ある定数 α_*, γ_* に対し

$$A(\alpha,\gamma) = \begin{cases} V_+^\alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma}, & 1 < \alpha < \alpha_* \text{ and } \gamma_* < \gamma < \gamma_1 \\ \frac{1}{\gamma}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であり $A(\alpha,\gamma) > 0$ が成り立つ。

Proof.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad N(\xi) = \begin{pmatrix} \psi^\alpha + \frac{1}{\gamma} & \alpha\varphi\psi^{\alpha-1} \\ -\frac{1}{\gamma}\psi^\alpha & -\frac{\alpha}{\gamma}\varphi\psi^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と定めると、(7) は

$$-Dw'' + Mw' + N(\xi)w = \mu w$$

となる。また、

$$N_+ \equiv \lim_{\xi\to+\infty} = \begin{pmatrix} v_+^\alpha + \frac{1}{\gamma} & \alpha \\ -\frac{1}{\gamma}v_+^\alpha & \frac{1}{\gamma}(1-\alpha) \end{pmatrix}, \quad N_- \equiv \lim_{\xi\to-\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

となることに注意する。そのとき $S_\pm$ を以下のように定義する。

$$S_\pm = \{\mu \,|\, \det(\tau^2 D + i\tau M + N_\pm - \mu I) = 0 \text{ for some real } \tau,\ -\infty < \tau < \infty\}$$

これを計算すると、

$$S_+ = \left\{ a + bi \in \mathbf{C} \,|\, a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma} \right\}, \quad S_- = \left\{ a + bi \in \mathbf{C} \,|\, a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma} \text{ or } a = \frac{b^2}{c^2} + v_+^\alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma} \right\}$$

となる。ただし $\frac{1}{\gamma}$ と $v_+^\alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma}$ との大小関係に関しては、

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} < v_+^\alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma}, & 1 < \alpha < \alpha_* \text{ and } \gamma_* < \gamma < \gamma_1 \\ \frac{1}{\gamma} \geq v_+^\alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma} > 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $(2\alpha - 1)\log\alpha - (\alpha - 1)\log\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+2}\right) - \log 2 = 0$ となる点を $\alpha_*\,(1 < \alpha_* < 2)$ とおき、$1 < \alpha < \alpha_*$ のとき、$\alpha + 1 - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 0$ となる点を $\gamma_*\,(0 < \gamma_* < \gamma_1)$ とおく。

そのとき、Henry([5]) の定理により $\sigma_e(L)$ は $S_+ \cup S_-$ の内部と境界を含む集合に含まれるので、Lemma 1 が成り立つ。 (証明終)

次に有限重複度の孤立固有値に関して考察する。そのとき、以下の補題が成り立つ。

Lemma 2 $\mathrm{Re}\,\mu < \min\left\{\frac{1}{\gamma}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{\gamma}\right\}$ のとき固有値は実数となる。

Proof. $q = u + \gamma v$ とおくと、(7) より

$$q'' + cq' + \left(\frac{1}{\gamma} - \mu\right) q = 0 \tag{8}$$

となる。特性方程式は $\rho \in \mathbf{C}$ に対して

$$\rho^2 + c\rho + \mu - \frac{1}{\gamma} = 0 \tag{9}$$

となる。$\rho = a + bi,\quad \mu = r + si\,(r < \frac{1}{\gamma},\, s \neq 0)$ と定めると (9) は

$$a^2 - b^2 + ca + r - \frac{1}{\gamma} + (2ab + cb + s)i = 0$$

とかける。ゆえに、

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + ca + r - \frac{1}{\gamma} = 0 \\ 2ab + cb + s = 0 \end{cases} \tag{10}$$

が成り立つ。(10) の第 2 式より、$(2a + c)b = -s$ であり、$2a + c = 0$ とすると、(10) の第 1 式より $-b^2 - \frac{c^2}{4} + r - \frac{1}{\gamma} = 0$ となるが、$r - \frac{1}{\gamma} < 0$ より矛盾する。ゆえに、$b = -\frac{s}{2a+c}$ を (10) の第 1 式に代入して整理すると

$$a^2 + ca + r - \frac{1}{\gamma} - s^2 = 0$$

となる。この方程式の相異なる 2 解を $a_-, a_+\,(a_- < 0 < a_+)$ とおき、$b_\pm = -\frac{q}{2a_\pm + c}$ (複合同順) と定めると、(8) の解は

$$q = Ae^{(a_+ + b_+ i)\xi} + Be^{(a_- + b_- i)\xi} \qquad (A, B : \text{constant})$$

とかける。$\xi \to \pm\infty$ のとき q は有界なので $A = B = 0$、すなわち

$$q \equiv 0$$

となる。ゆえに $u = -\gamma v$ が成り立ち、これを (7) の第 2 式に代入すると

$$-v'' - cv' + f(\psi)v = \mu v$$

となる。ただし

$$f(\psi)=(1+\alpha)\psi^{\alpha}-\frac{\alpha}{\gamma}\psi^{\alpha-1}+\frac{1}{\gamma}$$

である。$y=e^{\frac{c}{2}\xi}v$ とおくと、$-y''+\left(\frac{c^2}{4}+f(\psi)\right)y=\mu y$ となる。$\xi\to+\infty$ のとき $f(\psi(\xi))\to\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\gamma}$ であり、$\xi\to-\infty$ のとき $f(\psi(\xi))\to\frac{1}{\gamma}$ となる。また、仮定より $\mathrm{Re}\,\mu<\min\left\{\frac{1}{\gamma},\frac{\alpha(\alpha-1)}{\gamma}\right\}$ が成り立つので、$|y|$ は $\xi\to\pm\infty$ のとき指数的に 0 に近づくことに注意する。。この方程式に $\overline{y}$ をかけて $-\infty$ から $+\infty$ まで積分し部分積分を利用すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y'|^2d\xi+\left(\frac{c^2}{4}+f(\psi)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^2d\xi=\mu\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^2d\xi$$

これは、μ が複素数であることに矛盾する。 (証明終)

Lemma 3 0 は単純固有値である。

Proof. $(u,v)=(\varphi',\psi')$ は $\mu=0$ に対応する固有関数である。Lemma 1 の議論より $\psi'=v_1$ とおくと、$-v_1''-cv_1'+f(\psi)v=0$ が成り立つ。$h_1=e^{\frac{c}{2}\xi}v_1$ と定めると、

$$-h_1''+\left(\frac{c^2}{4}+f(\psi)\right)h_1=0 \tag{11}$$

が成り立つ。また、$\mu=0$ に対応するもう 1 つの固有関数を (u_2,v_2) とおくと、$h_2=e^{\frac{c}{2}\xi}v_2$ は、

$$-h_2''+\left(\frac{c^2}{4}+f(\psi)\right)h_2=0 \tag{12}$$

を満たす。ここで、ロンスキアン $W(h_1,h_2)=h_1'h_2-h_1h_2'$ を考える。(11)(12) より、

$$W'=h_1''h_2-h_1h_2''=0$$

となり、h_1,h_2 は $\xi\to+\infty$ のときに指数的に 0 に近づくので $W=0$ が成り立つ。ゆえに、$\mu=0$ は単純固有値となる。 (証明終)

Lemma 4 L の負の固有値は存在しない。

Proof. μ が L の負の固有値であるとする。Lemma 1 の議論より $v\neq0$ が存在して、$-v''-cv'+f(\psi)v=\mu v$ となる。$j=e^{\frac{c}{2}\xi}v$ とおくと、

$$Tj\stackrel{\mathrm{def}}{=}-j''+\left(\frac{c^2}{4}+f(\psi)\right)j=\mu j \tag{13}$$

となる。また、ψ' は固有値 0 に対応する固有関数であるが、$k=e^{-\frac{c}{2}\xi}\psi'$ とおくと、

$$Tk=0 \tag{14}$$

となる。(13) と (14) を用いて部分積分すると、

$$\mu\int_{-l}^{l}jkdx=g(l)$$

となることがわかる。ただし、

$$g(l) = -j'(l)k(l) + j'(-l)k(-l) + j(l)k'(l) - j(-l)k'(-l)$$

である。

j と k は $l \to \pm\infty$ のとき指数的に 0 に漸近する。それゆえに、

$$g(l) \to 0 \quad \text{as} \quad l \to +\infty$$

が成り立つ。μ は負であるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} jkdx = 0$$

となることがわかる。k は正定値関数なので j は少なくとも一つの零点を持つ。j が $l \to +\infty$ のとき 0 に指数的に漸近することに注意すれば、ある $x_* \in \mathbf{R}$ が存在して

$$j(x_*) = 0 \quad \text{and} \quad j > 0 \quad \text{in} \quad (x_*, \infty)$$

となることを仮定してもよい。

さて、j と k は以下の方程式をそれぞれ満たす：

$$-j'' + f(\psi)j = \mu j, \tag{15}$$

$$-k'' + f(\psi)k = 0. \tag{16}$$

(15)(resp. (16)) に j(resp. k) をかけると、

$$-j''k + k''j = \mu jk \tag{17}$$

を得る。(17) を x_* から $+\infty$ まで積分する。部分積分して $v(x_*) = 0$ を利用すると

$$j'(x_*)k(x_*) = \mu \int_{x_*}^{+\infty} jkdx$$

となることがわかる。

$j'(x_*) > 0, k(x_*) > 0$ そして $\int_{x_*}^{+\infty} jkdx > 0$ であるので、$\mu > 0$ となる。これは矛盾である。

(証明終)

Theorem II の証明を完成するためには Theorem H の仮定が成り立つことを確かめれば十分である。Lemma 2-4 より、最小の正の有限重複度の孤立固有値 β が存在することがわかる。L のスペクトルはエッセンシャルスペクトルと有限重複度の孤立固有値から成り立つ。したがって Lemma 1 を組み合わせると

$$\sigma(L) = \{0\} \cup \sigma^* \quad \text{with} \quad \mathrm{Re}\,\sigma^* \geq \nu$$

となることがわかる。ここで、

$$\nu = \min\{A(\alpha, \gamma), \beta\} > 0$$

である。こうして Theorem II は証明された。

References

[1] D.G.Aronson, H.F.Weinberger, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. Partial differential equations and related topics, Lecture Notes in Math. Vol. 446, Springer, Berlin, 1975, 5-49.

[2] P. Gray, S. K. Scott, *Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor*, Chem. Engrg. Sci. **38**(1983), 29-43.

[3] J. K. Hale, L. A. Peletier, W. C. Troy, *Stability and instability in the Gray-Scott model: the case of equal diffusivities*, Appl. Math. Lett. **12**(1999), 59-65.

[4] J. K. Hale, L. A. Peletier, W. C. Troy, *Exact homoclinic and heteroclinic solutions of the Gray-Scott model for autocatalysis*, SIAM J. Appl. Math. **61**(2000), 102-130.

[5] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. Vol. 840, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981.

[6] N. Sato, *A note on the stability for the Gray-Scott model*, Adv. Math. Sci. Appl, Vol. **12**, No.2(2002),785-790.

Transition layers and spikes for a bistable reaction-diffusion equation

浦野 道雄 (早稲田大学 大学院 理工学研究科 博士課程 1 年)

michio_u@akane.waseda.jp

1 Introduction

以下の反応拡散方程式の定常問題について考える：

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x,u) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

ε は微小なる正のパラメータを表し, $f(x,u)$ は

$$f(x,u) = u(1-u)(u-a(x))$$

で与えられる空間非一様な関数である．ここで, $a(x)$ は以下の仮定を満たす滑らかな関数である：

(A1) $0 < a(x) < 1$ for any $x \in [0,1]$,

(A2) $\Sigma = \{x \in (0,1); a(x) = 1/2\}$ とするとき, Σ は有限集合である,

(A3) $a'(x) \neq 0$ for any $x \in \Sigma$.

(1.1) において $\varepsilon = 0$ とした常微分方程式 $u_t = f(x,u)$ を考えると，この方程式は $u = 0, a(x), 1$ の 3 つの解を持つ．このうちの $u = 0, 1$ の 2 つが安定であることからこのような非線形項を**双安定項 (bistable term)** と呼ぶ.

(1.1) の定常問題は

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x,u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

となる.

(1.2) は, $f(x,u)$ の双安定性と空間非一様性の相互作用により, 非常に多くの解を持つ．例えば, **遷移層 (transition layer)** と呼ばれる空間的に非常に小さい区間で, 解の値が劇的に変化する層を持つ解やスパイク **(spike)** と呼ばれるトゲのような形状の部分を持つ解

が存在する. さらに, これらの遷移層やスパイクが単独で現れるだけではなく, 空間上のある1点の近傍に折り重なるように現れる現象も起こる. このように(1.2)の解は様々な様相を呈し, その全貌をとらえることは非常に困難である.
そこで, これらの解の形状を分類するために以下のようにnモード解を導入する.

定義 1.1 (n-mode solution). u_ε を(1.2)の解とする. u_ε が $a(x)$ とちょうど n 個の交点を持つとき, u_ε を(1.2)の **n モード解**と呼ぶ.

このように n モード解 u_ε を定義すると, ε が十分小さいならば, $u_\varepsilon(x)$ のグラフは次のように分類されることが示される (補題 2.1, 補題 2.2):

(i) 0または1に非常に近い値をとる,

(ii) 遷移層を形成する,

(iii) スパイクを形成する.

したがって, 遷移層やスパイクを持つ解をとらえる上で, n モード解の性質を調べることが本質的となる.
本稿では, n モード解の性質を詳しく調べ, その情報を下に遷移層やスパイクの現れる場所を限定する. また, 遷移層やスパイクの多重性についても議論する.

2 Layers and spikes for n-mode solutions

以下, $n \in \mathbf{N}$ を任意に固定し, この n に対して n モード解を u_ε と表し, n モード解の全体を $S_{n,\varepsilon}$ とおく. また u_ε と $a(x)$ の交点を $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ とする. u_ε の基本的な性質をいくつか述べる.

補題 2.1 (Ai-Chen-Hastings [4]).

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{u_\varepsilon \in S_{n,\varepsilon}} \max_{x \in [0,1]} \left| u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2(u_\varepsilon')^2 - W(x,u_\varepsilon)\right]\right| = 0$$

が成立する. ここで W は

$$W(x,u) = \int_{\phi_0(x)}^u f(x,s)ds, \quad \phi_0(x) = \begin{cases} 0 & (a(x) < 1/2), \\ 1 & (a(x) > 1/2) \end{cases}$$

で与えられる関数である.

補題 2.2. ε が十分小さいならば, u_ε' はちょうど $(n-1)$ 個の零点 $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$ を持ち, それらの点は必ず極値を与える点となる. さらに

$$0 < \xi_1 < \zeta_1 < \xi_2 < \zeta_2 < \cdots < \xi_{n-1} < \zeta_{n-1} < \xi_n < 1$$

が成立する.

補題 2.1, 補題 2.2 は u_ε の概形を表す．すなわち, u_ε は 0 または 1 に漸近している部分と遷移層またはスパイクを形成する部分からなることを示唆する．

u_ε のおよその概形をとらえることができたので, 以下ではもう少し細かい情報を得たい．すなわち, 遷移層 1 つ 1 つやスパイク 1 つ 1 つの形状がどのようになっているのか, また, 0 や 1 へ値が漸近している部分ではどれほどのオーダーで漸近しているのかということを議論する．

補題 2.3. $\xi^\varepsilon \in (0,1)$ を $u_\varepsilon(\xi^\varepsilon) = a(\xi^\varepsilon)$ を満たす点とし, U_ε を $U_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\xi^\varepsilon + \varepsilon t)$ とおく．このとき, ある部分列 $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0$ が存在し, $\xi_n = \xi^{\varepsilon_n}$, $U_n = U_{\varepsilon_n}$ とおけば,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi^* \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \phi \quad \text{in} \quad C^2_{loc}(\mathbb{R})$$

が成立する．ここで ϕ は以下のいずれかの性質を満たす：

(i) もし $a(\xi^*) = 1/2$ ならば ϕ は以下の問題の一意解である：

$$\begin{cases} \phi'' + f(\xi^*, \phi) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \\ \phi(-\infty) = 0,\ \phi(+\infty) = 1, \quad (\text{resp. } \phi(-\infty) = 1,\ \phi(+\infty) = 0) & \\ \phi(0) = 1/2. & \end{cases} \tag{2.1}$$

(ii) もし $a(\xi^*) < 1/2$ ならば ϕ は以下の問題の一意解である：

$$\begin{cases} \phi'' + f(\xi^*, \phi) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \\ \phi(0) = a(\xi^*), \phi(\pm\infty) = 0. & \end{cases} \tag{2.2}$$

(iii) もし $a(\xi^*) > 1/2$ ならば, ϕ は以下の問題の一意解である：

$$\begin{cases} \phi'' + f(\xi^*, \phi) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \\ \phi(0) = a(\xi^*), \phi(\pm\infty) = 1. & \end{cases} \tag{2.3}$$

補題 2.3 は遷移層やスパイク内部での u_ε の形状が ϕ により近似されることを表している．すなわち, 遷移層は(2.1) を満たすヘテロクリニック解を, スパイクは(2.2) または(2.3) を満たすホモクリニック解を x 軸方向へ ε 倍に縮小したものに非常に近い形状をしていることが分かる．したがってスパイク 1 つの幅はおよそ $O(\varepsilon)$ であり, その高さも(2.2) の最大値または(2.3) の最小値から知ることができる．さらに, 補題 2.3 は u_ε と $a(x)$ の交点が $a(x) - 1/2$ の零点の近傍にあるならば遷移層が形成され, そうでないならば, スパイクが形成されるということをも示唆する．

続いて 0 や 1 への漸近オーダーを考える．

定理 2.4 (Asymptotic order). ξ_k, ξ_{k+1} を隣り合う $u_\varepsilon - a(x)$ の零点とし, $\zeta_k \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ を u_ε の極大点であるとする．$\varepsilon \to 0$ のとき $(\zeta_k - \xi_k)/\varepsilon \to \infty$ となるならば

$$c_1 \exp\left(-\frac{R(\zeta_k - \xi_k)}{\varepsilon}\right) < 1 - u_\varepsilon(x) < c_2 \exp\left(-\frac{r(x - \xi_k)}{\varepsilon}\right)$$

が成立する．ここで c_1, c_2, r, R は $0 < c_1 < c_2$, $0 < r < R$ をみたす定数である．

定理 2.4 は u_ε が 1 に漸近する度合いが, u_ε と $a(x)$ の交点からの距離に応じて評価できることを表している.

注意. $(\zeta_k-\xi_k)/\varepsilon\to\infty$ という仮定が成立しないのはスパイク部分のみである. しかしながらスパイクの高さ, すなわちどれだけ 1 に漸近するかということは, 補題 2.3 から既知であり, スパイクのピークは 1 からある程度離れているため, 定理にあるような評価を得ようとすることはもともと無意味である. したがって定理 2.4 に対してこのような仮定が課されているものの, $[0,1]$ 区間上すべてにおいて, u_ε の漸近オーダーに関する解析がなされているといってよい.

3 Location of layers and spikes

前節で得た定理 2.4 を用いて遷移層やスパイクの現れる場所の情報を得る. この節では前に定義した Σ に加え,

$$\Lambda=\{x\in[0,1]\,;\,a'(x)=0\}$$

を導入する.

定理 3.1. $\xi^\varepsilon\in(0,1)$ を $u_\varepsilon(\xi^\varepsilon)=a(\xi^\varepsilon)$ 満たす点とする. このとき, ξ^ε は $\Sigma\cup\Lambda$ に属する点の近傍にのみ存在する. さらに, もし ξ^ε が Σ に属する点の近傍にあるならば u_ε は遷移層を形成し, ξ^ε が Λ に属する点の近傍にあるならば u_ε はスパイクを形成する.

証明の概略. $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, $\{\zeta_k\}_{k=0}^n$ を 補題 2.2 と同様に定義する. ただし, $\zeta_0=0$, $\zeta_n=1$ である. また, $\Sigma=\{z_1,z_2,\ldots,z_m\}$ とする.

補題 2.3 から, もし $u_\varepsilon\in S_{n,\varepsilon}$ が遷移層を $u_\varepsilon(\xi^\varepsilon)=a(\xi^\varepsilon)$ を満たす ξ^ε の近傍に持つならば, ξ^ε はある z_j の十分近くになくてはならないことが分かる. したがって, u_ε が Λ に属する点の近傍にスパイクを持つことを示せば十分である. そのために $\Lambda\cap(z_j,z_{j+1})=\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}$ とおき, $(z_j+\delta,y_1-\delta)$ 上にスパイクが存在すると仮定して矛盾を導く. ここで δ は十分小さい正定数を表す. また, 他の区間に対しても同様の議論が成立する. ここでは, (z_j,z_{j+1}) 上で $a(x)>1/2$ の場合のみ考える. このとき (z_j,y_1) 上で $a'(x)>0$ に注意する

補題 2.3 (iii) から $z_j+\delta<\xi_k<\xi_{k+1}<y_1-\delta$, $u_\varepsilon'(\xi_k)<0$, $u_\varepsilon'(\xi_{k+1})>0$, を満たす $u_\varepsilon-a(x)$ の零点 ξ_k と ξ_{k+1} が存在する. さらに $\zeta_{k-1}<\xi_k<\zeta_k<\xi_{k+1}<\zeta_{k+1}$ を満たす $\zeta_{k-1},\zeta_k,\zeta_{k+1}$ を選ぶことができる. ここで簡単のため, $z_j<\zeta_{k-1}$ かつ $\zeta_{k+1}<y_1$ と仮定する. そうでない場合はいくらかの修正が必要であるがここでは割愛する.

さて

$$1-u_\varepsilon(\zeta_{k-1})>\kappa\sqrt{\varepsilon}\tag{3.1}$$

を示そう. (1.2) を

$$\varepsilon^2u_\varepsilon''+f(\zeta_k,u_\varepsilon)=u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)(a(x)-a(\zeta_k))$$

と変形し, これに u_ε' を乗じて $(\zeta_{k-1},\zeta_{k+1})$ 上で x について積分すると

$$W(u_\varepsilon(\zeta_{k-1}))-W(u_\varepsilon(\zeta_{k+1}))=\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_{k+1}}u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)(a(x)-a(\zeta_k))u_\varepsilon'dx\tag{3.2}$$

を得る．ここで $W(u)=W(\zeta_k,u)$ である．

$a(x)$ は (ζ_k,y_1) において単調増加なので，ある正定数 K が存在して

$$\begin{aligned}\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_{k+1}} u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)(a(x)-a(\zeta_k))u'_\varepsilon dx &> \int_{\zeta_k+\varepsilon}^{y_1} u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)(a(x)-a(\zeta_k))u'_\varepsilon dx \\ &> (a(\zeta_k+\varepsilon)-a(\zeta_k))\int_{\zeta_k+\varepsilon}^{y_1} u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)u'_\varepsilon dx \\ &= (a(\zeta_k+\varepsilon)-a(\zeta_k))\int_{u_\varepsilon(\zeta_k+\varepsilon)}^{u_\varepsilon(y_1)} s(1-s)ds \\ &> K\varepsilon \int_{u_\varepsilon(\zeta_k+\varepsilon)}^{u_\varepsilon(y_1)} s(1-s)ds\end{aligned}$$

が成立する．さらに $u_\varepsilon(y_1)$ は 1 に十分近い値をとり，かつ補題 2.3 から，ある $a_0\in(0,1)$ が存在して $u_\varepsilon(\zeta_k+\varepsilon)<a_0$ が成立するので，ある $C^*>0$ に対して

$$\int_{u_\varepsilon(\zeta_k+\varepsilon)}^{u_\varepsilon(y_1)} s(1-s)ds > C^*$$

を得る．よって

$$((3.2)\text{ の右辺}) > KC^*\varepsilon \tag{3.3}$$

となる．

一方，(3.2) の左辺を評価する．Cauchy の平均値の定理を繰り返し用いることにより，(3.2) の右辺は

$$W(u_\varepsilon(\zeta_{k-1}))-W(u_\varepsilon(\zeta_{k+1})) = -\frac{1}{2}f_u(\zeta_k,\theta)\{(1-u_\varepsilon(\zeta_{k-1}))^2-(1-u_\varepsilon(\zeta_{k+1}))^2\}$$

と変形できる．ここで θ は $\theta\in(u_\varepsilon(\zeta_{k-1}),1)$ を満たす正定数である．θ は十分 1 に近いので，ある ε によらない正定数 M が存在して，

$$W(u_\varepsilon(\zeta_{k-1}))-W(u_\varepsilon(\zeta_{k+1})) < M(1-u_\varepsilon(\zeta_{k-1}))^2 \tag{3.4}$$

が成立する．したがって，(3.3) と (3.4) から，(3.1) が示される．

(3.1) と定理 2.4 から

$$\kappa\sqrt{\varepsilon} < c'_2 \exp\left(-\frac{r'(\xi_k-\zeta_{k-1})}{\varepsilon}\right) \tag{3.5}$$

を得る．同様に

$$\kappa\sqrt{\varepsilon} < c_2 \exp\left(-\frac{r(\zeta_{k-1}-\xi_{k-1})}{\varepsilon}\right) \tag{3.6}$$

も成立する．したがって，(3.5) と (3.6) から，ある正定数 K に対して

$$\xi_k-\xi_{k-1} < K\varepsilon|\log\varepsilon|$$

を得る．これは，ε が十分小さいならば，ξ_{k-1} が $(z_j+\delta,y_1-\delta)$ に属することを意味する．このとき，補題 2.3 から $(z_j+\delta,y_1-\delta)$ 上にもう 1 つのスパイクが存在しなくてはならないことが分かる．

この操作を繰り返すことで，やがて解の n モード性に対する矛盾が生じる． □

4 Multiplicity of layers and spikes

前節で遷移層やスパイクの現れる場所についての情報を得た．本節ではそれらの多重性について議論する．

定義 4.1 (multiple-layer, multiple-spike). ある $x \in \Sigma$ の十分小さい近傍に 2 つ以上の遷移層が現れるとき，このかたまりを**多重遷移層** **(multiple-layer)** と呼ぶ．また，ある $x \in \Lambda$ の十分小さい近傍に 2 つ以上のスパイクが現れるとき，このかたまりを**多重スパイク (multiple-spike)** と呼ぶ．

遷移層やスパイクの多重性については結果のみ述べる．そのためにいくつか記号を導入する．

$$\begin{aligned}
\Sigma^{+} &= \{x \in \Sigma; a'(x) > 0\}, \\
\Sigma^{-} &= \{x \in \Sigma; a'(x) < 0\}, \\
\Lambda^{+} &= \{x \in \Lambda; a(x) < 1/2 \text{ かつ } a(x) \text{ は極大となる }\}, \\
\Lambda^{-} &= \{x \in \Lambda; a(x) > 1/2 \text{ かつ } a(x) \text{ は極小となる }\}.
\end{aligned}$$

定理 4.2 (multiplicity). 0 から 1(resp. 1 から 0) を結ぶ多重遷移層は Σ^{+}(resp. Σ^{-}) に属する点の近傍にのみ存在する．また，0 をベース (resp. 1 をベース) とする多重スパイクは Λ^{+}(resp. Λ^{-}) に属する点の近傍にのみ存在する．

この定理の証明は定理 3.1 に準ずる．すなわち，多重遷移層または多重スパイクが出てきてはならない場所にそれらが存在すると仮定し矛盾を導く方法で示すことができる．

References

[1] S. B. Angenent, J. Mallet-Paret, and L. A. Peletier, *Stable transition layers in a semilinear boundary value problem*, J. Differential Equations, **67**(1987), 212–242.

[2] K. Nakashima, *Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation*, J. Differential Equations, **191**(2003), 234–276.

[3] K. Nakashima, *Stable transition layers in a balanced bistable equation*, Differential Integral Equations, **13**(2000), 1025–1238.

[4] S. Ai, X. Chen, and S. P. Hastings, *Layers and spikes in non-homogenous bistable reaction-diffusion equations*, preprint

Gierer-Meinhardt shadow systemに現れる定常パターンの安定性とHopf分岐について

若狭　徹　(早稲田大学大学院　理工学研究科)
toru_wakasa@ruri.waseda.jp

1 Introduction

本稿では Gierer-Meinhardt model の *shadow-system* と呼ばれる極限問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta A - A + \dfrac{A^p}{\xi^q} & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ \tau \dfrac{d\xi}{dt} = -\xi + \dfrac{1}{|\Omega|\xi^s} \displaystyle\int_\Omega A^r dx & \text{in } (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial A}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{GM-S}$$

について考える．ここで Ω は $\mathbf{R}^N$ の十分滑らかな境界を持つ有界領域, ν は境界の各点における外向き単位法線ベクトルとする．ϵ, τ は正の数であり, ϵ は十分小さいとし, τ は分岐 parameter として取り扱う．最後に p, q, r, s は以下を満たすものとする:

$$p > 1,\ q > 0,\ r > 0,\ s \geq 0, \quad \text{and} \quad 0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}. \tag{A}$$

本来の Gierer-Meinhardt model:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = d_1 \Delta A - A + \dfrac{A^p}{H^q} & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ \tau \dfrac{\partial H}{\partial t} = d_2 \Delta H - H + \dfrac{A^r}{H^s} & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial A}{\partial \nu} = \dfrac{\partial H}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{GM}$$

は, ヒドラと呼ばれる微小生物における形態形成過程を説明するために Gierer と Meinhardt によって提唱された (1974, $(p, q, r, s) = (2, 1, 2, 0)$) 反応-拡散型のモデルである．具体的には A, H は反応活性物質 (*activator*) 及び反応抑制物質 (*inhibitor*) と呼ばれる化学物質の濃度を表しており, (GM) は有界領域 Ω におけるこれらの濃度分布の時間発展を記述している．このときヒドラにおける形態形成は $(A(x,t), H(x,t))$ のパターン形成として解釈されることになる．一般的には, 単独の半線形放物型方程式の問題 (同次 Neumann 境界条件) においては, Ω が convex である場合など, 安定な定常解は自明な空間一様な解に限られることが知られており, 方程式に含まれる Laplacian Δ は拡散項と呼ばれ均質化を進める方向に働く．その一方, 同じ放物型でも単独の方程式でなく system の場合では状況が異なり解の形状に空間非一様なパターンが形成される場合がある．このようなパターン形成を反応拡散系のモデルによって数学的な立場から理解しようという発想は、Turing が提唱した *diffusion-driven instability* に起源を持つ．Turing の考えの下では 2 種類の化学物質の空間における拡散の度合いが大きく異なる場合, すなわち A に関する拡散係数 $d_1 (= \epsilon^2)$ が

小さくかつ H に関する拡散係数 d_2 が大きい場合, (GM) において (A, H) の空間非一様なパターン形成が期待され, (GM) の数学的な解析に関心が持たれる.

しかしながら (GM) 自体は変分構造を持たないことを初めとして数学的な解析が非常に難しい. このために Keener, Nishiura (1978,82) によって提唱されたのが shadow-system の解析である. shadow-system とは簡単に言うと (GM) において $d_2 \to +\infty$ としたときに得られる極限問題であり, これによって (GM-S) が得られることになる. このとき $H_{d_2}(x,t) \to \xi(t)$(空間一様) になることに注意したい. 従って (GM-S) において $\epsilon > 0$ が十分小さいときの $A(x,t)$ のパターンについて関心が持たれ, (GM-S) のダイナミクスに関して次の問題が生じる.

問題 (GM-S) における定常パターン $(A(x), \xi)$ の存在とその安定性の解析.

本稿ではこの問題に対して, 仮定 (A) に加えていくつかの条件の下で新しい結果が得られたことを報告する.

2 Preliminaries

2.1 特異摂動問題との関係

ここでは (GM-S) の解析する上で重要な (楕円型) 特異摂動問題についての補足を行う. まず $(A(x), \xi)$ を (GM-S) の定常パターンであると仮定する. このとき $(A(x), \xi)$ は

$$\begin{cases} 0 = \epsilon^2 \Delta A - A + \dfrac{A^p}{\xi^q} & \text{in } \Omega, \\ 0 = -\xi + \dfrac{1}{|\Omega|\xi^s} \displaystyle\int_\Omega A^r dx, & \\ \dfrac{\partial A}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を満たしているので, 定常パターンの存在は ϵ のみに依存し τ には独立であることがわかる. さらに次の $(A, \xi) \mapsto u$ の対応関係を考える:

$$A(x) = \xi^{q/(p-1)} u(x), \quad \xi = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u^r dx \right)^{-(p-1)/(qr-(p-1)(s+1))} \tag{1}$$

((A) より第 1 式, 第 2 式に現れる指数は正及び負). この対応は 1 対 1 であり, さらにこのとき $u(x)$ は次の半線形楕円型方程式に関する境界値問題

$$\begin{cases} \epsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0 & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{P$_\epsilon$}$$

の解であることがわかる. 従って (P_ϵ) を解くことにより (GM-S) の定常パターンが構成される. ϵ が十分小さいとき, (P_ϵ) は典型的な特異摂動問題として扱われ,Lin-Ni-Takagi

(1988), Ni-Takagi (1991,95) の先駆的な研究以来領域の境界や内部において *spike* と呼ばれる形状をもつ空間非一様な解の存在などの多くの研究結果が知られている．これらの結果においては, 有界領域 Ω の幾何学的性質が (P_ϵ) の解構造に大きく影響することが知られている．

2.2 (P_ϵ) の解構造と不安定指数

ここでは (P_ϵ) に関する重要な結果について証明抜きで述べておく．以下では (P_ϵ) においては, 指数 p が sub-critical の場合, すなわち

$$1 < p < +\infty \ (N = 2), \quad 1 < p < \frac{N+2}{N-2} \ (N \geq 3)$$

である場合について考える．以下 $p_s := +\infty$ $(N = 2)$, $:= \frac{N+2}{N-2}$ $(N \geq 3)$ とおく．このとき Sobolev embedding theorem により, $H^1(\Omega)$ における framework により得られる解は C^1-級となる．また, 最大値原理によって自明な解 $u = 0$ を除く解は全て正値解となることに注意したい．まず境界において spike を持つ解 (boundary-spike solution) について次の命題が成立することが知られている．

Proposition 2.1 (1 boundary-spike solution の構成). *$1 < p < p_s$, $H(Q)$ を $Q \in \partial\Omega$ における $\partial\Omega$ の平均曲率とする．$P \in \partial\Omega$ が H の非退化な critical-point であるとき, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $P_\epsilon \in \partial\Omega$, 及び (P_ϵ) の解 $u_{\epsilon,P}$ が存在して次が成立する:*

$$u_{\epsilon,P}(x) = w\Big(\frac{x - P_\epsilon}{\epsilon}\Big) + o(\epsilon^N) \qquad in\ H^1(\Omega).$$

ここで $w : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は次の ground-state problem の解である:

$$\begin{cases} \Delta w - w + w^p = 0 & in\ \mathbf{R}^N, \\ w > 0 & in\ \mathbf{R}^N, \\ w \in H^1(\mathbf{R}^N), \quad and \quad w(0) = \max\limits_{y \in \mathbf{R}^N} w(y). \end{cases} \tag{P$_0$}$$

Remark 2.1. Proposotion 2.1 において w は球対称で (Gidas-Ni-Nirenberg, 1981), $w(r)$ は単調減少かつ一意に定まり (Kwong, 1989), かつ exponentially decaying (Berestycki-Lions, 1983) であることが知られている．これより $u_{\epsilon,P}$ は $P \in \partial\Omega$ 近傍で鋭いピークのような形状を持つことがわかる (spike solution の由来).

次に Proposition 2.1 によって構成された 1 boundary-spike solution に対する線形化作用素について調べる．まずは線形安定性の定義を述べよう．(P_ϵ) の解 u に対して $L^2(\Omega)$ 上の閉作用素

$$L_u\phi := \epsilon^2\Delta\phi - \phi + pu^{p-1}\phi$$

を u における線形化作用素, μ_j, $\varphi_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ を $L = L_u$ に対する固有値及び対応する固有関数 (ただし $\mu_j \geq \mu_{j+1}$, $\|\varphi_j\|_{L^2} = 1$) とする．

Remark 2.2. 2 階の線形楕円型作用素に関する一般論より, 最大固有値 μ_1 は単純固有値であり, かつ対応する固有関数 φ_1 は正値関数に取ることができる．

このとき $\mu_1 < 0$ ならば u は ((P$_\epsilon$) において) 線形安定, $\mu_1 > 0$ ならば u は線形不安定であるといい, さらに線形不安定であるとき正となる μ_j の個数を u の不安定指数 (Morse 指数) という. また L が 0 を固有値にもたないとき u は非退化であるという.

以上を踏まえて $u = u_{\epsilon,P}$ に関しての線形安定性を調べたい. 後半の議論に用いるので次のように notation を定めておく:

$$
\begin{aligned}
&L_{\epsilon,P} &&: u_{\epsilon,P}\text{に対する線形化作用素},\\
&\mu_{j,\epsilon} &&: L_{\epsilon,P}\text{の第 } j\text{-固有値},\\
&\varphi_{j,\epsilon} &&: \mu_{j,\epsilon}\text{に対応する固有関数}.
\end{aligned}
$$

実際には $u_{\epsilon,P}$ は線形不安定であり, その Morse index (不安定指数) はが P における平均曲率の Hessian $(\partial^2 H)(P)$($(N-1)$-次対称行列) の Morse index によって特徴づけられることが次の命題により知られている.

Proposition 2.2 (1 boundary-spike solution の不安定指数). Proposition 2.1 の仮定に加えて $(\partial^2 H)(P)$ の正の固有値の個数を k $(1 \le k \le N-1)$ とする. このとき, u_ϵ は非退化かつ線形不安定で, このとき不安定指数は $k+1$.

Remark 2.3. Proposition 2.2 において例えば P_1, $P_2 \in \partial\Omega$ が平均曲率の非退化な critical point でかつ $H(P_1)$, $H(P_2)$ が平均曲率の極大値, 及び極小値となる場合, u_{ϵ,P_1}, u_{ϵ,P_2} の不安定指数は $1+0=0$ 及び $1+(N-1)=N$ となる.

Proposition 2.1, 2.2 の証明などについては例えば [1], [3, 4] などを参照せよ.

Remark 2.4. 本稿においては 1 boundary-spike の場合だけを取り上げたが, multiple boundary-spike solution についても同様の方法にて構成することができる. これらについても多くの文献があるがここでは [1] を挙げておく.

3 Main results

本稿は (P$_\epsilon$) の (nondegenerate) 1 boundary-spike solution u_ϵ に対して関係式 (1) により構成される (GM-S) の定常パターン $(A_\epsilon, \xi_\epsilon)$ の線形安定性解析について扱う. 再び (1) により (GM-S) の定常パターンにおける線形化問題は次の形に帰着される:

$$
\begin{cases}
\epsilon^2\Delta\psi - \psi + pu_\epsilon^{p-1}\psi - q\eta u_\epsilon^p &= \lambda\psi \qquad \text{in } \Omega,\\
\dfrac{r\int_\Omega u_\epsilon^{r-1}\psi dx}{\int_\Omega u_\epsilon^r dx} - (s+1)\eta &= \tau\lambda\eta,\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{LP-S}
$$

ここで (LP-S) は自己共役ではなく虚数固有値が存在しうることに注意すると, (LP-S) は $(\psi,\eta) \in (L^2(\Omega))^C \times \mathbf{C}$ (複素化された Hilbert 空間) に対する固有値問題として考える必要がある. このとき (LP-S) における固有値が全て $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ に含まれるとき

$(A_\epsilon, \xi_\epsilon)$ は (GM-S) において線形安定であり, (LP-S) において実部が正の固有値 λ が存在するとき $(A_\epsilon, \xi_\epsilon)$ は線形不安定となる.

(GM-S) における安定性解析についての既知の結果としては主に次の 2 つが挙げられる:

- Juncheng Wei [5, 6] : $1 < p < 1 + 4/N$ and $r = 2$, or $1 < p < p_s$ and $r = p + 1$
- Ni-Takagi-Yanagida [2] : $1 < p < p_s$ and $r = p + 1$ (*least-energy pattern*),

[5, 6] では (LP-S) に関連する non-local eigenvalue problem についての研究がなされており, [2] では安定性解析は (LP-S) から得られる *characteristic equation* の解析に帰着され, 特に τ を分岐 parameter として定常パターンから Hopf 分岐 (時間周期解の分岐) が起こるという結果についても得られている. r に関する条件はモデルに関して本質的なものではないがこの場合 (LP-S) の取り扱いが簡単になるために付けられている. 一方 $r = 2$, or $p+1$ でない一般の r については (LP-S) の解析は非常に難しい.

本稿では最初の仮定 (A) に加えて主に $1 < p < p_s$, $r = 2$ の場合について考える. 結果を述べるために $\partial\Omega$ の部分集合 $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_-$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{P \in \partial\Omega | P \text{ は } H \text{ の非退化な critical point}\} \\ \mathcal{M}_+ &:= \{P \in \mathcal{M} | (\partial^2 H)(P) \text{ の固有値は全て負 }\} \\ \mathcal{M}_- &:= \{P \in \mathcal{M} | (\partial^2 H)(P) \text{ の固有値に正となるものが存在 }\} \end{aligned}$$

Proposition 2.1,2.2 より $P \in \mathcal{M}$ に対して十分小さい $\epsilon > 0$ に対して (P_ϵ) における 1 boundary-spike solution $u_{\epsilon,P}$ が存在する. またその不安定指数について $P \in \mathcal{M}_+$ ならば不安定指数は 1 で $P \in \mathcal{M}_-$ ならば不安定指数は 2 以上であることに注意する. 以上の下で次の定理を得る.

Theorem 3.1 (Instability). $P \in \mathcal{M}_-$, $1 < p < p_s$, $r = 2$, or $p+1$ かつ p, q, r, s は (A) を満たすとする. このとき任意の $\tau > 0$ に対して $(A_{\epsilon,P}, \xi_{\epsilon,P})$ は (GM-S) において線形不安定である.

Theorem 3.2 (Stability : $r = 2$). $P \in \mathcal{M}_+$, $1 < p < p_s$, $r = 2$, かつ p, q, r, s は (A) を満たすとする. このとき q が十分大きいならば *1 boundary spike pattern* $(A_{\epsilon,P}, \xi_{\epsilon,P})$ に対してある $\tau_c > 0$ が存在して次が成立する.

(i) $(A_{\epsilon,P}, \xi_{\epsilon,P})$ は $\tau \in (0, \tau_c)$ ならば線形安定, $\tau \in (\tau_c, +\infty)$ ならば線形不安定.

(ii) $\tau = \tau_c$ のとき, (GM-S) において $(A_{\epsilon,P}, \xi_{\epsilon,P})$ から Hopf 分岐が起こる.

4 Sketch of proofs

証明のアイデアは [2] における characteristic equation の方法とほぼ同様である. まずは (LP-S) における characteristic equation を導出する. 以下では P による添字を省略する.

4.1 characteristic equation

$\lambda \notin \{\mu_{j,\epsilon}\}_{j=0}^{\infty}$ と仮定すると, (LP-S) の第 1 式は $\{\varphi_{j,\epsilon}\}_{j=0}^{\infty}$ による固有関数展開を用いて次のように ψ について解くことができる:

$$\psi = q\eta(L_\epsilon - \lambda)^{-1}u_\epsilon^p = q\eta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(u_\epsilon^p, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2}}{\mu_{j,\epsilon} - \lambda}\varphi_{j,\epsilon}. \tag{2}$$

ここで $L_\epsilon u_\epsilon = (p-1)u_\epsilon^p$ 及び L_ϵ の自己共役性から導かれる次の等式

$$(u_\epsilon^p, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2} = \frac{\mu_{j,\epsilon}}{p-1}(u_\epsilon, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2}, \tag{3}$$

及び Perseval の等式から導かれる等式

$$\int_\Omega u_\epsilon^r dx = \int_\Omega u_\epsilon \cdot u_\epsilon^{r-1}dx = \sum_{j=0}^{\infty}(u_\epsilon, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2}(u_\epsilon^{r-1}, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2}, \tag{4}$$

に注意して (2)-(4) を (LP-S) の第 2 式に代入すると, λ が満たす characteristic equation として

$$\begin{aligned}\chi(\lambda,\epsilon,\tau) &:= \lambda\left[\frac{qr}{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_{j,\epsilon}}{\mu_{j,\epsilon}-\lambda} - \tau\right] + \frac{qr}{p-1} - (s+1) = 0,\\ c_{j,\epsilon} &:= \frac{(u_\epsilon^{r-1}, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2}(u_\epsilon, \varphi_{j,\epsilon})_{L^2}}{\int_\Omega u_\epsilon^r dx} \quad (0 \le j < \infty).\end{aligned} \tag{5}$$

を得る. このとき特に $r = 2$ に対しては

$$c_{j,\epsilon}^{(2)} = \frac{|(u_\epsilon, \varphi_{j,\epsilon})|^2}{\int_\Omega u_\epsilon^2 dx} \ge 0 \quad (0 \le j < \infty), \tag{6}$$

となることに注意したい (以後の議論では $c_{j,\epsilon} > 0$ として一般性を失わない). Theorem 3.1 は次の Lemma と characteristic equation を組みあわせた簡単な議論により証明できる.

Lemma 4.1. $r = 2, or\ p+1$ とする. このとき $\lambda = \mu_{j,\epsilon}$ が (LP-S) の固有値であるための必要十分条件は

$$\int_\Omega u_\epsilon \varphi_{j,\epsilon}dx = 0. \tag{7}$$

Remark 4.1. Lemma 4.1 において $j = 0$ のとき固有関数の性質から積分量の値は正となり $\mu_{0,\epsilon}$ は (LP-S) の固有値となることはない. また $0 \notin \{\mu_{j,\epsilon}\}_{j=0}^{\infty}$ かつ 0 は (5) の解でもないため, 0 も (LP-S) の固有値となることはない.

Sketch of proof of Theorem 3.1. $P \in M_-$ より $0 < \mu_{1,\epsilon} < \mu_{0,\epsilon}$ が成立することに注意する. $j = 1$ に対して (7) が成立するならば $\lambda = \mu_{1,\epsilon}$ 自体が (LP-S) の固有値であり, (7) が成立しないならば区間 $(\mu_{1,\epsilon}, \mu_{0,\epsilon})$ に (5) の解が存在する (中間値の定理). 従って $(A_{\epsilon,P}, \xi_{\epsilon,P})$ の (任意の $\tau > 0$ に対する) 線形不安定性が導かれる. □

4.2 Hopf bifurcation theorem

次に $P \in \mathcal{M}_+$ となる場合について考える. このとき, $\mathbf{C}$ の右半平面に含まれる (LP-S) の固有値は (5) の解に限られる. 初等的な解析 (中間値の定理) により $\tau > 0$ が十分大きいとき, (5) の正の解が少なくとも 2 つ存在することがわかるが, 複素関数論における Rouché の定理を利用するとさらに次の Lemma が導かれる.

Lemma 4.2. characterisic equation (5) の右半平面における解は高々2 つである.

従って $(A_{\epsilon,P}, \xi_{\epsilon,P})$ は任意の $\tau > 0$ に対して不安定であるか, もしくは安定性の変化がある τ によって生じることがあるかのいずれかである. この場合 Remark 4.1 により 0 は固有値ではなく, 安定性の変化は τ を parameter とする (5) の解の 1-parameter 族 $\lambda(\tau)$ が虚軸を横切ることで起こる必要がある. このことを踏まえて以下では次を満たすような局所 1-parameter 族 $\lambda(\tau)$ の構成を目標とする:

$$\begin{cases} \chi(\lambda(\tau); \epsilon, \tau) = 0, \\ \lambda(\tau_*) = i\omega \neq 0, \\ \mathrm{Re}\Big(\dfrac{\partial \lambda}{\partial \tau}(\tau_*)\Big) \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

以下 $r = 2$ に限定して議論を進める. まず最初に (5) の純虚数の根を構成する. $\chi(i\omega; \epsilon, \tau) = 0$ は (8) により (ω, τ) に関する次の 2 つの方程式と同値となることがわかる:

$$\begin{cases} S(\omega^2) = 1 - \dfrac{(p-1)(s+1)}{qr}, \\ T(\omega^2) = \dfrac{p-1}{qr}\tau. \end{cases} \tag{9}$$

ここで $S,\ T : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ は次で定められる:

$$S(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta}{\mu_{j,\epsilon}^2 + \theta} \frac{|(u_\epsilon, \varphi_{j,\epsilon})|_{L^2}^2}{\int_\Omega u_\epsilon^2 dx}, \qquad T(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_{j,\epsilon}}{\mu_{j,\epsilon}^2 + \theta} \frac{|(u_\epsilon, \varphi_{j,\epsilon})|_{L^2}^2}{\int_\Omega u_\epsilon^2 dx}.$$

S は単調増加で $S(0) = 0,\ \lim_{\theta \to +\infty} S(\theta) = 1$ を満たし, また

$$\lim_{\theta \to +\infty} \theta \cdot T(\theta) = \exists C > 0$$

が成立することから $\theta > 0$ が十分大きいとき $T(\theta) > 0$ となる. $\tau > 0$ であることから (9) が解を持つための十分条件として q が十分大きいという仮定を加えて次の Lemma を得る.

Lemma 4.3. $P \in \mathcal{M}_+,\ 1 < p < p_s,\ r = 2,\ (p, q, r, s)$ は (A) を満たすとする. このとき q が十分大きいならば, $(\theta_c, \tau_c) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ が存在して次を満たす:

$$\chi(i\sqrt{\theta_c}; \epsilon, \tau_c) = 0, S'(\theta_c) > 0.$$

Sketch of proof of Theorem 3.2. 証明は陰関数定理を用いて $\lambda(\tau)$ を構成し，その後 Hopf bifurcation theorem (Crandall-Rabinowitz, 1977) の仮定の条件を満たすことを示せばよい．

$$\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(i\sqrt{\theta_c};\epsilon,\tau_c)=2\frac{qr}{p-1}(\theta_c T'(\theta_c)+i\sqrt{\theta_c}S'(\theta_c))\neq 0,$$

及び Lemma 4.3 により陰関数定理が適用でき (8) を満たす $\lambda(\tau)$ が構成される．また計算を続けると，

$$\text{sign Re}\ \frac{\partial \lambda_c}{\partial \tau}(\tau_c)=\text{sign Re}\ \frac{p-1}{2qr}\frac{S'(\theta_c)+i\sqrt{\theta_c}T'(\theta_c)}{(S'(\theta_c))^2+\theta_c(T'(\theta_c))^2}>0, \tag{10}$$

が得られる．最後に $i\sqrt{\theta_c}$ が (LP-S) の単純固有値となることについては次の積分量

$$I_c:=-\frac{qr\xi_\epsilon^{s+1}}{|\Omega|\tau_c}\int_\Omega (L_\epsilon-i\sqrt{\theta_c})^{-1}u_\epsilon^p\cdot\overline{(L_\epsilon+i\sqrt{\theta_c})^{-1}u_\epsilon}dx+\xi_\epsilon^{\frac{2q}{p-1}}$$

が 0 にならないことを示せばよい．このとき

$$I_c=\frac{2qr\xi_\epsilon^{2q/(p-1)}}{(p-1)\tau_c}\big(-\theta_c(T^{(2)})'(\theta_c)+i\sqrt{\theta_c}(S^{(2)})'(\theta_c)\big)\neq 0.$$

となり以上から Hopf-bifurcation theorem の仮定が導かれる． □

参考文献

[1] P.W. Bates and Junping Shi, *Existence and instability of spike layer solutions to singular perturbation problems*, J. Funct. Anal., **196** (2002), 211-264.

[2] W.-M. Ni, I. Takagi and E. Yanagida, *Stability of least-energy pattarns of the shadow system for an activator- inhibitor model*, Japan J. Indust. Appl. Math., **18** (2001), 259-272.

[3] Juncheng Wei, *On the boundary spike layer solutions to a singularly perturbed Neumann problem*, J. Differential Equations, **134** (1997), 104-137.

[4] Juncheng Wei, *Uniqueness and critical spectrum of boundary spike solutions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **131A** (2001), 1457-1480.

[5] Juncheng Wei, *On single interior spike solutions of Gierer-Meinhardt system : Uniqueness, spectral estimates and stability analysis*, Euro. J. Appl. Math., **10** (1999), 353-378.

[6] Juncheng Wei, *On a nonlocal eigenvalue problem and its applications to point-condensations in reaction-diffusion systems*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **10** (2000), 1485-1496.

Existence Results for some Quasilinear Elliptic Equations in an Unbounded Domain

Hirokazu Ohya
Department of Mathematics, Waseda University
e-mail: ooya@fuji.waseda.jp

1. Introduction

This paper is concerned with the following quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents:

$$\text{(QE)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u - p\nabla\theta(x)\cdot\nabla u|\nabla u|^{p-2} = \lambda a(x)|u|^{p-2}u + K(x)|u|^{q-2}u & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ with $1 < p < N$, $p < q \le p^* := Np/(N-p)$ and $\lambda \in \mathbf{R}$. Here $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ is an unbounded domain such that $\Omega := \mathbf{R}^N \setminus \cup_{i=1}^k \overline{\omega}_i$, where ω_i is an open and connected set with smooth boundary. If $\cup_{i=1}^k \omega_i \neq \emptyset$, we impose zero Dirichlet boundary condition on the boundary $\partial\Omega$ of Ω. If $\cup_{i=1}^k \omega_i = \emptyset$, then the homogenous boundary condition is not required. In (QE) $\theta(x)$, $a(x)$ and $K(x)$ are positive (or non-negative) functions. Our aim is to look for solutions tending to zero as $|x| \to \infty$.

When $p = 2$, $\theta(x) = \frac{1}{8}|x|^2$, $a(x) = K(x) \equiv 1$ and $\Omega = \mathbf{R}^N$, (QE) is written as the following semilinear elliptic equation

$$-\Delta u - \frac{1}{2}x\cdot\nabla u = \lambda u + |u|^{q-2}u \quad \text{in } \mathbf{R}^N \tag{1.1}$$

with $q > 2$. Escobedo-Kavian [7] have shown that

(i) if $q < 2^* = 2N/(N-2)$, (1.1) admits a solution if and only if $\lambda < N/2$,

(ii) if $q = 2^*$, (1.1) admits a solution if and only if $\lambda \in (N/4, N/2)$ for $N \ge 4$,

where $N/2$ is the first eigenvalue of $-\Delta - \frac{1}{2}x\cdot\nabla$ on $\mathbf{R}^N$ (see [7, Theorem 4.10]). As a more general case than (1.1), we will study the solvability of (QE). We also study the range of λ for which (QE) admits a decaying solution.

Equation (QE) is also written in the following divergence form:

$$-\operatorname{div}(e^{p\theta(x)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda e^{p\theta(x)}a(x)|u|^{p-2}u + e^{p\theta(x)}K(x)|u|^{q-2}u \quad \text{in } \Omega;$$

so that the associated weak formulation is given by

$$\int_\Omega e^{p\theta(x)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega e^{p\theta(x)}(\lambda a(x)|u|^{p-2}u + K(x)|u|^{q-2}u)\varphi\,dx \tag{1.2}$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. From (1.3), it is natural to introduce some Sobolev spaces with weight function $e^{p\theta(x)}$.

We first consider (QE) with $q < p^*$. We assume that $\theta \in C^2(\Omega)$ is a non-negative function which satisfies

$$\text{(A1)} \qquad \begin{cases} (\theta.1) \text{ there exists a constant } c_\theta > 0 \text{ such that } \Delta\theta \ge c_\theta \text{ for all } x \in \Omega, \\ (\theta.2) \text{ there exists a point } x_0 \in \Omega \text{ such that } (x - x_0)\cdot\nabla\theta \ge 0 \text{ for all } x \in \Omega, \\ (\theta.3)\ \left[(p-1)\Delta\theta + |\nabla\theta|^2\right]|\nabla\theta|^{p-2} \to +\infty \quad \text{as} \quad |x| \to \infty. \end{cases}$$

One can easily check that $\theta(x) = |x|^2$ fulfills (A1). For such function θ, we introduce weighted Sobolev spaces $L^p(\theta, \Omega)$ and $W^{1,p}(\theta, \Omega)$ as follows:

$$L^p(\theta,\Omega) := \left\{u \in L^p(\Omega) \,\Big|\, \int_\Omega e^{p\theta(x)}|u|^p dx < +\infty\right\}, \tag{1.3}$$

$$W^{1,p}(\theta,\Omega) := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \,\Big|\, \int_\Omega e^{p\theta(x)}(|u|^p + |\nabla u|^p) dx < +\infty\right\}. \tag{1.4}$$

By using the above space, we define a weak solution of (QE): u is called a *weak solution* of (QE) if it satisfies (1.2) for every $\varphi \in W^{1,p}(\theta, \Omega)$.

Let $a(x)$ be a non-negative function satisfying

(B1) $$a(x) \in L^r(\Omega) \quad \text{for some } r \in (N/p, \infty].$$

Correspondingly to $W^{1,p}(\theta,\Omega)$, define

$$\lambda_1 := \inf_{u \in W^{1,p}(\theta,\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \int_\Omega e^{p\theta(x)}|\nabla u|^p dx \Big/ \int_\Omega e^{p\theta(x)} a(x)|u|^p dx \right\}.$$

From (A1) and (B1), one can show that λ_1 is positive (see [10, Proposition 2.1]). It is easy to see that λ_1 is the first eigenvalue for the following eigenvalue problem;

$$\begin{cases} -\Delta_p u - p\nabla\theta(x) \cdot \nabla u|\nabla u|^{p-2} = \lambda a(x)|u|^{p-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Let $K(x)$ be a positive function such that

(C1) $$V(x) := e^{(p-q)\theta(x)}K(x) \in L^r(\Omega) \quad \text{with} \quad r \in (p^*/(p^* - q), \infty].$$

Theorem 1.1 (case $q < p^*$ [10]). *Assume* (A1), (B1) *and* (C1). *Then* (QE) *admits a non-trivial weak solution* $u^* \in W^{1,p}(\theta, \Omega)$ *for every* $\lambda < \lambda_1$.

Next we will study (QE) in case $q = p^*$ by assuming, in addition to (A1) and (B1), that

(A2) there exists $\alpha_\theta > 0$ such that $|\nabla\theta(x)| = \alpha_\theta|x - x_0| + o(|x - x_0|)$

and

there exists $s \in [p-2, p)$ such that $a(x) = |x - x_0|^{-s} + o(|x - x_0|^{-s})$

as $|x - x_0| \to 0$ on $\theta(x)$ and $a(x)$. It follows from (B1) and (B2) that r, s must satisfy $rs < N$. We also put the following condition on positive function $K(x) \in C(\Omega)$:

(C2) $V(x) := e^{(p-p^*)\theta(x)}K(x)$ satisfies $V(x_0) = \|V\|_{L^\infty(\Omega)}$ and $\overline{\lim_{|x|\to\infty}} V(x) = 0$.

Theorem 1.2 (case $q = p^*$ [11]). *Let* $N \geq p^2 - s(p-1)$. *Assume* (A1), (B1), (B2) *and* (C2). *Then* (QE) *admits at least one non-trivial weak solution* $u^* \in W^{1,p}(\theta, \Omega)$ *for every*

i) $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *if* $s \in (p-2, p)$,

ii) $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ *if* $s = p-2$,

where

$$\lambda_0 = \lambda_0(p, N) := \begin{cases} \alpha_\theta p \left(\dfrac{N-p}{p-1}\right)^{p-1} \overline{A} & \text{if } N > 3p-2, \\ \alpha_\theta p \left(\dfrac{N-p}{p-1}\right)^{p-1} & \text{if } N = 3p-2 \end{cases} \tag{1.5}$$

with

$$\overline{A} = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|y|^2}{[1 + |y|^{p/(p-1)}]^{N-1}} dy \Big/ \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|y|^{-(p-2)}}{[1 + |y|^{p/(p-1)}]^{N-p}} dy.$$

Remark 1.1. It is not obvious whether λ_1 is greater than λ_0 or not. If $\|a(x)\|_{L^r(\Omega)}$ ($r \neq \infty$) is sufficiently small, then λ_1 is greater than λ_0. In this situation, (QE) with $q = p^*$ has a non-trivial solution $u^* \in W^{1,p}(\theta, \Omega)$ for any $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$.

Remark 1.2. Let $p = 2$ and $N \geq 4 - s$. If $r = \infty$ and $\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} < 2c_\theta/\alpha_\theta N$, then we can show that (QE) with $q = 2^*$ admits at least one positive solution $u^* \in W^{1,2}(\theta, \Omega)$ for every $\lambda \in (\alpha_\theta N, \lambda_1)$. This is an extension of Escobedo-Kavian[7].

Remark 1.3. By using the technique of Egnell [6] that (QE) has no positive solution in $W^{1,p}(\theta, \Omega)$ for every $\lambda \geq \lambda_1$.

It is easily shown that weak solutions of (QE) are critical points of the following functional

$$I_\theta(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega e^{p\theta(x)}(|\nabla u|^p - \lambda a(x)|u|^p)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u|^q dx. \tag{1.6}$$

Our analysis for Theorem 1.1 and 1.2 is based on the Moutain Pass Theorem. In case $q < p^*$, the idea of the proof of Theorem 1.1 is standard (see author's paper [10, Section 3]). We will mainly exhibit the strategy of the proof of Theorem 1.2 in this paper.

In general, the embedding $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ is not compact for general $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. In order to resolve this point, Lions [8, 9] has studied some behavior of sequences $\mu_m := |\nabla u_m|^p dx$ and $\nu_m := |u_m|^{p^*} dx$, where $\{u_m\}$ is a weakly convergent sequence in $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$. From his method, one can find useful information on these sequences at some local points. On the other hand, some author have introduced the idea for these behaviors at infinity in the affirmative sense. They are, for example, Ben-Naoum, Troestler and Willem [1], Bianch, Chabrowski and Szulkin [2] and Chabrowski [4]. In Section 3, we will study the behavior of sequences $\overline{\mu}_m := e^{p\theta(x)}|\nabla u_m|^p dx$ and $\overline{\nu}_m := e^{p\theta(x)}K(x)|u_m|^{p^*} dx$ corresponding to the functional I_θ.

Being based on these preparations, we will apply a standard variational argument to I_θ with $q = p^*$ in Section 4. To assure Palais-Smale condition, it is sufficient to show that the energy level associated to I_θ must be below a certain critical level. We estimate this energy level by using a special function defined by Talenti [14] in Section 5.

2. Preliminary and Some Notations Corresponding to Weighted Sobolev Spaces

Let $\theta \in C^2(\Omega)$ be a non-negative function satisfying $(A1)$. For such θ, we define $L^p(\theta, \Omega)$ and $W^{1,p}(\theta, \Omega)$ by (1.3) and (1.4), respectively. The norm of $L^p(\theta, \Omega)$ is defined by

$$\|u\|_{p,\theta,\Omega} = \left\{\int_\Omega e^{p\theta(x)}|u|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

We also define $\|u\|^p_{1,p,\theta,\Omega} = \|u\|^p_{p,\theta,\Omega} + \|\nabla u\|^p_{p,\theta,\Omega}$. Then it is easy to see that $W^{1,p}(\theta, \Omega)$ is a Banach space with norm $\|\cdot\|_{1,p,\theta,\Omega}$. If $\Omega = \mathbf{R}^N$, then we simply write $W^{1,p}(\theta)$ in place of $W^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N)$.

Esspecially for the case $q = p^*$, we introduce the following quotient:

$$Q_{\lambda,K,\theta}(u) := \frac{\displaystyle\int_\Omega e^{p\theta(x)}|\nabla u(x)|^p dx - \lambda\int_\Omega e^{p\theta(x)}a(x)|u(x)|^p dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u(x)|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}. \tag{2.1}$$

From the definition of $V(x)$, one can express $\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u|^{p^*}dx = \int_\Omega V(x)\cdot e^{p^*\theta(x)}|u|^{p^*}dx$. So due to assumptions (B1) and (C2), $Q_{\lambda,K,\Omega} : W^{1,p}(\theta,\Omega) \to \mathbf{R}$ is well defined for every $\lambda \in \mathbf{R}$. Define

$$S_{\lambda,K,\theta}(\Omega) := \inf_{u\in W^{1,p}(\theta,\Omega)\setminus\{0\}} Q_{\lambda,K,\theta}(u).$$

In this case, there is a close relationship between seeking critical points of I_θ and seeking a minimizer of $S_{\lambda,K,\theta}(\Omega)$ (see Section 5).

Finally, define S_0 as follows;

$$S_0 := \inf_{u\in D^{1,p}(\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}} \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx \Big/ \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p^*} dx\right)^{p/p^*} \right\}.$$

Talenti [14] has shown that S_0 is attained by

$$v_\varepsilon(x) := \frac{1}{[\varepsilon + |x-x_0|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}} \tag{2.2}$$

for any $\varepsilon > 0$ and $x_0 \in \mathbf{R}^N$.

3. Concentration-Compactness Principle Corresponding to Weighted Sobolev Spaces

Proposition 3.1. *Let $\{u_m\}$ be a sequence which converges to u^* weakly in $W^{1,p}(\theta)$ (also converges weakly in $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$). Then there exist at most countable index set $\overline{J}$, a family $\{\overline{x}_j, j \in \overline{J}\}$ of distinct points in $\mathbf{R}^N$, and a set $\{\overline{\nu}_j, \overline{\mu}_j; j \in \overline{J}\}$ of positive numbers such that*

$$\overline{\nu}_m := e^{p\theta(x)}K(x)|u_m|^{p^*}dx \rightharpoonup \overline{\nu} = e^{p\theta(x)}K(x)|u^*|^{p^*}dx + \sum_{j\in\overline{J}} \overline{\nu}_j\delta_{\overline{x}_j},$$

$$\overline{\mu}_m := e^{p\theta(x)}|\nabla u_m|^p dx \rightharpoonup \overline{\mu} \geq e^{p\theta(x)}|\nabla u^*|^p dx + \sum_{j\in\overline{J}} \overline{\mu}_j\delta_{\overline{x}_j}$$

with $S_{0,K,\theta}(\overline{\nu}_j)^{p/p^*} \leq \overline{\mu}_j$ for all $j \in \overline{J}$. In particular, $\sum_{j\in\overline{J}}(\overline{\nu}_j)^{p/p^*}$ is bounded.

Proposition 3.2. *Let $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ be a general unbounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$. Let $\{u_m\} \subset W^{1,p}(\theta)$ satisfy the conditions of Proposition 3.1. Define*

$$\overline{\nu}_{\infty,\Omega} := \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{\Omega(R)} e^{p\theta}K|u_m|^{p^*}dx,\ \overline{\mu}_{\infty,\Omega} := \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{\Omega(R)} e^{p\theta}|\nabla u_m|^p dx,$$

with $\Omega(R) := \Omega \cap \{|x| > R\}$. Then

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \int_\Omega e^{p\theta}K|u_m|^{p^*}dx = \int_\Omega d\overline{\nu} + \overline{\nu}_{\infty,\Omega},\quad \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_\Omega e^{p\theta}|\nabla u_m|^p dx = \int_\Omega d\overline{\mu} + \overline{\mu}_{\infty,\Omega}$$

with $S_{0,K,\theta}(\Omega)(\overline{\nu}_{\infty,\Omega})^{p/p^*} \leq \overline{\mu}_{\infty,\Omega}$.

4. Proof of Theorem 1.2.

Theorem 4.1. *Assume* (A1), (B1), (B2) and (C2). *For every $\lambda < \lambda_1$, any sequence $\{u_m\}$ satisfying*

$$I_\theta(u_m) \to b_\theta, \tag{4.1}$$

$$I'_\theta(u_m) \to 0 \quad \text{in} \quad (W^{1,p}(\theta,\Omega))^* \tag{4.2}$$

contains a convergent subsequence in $W^{1,p}(\theta, \Omega)$, *provided that*

$$b_\theta < \frac{1}{N} S_0^{N/p} \|V\|_{\infty,\Omega}^{-(N-p)/p} \; (:= b_\theta^*).$$

($\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ *means* $\|u\|_{\infty,\Omega} = \{\sup|u(x)|, x \in \Omega\}$).

Proof. Define the functional I_θ by (1.6) in Section 1. Set $X = W^{1,p}(\theta, \Omega)$ and define

$$\|u\|_X^p := \|\nabla u\|_{p,\theta,\Omega}^p = \int_\Omega e^{p\theta} |\nabla u|^p \, dx.$$

By using the idea of the author [10, Lemma 2.2], $\|\cdot\|_X$ gives an equivalent norm with $\|\cdot\|_{1,p,\theta,\Omega}$ in X.

From (4.1) and (4.2), one can also obtain that $\|u_m\|_X$ is a bounded sequence; so there exists a subsequence (still denoted by $\{u_m\}$) such that $u_m \rightharpoonup u^*$ weakly in X. We consider the natural extension of u_m and u^* by setting $u_m = u^* \equiv 0$ in $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$. Without loss of generality, we may also assume $u_m \rightharpoonup u^*$ weakly in $W^{1,p}(\theta)$. So we can apply the concentration-compactness principle defined in Section 3.

Lemma 4.1. $\overline{\mu}_{\infty,\Omega} = \overline{\nu}_{\infty,\Omega} = 0$.

Lemma 4.2. *Let* $\{u_m\}$ *be a sequence satisfying* (4.1) *and* (4.2). *Then* $A = \{\overline{x}_j, j \in \overline{J}\}$ *in Proposition 3.1 is a finite set. In particular,* $\overline{\mu}_j = \overline{\nu}_j \geq S_0^{N/p} \|V\|_{\infty,\Omega}^{-(N-p)/p}$ *for every* $j \in \overline{J}$.

Lemma 4.3. *Let* $\{u_m\}$ *be a sequence which converges to* u^* *weakly in* $W^{1,p}(\theta, \Omega)$. *If* $a(x)$ *and* $V(x)$ *satisfy* (B1) *and* $V(x) = e^{(p-p^*)\theta(x)} K(x) \in L^\infty(\Omega)$, *then there exists a subsequence* $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, *still denoted by* $\{u_m\}$, *such that*

(i) $$e^{p\theta(x)} K(x) |u_m|^{p^*-2} u_m \rightharpoonup e^{p\theta(x)} K(x) |u^*|^{p^*-2} u^* \quad \text{weakly in } L^{N/p}(\theta, \Omega)$$

and

(ii) $$e^{p\theta(x)} a(x) |u_m|^{p-2} u_m \rightharpoonup e^{p\theta(x)} a(x) |u^*|^{p-2} u^* \quad \text{weakly in } L^{p'}(\theta, \Omega)$$

with $1/p + 1/p' = 1$.

Lemma 4.4. *Assume* (A1), (B1) *and* (C1). *Suppose* $u_m \rightharpoonup u^*$ *weakly in* $W^{1,p}(\theta, \Omega)$ *and* $e^{p\theta(x)} K(x) |u_m|^{p^*} dx \rightharpoonup e^{p\theta(x)} K(x) |u^*|^{p^*} dx + \sum_{j \in \overline{J}} \overline{\nu}_j \delta_{\overline{x}_j}$ *in the weak*-sense of measures. If* $\overline{J}$ *is a finite set, then there exists a subsequence* $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, *still denoted by* $\{u_m\}$, *such that for each* $1 \leq i \leq N$;

$$\begin{cases} e^{\theta(x)} \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} \to e^{\theta(x)} \dfrac{\partial u^*}{\partial x_i} & \text{a.e. on } \Omega, \\ e^{p\theta(x)} |\nabla u_m|^{p-2} \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup e^{p\theta(x)} |\nabla u^*|^{p-2} \dfrac{\partial u^*}{\partial x_i} & \text{weakly in } L^{p'}(\theta, \Omega) \end{cases}$$

with $1/p + 1/p' = 1$.

We continue the proof of Theorem 1.2. Here (4.2) implies $\langle I_\theta'(u_m), \phi \rangle_X \to 0$ as $m \to +\infty$. That is,

$$\int_\Omega e^{p\theta(x)} |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla \phi dx - \int_\Omega e^{p\theta(x)} (\lambda a(x) |u_m|^{p-2} u_m + K(x) |u_m|^{p^*-2} u_m) \phi dx \to 0$$

for all $\phi \in W^{1,p}(\theta, \Omega)$. Hence it follows from Lemmas 4.3-4.4 that

$$-\Delta_p u^* - p \nabla \theta(x) \cdot \nabla u^* |u^*|^{p-2} = \lambda a(x) |u^*|^{p-2} u^* + K(x) |u^*|^{p^*-2} u^*$$

in X^*; so that $I_\theta'(u^*) = 0$.

For any $\sigma > 0$, there exists $m > 0$ enough large so that

$$b_\theta + \sigma > I_\theta(u_m) = \frac{1}{p}\int_\Omega e^{p\theta(x)}(|\nabla u_m|^p - \lambda a(x)|u_m|^p)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u_m|^{p^*}dx.$$

Letting $\overline{\lim}_{m\to\infty}$ in above inequality, it follows from Propositions 3.1-3.2 and Lemmas 4.1-4.3 that

$$\begin{aligned} b_\theta + \sigma &> \overline{\lim_{m\to\infty}} I_\theta(u_m) = \overline{\lim_{m\to\infty}} I_\theta(u_m) - \frac{1}{p}\langle I'_\theta(u^*), u^*\rangle_X \\ &\geq \frac{1}{N}\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u^*|^{p^*}dx + \frac{1}{p}\sum_{j\in\overline{J}}\overline{\mu}_j - \frac{1}{p^*}\sum_{j\in\overline{J}}\overline{\nu}_j \\ &\geq \frac{1}{N}\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u^*|^{p^*}dx + \sum_{j\in\overline{J}} b_\theta^*. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Since $b_\theta < b_\theta^*$, then we have $\overline{\nu}_j = 0$ for all $j \in \overline{J}$ from (4.3). This implies

$$\int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u_m|^{p^*}dx \to \int_\Omega e^{p\theta(x)}K(x)|u^*|^{p^*}dx$$

as $m \to \infty$.

Finally from the idea of Dinca-Jebelean-Mawhin [5], we can conclude that $||\nabla u_m||_X \to ||\nabla u^*||_X$. So one can see $u_m \to u^*$ in X. Thus I_θ satisfies Palais-Smale condition. □

5. **Estimate of Mini-max Level b_θ**

By Theorem 4.1, the proof of Theorem 1.2 will be complete if we can show

$$b_\theta = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\theta(\gamma(t)) < \frac{1}{N}S_0^{N/p}||V||_{\infty,\Omega}^{-(N-p)/p} \tag{5.1}$$

where $\Gamma : [0,1] \to W^{1,p}(\theta,\Omega)$ is a set of continuous paths which connect 0 and u satisfying $I_\theta(u) < 0$. Indeed, we can show the existence of solutions of (QE) by the using Mountain Pass Theorem (e.g., see Rabinowitz [12]).

There is a close relationship between critical points of I_θ and a minimizer of $Q_{\lambda,K,\theta}$ defined in (2.1). For example, Struwe [13, pp.177-178] gives us the relationship between b_θ and $S_{\lambda,K,\theta}(\Omega)$.

Lemma 5.1. *Define* $S_{\lambda,K,\theta}(\Omega) := \inf\{Q_{\lambda,K,\theta}(u); u \in W^{1,p}(\theta,\Omega)\backslash\{0\}\}$. *Then*

$$b_\theta = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\theta(\gamma(t)) = \frac{1}{N}(S_{\lambda,K,\theta}(\Omega))^{N/p}.$$

It follows from Lemma 5.1 that (5.1) is equivalent to

$$S_{\lambda,K,\theta}(\Omega) < S_0||V||_{\infty,\Omega}^{-(N-p)/N}. \tag{5.2}$$

So we will show (5.2) instead of (5.1). It is sufficient to check $Q_{\lambda,K,\theta}(w^*) < S_0||V||_{\infty,\Omega}^{-(N-p)/N}$ for some $w^* \in W^{1,p}(\theta,\Omega)$.

Let $\overline{\varphi}_0(x)$ be a cut-off funtion and define $w_\varepsilon(x) := e^{-\theta(x)}v_\varepsilon(x)\overline{\varphi}_0(x)$ where v_ε is a special function defined by (2.2). We may assume $\mathrm{dist}(x_0,\Omega) > 3$ without loss of generality. We observe that $w_\varepsilon \in W^{1,p}(\theta,\Omega)$ for all $\varepsilon > 0$. By using the technique of Brezis-Nirenberg [3], we can obtain the following Lemma.

Lemma 5.2. *Let $s \in (p-2, p)$ and $N \geq p^2 - s(p-1)$. Then there exists $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$ such that $Q_{\lambda,K,\theta}(w_\varepsilon) < S_0 \|V\|_{\infty,\Omega}^{-(N-p)/N}$ for every $\lambda > 0$.*

Lemma 5.3. *Let $s = p-2$ and $N \geq 3p-2$. There exist $\lambda_0 = \lambda_0(p, N) > 0$ such that if $\lambda > \lambda_0$, there exists $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$ satisfying $Q_{\lambda,K,\theta}(w_\varepsilon) < S_0/\|V\|_{\infty,\Omega}^{(N-p)/N}$.*

References

[1] A. K. Ben-Naoum, C. Troestler and M. Willem, Nonlinear Anal. **26** (1996), 823-833.
[2] G. Bianchi, J. Chabrowski and A. Szulkin, Nonlinear Anal. **25** (1995), 41-59.
[3] H. Brezis and L. Nirenberg, Comm. Pure. Appl. Math. **36** (1983), 437-477.
[4] J. Chabrowski, Calc. Var. Partial Differential Equations. **3** (1995), 493-512.
[5] G. Dinca, P. Jebelean, and J. Mawhin, World Sci. Publishing, River Edge, Singapore, 1995.
[6] H. Egnell, Arch. Rat. Mech. Anal. **104** (1988), 57-77.
[7] M. Escobedo and O. Kavian, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103-1133.
[8] P. L. Lions, Ann. Inst. H. Poincare Anal. **1** (1984), 109-145, 223-283.
[9] P. L. Lions, Rev. Mat. Ibero. **1** (1985), 45-121, 145-201.
[10] H. Ohya, Adv. Math. Sci. Appl. **13** (2003), 287-299.
[11] H. Ohya, submitted.
[12] P. H. Rabinowitz, *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* Vol.65, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1986.
[13] M. Struwe, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.
[14] G. Talenti, Ann. Math. Pura. Appl. **101** (1976), 353-372.

On positive solutions to some semilinear elliptic equations with exponentially growing nonlinearities involving nonnegative forcing terms

佐藤 得志　(東北大 理)

§1. Introduction.

本稿においては, $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ における非負の外力項を含む半線型楕円型方程式の無限遠境界値問題の正値解について考える. ここでは, κ を正の parameter とし, 外力項をある固定された f_0 の定数倍 κf_0 によって与えた問題

$$(\mathrm{P})_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u) + \kappa f_0 & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \\ u \geq 0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^n, \quad u(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

を考える. ここで, Δ は $\mathbf{R}^n$ 上の Laplace 作用素, 非線型項 $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は

$$(\mathrm{H0}) \qquad g(0) = g'(0) = 0, \ g''(s) \geq 0 \quad \text{for } s > 0$$

をみたすとする. また, $f_0 \geq 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ を仮定するので, f_0 は一般に測度である. このような問題を考えたとき, parameter κ が小さければ解は存在するが, 大きければ存在しない, ということが起こり得る. 実際, $n \geq 3$,

$$(1.1) \qquad g(s) = s^p \quad \text{for } s \geq 0 \quad (p > 1)$$

の場合, $|x|^{n-2} f_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ をみたす $\mathbf{R}^n$ 上の非負値函数 $f_0 \in H^{-1}(\mathbf{R}^n) \setminus \{0\}$ に対してこのような性質が成り立ち, $1 < p \leq p^*$ ならば $(\mathrm{P})_{\kappa^*}$ は ($H^1(\mathbf{R}^n)$ の意味での) 一意的な解をもつことが知られている (Deng–Li [1,2]). ここで, $p^* = (n+2)/(n-2)$,

$$(1.2) \qquad \kappa^* = \sup\{\, \kappa > 0 \mid (\mathrm{P})_\kappa \text{ は解をもつ} \,\}$$

である.

いま, f_0 を有限 Radon 測度, E_1 を $\mathbf{R}^n$ 上の $-\Delta + I$ の (標準的な) 基本解とし,

$$(1.3) \qquad \phi_0 = E_1 * f_0$$

とおく. このとき, $\underline{p}^* = n/(n-2)$ とすると, $E_1 \in L^q(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq q < \underline{p}^*)$ であるから, 一般に $\phi_0 \in L^q(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq q < \underline{p}^*)$ が成り立つ ($1/0 = \infty$ と解釈する).

Fact (Sato [5,6]). (1.1) において $n \geq 2$ とし,

$$(\mathrm{A}_0) \qquad f_0 \geq 0 \ (f_0 \not\equiv 0) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \quad \operatorname{supp} f_0 \text{ は compact}$$

かつ, ある $q_0 > q_*(p)$ に対して $\phi_0 \in L^{q_0}(\mathbf{R}^n)$ と仮定する. ここで,

$$(1.4) \quad q_*(p) = \begin{cases} p & \text{for } p \in (1, \underline{p}^*), \\ \max\left\{\dfrac{n(p-1)}{2}, \left(\dfrac{p^*+1}{p - (2-p)/(p')^{1/2}}\right)'\right\} & \text{for } p \in [\underline{p}^*, 2), \\ \max\left\{\dfrac{n(p-1)}{2}, \dfrac{(p^*+1)p}{p^* + 1/(p')^{1/2}}\right\} & \text{for } p \in [\max\{\underline{p}^*, 2\}, \infty) \end{cases}$$

(q' は q の共役指数, i.e. $1/q+1/q'=1$) である. このとき, $\bar{p}^*=(n^2-8n+4+8(n-1)^{1/2})/(n-2)(n-10)_+$ とすると, 次が成り立つ：
(i) $1<p<\bar{p}^*$ のとき, $0<\kappa^*<\infty$ であり, $(\mathrm{P})_{\kappa^*}$ は一意的な解をもつ.
(ii) $1<p<\bar{p}^*$ のとき, 任意の $\kappa\in(0,\kappa^*)$ に対し, $(\mathrm{P})_\kappa$ は少なくとも 1 つ解をもつ.
(iii) $1<p<p^*$ のとき, 任意の $\kappa\in(0,\kappa^*)$ に対し, $(\mathrm{P})_\kappa$ は少なくとも 2 つ解をもつ.
(解の意味は $u\in(L^{q_0}_{\mathrm{c}}+C_0)(\mathbf{R}^n)$ である. 但し,

$$(1.5)\qquad \begin{cases} C_0(\mathbf{R}^n)=\{\,u\in C(\mathbf{R}^n)\mid u(x)\to 0 \quad \text{as } |x|\to\infty\,\}, \\ L^q_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^n)=\{\,u\in L^q(\mathbf{R}^n)\mid \operatorname{supp} u \text{ は compact}\,\} \end{cases}$$

とする.)

Remark 1.1. (i) $\underline{p}^*<p^*<\bar{p}^*$ if $n\ge 3$, $\bar{p}^*=\infty$ if $n\le 10$.
($\bar{p}^*$ は Joseph–Lundgren [3] によって得られた指数に一致する.)

$$\text{(ii)}\quad q_*(p)\ge \max\left\{p,\frac{n(p-1)}{2}\right\}=\begin{cases} p & \text{for } 1<p\le \underline{p}^*, \\ n(p-1)/2 & \text{for } p\ge \underline{p}^*, \end{cases}$$

$$q_*(p)=n(p-1)/2 \quad \text{for } p\ge p^*,\quad q_*(p)<p+1<p^*+1 \quad \text{for } 1<p<p^*.$$

(条件 $q_0>\max\{p,n(p-1)/2\}$ は, ここでの議論において不可欠なものである. また, $f_0\in H^{-1}(\mathbf{R}^n)$, $n\ge 3$ ならば, $\phi_0\in H^1(\mathbf{R}^n)\subset L^{p^*+1}(\mathbf{R}^n)$ であるから, $1<p\le p^*$ のとき, 上の意味での ϕ_0 の可積分性の条件はみたされる.)
(iii) $\bar{p}_*=(n^2-8n+4-8(n-1)^{1/2})/(n-2)(n-10)$ ($\bar{p}_*=4/3$ if $n=10$) とおくと, $2\le \underline{p}^*<\bar{p}_*<p^*$ if $n=3,4$, $\underline{p}^*<\bar{p}_*<\min\{2,p^*\}$ if $n\ge 5$ であり,

$$(1.6)\qquad q_*(p)=\begin{cases} p & \text{for } p\in(1,\underline{p}^*), \\ \dfrac{(p^*+1)p}{p^*+1/(p')^{1/2}} & \text{for } p\in[\underline{p}^*,\bar{p}_*] \text{ if } n=3,4, \\ \left(\dfrac{p^*+1}{p-(2-p)/(p')^{1/2}}\right)' & \text{for } p\in[\underline{p}^*,\bar{p}_*] \text{ if } n\ge 5, \\ \dfrac{n}{2}(p-1) & \text{for } p\in[\bar{p}_*,\infty). \end{cases}$$

(iv) 写像 $p\mapsto q_*(p)$ は $p=\underline{p}^*$ において不連続である.

以下では, 空間次元を $n\le 9$ に制限し, 非線型項 g が指数函数的な増大度をもつ場合に同様の問題を考察する.

§2. Main result.

いま,

$$(2.1)\qquad h(s)=\log[g(s)+1+s] \quad \text{for } s\ge 0$$

とおくと, (H0) により, $h(0)=0$, $h'(0)=1$ かつ

$$(2.2)\qquad g(s)=\exp[h(s)]-1-s,\ h(s)>0,\ h'(s)>0 \quad \text{for } s>0$$

が成り立つ. このとき, 次の (H1) 及び (場合によって) (H2) を仮定する：

(H1) $\lim_{s\to\infty} sh'(s) = \infty$, $\liminf_{s\to\infty} \dfrac{h''(s)}{h'(s)^2} \ge 0$; (H2) $\sup_{s\ge 0} h'(s) < \infty$.

結果を正確に述べるため,

$$u \in (L^\infty_c + C_0)(\mathbf{R}^n)\setminus\{0\}, \quad u \ge 0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^n \tag{2.3}$$

をみたす u に対し, 線型化固有値問題

$$(\mathrm{E}\,;u) \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi = \lambda g'(u)\varphi \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \\ \varphi \not\equiv 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n, \quad \varphi(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

を考える. 以下, $\|\cdot\|_q$, $\|\cdot\|_{1,2}$ をそれぞれ $L^q(\mathbf{R}^n)$, $H^1(\mathbf{R}^n)$ の norm とする.

Proposition 2.1. (H0) を仮定し, $u, \bar{u}$ は (2.3) をみたすとすると, 次が成り立つ.

(i)
$$\lambda^1[u] = \inf\left\{ \frac{\|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_2^2}{\|g'(u)v^2\|_1} \;\middle|\; v \in H^1(\mathbf{R}^n)\setminus\{0\} \right\}$$

の minimizer $\varphi^1 \in H^1(\mathbf{R}^n)\setminus\{0\}$ が存在する.

(ii) $\lambda^1[u]$ は $(\mathrm{E}\,;u)$ の (単純な) 最小固有値である. φ^1 は固有値 $\lambda^1[u]$ に対応する固有函数であって, $\varphi^1 \in C_0(\mathbf{R}^n)$ かつ $\varphi^1 > 0$ on $\mathbf{R}^n$ (または $\varphi^1 < 0$ on $\mathbf{R}^n$) をみたす.

(iii) $(\mathrm{E}\,;u)$ の正値解 $(\varphi;\lambda) \in (H^1(\mathbf{R}^n)\setminus\{0\})\times\mathbf{R}$ (i.e. $\varphi > 0$ on $\mathbf{R}^n$) が存在するならば, $\lambda = \lambda^1[u]$ である.

(iv) $u \le \bar{u}$, $u \not\equiv \bar{u}$ a.e. on $\mathbf{R}^n$ ならば, $\lambda^1[u] > \lambda^1[\bar{u}]$ である.

Remark 2.1. (i) 上の意味での線型化固有値問題を考えた場合, $\lambda = 1$ を固有値にもつときに線型化作用素の可逆性が崩れる. しかしながら, $\lambda = 1$ を最小固有値にもつときには, $L^2(\mathbf{R}^n, g'(u)dx)$ の φ^1 に対する直交空間において可逆であることが分かる.

(ii) $\lambda^1[u]$ の定義によって, linearization inequality

$$\lambda^1[u]\|g'(u)v^2\|_1 \le \|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_2^2 = \|v\|_{1,2}^2 \quad \text{for } v \in H^1(\mathbf{R}^n) \tag{2.4}$$

が成り立つ.

主定理は次の通りである. ここで, $(\mathrm{P})_\kappa$ の解とは, (2.3) 及び $(\mathrm{P})_\kappa$ をみたすものをいう.

Theorem. $2 \le n \le 9$ とし, (A_0), (H0)-(H1) 及び次のいずれかを仮定する:

(a) f_0 は可測函数で, ある $\mu \in (\max\{1/2, (n-2)/4\}, 2)$ 及び $v_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$ が存在して,

$$f_0^\mu \le v_0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^n.$$

(b) (H2) かつ $\phi_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

このとき, 次が成り立つ.

(i) $0 < \kappa^* < \infty$.

(ii) $(\mathrm{P})_{\kappa^*}$ は一意的な解 u^* をもち, $\lambda^1[u^*] = 1$ をみたす.

(iii) $(\mathrm{P})_\kappa$ が $\lambda^1[u] = 1$ をみたす解 u をもつならば, $\kappa = \kappa^*$ である.

(iv) 任意の $\kappa \in (0, \kappa^*)$ に対し, $\lambda^1[u_\kappa] > 1$ をみたす $(\mathrm{P})_\kappa$ の解 u_κ が一意的に存在する.

(v) $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在し, 任意の $\kappa \in (\kappa^* - \bar{\varepsilon}, \kappa^*)$ に対して, $\lambda^1[\bar{u}_\kappa] < 1$ をみたす $(\mathrm{P})_\kappa$ の解 $\bar{u}_\kappa$ が存在する.

Remark 2.2. (i) 非線型項 (1.1) は (H1) をみたさない.

(ii)
$$h(s) = \frac{1}{\alpha}((1+s)^{\alpha} - 1) \quad \text{for } s \geq 0 \quad (\alpha > 0)$$
は (H0)-(H1) をみたす. 更に, $0 < \alpha \leq 1$ ならば, (H2) もみたす.
(iii) 仮定 (A_0) の下で, $f_0 \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ ならば, (a) が成り立つ. また, (a) が成り立つならば, $\phi_0 \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ である.

§3. Outline of the proof of Theorem.

この節では, Theorem (i)–(iii) の証明の概略について述べる. このために, Keener-Keller [4] による continuation method を用いる. いま, 新たな parameter $\tau \in [0,1]$ を導入し, $\kappa \geq 0$ に対して

$$(\mathrm{P}_\tau)_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u) - (1-\tau)g(\kappa\phi_0) + \kappa f_0 & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \\ u \geq \kappa\phi_0 \ \text{ a.e. on } \mathbf{R}^n, \quad u(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

なる問題を考える. 但し, 解の意味は $(\mathrm{P})_\kappa$ と同様である.

Remark 3.1. (i) $\kappa > 0$ に対して $(\mathrm{P})_\kappa$ と $(\mathrm{P}_1)_\kappa$ は同値である.
(ii) $\tau \in [0,1]$ に対し, $u \equiv 0$ は $(\mathrm{P}_\tau)_0$ の解である.
(iii) $\kappa > 0$ に対して $u = \kappa\phi_0$ は $(\mathrm{P}_0)_\kappa$ の解である.

Theorem の証明のためには, 次の意味での $(\mathrm{Q})^1$ の解を見つけることが重要である.

Definition 3.1. $\tau \in [0,1]$ に対し, $(u, \varphi; \kappa)$ が $(\mathrm{Q})^\tau$ の解であるとは, u が $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解であって, $(\varphi; 1)$ が $(\mathrm{E}; u)$ の正値解となることである. このとき,

$$T^* = \{\tau \in [0,1] \mid (\mathrm{Q})^\tau \text{ は解をもつ}\} \tag{3.1}$$

とおく.

Remark 3.2. $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解 u で $\lambda^1[u] = 1$ をみたすものが存在すれば, $\tau \in T^*$ である. 実際, この u に対して Proposition 2.1 で得られる φ^1 を用いると, $(u, \varphi^1; \kappa)$ は $(\mathrm{Q})^\tau$ の解である.

Theorem (i)–(iii) は次の 2 つの命題から得られる.

Proposition 3.1. Theorem の仮定の下で, $(\mathrm{Q})^\tau$ が解 $(u, \varphi; \kappa)$ をもつならば, 次が成り立つ.
(i) $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解は一意的である.
(ii) $\tau \in (0,1]$ のとき, $\bar{\kappa} > \kappa$ に対して $(\mathrm{P}_\tau)_{\bar{\kappa}}$ は解をもたない.

Proposition 3.2. Theorem の仮定の下で, $T^* = [0,1]$ が成り立つ.

Proposition 3.2 の証明は次の 3 つの step による.

Step 1. T^* は空でない.
Step 2. T^* は $[0,1]$ における開集合である.
Step 3. T^* は $[0,1]$ における閉集合である.

まず Step 1 について述べる. Remark 3.1 (iii) (及び Proposition 3.1 (i)) により, $\lambda^1[\kappa^0\phi_0]=1$ をみたす $\kappa^0\in(0,\infty)$ が (一意的に) 存在することを示せばよい. このために, 函数 $(0,\infty)\ni\kappa\mapsto\lambda^1[\kappa\phi_0]\in(0,\infty)$ が単調減少かつ連続であり, $\lambda^1[\kappa\phi_0]\to 0$ as $\kappa\to\infty$, $\lambda^1[\kappa\phi_0]\to\infty$ as $\kappa\to 0$ が成り立つことを示す.

Step 2 については, Remark 2.1 (i) の事実に基づき, 陰函数定理を適用することによって示すことができるが, ここでは詳しいことは述べない.

最後に Step 3 について述べる. $\tau\in T^*$ のとき, $(\mathrm{Q})^\tau$ の解は (φ の定数倍を除いて) 一意的であるから, これを $(u^\tau,\varphi^\tau;\kappa^\tau)$ と表すこととし,

$$w^\tau=u^\tau-\kappa^\tau\phi_0,\ g^\tau=g(u^\tau)-(1-\tau)g(\kappa^\tau\phi_0)\quad\text{for }\tau\in T^* \tag{3.2}$$

とおく. このとき,

$$0\le g^\tau\le g(u^\tau)\quad\text{a.e. on }\mathbf{R}^n\quad\text{for }\tau\in T^* \tag{3.3}$$

であり, u^τ,w^τ は

$$-\Delta u^\tau+u^\tau=g^\tau+\kappa^\tau f_0,\ -\Delta w^\tau+w^\tau=g^\tau\quad\text{in }\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\quad\text{for }\tau\in T^* \tag{3.4}$$

をみたす. 更に, 次の a priori 評価が成り立つ.

Proposition 3.3. Theorem の仮定の下で, $\{w^\tau\}_{\tau\in T^*}$ は $\mathbf{R}^n$ 上一様有界かつ同等連続である.

ここでは $\mathbf{R}^n$ 上での問題を考えているため, 上の命題だけでは T^* が閉であることを示すには不十分である. しかし, $\operatorname{supp}f_0$ が compact であることを仮定すれば, plane reflection method と組み合わせることによって T^* が閉であることを示すことができる. このとき, 最小解の構成方法に関する議論が重要である.

詳細については [5, 6] を参照されたい. 本稿では Proposition 3.3 の証明について述べるにとどめる.

§4. A priori estimate.

この節においては, Proposition 3.3 の証明について述べる. まず, 次が成り立つことに注意する.

Lemma 4.1. $\tau,\bar\tau\in T^*$, $\tau<\bar\tau$ ならば, $\kappa^\tau>\kappa^{\bar\tau}$ である. 特に,

$$0<\kappa^\tau\le\kappa^0\quad\text{for }\tau\in T^* \tag{4.1}$$

が成り立つ.

いま, 球対称な函数 $e_1\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ で

$$e_1(x)=\begin{cases}1 & \text{for }0\le|x|\ll 1,\\ E_1(x) & \text{for }|x|\gg 1,\end{cases}\qquad\frac{\partial e_1}{\partial r}\le 0\quad\text{on }\mathbf{R}^n\setminus\{0\} \tag{4.2}$$

をみたすものをとり, $0<\nu<1$ に対して

$$\begin{cases}E_{0,\nu}(x)=\dfrac{E_1(x)}{e_1(x)^\nu},\ \gamma^\nu_{(\xi)}(x)=1-\Big(\dfrac{e_1(x+\xi)}{e_1(x)}\Big)^\nu,\ \bar e_1(x,y)=\dfrac{e_1(x-y)e_1(y)}{e_1(x)}\\ \qquad\qquad\text{for }x,y,\xi\in\mathbf{R}^n\end{cases} \tag{4.3}$$

とおく．このとき，$\|\gamma^{\nu}_{(\xi)}\|_{\infty} \to 0$ as $\xi \to 0$ であり，正定数 $\underline{c}$, $\underline{c}_1$ が存在して

$$\bar{e}_1(x,y) \le \underline{c}, \quad \frac{|\nabla e_1(x)|}{e_1(x)} \le \underline{c}_1 \quad \text{for } x, y \in \mathbf{R}^n \tag{4.4}$$

が成り立つことに注意する．以下において，$\tau_{(z)}$ は平行移動作用素 (i.e. $\tau_{(z)}v(x) = v(x-z)$ for $x, z \in \mathbf{R}^n$) とする．

Lemma 4.2. $0 < \nu < 1$ とすると，$\tau \in T^*$ に対して

(i) $[w^{\tau}\tau_{(z)}[e_1^{\nu}]](x) = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{e}_1(x-z, y-z)^{\nu} E_{0,\nu}(x-y)[g^{\tau}\tau_{(z)}[e_1^{\nu}]](y)dy$,

(ii) $[w^{\tau}\tau_{(z)}[e_1^{\nu}]](x+\xi) - [w^{\tau}\tau_{(z)}[e_1^{\nu}]](x)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{R}^n} \{(\bar{e}_1(y-z, x-y+\xi)^{\nu}\gamma^{\nu}_{(\xi)}(x-y+\xi) - \bar{e}_1(y-z, x-z)^{\nu}\gamma^{\nu}_{(\xi)}(x-z))E_{0,\nu}(x-y) \\
&\qquad + \bar{e}_1(y-z, x-z+\xi)^{\nu}(E_{0,\nu}(x-y+\xi) - E_{0,\nu}(x-y))\}[g^{\tau}\tau_{(z)}[e_1^{\nu}]](y)dy \\
&\qquad\qquad \text{for } x, z, \xi \in \mathbf{R}^n.
\end{aligned}$$

(4.4) に注意すると，Lemma 4.2 及び Sobolev の不等式を用いることにより，ある $r > n/2$ に対して $\{H(u^{\tau})\tau_{(z)}[e_1^{\nu}]\}_{\tau \in T^*, z \in \mathbf{R}^n}$ が $L^r(\mathbf{R}^n)$ において有界であることが示されれば，Proposition 3.3 が成り立つことが分かる．ここで，

$$H(s) = \exp[h(s)] = g(s) + 1 + s \quad \text{for } s \ge 0 \tag{4.5}$$

であり，

$$g(s) \le H(s), \quad g'(s) + 1 = H(s)h'(s) \quad \text{for } s \ge 0 \tag{4.6}$$

が成り立つことに注意する．

いま，$\mu > 0$ に対して

$$H_{\mu}(s) = \frac{\mu^2}{h'(s)} \int_0^s h'(t)^2 H(t)^{2\mu} dt \quad \text{for } s \ge 0 \tag{4.7}$$

とおく．このとき，h (または g) に関する仮定によって次が成り立つ．

Lemma 4.3. $\mu > 1/2$ とし，(H0)-(H1) を仮定すると，

$$\lim_{s\to\infty} sh'(s)\frac{H_{\mu}(s)}{H(s)^{2\mu}} = \infty, \quad \limsup_{s\to\infty} \frac{H_{\mu}(s)}{H(s)^{2\mu}} \le \frac{\mu}{2}, \quad \sup_{s\ge 0} \frac{H_{\mu}(s)}{H(s)^{2\mu}} \le \frac{\mu^2}{2\mu-1} \tag{4.8}$$

が成り立つ．更に，(H2) を仮定すると，任意の $M > 0$ に対して

$$\limsup_{s\to\infty} \sup_{0\le r\le M} \frac{h'(s)}{h'(s+r)} \frac{H_{\mu}(s)}{H(s)^{2\mu}} \le \frac{\mu}{2} \tag{4.9}$$

が成り立つ．

この補題により，任意の $L > 0$, $\varepsilon > 0$ に対し，正定数 $\widehat{C}_{\mu,L}$, $\bar{C}_{\mu,\varepsilon}$ が存在して

$$\begin{cases} LH(s)^{2\mu} \le sh'(s)H_{\mu}(s) + \widehat{C}_{\mu,L}, \quad H_{\mu}(s) \le \dfrac{\mu+\varepsilon}{2}H(s)^{2\mu} + \bar{C}_{\mu,\varepsilon}, \\ h'(s)H_{\mu}(s) \le \varepsilon sh'(s)H_{\mu}(s) + \bar{C}_{\mu,\varepsilon} \quad \text{for } s \ge 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

が成り立つ．更に，(H2) の下で，任意の $M > 0$ に対し，正定数 $\bar{C}_{\mu,\varepsilon,M}$, C_M が存在して

$$
(4.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{h'(s)}{h'(s+r)}H_\mu(s) \le \dfrac{\mu+\varepsilon}{2}H(s)^{2\mu} + \bar{C}_{\mu,\varepsilon,M}, \\ H(s+r) \le C_M H(s) \quad \text{for } s \ge 0,\ 0 \le r \le M \end{cases}
$$

が成り立つ. いま,

$$
(4.12)\qquad \|v\|_{(1,2)}^2 = \|\nabla v\|_2^2 + 2\|v\|_2^2 \quad \text{for } v \in H^1(\mathbf{R}^n)
$$

なる記号を用いる. このとき, $\lambda^1[u^\tau]=1$ であることに注意すると, (2.4) から

$$
(4.13)\qquad \|(g'(u^\tau)+1)v^2\|_1 \le \|v\|_{(1,2)}^2 \quad \text{for } v \in H^1(\mathbf{R}^n),\ \tau \in T^*
$$

が得られる. これらを用いて次を示す.

Lemma 4.4. Theorem の仮定の下で, ある $r > n/2$ に対して $\{H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu]\}_{\tau\in T^*, z\in\mathbf{R}^n}$ は $L^r(\mathbf{R}^n)$ において有界である.

Proof. (a) $\mu \in (\max\{1/2,(n-2)/4\},2)$ とし, (3.4) の第 1 式に $h'(u^\tau)H_\mu(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]$ を掛けて $\mathbf{R}^n$ 上積分する. $0<\varepsilon<1$ とし, $L_\varepsilon = \dfrac{(\underline{c}_1\mu\nu)^2}{2\mu-1}\Big(1+\dfrac{(3\mu-1)^2}{\varepsilon(2\mu-1)}\Big)+2(1-\varepsilon)$ ととれば, 部分積分及び Schwarz の不等式, Young の不等式によって

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) \ge\ & \|\nabla[(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu]\|_2^2 \\
& -2\underline{c}_1\mu\nu\frac{3\mu-1}{2\mu-1}\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\nabla[(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu]\|_1 \\
& -\frac{(\underline{c}_1\mu\nu)^2}{2\mu-1}\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_2^2 + \|u^\tau h'(u^\tau)H_\mu(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\|_1 \\
\ge\ & (1-\varepsilon)\|\nabla[(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu]\|_2^2 \\
& +\Big(L_\varepsilon - \frac{(\underline{c}_1\mu\nu)^2}{2\mu-1}\Big(1+\frac{(3\mu-1)^2}{\varepsilon(2\mu-1)}\Big)\Big)\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_2^2 - \widehat{C}_{\mu,L_\varepsilon}\|\tau_{(z)}[e_1^{\mu\nu}]\|_2^2 \\
=\ & (1-\varepsilon)\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_{(1,2)}^2 - \widehat{C}_{\mu,L_\varepsilon}\|e_1^{\mu\nu}\|_2^2
\end{aligned}
$$

が得られる. 一方, (3.3), (4.6), (4.1) 及び f_0 に関する仮定によって

$$
(\text{右辺}) \le \|H(u^\tau)h'(u^\tau)H_\mu(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\|_1 + \kappa^0\|v_0^{1/\mu}h'(u^\tau)H_\mu(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\|_1
$$

であり, (4.6), (4.13) から

$$
\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &\le \Big\|(g'(u^\tau)+1)\Big(\frac{\mu+\varepsilon}{2}H(u^\tau)^{2\mu}+\bar{C}_{\mu,\varepsilon}\Big)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\Big\|_1 \\
&\le \frac{\mu+\varepsilon}{2}\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_{(1,2)}^2 + \bar{C}_{\mu,\varepsilon}\|e_1^{\mu\nu}\|_{(1,2)}^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 更に, (4.10), (4.13) 及び Hölder の不等式, Young の不等式によって

$$
\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &\le \kappa^0\Big\|(g'(u^\tau)+1)v_0^{1/\mu}\Big(\frac{\mu+\varepsilon}{2}H(u^\tau)^{2\mu-1}+\bar{C}_{\mu,\varepsilon}\Big)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\Big\|_1 \\
&\le \kappa^0\|(g'(u^\tau)+1)(v_0\tau_{(z)}[e_1^{\mu\nu}])^2\|_1^{1/2\mu} \\
&\quad \Big\{\frac{\mu+\varepsilon}{2}\|(g'(u^\tau)+1)(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^{2\mu}\|_1^{1-1/2\mu} \\
&\qquad +\bar{C}_{\mu,\varepsilon}\|(g'(u^\tau)+1)\tau_{(z)}[e_1^{\mu\nu}]^2\|_1^{1-1/2\mu}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \kappa^0\|v_0\|_{(1,2)}^{1/\mu}\Big(\frac{\mu+\varepsilon}{2}\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_{(1,2)}^{2-1/\mu}+\bar{C}_{\mu,\varepsilon}\|e_1^{\mu\nu}\|_{(1,2)}^{2-1/\mu}\Big)\\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\|(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_{(1,2)}^2+\frac{1}{2\mu}\Big(\frac{2\mu-1}{\varepsilon\mu}\Big)^{2\mu-1}\Big(\frac{\mu+\varepsilon}{2}\kappa^0\Big)^{2\mu}\|v_0\|_{(1,2)}^2\\
&\quad+\bar{C}_{\mu,\varepsilon}\kappa^0\|v_0\|_{(1,2)}^{1/\mu}\|e_1^{\mu\nu}\|_{(1,2)}^{2-1/\mu}
\end{aligned}
$$

であるから，$1-\varepsilon>\mu/2+\varepsilon$ ならば $\{(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\}_{\tau\in T^*,z\in\mathbf{R}^n}$ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ において有界である．

$2<q<p^*+1$ とすると，Sobolev の不等式によって $\{(H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\}_{\tau\in T^*,z\in\mathbf{R}^n}$ は $L^q(\mathbf{R}^n)$ において有界，$\{H(u^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu]\}_{\tau\in T^*,z\in\mathbf{R}^n}$ は $L^{\mu q}(\mathbf{R}^n)$ において有界である．仮定より，$\mu q>n/2$ なる q をとることができるから，主張が成り立つ．

(b) $n\le 9$ より，$\mu\in(\max\{1/2,(n-2)/4\},2)$ なる μ をとることができる．(3.4) の第 2 式に $h'(w^\tau)H_\mu(w^\tau)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]$ を掛けて $\mathbf{R}^n$ 上積分する．このとき，$M=\kappa^0\|\phi_0\|_\infty$ とすると，(4.6), (4.11), (4.13) によって

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &\le \Big\|g(u^\tau)h'(u^\tau)\frac{h'(w^\tau)}{h'(w^\tau+\kappa^\tau\phi_0)}H_\mu(w^\tau)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\Big\|_1\\
&\le \Big\|(g'(u^\tau)+1)\Big(\frac{\mu+\varepsilon}{2}H(w^\tau)^{2\mu}+\bar{C}_{\mu,\varepsilon,M}\Big)\tau_{(z)}[e_1^{2\mu\nu}]\Big\|_1\\
&\le \frac{\mu+\varepsilon}{2}\|(H(w^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu])^\mu\|_{(1,2)}^2+\bar{C}_{\mu,\varepsilon,M}\|e_1^{\mu\nu}\|_{(1,2)}^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．(a) の場合と同様にして，$\{H(w^\tau)\tau_{(z)}[e_1^\nu]\}_{\tau\in T^*,z\in\mathbf{R}^n}$ は $L^{\mu q}(\mathbf{R}^n)$ において有界かつ $\mu q>n/2$ とできる．このとき，(4.11) から主張が従う． q.e.d.

References.

[1] Y. Deng and Y. Li, *Existence and bifurcation of positive solutions for a semilinear equation with critical exponent*, J. Differential Equations **130** (1996) 179–200.

[2] Y. Deng and Y. Li, *Existence of multiple positive solutions for a semilinear elliptic equation*, Adv. Differential Equations **2** (1997) 361–382.

[3] D. D. Joseph and T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rat. Mech. Annal. **49** (1972-73) 241–269.

[4] J. P. Keener and H. B. Keller, *Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems*, J. Differential Equations **16** (1974) 103–125.

[5] T. Sato, *On positive solutions to some semilinear elliptic equations with nonnegative forcing terms*, RIMS Kokyuroku **1307** (2003) 69–84.

[6] T. Sato, *Positive solutions to some semilinear elliptic equations with nonnegative forcing terms*, (preprint).

e-mail : tokushi@math.tohoku.ac.jp

On viscous conservation laws with growing initial data

山田 計幸
北海道大学大学院理学研究科 D1

1 Introducrion

以下のような方程式の一意可解性を考える.

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathrm{div}\mathbf{G}(u) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

ここで $\partial_t = \partial/\partial t$ を表し, 初期値 u_0 と非線形項 $\mathbf{G}$ は既知関数である. 一般に初期値 u_0 が有界のとき, (1.1) は時間大域的な古典解が一意に存在する事はよく知られている (cf. [2]). また [1] では方程式 (1.1) は空間無限遠で $|\mathbf{G}'(r)| \sim |r|$, $|u_0(x)| \sim |x|$ のように増大しかつ初期値 u_0 が一様 Lipschitz 連続関数の時, 時間局所的に解が存在する事を示した. 典型的な例では Burgers 方程式: $\partial_t u - \Delta u + u\partial_x u = 0$ がある (ここで $\partial_x = \partial/\partial_x$ を表す). また Burgers 方程式において初期値 $u_0 = -x$ とすると $u(x,t) = -x/(1-t)$ は解になる. つまり方程式 (1.1) において初期値が有界でないときは一般的には時間大域解は存在しない事がわかる. ここでは, 初期値 u_0 に一様 Lipschitz 連続を仮定せず, 初期値 u_0 と非線形項 $\mathbf{G}'$ に, より一般的な増大度を仮定した時の方程式 (1.1) の一意可解性を示し, 解の存在時間についての最良の評価を与える. 特に $|\mathbf{G}'(r)| \sim |r|^\beta$, $|u_0(x)| \sim |x|^\alpha$, $\alpha\beta \leq 1$ を仮定する.

ここでは $\alpha\beta \leq 1$ を仮定していたが, これを仮定するのに至った形式的な考察を以下に記す. $n = 1$, $\mathbf{G}(r) = r^{\beta+1}$ とし, $u(x,t) = x^\alpha f(t)$ を方程式 (1.1) の解とする. この時方程式 (1.1) は以下を満たす.

$$x^\alpha f'(t) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}f(t) - (\alpha\beta+\alpha)x^{\alpha\beta+\alpha-1}f(t)^{\beta+1}.$$

この恒等式の左辺は u_t, 右辺は $\Delta u - \mathrm{div}\mathbf{G}(u)$ である. ここで左辺と右辺の空間無限遠での増大度を見てみると, 左辺の増大度は x^α, 右辺の増大度は $x^{\alpha\beta+\alpha-1}$ である. ここで "(左辺の増大度)$\geq$(右辺の増大度)" を解くと $\alpha\beta \leq 1$ を満たす事がわかる.

定理を述べる前に関数空間を定義し, 非線形項 $\mathbf{G}$ についての詳細な仮定を記す. $\langle x \rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$, $\langle x \rangle_a := (a+|x|^2)^{1/2}$ とおき, L^∞_α を

$$L^\infty_\alpha = L^\infty_\alpha(\mathbf{R}^n) = \{\ f \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n)\ \mid\ \|f\|_\alpha := \|f(x)/\langle x \rangle^\alpha\|_{L^\infty} < \infty\ \}$$

と定義する．また $\|f\|_\alpha$ と同値なノルム $\|f\|_{\alpha,a}$ を，$\|f\|_{\alpha,a} = \|f(x)/\langle x\rangle_a^\alpha\|_{L^\infty}$ と定義する (ただし，$a \geq 1$)．さらに $BC_\alpha = L^\infty_\alpha(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$ と定義する．そして，$\mathbf{G}$ はある $\theta \in (0,1)$ に対し，$\mathbf{G} = (G_1, \cdots, G_n) \in C^{1+\theta}(\mathbf{R};\mathbf{R}^n)$ を満たし，以下のような増大度を満たす関数とする．

$$\sup_{r\in\mathbf{R}} \frac{|\mathbf{G}'(r)|}{1+|r|^\beta} < \infty. \tag{1.2}$$

Theorem 1.1. $\alpha, \beta > 0$ とし，$\mathbf{G} \in C^{1+\theta}(\mathbf{R};\mathbf{R}^n)$ は *(1.2)* を満たし，$u_0 \in BC_\alpha$ を仮定する．

(1) $\alpha\beta = 1$ の時，方程式 *(1.1)* の時間局所的な古典解 $u \in L^\infty_{loc}([0,T);L^\infty_\alpha)$ が一意的に存在する．更に $C_0 = \limsup_{|x|\to\infty} |u_0(x)|/|x|^\alpha$, $C_{\mathbf{G}'} = \limsup_{|r|\to\infty} |\mathbf{G}'(r)|/|r|^\beta$ とおくと，解の存在時間 T は下から $T \geq T_0 := 1/C_0^\beta C_{\mathbf{G}}$ と評価できる．

(2) $\alpha\beta < 1$ の時，方程式 *(1.1)* の時間大域的な古典解 $u \in L^\infty_{loc}([0,\infty);L^\infty_\alpha)$ が一意的に存在する．

2 Estimates for the heat semigroup in weighted space

ここでは heat semigroup $e^{t\Delta}$ についての様々な評価を与える．

$\partial_i = \partial/\partial x_i$ を表し，multi-index $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{N}^n$ に対し，∂^a は $\partial^a = \partial_1^{a_1}\cdots\partial^{a_n}$ と定義する．また，G_t を熱核

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

とし，$e^{t\Delta}f = G_t * f$ を表す．

Lemma 2.1. *(1)* 任意の $f \in L^\infty_\alpha$, $a \in \mathbf{N}^n$, $t > 0$ に対して以下の不等式が成り立つ．

$$\|\partial^a e^{t\Delta} f\|_\alpha \leq C t^{-\frac{|a|}{2}} (1+t)^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_\alpha.$$

ここで C は n, α, $|a| := \sum_{i=1}^n a_i$ のみに依存する定数．

(2) 任意の $f \in L^\infty_\alpha$, $a \in \mathbf{N}^n$, $0 < \theta \leq 1$, $0 < s \leq t$ に対して以下の不等式が成り立つ．

$$\|\partial^a e^{t\Delta} f - \partial^a e^{s\Delta} f\|_\alpha \leq C s^{-|a|/2} (t-s)^\theta \left(s^{-\theta} + s^{(\alpha-2\theta)/2} + t^{(\alpha-2\theta)/2}\right) \|f\|_\alpha.$$

ここで C は n, α, $|a|$, θ のみに依存する定数．

(3) $\alpha' = \max\{\alpha-\theta, 0\}$ とおく．任意の $f \in L^\infty_\alpha(\mathbf{R}^n)$, $0 < s \le t$, $0 < \theta \le 1$ に対して以下の不等式が成り立つ．

$$\left|\left(\partial^a e^{t\Delta} f\right)(x) - \left(\partial^a e^{t\Delta} f\right)(y)\right| \le C\langle x\rangle^\alpha (1+|x-y|^\alpha)\, t^{-|a|/2} \left(t^{\alpha'} + t^{-\theta/2}\right) |x-y|^\theta \|f\|_\alpha.$$

ここで C は n, α, $|a|$, θ のみに依存する定数．

ここではこの3つの不等式の証明は省略する．

3 Existence of solution

初期値 u_0 が有界で，ある $\theta \in (0,1)$ に対し $\mathbf{G} \in C^{1+\theta}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ の時，方程式 (1.1) 時間大域的な古典解 $u \in L^\infty((0,\infty); L^\infty)$ が一意的に存在する事はよく知られている．そこで，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le 1), \\ 0 & (|x| \ge 2), \end{cases}$$

を満たし，$\varphi_k(x) = \varphi(x/k)$ とおく．更に $u_k \in L^\infty((0,\infty); L^\infty)$ を

$$\begin{cases} \partial_t u_k - \Delta u_k + \mathrm{div}\mathbf{G}(u_k) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u_k|_{t=0} = u_k(0) := \varphi_k u_0 & \text{in } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

の古典解とする．

Lemma 3.1 は解の存在時間の評価に使用する．

Lemma 3.1. $f \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n)$ とする．この時

$$\lim_{a\to\infty} \|f\|_{\alpha,a} = \limsup_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha}$$

を満たす．

Lemma 3.1 の証明は省略する．

Lemma 3.2 を述べる前に T_0 を以下のように定義する．

$$T_0 = \begin{cases} 1/C_0^\beta C_{\mathbf{G}} & (\alpha\beta = 1), \\ \infty & (\alpha\beta < 1), \end{cases}$$

ここで $C_0 = \limsup_{|x|\to\infty} |u_0(x)|/|x|^\alpha$, $C_{\mathbf{G}'} = \limsup_{|r|\to\infty} |\mathbf{G}'(r)|/|r|^\beta$.

Lemma 3.2 (Uniform boundedness). $u_0 \in BC_\alpha$, $\alpha\beta \le 1$ とし，$\{u_k\}_{k\ge1} \subset L^\infty((0,\infty); L^\infty)$ を方程式 (3.1) の古典解とする．このとき $\{u_k\}_{k\ge1} \subset L^\infty((0,T_0); L^\infty_\alpha)$ は k に対して一様に有界である．

Proof. $a \geq 1$ に対し, $v_k = u_k / \langle x \rangle_a^\alpha$ とおく.

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{G}'(u_k) - \alpha \langle x \rangle_a^{-2} x,$$

$$K_k = \left(\alpha n \langle x \rangle_a^{-2} + \alpha(\alpha - 2) \langle x \rangle_a^{-4} |x|^2 + \alpha \frac{x}{\langle x \rangle_a} \cdot \frac{\mathbf{G}'(v_k \langle x \rangle_a^\alpha)}{\langle x \rangle_a} \right) v_k$$

とおくと, v_k は

$$\partial_t v_k - \Delta v_k + \nabla v_k \cdot \mathbf{H} + K = 0,$$

を満たす. $v(0) = u_0 / \langle x \rangle_a^\alpha$ とおく. $\|v_k(0)\|_{L^\infty} \leq \|v(0)\|_{L^\infty}$ となる事と, [1] の最大値原理をを用いると, $\|v_k(t)\|_{L^\infty}$ は

$$\|v_k(t)\|_\infty \leq \|v(0)\|_\infty + \int_0^t C_1(a) \|v_k(s)\|_\infty + C_2(a) \|v_k(s)\|_\infty^{1+\beta} ds$$

を満たす. ここで $C_1(a) = \alpha(|\alpha - 2| + n + a^{3/4})/a$, $C_2(a) = \alpha a^{\alpha\beta - 1} \left(\sup_{r \in \mathbf{R}} |\mathbf{G}'(r)| / (a^{1/4} + |r|^\beta) \right)$ である. [1] の Gronwall の補題を用いると $\left(C_1(a) + C_2(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta \right) - C_2(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta e^{T(a)\beta C_1(a)} = 0$ を満たす $T(a)$ に対して $(0, T(a))$ 上で,

$$\|v_k(t)\|_\infty \leq \left(\|v(0)\|_\infty^{-\beta} e^{-t\beta C_1(a)} - \frac{C_2(a)}{C_1(a)} (1 - e^{-t\beta C_1(a)}) \right)^{-1/\beta}$$

を満たす. また, $\|v_k(t)\|_{L^\infty} = \|u_k(t)\|_\alpha$, $\|u_k(t)\|_{\alpha,a} \leq \|u_k(t)\|_\alpha \leq a^{\alpha/2} \|u_k(t)\|_{\alpha,a}$ を用いると $\|u_k(t)\|_\alpha$ は $(0, T(a))$ 上で,

$$\|u_k(t)\|_\alpha \leq \left(\frac{a^{\alpha/2\beta} C_1(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta e^{t\beta C_1(a)}}{\left(C_1(a) + C_2(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta \right) - C_2(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta e^{t\beta C_1(a)}} \right)^{1/\beta}$$

を満たす. つまり,

$$F(a,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^{\alpha/2\beta} C_1(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta e^{t\beta C_1(a)}}{\left(C_1(a) + C_2(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta \right) - C_2(a) \|u_0\|_{\alpha,a}^\beta e^{t\beta C_1(a)}} \right)^{1/\beta} & (0 \leq t < T(a)), \\ \infty & (t \geq T(a)). \end{cases}$$

とおくと $\|u_k(t)\|_\alpha$ は,

$$\|u_k(t)\|_\alpha \leq \inf_{a \geq 1} F(a,t)$$

を満たす. 更に, $a \uparrow \infty$ の時, $T(a) \uparrow T_0$ となるので $\{u_k\}$ は $L^\infty((0, T_0); L_\alpha^\infty)$ で一様に有界であることが導かれる. $\square$

Lemma 3.3 (equicontinuity of $\{u_k\}$). $u_0 \in BC_\alpha$, $\alpha\beta \leq 1$ とし, $\{u_k\}_{k \geq 1} \subset L^\infty((0,\infty); L^\infty)$ を方程式 *(3.1)* の古典解とする. この時 $\{u_k\}$ は $\mathbf{R}^n \times (0, T_0)$ において局所的に同程度連続である.

Proof. $\{u_k\}$ は方程式 (3.1) の古典解なので積分方程式

$$u_k(t) = e^{t\Delta}u_k(0) - \int_0^t \mathrm{div}e^{(t-\tau)\Delta}\mathbf{G}(u_k(\tau))d\tau$$

を満たす. この式に heat semigroup の評価 Lemma 2.1 と, 最大値原理 Lemma 3.2 を用いると同程度連続性が導かれる. □

Lemma 3.2, 3.3 より Ascoli-Arzela の定理を用いると Theorem 3.4 が導かれる.

Theorem 3.4 (Existence of classical solution). $\mathbf{G} \in C^{1+\theta}(\mathbf{R};\mathbf{R}^n)$ は *(1.2)* を満たし, $u_0 \in BC_\alpha$ とする. この時, 方程式 *(1.1)* の古典解 $u \in L^\infty_{loc}([0,T_0);L^\infty_\alpha) \cap C(\mathbf{R}^n \times [0,T_0))$ が存在する.

Proof. Lemma 3.2, 3.3 より Ascoli-Arzela の定理から, ある $\{u_k\}_{k\geq 1}$ の部分列 $\{u_{k_l}\}_{l\geq 1}$ と $u \in L^\infty_{loc}([0,T_0);L^\infty_\alpha) \cap C(\mathbf{R}^n \times [0,T_0))$ が存在し, $\{u_{k_l}\}_{l\geq 1}$ は u に $\mathbf{R}^n \times (0,T_0)$ で広義一様収束する. また $\{u_k\}_{k\geq 1}$ は積分方程式

$$u_k(t) = e^{t\Delta}u_k(0) - \int_0^t \mathrm{div}e^{(t-\tau)\Delta}\mathbf{G}(u_k(\tau))d\tau$$

を満たすので, u も

$$u(t) = e^{t\Delta}u(0) - \int_0^t \mathrm{div}e^{(t-\tau)\Delta}\mathbf{G}(u(\tau))d\tau$$

を満たす. 更に u が積分方程式の解である事と Lemma 2.1 を用いると, u が微分方程式の解である事が導かれる. □

4 Uniqueness of solution of (1.1).

解の一意性を示すために, まず始めに E^I_R, E^O_R, E を定義する.

Definition 4.1. $\psi(x) := e^{-|x|^2}$ とする. この時 E^I_R, E^O_R, E を以下のように定義する.

$$E^I_R(f) := \int_{|x|\leq R} \psi(x)|f(x)|^2dx,$$

$$E^O_R(f) := \int_{|x|\geq R} \psi(x)|f(x)|^2dx,$$

$$E(f) := \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)|f(x)|^2dx.$$

次に微分方程式 (1.1) の解の微分の評価を与える.

Lemma 4.2 (Derivative estimate). u を *(1.1)* の古典解とする. この時 $E(|\nabla u(t)|) \in L^1_{loc}(0,T)$ を満たす.

Proof. u は微分方程式 (1.1) の解なので, u は積分方程式の解となり, また Lemma 3.3 より u は Hölder 連続なので, ∇u は

$$\nabla u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla G_t)(x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla \mathrm{div} G_{t-s})(x-y)(\mathbf{G}(u(x,s)) - \mathbf{G}(u(y,s)))ds,$$

を満たす. よって $E(|\nabla u(t)|) \in L^1_{loc}(0,T)$. □

Lemma 4.2 から解の一意性を示す事ができる.

Theorem 4.3 (Uniqueness of classical solution of (1.1)). $\mathbf{G} \in C^{1+\theta}(\mathbf{R};\mathbf{R}^n)$ は *(1.2)* を満たし, $u_0 \in BC_\alpha$, $\alpha\beta \le 1$ とする. u, $v \in L^\infty_{loc}([0,T); L^\infty_\alpha) \cap C(\mathbf{R}^n \times [0,T))$ を方程式 *(1.1)* の古典解とすると $u = v$ となる.

Proof. $w = u - v$ とおく. u, v は方程式 (1.1) の解なので,

$$\int_\varepsilon^t \int_{\mathbf{R}^n} \psi w \left(\partial_t w - \Delta w + \mathrm{div}(\mathbf{G}(u) - \mathbf{G}(v)\right) dxds = 0$$

を満たす. これを計算すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(E(w(t)) - E(w(\varepsilon))) + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbf{R}^n} \psi |\nabla w|^2 dxds \\ = &\int_\varepsilon^t \int_{\mathbf{R}^n} w\nabla w \cdot \nabla \psi + (w\nabla\psi + \psi\nabla w)\cdot(\mathbf{G}(u) - \mathbf{G}(v))dxds. \end{aligned} \tag{4.1}$$

となる.

$\mathbf{G}$ の仮定から, $\mathbf{G}$ は

$$|\mathbf{G}(r_1) - \mathbf{G}(r_2)| \le C_1 |r_1 - r_2|(1 + |r_1|^\beta + |r_2|^\beta)$$

を満たす. u, v はある $M_1 = M_1(T_0)$ に対し, $|u(x,t)|$, $|v(x,t)| \le M_1\langle x\rangle^\alpha$ を満たすので, ある $M_2 = M_2(T_0, C_1)$ に対し,

$$|\mathbf{G}(u) - \mathbf{G}(v)| \le M_2 |w| \langle x \rangle$$

を満たす. よって (4.1) はある $M_3 = M_3(T_0, C_1)$ に対して

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(E(w(t)) - E(w(\varepsilon))) + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbf{R}^n} \psi |\nabla w|^2 dxds \\ \le &\int_\varepsilon^t \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{2} M_3 \langle x\rangle^2 |w|^2 \psi + |\nabla w|^2 \psi dxds \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる. よって (4.2) は $\varepsilon \to 0$ とすると

$$E(w(t)) \le M_3 \int_0^t E(\langle x \rangle w(s))ds \tag{4.3}$$

となる. 一方, 十分大きな R に対して

$$E(\langle x\rangle w(s)) \leq \langle R\rangle^2 E(w(s)) + e^{-R^2/2}$$

が成り立つので (4.3) は

$$E(w(t)) \leq e^{-|R|^2/2} + M_3\langle R\rangle^2 \int_0^t E(w(s))ds.$$

となる. Gronwall の不等式を用いると

$$E(w(t)) \leq e^{-R^2/2+M_3 t\langle R\rangle^2}$$

となる. よって, $R \to \infty$ とすると任意の $0 \leq t \leq 1/(2M_3)$ に対して $E(w(t)) = 0$, つまり $u = v$ となる. $\square$

参考文献

[1] Y. Giga, K. Yamada *On viscous Burgers-like equation with linearly growing initial data*, Bol. Soc. Paran. Mat., **20** (2002), 29-49.

[2] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.

極性流体の方程式について

松浦 啓 (早稲田大学大学院理工学研究科)
kino@otani.phys.waseda.ac.jp

0. 本稿では極性流体の 2 次元流の初期値問題および時間周期問題について述べる.

1. Ω を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ R^2 の有界領域とする. 非圧縮性極性流体の 2 次元流は次の方程式系によって記述される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\mu+\chi)\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f + 2\chi\tilde{\nabla}\times\omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega + 4\chi\omega + (u\cdot\nabla)\omega = g + 2\chi\nabla\times u, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot u = 0. \tag{3}$$

ここに, $u = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ は流体の速度, $\omega = \omega(x,t)$ は流体中の微小粒子の回転速度, $p = p(x,t)$ は圧力を表し, これらが未知量である. また $f = (f^1(x,t), f^2(x,t))$ および $g = g(x,t)$ は外力であり, これらは与えられているものとする. μ, χ, α は正の定数である. なお, 上式に現れる微分演算子 $\tilde{\nabla}\times$, $\nabla\times$ は次式で定義される:

$$\tilde{\nabla}\times\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) \quad (\varphi = \varphi(x)),$$

$$\nabla\times v = \frac{\partial v^2}{\partial x_1} - \frac{\partial v^1}{\partial x_2} \qquad (v = (v^1(x), v^2(x))).$$

境界条件は, 斉次 Dirichlet 条件

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

を採用する.

以下では流体の速度 u と微小粒子の回転速度 ω の組を $U = (u, \omega)$ と書くことにする.

方程式系 (1)-(4) を初期条件

$$U(0) = U_0 = (u_0, \omega_0), \tag{5}$$

あるいは時間周期条件

$$U(0) = U(T) \tag{6}$$

のもとで考える.

2. 方程式系 (1)–(4) の解の存在を示すには，大きく分けて三つの手法がある．第一は Galerkin 法である．対応する有限次元の常微分方程式の解で近似することによって求める解を構成するのである．Łukaszewicz [4] は Galerkin 法によって (1)–(4) の初期値問題の時間大域解の存在を示した．なお，[4] では大域アトラクターの存在など，様々な問題が論ぜられている．第二は方程式系を抽象発展方程式と捉え直し，それと等価な積分方程式の研究に帰着させ，逐次近似法によって解を構成するという手法である．この手法は外部問題にも適用される．この手法に基づき，Navier-Stokes 型の方程式系の取り扱いは L^2空間に限らず様々な関数空間上での理論に拡張されている．第三は主要項をある汎関数の劣微分とみなし，他の項を劣微分作用素に対する摂動と捉える手法である．この第三の手法による抽象論は Ôtani [6],[7] により発展させられた．その理論の熱対流方程式への応用が Inoue & Ôtani [2],[3] に見られる．[6]，[7] によると摂動項の増大度がある条件を満たしていれば直ちに解の存在定理を得ることができるため，我々は第三の手法を用いることにする．

3. 関数空間を設定する．$C_\sigma^\infty(\Omega)$ でコンパクトな台を持つ無限回微分可能な湧き出し無しの 2 次元ベクトル場の全体を表す．$L_\sigma^2(\Omega)$，$H_\sigma^1(\Omega)$ はそれぞれ $C_\sigma^\infty(\Omega)$ の $L^2(\Omega)$ における閉包，$H^1(\Omega)$ における閉包を表す．$L^2(\Omega)$ のノルムを $\|\cdot\|$，内積を $(\cdot,\cdot)$ と記す．Poincaré の不等式より，

$$\|\nabla u\| := \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2} \quad \text{および} \quad \|\nabla \omega\| := \left(\int_\Omega \sum_{k=1}^{2} \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right|^2\right)^{1/2}$$

はそれぞれ $H_\sigma^1(\Omega)$，$H_0^1(\Omega)$ におけるノルムになる．

$H := L_\sigma^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$，$V := H_\sigma^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ とおく．$|\cdot|_H$，$(\cdot,\cdot)_H$ はそれぞれ H のノルムと内積を表す．

4. 方程式系 (1)–(4) を H における抽象発展方程式として定式化する．

P を $L^2(\Omega)$ から $L_\sigma^2(\Omega)$ への正射影とする．(1) の両辺に P を作用させることにより，∇p を消去し，次の抽象発展方程式を得る：

$$\frac{dU}{dt}(t) + \Lambda(U(t)) + L(U(t)) + B(U(t)) = F(t) \quad \text{in } [0,T]. \tag{7}$$

ただしここに $U = (u,\omega)$ で，Λ，L，B，F は次で定義される．

$$\begin{aligned}
\Lambda(U) &= (-(\mu+\chi)P\Delta u, -\alpha\Delta\omega); \\
D(\Lambda) &= (H^2(\Omega) \cap H_\sigma^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\
L(U) &= (-2\chi\tilde{\nabla} \times \omega, 4\chi\omega - 2\chi\nabla \times u), \\
B(U) &= (P(u\cdot\nabla)u, (u\cdot\nabla)\omega), \\
F &= (Pf, g).
\end{aligned}$$

作用素 Λ は H 上の自己共役極大単調作用素であり (例えば [8] を参照)，H 上の汎関数

$$\Phi(U)=\begin{cases}\dfrac{\mu+\chi}{2}\|\nabla u\|^2+\dfrac{\alpha}{2}\|\nabla\omega\|^2 & (U\in V);\\ \infty & (U\in H\setminus V),\end{cases}\tag{8}$$

の劣微分作用素 $\partial\Phi$ に一致することが容易に確かめられる．

5. 定理 任意の $T>0$，$\theta\in[0,1/2]$，$F\in L^2(0,T;H)$ および $U_0\in D(\Lambda^\theta)$ に対し，以下の (i)，(ii)，(iii) をみたす初期値問題 (7)，(5) の一意解 U が存在する．

$$(i)\quad U\in\begin{cases}C([0,T];H)\cap C((0,T];V) & \text{if}\quad \theta\in[0,1/2);\\ C([0,T];V) & \text{if}\quad \theta=1/2,\end{cases}$$

$$(ii)\quad t^{1/2-\theta}\frac{dU}{dt},\ t^{1/2-\theta}\Lambda(U(\cdot)),\ t^{1/2-\theta}L(U(\cdot)),\ t^{1/2-\theta}B(U(\cdot))\in L^2(0,T;H),$$

$$(iii)\quad t^{-\theta}|U(\cdot)-U_0|_H,\quad t^{1/2-\theta}\{\Phi(U(\cdot))\}^{1/2}\in L^q_*(0,T)\text{ for all }q\in[2,\infty].$$

ただし，ここで Λ^θ は分数巾を表す．また，$L^\infty_*(0,T)=L^\infty(0,T)$ であり，$1\le q<\infty$ に対しては $v\in L^q_*(0,T)$ は，

$$\int_0^T|v(t)|^q\frac{dt}{t}<\infty$$

を意味する．

6. 定理 任意の $T>0$，$F\in L^2(0,T;H)$ に対し，以下の (i)，(ii) をみたす時間周期問題 (7)，(6) の解 U が存在する．

$$(i)\quad U\in C([0,T];V),$$

$$(ii)\quad \frac{dU}{dt},\quad \Lambda(U(\cdot)),\quad L(U(\cdot)),\quad B(U(\cdot))\in L^2(0,T;H).$$

7. 定理 ある正の数 ρ_0，ρ_1 が存在して，任意の $T>0$ および $F\in L^2(0,T;H)$ に対し，

$$\|F\|_{H,2,T}<\rho_0$$

ならば時間周期問題 (7)，(6) の解 U が一意的に存在する．また，このとき任意の初期値 $\widetilde{U}_0\in H$ に対する初期値問題 (7)，(5) の解を $\widetilde{U}$ とすると，すべての $t\in[0,T]$ につき

$$|U(t)-\widetilde{U}(t)|_H\le|U(0)-\widetilde{U}_0|_He^{-\rho_1t}\tag{9}$$

が成り立つ．

ただし，ここで $v \in L^q(0,T;X)$ に対し

$$\|v\|_{X,q,T}^q = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\|v\|_{L^q(0,T;X)}^q & \text{if } 0 < T \le 1, \\ \sup\limits_{1\le t\le T} \displaystyle\int_{t-1}^{t} \|v(\tau)\|_X^q d\tau & \text{if } T \ge 1. \end{cases}$$

とおいた．なお，今後 $\|v\|_{R,q,T}$ を $\|v\|_{q,T}$ と略記する．

8．初期値問題および時間周期問題の解の存在をいうには汎関数 Φ および摂動項 $\mathcal{B} := L + B$ が次の条件をみたすことを示せばよい．

(A.1) すべての $L > 0$ に対し集合 $\{U \in H \mid |u|_H + \Phi(U) \le L\}$ は H でコンパクト．

(A.2) $\mathcal{B}$ は Φ-demiclosed：すなわち，もし U_n が U に $C([0,T];H)$ で強収束し，$\partial\Phi(U_n)$ が $\partial\Phi(U)$ に $L^2(0,T;H)$ で弱収束し，さらに $\mathcal{B}(U_n)$ が v に $L^2(0,T;H)$ で弱収束するならば，$v = \mathcal{B}(U(\cdot))$ が成り立つ．

(A.3) ある $\theta \in (0,1/2)$ および 非減少関数 $\ell_0, \ell_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ および $U \in D(\partial\Phi)$ に対し次をみたす：

$$|\mathcal{B}(U)|_H \le \ell_0(|U|_H)\left[\varepsilon|\partial\Phi(U)|_H + \ell_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\{\varphi(U)\}^{\frac{1-\theta}{1-2\theta}} + 1\right].$$

(A.4) ある $k \in (0,1)$ および 非減少関数 $\ell_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在して任意の $U \in D(\partial\Phi)$ に対し次をみたす：

$$|\mathcal{B}(U)|_H^2 \le k|\partial\Phi(U)|_H + \ell_2(|U|_H)(\Phi(U)+1)^2.$$

(A.5)(i) $\Phi(0) = 0$.

(ii) $\partial\Phi$ は狭義単調作用素．

(iii) ある定数 $K > 0$ および $q \in [2,\infty)$ が存在して，任意の $U \in D(\Phi)$ に対し $K|U|_H^q \le \Phi(U)$ が成り立つ．

(iv) 正の数 δ が存在して，任意の $U \in D(\partial\Phi)$ に対し次が成り立つ：

$$(-\partial\Phi(U) - \mathcal{B}(U), U)_H + \delta\Phi(U) \le 0.$$

(A.1)，(A.2)，(A.4)，(A.5) が成り立ち，(A.3) が全ての $\theta \in (0,1/2)$ に対して成り立てば，[6] の Theorem I, II, IV および Corollary IV により，$\theta = 1/2$ の場合と解の一意性を除いて定理5に述べられた結果が得られる．また，(A.1)，(A.2)，(A.4)，(A.5) が成り立てば [7] の Theorem I を適用することにより，定理6が直ちに得られる．ただし，初期値問題の解の一意性，$\theta = 0$ の場合の結果，時間周期解の安定性については別に議論する必要がある．

9．条件 (A.1) から (A.5) が実際に成り立っていることを検証する．

(A.1)，(A.5)(i)，(A.5)(iii) は Ω の有界性および $\Phi(\cdot)$ が V のノルムと同値であることに注意すれば容易に得られる．

残りの条件は $\mathcal{B} = L + B$ について示せばよいが，L と B に分けて扱うと見通しがよい．詳細については [4]，[3]，[8] を参照して欲しい．

(A.2) について調べる．列 U_n が (A.2) の仮定をみたしているとする．部分積分により，$(u,\omega) \in V$ に対し $(u, \tilde{\nabla} \times \omega) = (\nabla \times u, \omega)$ が成り立つ．また $u \in H$ のとき，$v, w \in H^1(\Omega)$ に対し恒等式

$$((u \cdot \nabla)v, w) = ((u \cdot \nabla)w, v) \tag{10}$$

が成り立つ．これらの事実を利用すると，$\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ において $\mathcal{B}(U_n) \to \mathcal{B}(U)$ となることが容易に示せる．一方，$\mathcal{B}(U_n)$ が v に $L^2(0,T;H)$ で弱収束するという仮定より，$\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ でも v に収束している．極限の一意性により，$v = \mathcal{B}(U)$ が結論される．

(A.3) および (A.4) に関しては，まず $\beta := (1-\theta)/(1-2\theta)$ とおくと $\theta \in (0,1/2)$ と $\beta > 1$ とが同値になることに注意する．$u \in H^1_\sigma(\Omega)$ に対し $\|\nabla u\| = \|\nabla \times u\|$ となること，および Poincaré の不等式を用いると $|L(U)|_H^2 \le K_1 \Phi(U)$ が成り立つ．一方，$U \in D(\Lambda)$ に対し，

$$|B(U)|_H^2 \le K_2 |U|_H \Phi(U) |\Lambda(U)|_H$$

なる評価が成り立つことが知られている．ゆえに，実数 $a > 0$，$0 < q \le r$ に対して成り立つ自明な不等式 $a^q \le a^r + 1$ および Young の不等式 $ab \le \varepsilon a^2 + b^2/(4\varepsilon)$ を用いれば (A.3) が任意の $\beta > 1$，すなわち $\theta \in (0,1/2)$ に対し成り立つこと，および (A.4) が成り立つことがわかる．

(A.5)(ii) は $\partial\Phi$ すなわち Λ が線型作用素であることと，容易に得られる等式 $(\partial\Phi(U), U) = 2\Phi(U)$ とから示せる．

また，$U \in D(\Lambda)$ に対し，(10) より $(B(U), U)_H = 0$ を得る．一方，

$$\begin{aligned}(L(U), U)_H &= 4\chi\|\omega\|^2 - 4\chi(\nabla u, \omega) \\ &\ge 4\chi\|\omega\|^2 - 4\chi\left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u\|^2\right) = -\chi\|\nabla u\|^2,\end{aligned}$$

であるから，

$$(\partial\Phi(U) + L(U), U)_H \ge 2\Phi(U) - \chi\|\nabla u\|^2 = \mu\|\nabla u\|^2 + \alpha\|\nabla\omega\|^2 \ge \delta\Phi(U)$$

となる．ただし $\delta := 2\mu/(\mu + \chi)$ とおいた．以上により (A.5)(iv) が成り立つ．

10. 初期値問題の解の一意性の証明等に用いる二つの解の差の評価を導く．U_1，U_2 が (7) をみたしているとする．このとき $W = U_1 - U_2$ は次の方程式をみたす．

$$\frac{dW}{dt}(t) + \partial\Phi(W(t)) + L(W(t)) = -(B(U_1(t)) - B(U_2(t))).$$

この両辺と W との内積をとると，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|W(t)|_H^2 + \delta\Phi(W(t)) = -(B(U_1(t)) - B(U_2(t)), W(t))_H.$$

右辺の項は

$$(B(U_1) - B(U_2), W)_H = ((\tilde{u}\cdot\nabla)u_1, \tilde{u}) + ((\tilde{u}\cdot\nabla)\omega_1, \tilde{\omega}),$$

と変形される．ここで $W = (\tilde{u}, \tilde{\omega})$ とおいた．これと，$u, v, w \in H^1(\Omega)$ に対し

$$|((u\cdot\nabla)v, w)| \le C\|u\|^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}\|\nabla v\|\,\|w\|^{1/2}\|w\|_{H^1}^{1/2}$$

が成り立つことを用いて次を得る．

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|W(t)|_H^2 + \delta\Phi(W(t)) \le C\Phi(U_1(t))^{1/2}|W(t)|_H\Phi(W(t))^{1/2}. \tag{11}$$

これより

$$\frac{d}{dt}|W(t)|_H^2 + \delta\Phi(W(t)) \le C\Phi(U_1(t))|W(t)|_H^2$$

を経て，すべての $t \in [0, T]$ に対し

$$|W(t)|_H^2 \le |W(0)|_H^2 \exp(C\int_0^t \Phi(U_1(\tau))d\tau) \tag{12}$$

を得る．これより初期値問題の解の一意性が従う．

11. 初期値問題の $\theta = 0$ の結果については [4] において得られているが，そこでの解の正則性は若干弱いものになっている．ここでは $\theta = 1/2$ の結果をもとに近似解を構成するという標準的な手法を用いる ([1], [3] を参照)．初期値 $U_0 \in H$ を固定し，$U_0^n \in V$ を H において U_0 に収束する列とする．各 U_0^n を初期値とする解を U^n とする．このとき，(7) に U^n を内積することにより，

$$\sup_{t\in[0,T]}|U^n(t)|_H^2 + \int_0^T \Phi(U^n(t))dt \le C\left(|U_0|_H^2 + \int_0^T |F(t)|_H^2 dt\right)$$

の形の a priori 評価を得る．(12) において $W := U^m - U^n$ とおけば，U^n が $C([0,T]; H)$ および $L^2(0,T;V)$ における Cauchy 列であることがわかる．次に $\partial\Phi(U^n)$ を (7) に内積することにより，

$$\frac{d}{dt}\Phi(U^n) + \frac{1}{4}|\partial\Phi(U^n)|_H^2 \le C\Phi(U^n) + |F(t)|_H^2 + C|U^n|_H^2\Phi(U^n)^2$$

を得る．この両辺に t をかけて

$$\frac{d}{dt}t\Phi(U^n) + \frac{t}{4}|\partial\Phi(U^n)|_H^2 \le Ct\Phi(U^n) + t|F(t)|_H^2 + C|U^n|_H^2\Phi(U^n)\cdot t\Phi(U^n)$$

を得る．最右辺の $t\Phi(U^n)$ の係数 $|U^n|_H^2\Phi(U^n)$ の $L^1(0,T)$ におけるノルムは $|U_0|_H$ および $\|F\|_{L^2(0,T;H)}$ によって上から押さえられていることを用いると，Gronwall の不等式により $t\Phi(U^n)$ および $\|t\partial\Phi(U^n)\|_{L^2(0,T;H)}$ が有界であることが導かれる．これらの事実を用いて $n\to\infty$ のとき U_n の極限 U が求める方程式の解であることが示される．

12. 時間周期解の安定性を示す議論を略述する．

(11) において U_1 を時間周期解，U_2 を $U_2(0)=U_0\in H$ なる初期値問題の解とする．(11) の右辺の項に関し，$|W(t)|_H\Phi(W(t))^{1/2}\le\sqrt{K}\Phi(W(t))$ と評価できるので，$\delta-C\sqrt{K}\Phi(U_1(t))>0$ が $(0,T)$ 上ほとんど至るところ成立すれば Gronwall の不等式より求める結果を得る．次の補題によって時間周期解の a priori 評価を求めると，$\sup_{0\le t\le T}\Phi(U_1(t))$ は $\|F\|_{H,2,T}$ によって上から押さえられることがわかる．したがって，$\|F\|_{H,2,T}$ が十分小さいならば周期解の安定性および一意性が従う．

13. 補題 y を $y(0)=y(T)$ かつ非負な $[0,T]$ 上の絶対連続関数，z を $L^1(0,T)$ の元, w を非負な $L^1(0,T)$ の元とし，$a_0>0$，$a_1\ge 0$ とする．次の微分不等式を仮定する．

$$\frac{dy}{dt}(t)+a_0y(t)\le|z(t)|+(a_1+w(t))y(t)\quad\text{for a.e. } t\in[0,T].$$

$w\not\equiv 0$ または $a_1\ne 0$ のときは，さらに $\|z\|_{1,T}<a_0$ および $\|y\|_{1,T}\le a_2\|z\|_{1,T}$ をみたす正の数 a_2 の存在を仮定する．

このとき，次の評価を得る．

$$\sup_{t\in[0,T]}y(t)\le\left(a_2+2(1+a_1a_2)\left(1+\frac{1}{a_0-\|w\|_{1,T}}\right)\right)e^{\|w\|_{1,T}}\|z\|_{1,T}.$$

14. この補題は [2] の Lemma 3.4 の拡張にあたり，証明も同様にしてできる．詳しい証明は [5] にある．

参考文献

[1] H. Brézis, "Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert", Math. Studies, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam/New York, 1973.

[2] H. Inoue and M. Ôtani, *Periodic problems for heat convection equations in noncylindrical domains*, Funkcial. Ekvac. 40 (1997), no.1, 19–39.

[3] H. Inoue and M. Ôtani, *Strong solutions of initial boundary value problems for heat convection equations in noncylindrical domains*, Nonlinear Anal., T.M.A., **24** (1995), 1061–1080.

[4] G. Łukaszewicz, *Long time behavior of 2D micropolar fluid flows*, Math. Comput. Model. **34** (2001), 487–509.

[5] K. Matsuura, *Existence of time-periodic solutions of the equations of magneto-micropolar fluid flow*, to appear.

[6] M. Ôtani, *Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems*, J. Diff. Eqns. **46**(1982), 268–299.

[7] M. Ôtani, *Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Periodic problems*, J. Diff. Eqns. **54**(1984), 248–273.

[8] R. Temam, "Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis", 3rd rev. ed., North-Holland, Amsterdam, 1984.

An operatorial approach to the Navier-Stokes equations in a half space with non-decaying initial data

Katsuya INUI
Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060-0810, Japan

Shin'ya MATSUI
Department of Information Science
Hokkaido Information University
Ebetsu 069-8585, Japan

1 Introduction and main result

We consider the Navier-Stokes equations in a half space $\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \mid x_n > 0\}$ with $n \geq 2$:

$$
\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0 & \text{for } x \in \mathbf{R}^n_+, \quad 0 < t < T, \\ \text{div } u = 0 & \text{for } x \in \mathbf{R}^n_+, \quad 0 < t < T, \\ u = 0 & \text{for } x \in \{x_n = 0\}, \quad 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{for } x \in \mathbf{R}^n_+ \end{cases}
$$

where $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \ldots, u^n(x,t))$ and $p = p(x,t)$ denote the unknown velocity vector field and the unknown pressure scalar function at the point $(x,t) \in \mathbf{R}^n_+ \times (0,T)$, respectively, while $u_0 = u_0(x) = (u_0^1(x), u_0^2(x), \ldots, u_0^n(x))$ is the given initial data.

Our aim is to construct a time local solution of (N-S) when the initial data $u_0 = u_0(x)$ belongs to

$$BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+) = \{\ f \in L^\infty(\mathbf{R}^n_+) \mid f \text{ is uniformly continuous vector, } \operatorname{div} f = 0 \text{ in } \mathbf{R}^n_+,\ f|_{x_n=0} = 0\ \}.$$

Here, for a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, the space of fuctions or vectors with finite essential bound is denoted by $L^\infty(\Omega)$, which is a Banach space with a norm $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$, or $\|\cdot\|_\infty$ for simplicity. The space $BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ is also a Banach space with the norm $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}$.

We note that our initial data does not need to decay at space infinity and may have infinite kinetic energy. Of course, the initial data can be periodic or oscillate at space infinity.

By standard way, (N-S) is formally transformed into an abstract ordinary equation,

$$\text{(OD)} \qquad u_t + Au + \mathbf{P}_+(u, \nabla)u = 0 \qquad \text{for } 0 < t < T$$

where $\mathbf{P}_+$ is the so-called Helmholtz operator in a half space $\mathbf{R}^n_+$ which will be defined later and $A = -\mathbf{P}_+\Delta$ is the Stokes operator. Using the solution operator e^{-tA} of the Stokes equations, (OD) is transformed into an integral equation

$$\text{(I)} \qquad u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbf{P}_+ \operatorname{div}(u \otimes u)(s)\, ds \qquad \text{for } 0 < t < T$$

where $u \otimes v$ is the tensor product of vectors u and v, and $\operatorname{div} F$ denotes the divergence of a tensor $F = (F_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ defined by $(\operatorname{div} F)^i = (\nabla \cdot F)^i = \sum_{j=1}^n \partial F_{i,j}/\partial x_j$ for $1 \leq i \leq n$. Here, we used

$(u,\nabla)u = \mathrm{div}(u \otimes u)$ when $\mathrm{div}u = 0$.

Recently, Desch-Hieber-Prüss[1] proved that the solution operator of the Stokes equations is an strongly continuous analytic semigroup on $BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ and $L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ (which is not strongly continuous at $t=0$ on $L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$). Here, the space $L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ is defined by

$$L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+) = \{\ f \in L^\infty(\mathbf{R}^n_+) \mid \int_{\mathbf{R}^n_+} f \cdot \nabla\varphi dx = 0 \qquad \text{for all } \varphi \in \widehat{W}^{1,1}(\mathbf{R}^n_+)\ \}$$

where

$$\widehat{W}^{1,1}(\mathbf{R}^n_+) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n_+); \nabla f \in L^1(\mathbf{R}^n_+)\}.$$

Here, we define the Helmholtz operator in $\mathbf{R}^n_+$, denoted by $\mathbf{P}_+$. For a scalar function $h(x)$ defined in $\mathbf{R}^n_+$, extended scalar functions e^+h and e^-h are defined by

$$(e^\pm)h(x) = \begin{cases} h(x), & \text{if } x_n > 0, \\ \pm h(x', -x_n), & \text{if } x_n < 0. \end{cases}$$

For a vector field $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ in $\mathbf{R}^n_+$, we define an extended vector field Ef as follows.

$$(Ef)^i = e^+ f^i \quad \text{for } 1 \le i \le n-1, \qquad (Ef)^n = e^- f^n. \tag{1.1}$$

Then, the operator $\mathbf{P}_+$ can be expressed by

$$\mathbf{P}_+ f = \mathbf{P}Ef \tag{1.2}$$

where $\mathbf{P}$ is the Helmholtz operator in $\mathbf{R}^n$, that is, $\mathbf{P} = (\delta_{i,j} + R_iR_j)_{1\le i,j\le n}$ where $\delta_{i,j}$ is Kronecker's delta and R_i is the Riesz transform defined by $R_i = \partial_i(-\Delta)^{-1/2}$ for $1 \le i \le n$.

It is well known that the Riesz transform R_i is a bounded operator from $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ to $BMO(\mathbf{R}^n)$ and from $BMO(\mathbf{R}^n)$ to itself. Here, we denote by $BMO(\mathbf{R}^n)$ the space of functions of bounded mean oscillations, which strictly includes $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. It is also well known that $BMO(\mathbf{R}^n)$ is the dual space of the Hardy space - $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$.

Our result reads as follows.

Theorem 1 *Let $u_0 \in BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$. Then there exist $T_0 \ge C\|u_0\|^{-2}_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}$ and a solution $u = u(t) \in C([0,T_0];\ L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+) \cap BUC(\mathbf{R}^n_+))$ of (I) satisfying*

$$\sup_{0\le t\le T_0} \left(\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} + t^{1/2}\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \right) \le M$$

where $M = M(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}) > 0$ is independent of t and u. Moreover, this solution is unique in $C([0,T_0]; L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+))$.

Theorem 2 *Suppose $u_0 \in BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$. Let $u(t)$ be the solution of (INT) obtained in Theorem 1. If we set*

$$p(t) = \sum_{i,j=1}^n R_iR_j(Eu)^i(Eu)^j(t)$$

for each $t > 0$, then $(u, \nabla p)$ is smooth in $\mathbf{R}^n_+ \times (0,T_0)$ and solves (N-S).

The crucial point of proof for the theorems is an estimate in $L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ of operators '$e^{-tA}\mathbf{P}_+\nabla$' in this form. By [1], the operator e^{-tA} is an analytic semigroup, so that e^{-tA} is bounded in $L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ and $BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$. However, the operator $\mathbf{P}_+$ is not bounded in $L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ since it is well known that the Riesz transform R_i is not bounded in $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. This unboundedness of the operator $\mathbf{P}_+$ in $L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ implies that

$$\mathbf{P}_+\mathrm{div}(u \otimes u) \text{ does not belong to } L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+) \text{ nor } BUC_\sigma(\mathbf{R}^n_+) \tag{1.3}$$

even if we assume $u, \nabla u \in L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ in standard iteration scheme.

The property (1.3) means that the term $\mathbf{P}_+\mathrm{div}(u\otimes u)$ does not belong to domain of the semigroup e^{-tA}, hence does not allow us to multiply the operator e^{-tA} to the term $\mathbf{P}_+\mathrm{div}(u \otimes u)$. Moreover, one can not apply useful standard estimates given by semigroup theory, especially on fractional powers of its generators.

In the case of the whole space([2]), an another way worked well to estimate the term $e^{-tA}\mathbf{P}_+\mathrm{div}(u\otimes u)$ since the operators e^{-tA},$\mathbf{P}_+$, and ∇ commute. However, in the case that domain has boundary, including this half space case, those operators do not commute, so new idea seems to be needed.

To overcome this difficulty, we introduce a kind of smoothed operator $\mathbf{P}^\varepsilon_+$ for small $\varepsilon > 0$, which satisfies

$$\mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(u \otimes u) \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$$

when $u \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ and $\nabla u \in L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$. In proof, we consider an approximate equation in which the Helmholtz operator in nonlinear term is replaced by the smoothed operator $\mathbf{P}^\varepsilon_+$.

In [8], Solonnikov proved existence and uniqueness of local-in-time solution for the integral equation (I) with bounded initial data. We believe, however, that our operatorial method using semigroup theory may be applicable to the case of general unbounded domains in the future.

There is another existence and uniqueness result with non-decaying initial data by Y. Shimizu[7]. In [7], the initial data is assumed to have a fixed expression $u_0 = \partial_j(-\Delta')^{-\alpha/2}v_0$, where $v_0 \in BMO(\mathbf{R}^n_+)$, $0 < \alpha < 1$, and $j = 1, 2, \cdots, n-1$ where Δ' represents tangential Laplacian.

2 The Stokes equations in a half space

In this section, we summarize known estimates of the solution for the Stokes equations in a half space;

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = 0 & \text{for } x \in \mathbf{R}^n_+,\ 0 < t < T, \\ \mathrm{div}\ u = 0 & \text{for } x \in \mathbf{R}^n_+,\ 0 < t < T, \\ u = 0 & \text{for } x \in \partial\mathbf{R}^n_+,\ 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{for } x \in \mathbf{R}^n_+. \end{cases}$$

We first prepare

Lemma 2.1 ([1]) *Let $0 < \alpha \leq 1$. Then there exists a constant $C_\alpha > 0$ independent of f and t such that*

$$||e^{-tA}f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \leq ||f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0, \tag{2.1}$$

$$||A^\alpha e^{-tA}f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \leq C_\alpha\, t^{-\alpha}||f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for all } f \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+) \text{ and } t > 0, \tag{2.2}$$

$$||(e^{-tA} - I)f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \leq C_\alpha\, t^\alpha||A^\alpha f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for all } f \in D(A^\alpha) \text{ and } t \geq 0 \tag{2.3}$$

where I denotes the identity operator.

Remark Desch-Hieber-Prüss[1] proved (2.1). The estimates (2.2) and (2.3) are obtained by the theory of analytic semigroups and fractional powers of its generators. Even in the situation that the analytic semigroup e^{-tA} is not strongly continuous at $t = 0$, and that its generator A is not densely defined in $L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$, the estimate (2.1) allows us to define the fractional power of the operator A and derive (2.2) and (2.3) (see e.g. [4]).

The next lemma is on boundedness of spatial derivative of the solution for the Stokes equations.

Lemma 2.2 ([6],[5]) *Let $f \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of f and t such that*

$$||\nabla e^{-tA} f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le C\, t^{-1/2} ||f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0. \tag{2.4}$$

Remark In proof of [6], Y. Shimizu actually obtained the next stronger estimate without stating it as a theorem. For $f \in BMO(\mathbf{R}^n_+)$ satisfying $\mathrm{div} f = 0$ there exists a constant $C > 0$ independent of f and t such that

$$||\nabla e^{-tA} f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le C\, t^{-1/2} ||f||_{BMO(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0. \tag{2.5}$$

The estimate (2.4) follows from (2.5) since $||f||_{BMO(\mathbf{R}^n_+)} \le ||f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}$.

The next lemma gives us boundedness of the operators $e^{-tA}\mathbf{P}_+\nabla$ in this form as one combined operator even though the single operator $\mathbf{P}_+$ is not bounded in $L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$. This lemma is obtained as a corollary of [3].

Lemma 2.3 *Let $1 \le j \le n$ and $f \in BMO(\mathbf{R}^n_+)$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of f and t such that*

$$||e^{-tA}\mathbf{P}_+\partial_j f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le C\, t^{-1/2} ||f||_{BMO(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0. \tag{2.6}$$

Remark (i) Since the Helmholtz operator $\mathbf{P}_+$ expressed by (1.1) and (1.2) includes an extension operator to $\mathbf{R}^n$, the term $e^{-tA}\mathbf{P}_+\partial_j f$ in (2.6) must be written $e^{-tA}\ \gamma\mathbf{P}_+\partial_j f$ where γ stands for the restriction operator to a half space. From now on γ will be omitted for simplicity.
(ii) By (2.6) we get

$$||e^{-tA}\mathbf{P}_+\partial_j f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le C\, t^{-1/2} ||f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0 \tag{2.7}$$

since $||f||_{BMO(\mathbf{R}^n_+)} \le ||f||_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}$.

3 Outline of proof

We consider the following approximate integral equation;

$$(\mathrm{I})_\varepsilon \qquad u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbf{P}^\varepsilon_+ \mathrm{div}(u \otimes u)(s)\, ds \qquad \text{for } 0 < t < T$$

where the smoothed operator $\mathbf{P}^\varepsilon_+$ is defined by

$$\mathbf{P}^\varepsilon_+ f = \mathbf{P}(G_\varepsilon * Ef) \qquad (* \text{ denotes the convolution in space variables})$$

for a vector field f and any $\varepsilon > 0$. Here, $G_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-|x|^2/4\varepsilon)$ is the Gauss kernel.

The next lemma allows us to use semigroup theory freely on the approximate equation $(\mathrm{I})_\varepsilon$.

Lemma 3.1 *Let $f \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ with $\nabla f \in L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$. Then we get*

$$\mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(f \otimes f) \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+) \qquad \text{for } \varepsilon > 0.$$

Proof. We show only boundedness of $\mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(f\otimes f)$ in $L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ since it is easy to see that $(\mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(f\otimes f))^n|_{x_n=0} = 0$ and $\mathrm{div}(\mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(f \otimes f)) = 0$. For any $\varepsilon > 0$, direct calculation yields

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(f \otimes f) &= \mathbf{P}\{G_\varepsilon * E\mathrm{div}(f \otimes f)\} \\ &= \mathbf{P}\{G_\varepsilon * \mathrm{div}(Ef \otimes Ef)\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Shifting the spatial derivative from $(Ef \otimes Ef)$ to the heat kernel G_ε, one sees that

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\varepsilon_+\mathrm{div}(f \otimes f) &= \mathbf{P}\ \mathrm{div}\{G_\varepsilon * (Ef \otimes Ef)\} \\ &= \mathbf{P}\{(\nabla G_\varepsilon) * (Ef \otimes Ef)\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Multiplying the operator $\mathbf{P}$ only on ∇G_ε, we get

$$\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f) = \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_j} * (Ef \otimes Ef)_{i,j} + \sum_{j,k=1}^n (R_i R_k \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_j}) * (Ef \otimes Ef)_{k,j}\Big)_i$$

where $(F_i)_i$ denotes a vector whose i-th component is F_i. Then, by Young's inequality and the fact that $BMO(\mathbf{R}^n)$ is the dual space of $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$, we obtain

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} &\le \|\nabla G_\varepsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \|Ef \otimes Ef\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n \|R_i R_k \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_j}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)} \|Ef \otimes Ef\|_{BMO(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

By $\|f\|_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}$, $\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \le \|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)}$ and the boundedness of the Riesz transform R_i in $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$, we finally obtain

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} &\le C\|\nabla G_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)} \|Ef \otimes Ef\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\ &\le C_\varepsilon \|f\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \end{aligned}$$

with a constant $C_\varepsilon > 0$ depending on ε.
We have proved Lemma 3.1.

The next lemma gives us uniform estimates on ε for nonlinear term of the approximate equation $(\mathrm{I})_\varepsilon$. By the estimates we can construct unique local-in-time solution $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of $(\mathrm{I})_\varepsilon$ using standard iteration for u and ∇u

Lemma 3.2 *Suppose $\varepsilon > 0$. Let $f \in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ with $\nabla f \in L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of ε, t and f such that*

$$\|e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le C\, t^{-1/2} \|f\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0, \tag{3.3}$$

and

$$\|\nabla e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le C\, t^{-1/2} \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t > 0. \tag{3.4}$$

Proof. Similarly as in (3.1) and (3.2), one sees that by Lemma 3.1(1)

$$\begin{aligned} e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f) &= e^{-tA}\mathbf{P}\{G_\varepsilon * E\mathrm{div}(f \otimes f)\} \\ &= e^{-tA}\mathbf{P}\{G_\varepsilon * \mathrm{div}(Ef \otimes Ef)\} \\ &= e^{-tA}\mathbf{P}\ \mathrm{div}\{G_\varepsilon * (Ef \otimes Ef)\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Then, by (2.7) and Young's inequality we get

$$\begin{aligned} \|e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} &= \|e^{-tA}\mathbf{P}\ \mathrm{div}\{G_\varepsilon * (Ef \otimes Ef)\}\| \\ &\le C\, t^{-1/2} \|G_\varepsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \|Ef \otimes Ef\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\ &= C\, t^{-1/2} \|G_\varepsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \|Ef\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\ &= C\, t^{-1/2} \|f\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}. \end{aligned}$$

Here, the constant C does not depend on ε because of $\|G_\varepsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} = 1$. Thus, (3.3) was proved.
For (3.4), similarly as in (3.5), we write

$$\nabla e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f \otimes f) = \nabla e^{-tA}\mathbf{P}\{G_\varepsilon * \mathrm{div}(Ef \otimes Ef)\}.$$

Then, it follows from (2.5) and boundedness of the Riesz transform from $BMO(\mathbf{R}^n)$ to itself that

$$\begin{aligned}
\|\nabla e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon \mathrm{div}(f\otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} &= \|\nabla e^{-tA}\|_{BMO(\mathbf{R}^n_+)\to L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}\|\mathbf{P}\{G_\varepsilon * \mathrm{div}(Ef\otimes Ef)\}\|_{BMO(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C\,t^{-1/2}\|G_\varepsilon * \mathrm{div}(Ef\otimes Ef)\|_{BMO(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C\,t^{-1/2}\|G_\varepsilon * \mathrm{div}(Ef\otimes Ef)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C\,t^{-1/2}\|G_\varepsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \\
&= C\,t^{-1/2}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}.
\end{aligned}$$

Lemma 3.2 was proved.

By the next lemma and Gronwall's inequality, it turns out that the solutions $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of $(\mathrm{I})_\varepsilon$ is a Cauchy sequence as $\varepsilon\to 0$ in $C([0,T_0];L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+))$. Then the limit function satisfies the original equation (I).

Lemma 3.3 *Let $f\in L^\infty_\sigma(\mathbf{R}^n_+)$ with $\nabla f\in L^\infty(\mathbf{R}^n_+)$. Then, for any ε,ε' with $0<\varepsilon'\le\varepsilon$ there exists a constant $C>0$ independent of ε, ε', t and f such that*

$$\begin{aligned}
&\|e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon\mathrm{div}(f\otimes f)-e^{-tA}\mathbf{P}_+^{\varepsilon'}\mathrm{div}(f\otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\le C(\varepsilon-\varepsilon')^{1/2}t^{-1/2}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{for } t>0. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Proof. By (3.5) one sees that

$$\begin{aligned}
&e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon\mathrm{div}(f\otimes f)-e^{-tA}\mathbf{P}_+^{\varepsilon'}\mathrm{div}(f\otimes f) \\
&= e^{-tA}\mathbf{P}\mathrm{div}\{G_\varepsilon*(Ef\otimes Ef)\}-e^{-tA}\mathbf{P}\mathrm{div}\{G_{\varepsilon'}*(Ef\otimes Ef)\} \\
&= e^{-tA}\mathbf{P}\mathrm{div}\{(G_\varepsilon-G_{\varepsilon'})*(Ef\otimes Ef)\}.
\end{aligned}$$

So, it follows from (2.7) that

$$\begin{aligned}
&\|e^{-tA}\mathbf{P}_+^\varepsilon\mathrm{div}(f\otimes f)-e^{-tA}\mathbf{P}_+^{\varepsilon'}\mathrm{div}(f\otimes f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\le Ct^{-1/2}\|(G_\varepsilon-G_{\varepsilon'})*(Ef\otimes Ef)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Since Ef is defined in $\mathbf{R}^n$ we can write

$$(G_\varepsilon-G_{\varepsilon'})*(Ef\otimes Ef)=\left((e^{\varepsilon\Delta}-e^{\varepsilon'\Delta})(Ef)^i(Ef)^j\right)_{i,j}.$$

Here, $e^{\varepsilon\Delta}$ is the solution operator of the heat equation in $\mathbf{R}^n$. Hence, for $F^{i,j}=(Ef)^i(Ef)^j$ with $1\le i,j\le n$, we have

$$\begin{aligned}
\|(G_\varepsilon-G_{\varepsilon'})*(Ef\otimes Ef)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} &= \sup_{1\le i,j\le n}\|(e^{\varepsilon\Delta}-e^{\varepsilon'\Delta})F^{i,j}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\
&= \sup_{1\le i,j\le n}\|(e^{(\varepsilon-\varepsilon')\Delta}-I)e^{\varepsilon'\Delta}F^{i,j}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Then, commutativity of ∇ and $e^{\varepsilon'\Delta}$ in $\mathbf{R}^n$ yields

$$\begin{aligned}
\|(G_\varepsilon-G_{\varepsilon'})*(Ef\otimes Ef)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} &\le C(\varepsilon-\varepsilon')^{1/2}\sup_{1\le i,j\le n}\|\nabla e^{\varepsilon'\Delta}F^{i,j}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\
&= C(\varepsilon-\varepsilon')^{1/2}\sup_{1\le i,j\le n}\|e^{\varepsilon'\Delta}\nabla F^{i,j}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C(\varepsilon-\varepsilon')^{1/2}\sup_{1\le i,j\le n}\|\nabla F^{i,j}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C(\varepsilon-\varepsilon')^{1/2}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}.
\end{aligned}$$

The above inequality and (3.7) yield (3.6).
Lemma 3.3 was proved.

Theorem 2 is a direct consequence of regularity result [9], since the solution of (I) is a bounded weak solution for (N-S).

References

[1] W. Desch, M. Hieber, J. Prüss, L^p-Theory of the Stokes equation in a half space, J. evol. equ., 1 (2001), 115-142

[2] Y. Giga, K. Inui, S. Matsui, On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with non-decaying initial data, Quaderni di Mathematica, 4 (1999), 27-68

[3] Y. Giga, S. Matsui, Y. Shimizu, On estimates in Hardy spaces for the Stokes flow in a half space, Math. Z. 231, (1999), 383-396

[4] H. Komatsu, Fractional powers of operators, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 19, No. 2, (1966), 285-346

[5] Y. Shibata, S. Shimizu, A decay property of the Fourier transform and its application to the Stokes problem, J. math. fluid mech., 3 (2001), 213-230

[6] Y. Shimizu, L^∞-estimate of first-order space derivatives of Stokes flow in a half space, Funkcialaj Ekvacioj, 42 (1999), 291-309

[7] Y. Shimizu, Existence of Navier-Stokes flow in the half space with non-decaying initial data, to appear

[8] V. A. Solonnikov, On nonstationary Stokes problem and Navier-Stokes problem in a half-space with initial data nondecreasing at infinity, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No.5, (2003), 1726-1740, Translated from Problemy Matematicheskogo Analiza, No. 25, (2003), 189-210

[9] S. Takahashi, On a regularity criterion up to boundary for weak solutions of the Navier-Stokes equations, Commun. in Partial Differential Equations, 17(1-2), (1992), 261-285

Asymptotic behavior of spherically symmetric solutions to the compressible Navier-Stokes equations with external forces

Tohru NAKAMURA*

This result is based on a joint work with Professors Shinya Nishibata* and Shigenori Yanagi†.

1 Introduction

The Navier-Stokes equation with external force for the isentropic motion of compressible viscous gas in the Eulerian coordinate is the system of equations given by

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \tag{1.1a}$$

$$\rho\{u_t + (u \cdot \nabla)u\} = \mu_1 \Delta u + (\mu_1 + \mu_2)\nabla(\nabla \cdot u) - \nabla P(\rho) + \rho f. \tag{1.1b}$$

We study the asymptotic behavior of a solution (ρ, u) to (1.1) in an unbounded exterior domain $\Omega := \{\xi \in \mathbb{R}^n \ ; \ |\xi| > 1\}$, where n is a space dimension larger than or equal to 2. Here $\rho > 0$ is the mass density; $u = (u_1, \ldots, u_n)$ is the velocity of gas; $P(\rho) = K\rho^\gamma$ $(K > 0, \gamma \geq 1)$ is the pressure with the adiabatic exponent γ; f is the external force; μ_1 and μ_2 are constant called viscosity-coefficients satisfying $\mu_1 > 0$ and $2\mu_1 + n\mu_2 > 0$.

It is assumed that the external force f is a spherically symmetric potential force and the initial data is also spherically symmetric. Namely, for $r := |\xi|$

[A1] $f := -\nabla U = \dfrac{\xi}{r} U_r(r), \quad U_r \in C^1[1, \infty),$

[A2] $\rho_0(x) = \hat{\rho}_0(r), \quad u_0(\xi) = \dfrac{\xi}{r}\hat{u}_0(r).$

Under the assumptions [A1] and [A2], it is shown in [5] that the solution (ρ, u) is spherically symmetric. Here, the spherically symmetric solution is a solution to (1.1) in the form of

$$\rho(\xi, t) = \hat{\rho}(r, t), \quad u(\xi, t) = \frac{\xi}{r}\hat{u}(r, t). \tag{1.2}$$

Substituting (1.2) in (1.1), we reduce the system (1.1) to that of the equations for $(\hat{\rho}, \hat{u})(r, t)$. Here and hereafter, we omit the hat " ˆ " to express a spherically symmetric function without confusion.. Hence the spherically symmetric solution $(\rho, u)(r, t)$ satisfies the system of equations

$$\rho_t + \frac{(r^{n-1}\rho u)_r}{r^{n-1}} = 0, \tag{1.3a}$$

$$\rho(u_t + uu_r) = \mu \left(\frac{(r^{n-1}u)_r}{r^{n-1}} \right)_r - P(\rho)_r - \rho U_r, \tag{1.3b}$$

where $\mu := 2\mu_1 + \mu_2 > 0$. The initial data to (1.3) is prescribed to be spatial asymptotically constant:

$$\rho(r, 0) = \rho_0(r) > 0, \quad u(r, 0) = u_0(r), \tag{1.4a}$$

$$\lim_{r \to \infty} (\rho_0(r), u_0(r)) = (\rho_+, u_+), \quad \rho_+ > 0. \tag{1.4b}$$

*Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8552, Japan.

†Department of Mathematical Sciences, Ehime University, Matsuyama 790-8577, Japan.

We adopt the adhesion boundary condition as

$$u(1,t) = 0. \tag{1.5}$$

In addition, it is assumed that the initial data (1.4) is compatible with the boundary data (1.5).

This initial boundary value problem is formulated to study the behavior of compressible viscous gas around the solid sphere in a field of external force. We show that the time asymptotic state of the solution to the problem (1.3), (1.4), (1.5) is the stationary solution, which is a solution to (1.3) independent of time t, satisfying the same conditions (1.4) and (1.5). Hence the stationary solution $(\tilde{\rho}(r), \tilde{u}(r))$ satisfies the system of equations

$$\frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}\tilde{\rho}\tilde{u})_r = 0, \tag{1.6a}$$

$$\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{u}_r = \mu\left(\frac{(r^{n-1}\tilde{u})_r}{r^{n-1}}\right)_r - P(\tilde{\rho})_r - \tilde{\rho}U_r \tag{1.6b}$$

and the boundary and the spatial asymptotic conditions

$$\tilde{u}(1) = 0, \quad \lim_{r\to\infty}(\tilde{\rho}(r), \tilde{u}(r)) = (\rho_+, u_+). \tag{1.7}$$

Solving (1.6) under the conditions (1.7), we see that $(\tilde{\rho}(r), \tilde{u}(r))$ is explicitly given by

$$\tilde{\rho}(r) = \begin{cases} \rho_+ \exp\left\{\dfrac{1}{K}(U_+ - U(r))\right\} & \text{for } \gamma = 1, \\ \left\{\rho_+^{\gamma-1} + \dfrac{\gamma-1}{K\gamma}(U_+ - U(r))\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} & \text{for } \gamma > 1, \end{cases} \tag{1.8a}$$

$$\tilde{u}(r) = 0 \tag{1.8b}$$

for $r \geq 1$, where U_+ is a constant given by

$$U_+ := \lim_{r\to\infty} U(r) = \lim_{r\to\infty}\int_1^r U_r(\eta)\,d\eta + U(1). \tag{1.9}$$

We see from (1.8b) that the condition

$$u_+ = 0 \tag{1.10}$$

is necessary for the existence of the stationary solution. It is supposed that a vacuum does not occur in the stationary solution, that is, $\tilde{\rho}(r) > c > 0$. We also assume that the external force satisfies

$$-\delta \leq U_r(r) \tag{1.11}$$

for an arbitrary $r \geq 1$, where δ is a certain positive constant determined suitably small. The formula (1.8) implies that the stationary solution is a constant state $(\rho_+, 0)$ if the external force U_r is constantly equal to zero.

The stability theorem of the stationary solution (1.8) is summarized in the next theorem, which is the main result in the present paper.

Theorem 1.1. *Suppose the initial data satisfies that*

$$r^{\frac{n-1}{2}}(\rho_0 - \tilde{\rho}),\ r^{\frac{n-1}{2}}u_0,\ r^{\frac{n-1}{2}}(\rho_0 - \tilde{\rho})_r,\ r^{\frac{n-1}{2}}u_{0r} \in L^2(1,\infty), \tag{1.12a}$$

$$\rho_0 \in \mathcal{B}^{1+\sigma}_{\mathrm{loc}}[1,\infty),\ u_0 \in \mathcal{B}^{2+\sigma}_{\mathrm{loc}}[1,\infty) \quad \textit{for a certain } \sigma \in (0,1), \tag{1.12b}$$

(1.10) *and the compatibility condition holds. Let the external force* $U_r \in \mathcal{B}^1[1,\infty)$ *satisfy* (1.9). *In addition, if the condition* (1.11) *holds for a positive constant* δ *depending only on the initial data, then the initial boundary value problem* (1.3), (1.4) *and* (1.5) *has a unique solution* (ρ, u) *satisfying*

$$r^{\frac{n-1}{2}}(\rho-\tilde{\rho}),\ r^{\frac{n-1}{2}}u,\ r^{\frac{n-1}{2}}(\rho-\tilde{\rho})_r,\ r^{\frac{n-1}{2}}u_r \in C([0,\infty);L^2(1,\infty)), \tag{1.13a}$$

$$\rho \in \mathcal{B}^{1+\sigma,1+\sigma/2}_{\mathrm{loc}}([1,\infty)\times[0,T]),\ u \in \mathcal{B}^{2+\sigma,1+\sigma/2}_{\mathrm{loc}}([1,\infty)\times[0,T]), \tag{1.13b}$$

for an arbitrary $T>0$. *Moreover, the solution* (ρ,u) *converges to the corresponding stationary solution* $(\tilde{\rho},0)$ *given by* (1.8) *as time* t *tends to infinity. Precisely, it holds that*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{r\in[1,\infty)}|(\rho(r,t)-\tilde{\rho}(r),u(r,t))|=0.$$

Notice that any smallness assumptions on the initial data is not necessary for the above stability theorem. Moreover, if $U_r \geq 0$, then the external force U_r can be taken arbitrarily large. This condition implies the case that the external force is attractive like the gravitational force.

The Hölder continuity of the initial data (1.12b) is necessary to ensure the validity of the transformation between the Eulerian and the Lagrangian coordinates. Actually, we show the asymptotic stability of the stationary solution in the Lagrangian without the Hölder continuity. In translating this result to that in the Eulerian coordinate, we need the differentiability of the solution.

Related results. The first notable research in the equation on the exterior domain is given by A. Matsumura and T. Nishida in [10], where the stability of the stationary solution is proved under the smallness assumptions on the initial data and the external force. Another pioneering work is given by N. Itaya [5], which establishes the existence of the spherically symmetric solution to the equation for the heat-conductive gas globally in time on a bounded annulus domain without the external force nor the smallness assumption on the initial data. A. Matsumura in [9] shows that the spherically symmetric solution to the isothermal model with the external force on the annulus domain exists globally in time and it converges to the corresponding stationary solution exponentially as time tends to infinity. The present research aims to extend the results in [9] to those on an unbounded exterior domain.

The study of the spherically symmetric solution over an unbounded exterior domain is started by S. Jiang in [6], where the global existence of the solution is established for the equation of heat-conductive ideal gas. Moreover, the partial result on the asymptotic state is obtained. Precisely, it shows that, for the space dimension $n=3$, $\|u(t)\|_{2j}\to 0$ as $t\to\infty$, where j is an arbitrarily fixed integer greater than or equal to 2.

Notation. For a region $\Omega\subset\mathbb{R}$ and $1\leq p\leq\infty$, $L^p(\Omega)$ denotes the standard Lebesgue space over Ω equipped with the norm $|\cdot|_p$. For a non-negative integer $l\geq 0$, $H^l(\Omega)$ denotes the l-th order Sobolev space over Ω in the L^2 sense with the norm $\|\cdot\|_l$ We note $H^0=L^2$ and $\|\cdot\|:=|\cdot|_2=\|\cdot\|_0$. For a non-negative integer l and $\sigma\in(0,1)$, $\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)$ denotes the space of Hölder continuous functions over Ω which have the l-th order derivatives of Hölder continuity with exponent σ. $\mathcal{B}^{l+\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ is the space of functions belonging to $\mathcal{B}^{l+\sigma}(\omega)$ for an arbitrary compact set $\omega\subset\Omega$. For a domain $Q_T\subseteq[0,\infty)\times[0,T]$, $\mathcal{B}^{\alpha,\beta}(Q_T)$ denotes the Hölder space of continuous functions with the Hölder exponents α and β with respect to x and t, respectively. For integers k and l, $\mathcal{B}^{k+\alpha,l+\beta}(Q_T)$ denotes the space of the functions satisfying $\partial_x^i u, \partial_t^j u\in\mathcal{B}^{\alpha,\beta}(Q_T)$ for integers $0\leq i\leq k$ and $0\leq j\leq l$. c and C denote several generic positive constants.

2 Time local solution in Lagrangian coordinate

2.1 Problem in Lagrangian coordinate

In the proof of Theorem 1.1, we show the uniform a priori estimate by employing the energy method. For this purpose, it is convenient to adopt the Lagrangian mass coordinate rather than the Eulerian coordinate. The transformation from the Eulerian coordinate (r,t) to the Lagrangian coordinate (x,t) is executed by the transformation

$$x = \int_1^r \xi^{n-1}\rho(\xi,t)\,d\xi, \quad r_x = \frac{v}{r^{n-1}}, \quad r_t = u, \tag{2.1}$$

where $v = 1/\rho$ is the specific volume. Using (2.1), we deduce the system (1.3) to

$$v_t = (r^{n-1}u)_x, \tag{2.2a}$$

$$u_t = \mu r^{n-1}\left(\frac{(r^{n-1}u)_x}{v}\right)_x - r^{n-1}p(v)_x - U_r, \tag{2.2b}$$

where $p(v) = Kv^{-\gamma}$. The initial and boundary conditions for (v,u) are derived from (1.4) and (1.5) as

$$v(x,0) = v_0(x) := 1/\rho_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \lim_{x\to\infty} v_0(x) = v_+ := 1/\rho_+, \tag{2.3}$$

$$u(0,t) = 0. \tag{2.4}$$

Since the spatial variable r in the Eulerian coordinate depends on the spatial and time variables (x,t) in the Lagrangian coordinate, the density $\tilde\rho(r)$ in the stationary solution also depends on (x,t). Consequently, the specific volume $\tilde v(r) := 1/\tilde\rho(r)$ in the stationary solution is also a function of (x,t). In addition, let $r_0(x) := r(x,0)$, $\tilde\rho_0(x) := \tilde\rho(r_0(x))$ and $\tilde v_0(x) := 1/\tilde\rho_0(x)$.

In order to derive the a priori estimates, we employ the function φ defined by

$$\varphi(v,\tilde v) := \int_{\tilde v}^{v} p(\eta)\,d\eta. \tag{2.5}$$

We consider the initial boundary value problem to the system of equations (2.2) with data (2.3) and (2.4). Here, the coefficients in (2.2) is given by the relation (2.1). The stability theorem of the stationary solution $(\tilde v,\tilde u)$ for this problem is stated in the following proposition.

Theorem 2.1. *Suppose that the initial data satisfies*

$$v_0 - \tilde v_0,\ u_0,\ r_0^{n-1}(v_0-\tilde v_0)_x,\ r_0^{n-1}u_{0x} \in L^2(0,\infty)$$

and compatible with the boundary data. In addition, the external force $U_r \in B^1[1,\infty)$ is supposed to satisfy (1.9) *and* (1.11) *for a certain positive constant δ depending only on the initial data. Then the initial boundary problem* (2.2)–(2.4) *has a unique solution (v,u) satisfying*

$$v-\tilde v,\ u,\ r^{n-1}(v-\tilde v)_x,\ r^{n-1}u_x \in C([0,\infty);L^2(0,\infty)), \tag{2.6a}$$

$$r^{-1}u,\ r^{n-1}u_x,\ r^{2n-3}u_{xx} \in L^2(0,\infty;L^2(0,\infty)). \tag{2.6b}$$

Moreover the solution converges to the stationary solution. Precisely, it holds that

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)} |(v(x,t)-\tilde v(r(x,t)),\ u(x,t))| = 0. \tag{2.7}$$

Theorem 2.1 is proved by combining the local existence and the a priori estimate. In order to prove the local existence to the problem (2.2)–(2.4), we solve the approximate problem in bounded domain $(0, m)$ for $m = 1, 2, \ldots$ to (2.2). This procedure is necessary since some coefficients in (2.2) are unbounded over $x \in [0, \infty)$. Following the idea in [1, 6], we employ the "cut-off-function" $\phi_m(x) \in C^3[0, \infty)$ satisfying

$$\phi_m(x) := \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \le x \le \dfrac{m}{2}, \\ 0, & \text{for } m \le x, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$0 \le \phi_m(x) \le 1, \quad |\partial_x^i \phi_m(x)| \le \frac{C}{m^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{for} \quad \frac{m}{2} \le x \le m.$$

The initial data (v_{m0}, u_{m0}) on restricted region $(0, m)$ is derived from (2.3) by using $\phi_m(x)$ as

$$v_{m0}(x) := (v_0(x) - \tilde{v}_0(x))\phi_m(x) + \tilde{v}_0(x), \quad u_{m0}(x) := u_0(x)\phi_m(x).$$

We consider the initial boundary value problem for the unknown function (v_m, u_m) in the bounded domain $(0, m)$:

$$v_{mt} = (r_m^{n-1} u_m)_x, \tag{2.9a}$$

$$u_{mt} = \mu r_m^{n-1} \left(\frac{(r_m^{n-1} u_m)_x}{v_m} \right)_x - r_m^{n-1} p(v_m)_x - U_r, \tag{2.9b}$$

with the initial and boundary conditions:

$$v_m(x, 0) = v_{m0}(x), \quad u_m(x, 0) = u_{m0}(x), \tag{2.10}$$

$$u_m(0, t) = 0, \quad u_m(m, t) = 0. \tag{2.11}$$

In addition, the compatibility conditions at $(x, t) = (0, 0)$ and $(m, 0)$ are supposed to hold. Here, the functions r_{m0} and r_m are given by

$$r_{m0}(x) = \left\{ 1 + n \int_0^x v_{m0}(y)\, dy \right\}^{1/n}, \quad r_m(x, t) = \left\{ 1 + n \int_0^x v_m(y, t)\, dy \right\}^{1/n}. \tag{2.12}$$

The local existence of the solution to the problem (2.9)–(2.11) in bounded domain is proved by the standard iteration method. See [4] for example. For $\bar{d} > \underline{d} > 0$, $D > 0$ and positive integer m, we define the function space as

$$\begin{aligned} X^m_{\underline{d}, \bar{d}, D}(0, T) := \{ (v, u) \mid\ & (v - \tilde{v}, u) \in C^0([0, T]; H^1(0, m)),\ u \in L^2(0, T; H^2(0, m)), \\ & \|(v - \tilde{v}, u)(t)\|_{1, r, m} \le D,\ \underline{d} \le v(x, t) \le \bar{d} \}, \end{aligned}$$

$$\|(v - \tilde{v}, u)(t)\|_{1, r, m} := \|(v - \tilde{v},\ u,\ r^{n-1}(v - \tilde{v})_x,\ r^{n-1} u_x)(t)\|_{L^2(0, m)},$$

$$E_0^m := \|(v_{m0} - \tilde{v}_0, u_{m0})\|^2_{1, r, m}.$$

We see that

$$E_0^m \to E_0 := \|(v_0 - \tilde{v}_0, u_0)\|^2_{1, r, \infty} \quad \text{as} \quad m \to \infty. \tag{2.13}$$

Lemma 2.2. *If the initial data satisfies $E_0^m \le D_0$ and $\underline{d}_0 \le v_{m0}(x) \le \bar{d}_0$ for certain constants $\underline{d}_0, \bar{d}_0$ and D_0, then there exists a positive constant $T = T(\underline{d}_0, \bar{d}_0, D_0)$ such that the problem (2.9)–(2.11) has a unique solution (v_m, u_m) in the space $X^m_{\underline{d}_0/2, 2\bar{d}_0, 2D_0}(0, T)$.*

2.2 Energy estimate

In this subsection, we obtain the H^1 a priori estimate for the solution $(v_m, u_m) \in X^m_{\underline{d},\bar{d},D}(0,T)$ uniformly in m by using the energy method. Then, letting $m \to \infty$, we get the time local solution for the problem (2.2)–(2.4) in unbounded domain $(0,\infty)$. Here and hereafter until the end of this subsection, we omit the subscript m and denote (v_m, u_m) by (v,u) for simplicity. To obtain the basic estimate, we employ the energy form $\mathcal{E}$ defined by

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2}u^2 + \Psi(v,\tilde{v}),$$
$$\Psi(v,\tilde{v}) := p(\tilde{v})(v-\tilde{v}) - \varphi(v,\tilde{v}). \tag{2.14}$$

Since the solution v satisfies

$$\underline{d} \le v(x,t) \le \bar{d} \quad \text{for} \quad (x,t) \in (0,m)\times(0,T), \tag{2.15}$$

the energy form $\mathcal{E}$ is equivalent to $|u|^2 + |v-\tilde{v}|^2$, that is,

$$c_d(|u|^2 + |v-\tilde{v}|^2) \le \mathcal{E} \le C_d(|u|^2 + |v-\tilde{v}|^2),$$

where and hereafter c_d and C_d are positive constants depending on $\underline{d}$ or $\bar{d}$.

In this paper, we omit the details of the proof of the following propositions and lemmas. For details, the readers refer to [12].

Proposition 2.3. *For the solution $(v,u) \in X^m_{\underline{d},\bar{d},D}(0,T)$ to (2.9)–(2.11), it holds that*

$$\int_0^m \mathcal{E}(t)\,dx + \mu\int_0^t\int_0^m (n-1)\frac{v}{r^2}u^2 + \frac{r^{2n-2}}{v}u_x^2\,dxd\tau = \int_0^m \mathcal{E}(0)\,dx. \tag{2.16}$$

Next, we derive the estimate for the first order derivatives. To this end, we employ $\varphi(x,t)$ defined in (2.5).

Proposition 2.4. *For the solution $(v,u) \in X^m_{\underline{d},\bar{d},D}(0,T)$ to (2.9)–(2.11), it holds that*

$$\int_0^m r^{2n-2}\varphi_x^2\,dx + \int_0^t\int_0^m r^{2n-4}\varphi_x^2\,dxd\tau \le C_d^0 E_0^m, \tag{2.17}$$
$$\int_0^m r^{2n-2}(v-\tilde{v})_x^2\,dx \le C_d^0 E_0^m, \tag{2.18}$$
$$\int_0^m r^{2n-2}u_x^2\,dx + \int_0^t\int_0^m r^{4n-6}u_{xx}^2\,dxd\tau \le C_d^0 E_0^m. \tag{2.19}$$

2.3 Local solution in unbounded domain

We return to the initial boundary value problem (2.2)–(2.4) over the unbounded domain $(0,\infty)$ and consider the existence of the solution locally in time. In order to obtain the solution over the unbounded domain $(0,\infty)\times[0,T]$, we define

$$\bar{v}_m(x,t) := (v_m(x,t) - \tilde{v}(r(x,t)))\phi_m(x) + \tilde{v}(r(x,t)), \quad \bar{u}_m(x,t) := u_m(x,t)\phi_m(x)$$

for $(x,t) \in (0,\infty)\times[0,T]$. Notice that for an arbitrary positive integer k satisfying $m \ge 2k$, it holds

$$(\bar{v}_m(x,t), \bar{u}_m(x,t)) = (v_m(x,t), u_m(x,t)) \quad \text{for} \quad (x,t) \in [0,k]\times[0,T].$$

The estimates obtained in the previous subsection and (2.13) immediately give

$$\|(\bar{v}_m - \tilde{v},\, \bar{u})(t)\|^2_{H^1(0,\infty)} + \int_0^t \|(\bar{u}_{mxx},\, \bar{v}_{mt},\, \bar{u}_{mt})(\tau)\|^2_{L^2(0,\infty)}\, d\tau \le C_d^0 E_0(1+T).$$

Thus, we can take the limit $m \to \infty$. Precisely, there exist a function (v,u) and a subsequence of $(\bar{v}_m, \bar{u}_m)$, still denoted by $(\bar{v}_m, \bar{u}_m)$, such that

$$\begin{aligned}
&(\bar{v}_m - \tilde{v}; \bar{u}_m) \rightharpoonup (v - \tilde{v}, u) \quad \text{(weakly-}*\text{)} \ \text{ in } L^\infty(0,T;H^1(0,\infty)),\\
&(\bar{u}_{mxx}, \bar{v}_{mt}, \bar{u}_{mt}) \rightharpoonup (u_{xx}, v_t, u_t) \quad \text{(weakly)} \ \text{ in } L^2(0,T;L^2(0,\infty)),\\
&r_m \to r \quad \text{(strongly)} \ \text{ in } L^2((0,l)\times(0,T)) \text{ for an arbitrary } l>0,
\end{aligned}$$

where r and r_m are defined by (2.1) and (2.12), respectively. Furthermore, we see that (v,u) is a unique solution over $[0,\infty)\times[0,T]$ to the problem (2.2)–(2.4) satisfying

$$v - \tilde{v},\ u,\ r^{n-1}(v-\tilde{v})_x,\ r^{n-1}u_x \in C^0([0,T];L^2(0,\infty)), \tag{2.20a}$$

$$r^{-1}u,\ r^{n-1}u_x,\ r^{n-2}\varphi_x,\ r^{2n-3}u_{xx} \in L^2(0,T;L^2(0,\infty)), \tag{2.20b}$$

where $T = T(\inf_{x\in(0,\infty)} v_0(x),\ E_0)$. Moreover, utilizing (2.13), we see that

$$\int_0^\infty \mathcal{E}(t)\,dx + \int_0^t\!\!\int_0^\infty \frac{v}{r^2}u^2 + \frac{r^{2n-2}}{v}u_x^2\,dxd\tau \le C^0E_0, \tag{2.21a}$$

$$\int_0^\infty r^{2n-2}(v-\tilde{v})_x^2 + r^{2n-2}u_x^2\,dx + \int_0^t\!\!\int_0^\infty r^{2n-4}\varphi_x^2 + r^{4n-6}u_{xx}^2\,dxd\tau \le C_d^0E_0, \tag{2.21b}$$

where C^0 is a positive constant depending only on the initial data (2.3) and C_d^0 is a positive constant depending only on $\underline{d}, \bar{d}$ and the initial data (2.3). Since these facts are proved by the standard discussions as in [6], we omit the details.

3 Large time behavior of solutions in Lagrangian coordinate

3.1 Pointwise estimate of the specific volume

This subsection is devoted to showing the pointwise positive bounds of the specific volume $v(x,t)$ uniformly in time. Combining this pointwise estimate with (2.21b) yields the H^1 estimate uniformly in time. It immediately gives the time global solution to the initial boundary value problem (2.2)–(2.4) by the standard continuation argument with the local existence proved in Subsection 2.3.

Proposition 3.1. *Suppose that (v,u) is the solution to the problem (2.2)–(2.4) in the space $X^\infty_{\underline{d},\bar{d},D}(0,T)$. Moreover let the condition (1.11) holds. Then the specific volume v satisfies*

$$\underline{v} \le v(x,t) \le \bar{v} \quad \textit{for} \quad x \ge 0 \textit{ and } t \in [0,T], \tag{3.1}$$

where $\underline{v}$ and $\bar{v}$ are positive constants depending only on the initial data.

The proof of Proposition 3.1 is divided into the several lemmas.

Lemma 3.2. *Suppose that the same assumptions as in Proposition 3.1 hold. Let ε be a positive constant. Then, there exist positive constants c_ε and C_ε depending only on ε and the initial data such that*

$$0 < c_\varepsilon \le \int_a^{a+\varepsilon} v(x,t)\,dx \le C_\varepsilon \tag{3.2}$$

for $t \in [0,T]$ and an arbitrary $a \ge 0$.

To obtain the pointwise estimate of the specific volume $v(x,t)$, we use the representation formula for $v(x,t)$. To derive this formula, we employ the "cut-off-function", which is defined by

$$\eta(x) := \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \le x \le k\varepsilon, \\ k+1-\dfrac{x}{\varepsilon}, & \text{for } k\varepsilon \le x \le (k+1)\varepsilon, \\ 0, & \text{for } (k+1)\varepsilon \le x \end{cases} \tag{3.3}$$

for $\varepsilon > 0$ and a positive integer k.

Lemma 3.3. *Suppose that the same assumptions as in Proposition 3.1 hold. Then the specific volume $v(x,t)$ is given by the formula*

$$v(x,t)^\gamma = \frac{v_0(x)^\gamma + \frac{K\gamma}{\mu}\int_0^t A_\varepsilon(x,\tau)B_\varepsilon(x,\tau)d\tau}{A_\varepsilon(x,t)B_\varepsilon(x,t)}, \tag{3.4}$$

for $x \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon)$ and $t \in [0,T]$, where

$$A_\varepsilon(x,t) := \exp\left(\frac{K\gamma}{\mu\varepsilon}\int_0^t\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} v^{-\gamma}\,dxd\tau + \frac{\gamma}{\mu}\int_0^t\int_x^\infty \frac{U_r}{r^{n-1}}\eta\,dxd\tau\right), \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x,t) := \exp\Bigg(\frac{\gamma}{\mu}\int_x^\infty\Big(\frac{u}{r^{n-1}} - \frac{u_0}{r_0^{n-1}}\Big)\eta\,dx + \frac{\gamma}{\mu}\int_0^t\int_x^\infty (n-1)\frac{u^2}{r^n}\eta\,dxd\tau \\ - \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\log\frac{v}{v_0}\,dx\Bigg). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lemma 3.4. *Suppose that the same assumptions as in Proposition 3.1 hold. Then we have*

$$e^{(c_\varepsilon - \bar{c}\delta\varepsilon)(t-\tau)} \le \frac{A_\varepsilon(x,t)}{A_\varepsilon(x,\tau)}, \quad 0 < c_\varepsilon \le B_\varepsilon(x,t) \le C_\varepsilon \tag{3.7}$$

for $x \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon)$ and $0 \le \tau \le t \le T$, where c_ε, C_ε and $\bar{c}$ are positive constants independent of T, t, τ and k.

Combining the estimates in previous lemmas, we complete the proof of Proposition 3.1. The combination of H^1-estimate of (v,u) obtained in the previous section and Proposition 3.1 gives the uniform H^1-estimate with respect to $\bar{d}$ and $\underline{d}$. Namely, it holds that

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (v-\tilde{v})^2 + u^2 + r^{2n-2}(v-\tilde{v})_x^2 + r^{2n-2}u_x^2\,dx \\ + \int_0^t\int_0^\infty \frac{u^2}{r^2} + r^{2n-2}u_x^2 + r^{2n-4}\varphi_x^2 + r^{4n-6}u_{xx}^2\,dxd\tau \le CE_0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

where C is a positive constant depending only on the initial data. This uniform estimate immediately gives the time global solution to the problem (2.2)–(2.4) by the standard continuation argument.

3.2 Asymptotic behavior

By using the estimate (3.8), we obtain the asymptotic stability of the stationary solution $(\tilde{v},\tilde{u})$ in the Lagrangian coordinate. Precisely, we show the convergence (2.7).

Proposition 3.5. *The convergence (2.7) holds under the same assumptions as in Theorem 2.1.*

The Hölder continuity of the solution is not necessary in this Proposition. It is necessary in order to ensure the validity of the translation of the stability theorem in the Lagrangian coordinate into that in the Eulerian coordinate. By virtue of this translation, Theorem 1.1 immediately follows from Theorem 2.1.

The proof of the next lemma is obtained by applying the Schauder theory for the parabolic equations. Here, we borrows several ideas in [6], [7] and [8]. See [2] for the general theory on this subject.

Lemma 3.6. *In addition to the assumptions in Theorem 2.1, suppose that the initial data satisfies*

$$\rho_0 \in \mathcal{B}^{1+\sigma}_{\mathrm{loc}}[0,\infty), \quad u_0 \in \mathcal{B}^{2+\sigma}_{\mathrm{loc}}[0,\infty), \tag{3.9}$$

for a certain $\sigma \in (0,1)$. *Then the solution* (v,u) *to the problem* (2.2)–(2.4) *satisfies*

$$v \in \mathcal{B}^{1+\sigma,\,1+\sigma/2}_{\mathrm{loc}}([0,\infty)\times[0,T]), \quad u \in \mathcal{B}^{2+\sigma,\,1+\sigma/2}_{\mathrm{loc}}([0,\infty)\times[0,T]) \tag{3.10}$$

for an arbitrary $T > 0$.

References

[1] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, North Holland, 1990.

[2] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, 1964.

[3] K. Higuchi, *Global existence of the spherically symmetric solution and the stability of the stationary solution to compressible Navier-Stokes equation*, Master thesis of Kanazawa Univ., (1992), Japanese.

[4] N. Itaya, *On the Cauchy problem for the system of fundamental equations describing the movement of compressible viscous fluid*, Kodai Math. Sem. Rep., 23 (1971), pp. 60–120.

[5] N. Itaya, *On a certain temporally global solution, spherically symmetric, for the compressible NS equations*, The Jinbun ronshu of Kobe Univ. Commun., 21 (1985), pp. 1–10, Japanese.

[6] S. Jiang, *Global spherically symmetric solutions to the equations of a viscous polytropic ideal gas in an exterior domain*, Commun. Math. Phys., 178 (1996), pp. 339–374.

[7] S. Kawashima, S. Nishibata, and P. Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Commun. Math. Phys., 240 (2003), pp. 483–500.

[8] S. Kawashima and T. Nishida, *Global solutions to the initial value problem for the equations on one-dimensional motion of viscous polytropic gases*, J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), pp. 825–837.

[9] A. Matsumura, *Large-time behavior of the spherically symmetric solutions of an isothermal model of compressible viscous gas*, Trans. theorem and statist. phys., 21 (1992), pp. 579–592.

[10] A. Matsumura and T. Nishida, *Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Commun. Math. Phys., 89 (1983), pp. 445–464.

[11] A. Matsumura and K. Nishihara, *Large-time behaviors of solutions to an inflow problem in the half space for a one-dimensional system of compressible viscous gas*, Commun. Math. Phys., 222 (2001), pp. 449–474.

[12] T. Nakamura, S. Nishibata and S. Yanagi, *Large-time behavior of spherically symmetric solutions to an isentropic model of compressible viscous fluid in a field of external forces*, to appear.

[13] S. Yanagi, *Asymptotic stability of the spherically symmetric solutions for a viscous polytropic gas in a field of external forces*, Trans. theorem and statist. phys., 29 (2000), pp. 333–353.

Stefan 問題と Navier-Stokes 方程式のシステムの可解性について

深尾 武史 (千葉大・教育)

E-mail:fukao@faculty.chiba-u.jp

概 要

本研究では, 移流項を含む退化放物型方程式を非柱状領域上で考察する. 固体液体相転移問題を記述する Stefan 問題は上記タイプの方程式とみなすことが出来るのだが, 移流項に関して, 特に Stefan 問題の弱解によって決定されるいわゆる液体領域内の移流を Navier-Stokes 方程式の解により, それ以外, すなわち固体領域内の移流を条件として与えることで温度に関する方程式と速度に対する方程式のシステムが非柱状領域上で考察できる. ここではそのシステムの初期値境界値問題に対して弱解の存在定理を報告する.

0 導入

Stefan 問題は固体液体相転移現象を記述している問題としてこれまでに多くの研究者により研究がなされてきた. Stefan 問題には大きく, 相転移現象における相の境界を意味する「自由境界」と呼ばれる曲面の滑らかさをも解として取り扱う強解からのアプローチと, 与えられた条件に関して可解性が議論できる最も弱いクラスを求め問題を取り扱う弱解からのアプローチがある. 例えば Visintin [19] を参照. 後者の研究において, 特にモデリングの立場から大きな前進のあった研究として, DiBenedetto, O'Leary [4] がある. それまでの Stefan 問題では最も単純化されたタイプの非線形熱方程式を解析することを主にしていたのに対し, 彼らは液体, 固体領域の本質的な違いの一つである移流の存在に注目した. 液体領域では Stokes 方程式で与えられる移流項を含んだ方程式を構成し, そのシステムに対する弱解の存在を証明した. また, Rodrigues [16] により, 与えられた移流項を含む様々なタイプの Stefan 問題の可解性が議論されている. 近年, 深尾, 剣持, Pawłow [8] では, 領域の変形と移流を十分滑らかに与えて弱解の存在と一意性が取り扱われた. さらに移流の滑らかさの仮定を弱くしたときの弱解の存在と有界性の議論が深尾, 剣持 [6] で報告されている. また Casella, Giangi [3] では液体領域内での移流の決定に Navier-Stokes 方程式を制限付きで考察し, その解による移流項を含む Stefan 問題の弱解の存在が議論された. その制限は端的に言って、領域すべてをいわゆる液体領域と見て, Navier-Stokes 方程式を考察している. ただし, 温度に依存して摂動項の係数を劇的に変化させ, 数値計算的な意味でいわゆる固体領域では, 液体領域に比べ移流の数値が小さくなる様な設定であった. 実際彼らの論文では 2 次元の数値計算結果も報告されている. 一般に Stefan 問題の弱解からのアプローチでは, 自由境界の滑らかさが議論できないため, 流体領域を開集合として決定することができない. そのため [3] では前述の様な制限を加えた問題が考察されていた. 我々は, ある種の近似解を定義し, その極限でオリジナルの問題の弱解を定義することで, この制限の入れ方とは異なる手法で Stefan 問題と Navier-Stokes 方程式のシステムを考察する. ここでは近似解の存在定理とオリジナルの問題の弱解の存在定理を報告する.

1 Stefan 問題と Navier-Stokes 方程式

$0 < T < +\infty$, $\Omega_m(t) \subset \mathbf{R}^3$ を時間に依存して変形する有界領域でその境界 $\Gamma_m(t) := \partial\Omega_m(t)$ は十分滑らかとする. 領域の変形は次の意味で時間に関して十分滑らかに与えられていると仮定する.

(A1) ある有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ が存在し, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は十分滑らかで, 任意の時間 $t \in [0,T]$ に対して $\Omega_m(t) \subset \Omega$. さらにある変換 $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^3(\overline{Q}) := C^3(\overline{Q})^3$ (ただし $Q := (0,T) \times \Omega$) が存在し $\mathbf{y}(t,\cdot) := (y_1(t,\cdot), y_2(t,\cdot), y_3(t,\cdot)) : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ は任意の時間 $t \in [0,T]$ に対して C^3-微分同相写像で $\mathbf{y}(t, \overline{\Omega_m(t)}) = \overline{\Omega_{m0}} := \overline{\Omega_m(0)}$ を満たし, ゆえに $\mathbf{y}(0,\cdot)$ は $\overline{\Omega_{m0}}$ 上, 恒等変換である.

今, 非減少で Lipschitz 連続な関数 $\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を次の様に定義する.

$$\beta(r) := \begin{cases} k_s r & \text{if } r < 0, \\ 0 & \text{if } 0 \le r \le L \\ k_\ell (r-L) & \text{if } r > L, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, k_s, k_ℓ そして L は正定数で, k_s と k_ℓ はそれぞれ固体, 液体領域の熱伝導率を表す定数である. β は区間 $(0,L)$ で定数であるので $d\beta/dr = 0$ が分かる. このとき, 移流項を含む Stefan 問題は次の様な非柱状領域内での退化放物型方程式の初期値境界値問題で記述される:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \Delta\beta(u) = f \quad \text{in } Q_m := \bigcup_{t \in (0,T)} \{t\} \times \Omega_m(t), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial \boldsymbol{\nu}} + n_0 \beta(u) = q \quad \text{on } \Sigma_m := \bigcup_{t \in (0,T)} \{t\} \times \Sigma_m(t), \tag{1.3}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega_{m0}, \tag{1.4}$$

先の考察より形式的に $u \in (0,L)$ なる範囲では $-\Delta\beta(u) = 0$ となり退化型になる. また, f, q, u_0 は与えられた関数で $\boldsymbol{\nu}$ は $\Gamma_m(t)$ 上単位法線ベクトルである. n_0 は正定数. 今, (1.2) の移流ベクトル $\mathbf{v}$ を以下の様に決定する. $Q_s(u) := \{(t,x) \in Q_m; u(t,x) < L/2\}$ なるいわゆる固体領域ではあるデザインされたベクトル $\mathbf{v}_D$ を用いて,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D \quad \text{in } Q_s(u), \tag{1.5}$$

としよう. 一方, $Q_\ell(u) := \{(t,x) \in Q_m; u(t,x) > L/2\}$ なるいわゆる液体領域では次の様な Navier-Stokes 方程式の弱解で構成する.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nu_\ell \Delta \mathbf{v} + \nabla p_\ell = \boldsymbol{g}_\ell(\beta(u)) \quad \text{in } Q_\ell(u), \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{in } Q_\ell(u), \tag{1.7}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D \quad \text{on } \Sigma_m, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{on } \Omega_{m0}, \tag{1.9}$$

ここで, ν_ℓ は正定数, p_ℓ は領域 $Q_\ell(u)$ 内の圧力, $\boldsymbol{g} := (g_1, g_2, g_3) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ は与えられた関数で一般に非線形である. $Q_s(u)$, $Q_\ell(u)$ はそれぞれ固体液体相転移問題における固体, 液体に相当する領域であり, (1.5) または (1.6), と (1.7) はそれぞれの領域での運動方程式を意味することになる. さらにデザインされたベクトル $\mathbf{v}_D := (v_{D1}, v_{D2}, v_{D3})$ は次の仮定で与えられる.

(A2) $\mathbf{v}_D \in \mathbf{C}^2(\overline{Q})$ でさらに,

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_D(t,\cdot) = 0 \quad \text{in } \Omega_m(t) \quad \text{for all } t \in (0,T), \tag{1.10}$$

$$\mathbf{v}_D \cdot \boldsymbol{\nu} = v_{\Sigma_m} \quad \text{on } \Sigma_m, \tag{1.11}$$

ここで, v_{Σ_m} は $\Gamma_m(t)$ の法線方向の速度で, (A1) の仮定で登場した変換 $\mathbf{y}$ とその逆像 $\mathbf{x}$ を用いて $v_{\Sigma_m} := \partial\mathbf{x}/\partial t(\cdot, \mathbf{y}(\cdot,\cdot)) \cdot \boldsymbol{\nu}$ で定義される.

このシステム (CZ):=(1.1)-(1.9) に対し, 次節で近似解を定義しよう.

2 近似解の定義と主要定理

まず最初に関数空間の準備をする．

$$H := L^2(\Omega), \quad Y := L^4(\Omega), \quad V := H^1(\Omega)\ (:= W^{1,2}(\Omega)), \quad X := W^{1,4}(\Omega)$$

で表記し，さらに Y^*, V^* そして X^* を Y, V そして X の共役空間とする．また，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{Y^*,Y}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*,V}$ そして $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*,X}$ によって Y^* と Y, V^* と V そして X^* と X の共役対としておく．特に H は内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を備えた Hilbert 空間となり，次の稠密で連続的な埋め込みが成立している:

$$X \subset V \hookrightarrow Y \subset H \subset Y^* \hookrightarrow V^* \subset X^*,$$

ここで，特に $\hookrightarrow$ は埋め込みがコンパクトであることを意味する．次に，ベクトル値関数空間として

$$\mathcal{D}_\sigma(\Omega) := \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega); \mathrm{div}\mathbf{z} = 0 \text{ in } \Omega\},$$

$$\mathbf{H} := \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega), \quad \mathbf{Y} := \mathbf{L}^4_\sigma(\Omega), \quad \mathbf{V} := \mathbf{H}^1_\sigma(\Omega), \quad \mathbf{X} := \mathbf{W}^{1,4}_\sigma(\Omega),$$

ここで，$\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\mathbf{L}^4_\sigma(\Omega)$, $\mathbf{H}^1_\sigma(\Omega)$ そして $\mathbf{W}^{1,4}_\sigma(\Omega)$ は $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ のそれぞれ $\mathbf{L}^2(\Omega) := H^3$, $\mathbf{L}^4(\Omega) := Y^3$, $\mathbf{H}^1(\Omega) := V^3$ そして $\mathbf{W}^{1,4}(\Omega) := X^3$ の位相に関する閉包である．また，$\mathbf{Y}^*, \mathbf{V}^*$ そして $\mathbf{X}^*$ を $\mathbf{Y}, \mathbf{V}$ そして $\mathbf{X}$ の共役空間とし，共役対は $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{Y}^*,\mathbf{Y}}$ の様にする．もちろん $\mathbf{H}$ は内積 $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ を備えた Hilbert 空間で，スカラー値関数空間と同様に以下の埋め込みが成立している:

$$\mathbf{X} \subset \mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{Y} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{Y}^* \hookrightarrow \mathbf{V}^* \subset \mathbf{X}^*.$$

今，(CZ) の弱解を考える．Stefan 問題の部分である (1.2)-(1.4) は弱形式の意味で捉えることができ，例えば論文 [8] では，移流 $\mathbf{v}$ が十分滑らかに与えられたという仮定の下で可解性が議論された．実際には (A1) と同様な仮定と共に弱解の存在と一意性の結果が得られている．また，論文 [6] では，与えられた移流が十分に滑らかでない場合についても弱解の有界性に関する補題と共に弱解の存在定理が報告された．領域が時間に依存しない場合は Rodrigues らが論文 [16] や [17] などで同様の問題に対して適切性を報告している．Navier-Stokes 方程式に対する弱解の存在定理についても少し補足しておこう．今，問題 (1.6)-(1.9) で Q_m 上 $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_D$ そして Ω_{m0} 上とおくと問題を斉次 Dirichlet 境界値問題に直すことができる．また関数 $\mathbf{w}$ と $\mathbf{w}_0$ を時間依存領域の外側で 0 拡張すれば，すべての $t \in [0,T]$ に対して，$\mathbf{w}(t) \in \mathbf{H}$ そして $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}$ の様に見なすことができ，(CZ) における Navier-Stokes 方程式は次の様な弱形式で捉え直すことができる:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (\boldsymbol{\eta}', \mathbf{w})_{\mathbf{H}} dt + \int_0^T a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}) dt - \int_0^T b(t; \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}) dt - \int_0^T c(t; \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}) dt \\
= \int_0^T (\boldsymbol{g}(\beta(u)), \boldsymbol{\eta})_{\mathbf{H}} dt + (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\eta}(0))_{\mathbf{H}} \quad \text{for all } \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{W}(u),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ただし，制限 $\mathbf{w} = 0$ a.e. on $Q_s(u)$ を忘れてはならない．そこで，

$$\mathbf{W}(u) := \left\{ \boldsymbol{\eta} \in L^4(0,T;\mathbf{X});\ \begin{array}{l} \boldsymbol{\eta}' \in L^2(0,T;\mathbf{H}), \quad \boldsymbol{\eta}(T,\cdot) = 0 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \boldsymbol{\eta} = 0 \ \text{ a.e. on } Q \setminus Q_\ell(u) \end{array} \right\};$$

また，$\boldsymbol{\eta}' := \partial\boldsymbol{\eta}/\partial t$ である．ここでテスト関数のクラスが関数 u に依存していることに注意する．同様に Q_i も $Q_i(u) (i = \ell,\ s)$ と表記しておく．さらに任意の $t \in [0,T]$ に対して，$a(\cdot,\cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$, $b(t;\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{Y} \times \mathbf{V} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}$ そして $c(t;\cdot,\cdot) : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ は

$$a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) := \nu_\ell \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \nabla z_i \cdot \nabla \eta_i dx \quad \text{for all } \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V},$$

$$b(t;\mathbf{z},\boldsymbol{\eta},\bar{\mathbf{z}}) := \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega ((\mathbf{z}+\mathbf{v}_D(t))\cdot\nabla\eta_i)\bar{z}_i dx \quad \text{for all } \mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}\in\mathbf{Y},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{V},$$

$$c(t;\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) := \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\mathbf{z}\cdot\nabla v_{Di}(t))\eta_i dx \quad \text{for all } \mathbf{z},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{H}.$$

また, $\boldsymbol{g}(\beta(u))\in L^2(0,T;\mathbf{H})$ は $\boldsymbol{g}\Big(\beta(u(t))\Big) := P_L\Big[\boldsymbol{g}_L\Big(\beta(u(t))\Big)\Big]$ と定義する. ここで,

$$\boldsymbol{g}_L(\beta(u)) := \begin{cases} \boldsymbol{g}_\ell(\beta(u)) - \dfrac{\partial\mathbf{v}_D}{\partial t} - (\mathbf{v}_D\cdot\nabla)\mathbf{v}_D + \nu_\ell\Delta\mathbf{v}_D & \text{on } Q_m, \\ 0 \quad \text{otherwise,} & \end{cases}$$

でさらに $P_L : \mathbf{L}^2(\Omega)\to\mathbf{H}$ は Leray 射影.

それぞれの弱形式のシステムを (CZ) の弱形式と捉えたとき, 次の様な数学的な難しさが残っている. 一般に Stefan 問題の弱解からのアプローチでは自由境界のレギュラリティーを議論することはできない. それはつまり, Navier-Stokes 方程式を考える液体領域がそもそも開集合を構成するかどうかも分からないという幾何学的な問題が残っているということである. それは弱形式に書き換えられたとき $W(u)$ の構成に集約されており, そこで液体領域 $Q_\ell(u)$ と固体領域 $Q_s(u)$ を以下の様に近似する.

$$Q_{\ell,\varepsilon}(u) := \left\{(t,x)\in Q_m; (\rho_\varepsilon * u)(t,x) > \frac{L}{2}\right\}, \quad Q_{s,\varepsilon}(u) := \left\{(t,x)\in Q_m; (\rho_\varepsilon * u)(t,x) < \frac{L}{2}\right\},$$

ここで ρ_ε は空間変数 x に関する ε-mollifier でこれによりテスト関数のクラス $\mathbf{W}(u)$ を

$$\mathbf{W}_\varepsilon(u) := \left\{\boldsymbol{\eta}\in L^4(0,T;\mathbf{X});\ \begin{array}{l} \boldsymbol{\eta}'\in L^2(0,T;\mathbf{H}),\ \ \boldsymbol{\eta}(T,\cdot)=0 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \boldsymbol{\eta}=0 \text{ a.e. on } Q\setminus Q_{\ell,\varepsilon}(u) \end{array}\right\},$$

と書き直したものを用いることで近似問題が考えられる. つまり次の様に近似解を定義し, まずは近似解を見つける問題を考える.

定義 2.1. 任意に固定された $\varepsilon>0$ に対して, 関数の対 $\{u_\varepsilon,\mathbf{w}_\varepsilon\}$ で $u_\varepsilon\in L^\infty(Q_m)$ と $\mathbf{w}_\varepsilon\in\mathbf{L}^2(Q)$ なるものが (D1)-(D3) を満たすとき, 近似問題 $(\mathrm{CZ})_\varepsilon$ の弱解と呼ぶ:

(D1) $\beta(u_\varepsilon)\in L^\infty(Q_m)$, $\int_0^T |\beta(u_\varepsilon(t))|^2_{H^1(\Omega_m(t))}dt < +\infty$ を満たし

$$t\mapsto \int_{\Omega_m(t)} u_\varepsilon(t,x)\xi(x)dx \quad \text{は任意の } \xi\in H \text{ に対して } [0,T] \text{ 上連続.}$$

(D2) $\mathbf{w}_\varepsilon\in L^\infty(0,T;\mathbf{H})\cap L^2(0,T;\mathbf{V})$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ は $[0,T]$ から $\mathbf{H}$ への関数と見て弱連続で, さらに $\mathbf{w}_\varepsilon=0$ a.e. on $Q_{s,\varepsilon}(u_\varepsilon)$.

(D3) u_ε と $\mathbf{w}_\varepsilon$ は次の弱形式を満たす.

$$-\int_{Q_m} u_\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial t}dxdt - \int_{Q_m}(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla\eta)u_\varepsilon dxdt + \int_{Q_m}\nabla\beta(u_\varepsilon)\cdot\nabla\eta dxdt + n_0\int_{\Sigma_m}\beta(u_\varepsilon)\eta d\Gamma_m(t)dt$$
$$= \int_{Q_m} f\eta dxdt + \int_{\Sigma_m} q\eta d\Gamma_m(t)dt + \int_{\Omega_{m0}} u_0\eta(0)dx \quad {}^\forall\eta\in W := \{\eta\in H^1(Q_m);\eta(T)=0\}, \tag{2.2}$$

ここで, $\mathbf{v}_\varepsilon := \mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{v}_D$;

$$-\int_0^T (\boldsymbol{\eta}', \mathbf{w}_\varepsilon)_{\mathbf{H}} dt + \int_0^T a(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}) dt - \int_0^T b(t; \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}_\varepsilon) dt - \int_0^T c(t; \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}) dt$$
$$= \int_0^T (g(\beta(u_\varepsilon)), \boldsymbol{\eta})_{\mathbf{H}} dt + (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\eta}(0))_{\mathbf{H}} \quad {}^\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{W}_\varepsilon(u_\varepsilon). \tag{2.3}$$

まずは近似問題の弱解の存在に関する定理が得られる.

定理 2.1. (A1) と (A2) を仮定し, さらに $f \in L^\infty(Q_m)$, $q \in L^\infty(\Sigma_m)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega_{m0})$ そして $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega_{m0})$ で $\mathrm{div}\mathbf{v}_0 = 0$ in Ω_{m0} とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して少なくとも一つの $(\mathrm{CZ})_\varepsilon$ の近似解 $\{u_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon\}$ が存在し $\varepsilon \in (0,1]$ に対して

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(Q_m)} + \int_0^T |\nabla\beta(u_\varepsilon(t))|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega_m(t))} dt \le R_0,$$

$$|\mathbf{w}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} + |\mathbf{w}_\varepsilon|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \le R_1,$$

を満たす. ここで, R_0 と R_1 は $|u_0|_{L^\infty(\Omega_{m0})}$, $|f|_{L^\infty(Q_m)}$, $|g|_{L^\infty(\Sigma_m)}$ と $|\mathbf{v}_D|_{\mathbf{C}^2(\overline{Q})}$ に依存する正定数で $\varepsilon \in (0,1]$ には依存しない.

この近似問題に対しては処罰法が有効で, また $L_{\mathbf{w}_0}$-擬単調作用素などの理論により (2.3) の近似解を見つけることができる. また, 深尾, 剣持 [6] で得られた弱解の有界性の定理と解の弱連続依存性がその証明には重要である (参照 [7], [12]). ここでは, $L_{\mathbf{w}_0}$-擬単調作用素に関連したいくつかの補題を紹介する. $\mathbf{K}(t) := \{\mathbf{z} \in \mathbf{X}; \mathbf{z} = 0 \text{ on } \Omega \setminus \Omega_m(t)\}$ としさらに,

$$\mathcal{K} := \left\{\mathbf{w} \in L^4(0,T;\mathbf{X}); \mathbf{w}(t) \in \mathbf{K}(t) \text{ a.e. } t \in [0,T]\right\}, \quad \mathcal{K}_0 := \left\{\mathbf{w} \in \mathcal{K}; \mathbf{w}' \in L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)\right\}.$$

作用素 $A : D(A) = L^2(0,T;\mathbf{V}) \to L^2(0,T;\mathbf{V}^*)$ を次の様に定義する

$$\begin{aligned}\langle\langle A\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}\rangle\rangle_{\mathbf{V}^*,\mathbf{V}} & \quad \left(= \langle A\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}\rangle_{L^2(0,T;\mathbf{V})^*, L^2(0,T;\mathbf{V})}\right) \\ := & \int_0^T a(\mathbf{w}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) dt \quad \text{for all } \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta} \in L^2(0,T;\mathbf{V}).\end{aligned}$$

さらに任意の $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{K}(0)$ に対して非線形多価作用素 $L_{\mathbf{w}_0} : \mathcal{K} \to L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)$ を次の様に定義する. 任意の $\mathbf{w} \in \mathcal{K}$ に対して $\mathbf{w}^* \in L_{\mathbf{w}_0}\mathbf{w}$ であるとは以下を意味する:

$$\langle\langle \mathbf{w}^* - \boldsymbol{\eta}', \mathbf{w} - \boldsymbol{\eta}\rangle\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} \ge -\frac{1}{2}|\mathbf{w}_0 - \boldsymbol{\eta}(t)|^2_{\mathbf{H}} \quad \text{for all } \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}_0.$$

このとき以下の補題が成立する.

補題 2.1. (i)$L_{\mathbf{w}_0} : L^4(0,T;\mathbf{X}) \to L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)$ は極大単調作用素で $D(L_{\mathbf{w}_0}) = \mathcal{K} \cap C([0,T];\mathbf{H})$. さらに $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_0$ ならば $\mathbf{w}' \in L_{\mathbf{w}_0}\mathbf{w}$ で $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$.
(ii) もし $\mathbf{w} \in D(L_{\mathbf{w}_0})$ で $\mathbf{w}^* \in L_{\mathbf{w}_0}\mathbf{w}$ ならば, またそのときに限り $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_1$, $\mathbf{w}^* \in L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)$ で

$$-\langle\langle \boldsymbol{\eta}', \mathbf{w}\rangle\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} = \langle\langle \mathbf{w}^*, \boldsymbol{\eta}\rangle\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} + (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\eta}(0))_{\mathbf{H}} \quad \textit{for all } \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}_0 \textit{ with } \boldsymbol{\eta}(T) = 0,$$

を満たす. ここで $\mathcal{K}_1$ は $\mathbf{w} \in \mathcal{K}$ の関数である列 $\{\mathbf{w}_n\} \subset \mathcal{K}_0$ とある正定数 R_2 が存在して $\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}$ in $L^4(0,T;\mathbf{X})$ でさらに

$$|\langle\langle \mathbf{w}_n', \boldsymbol{\eta}\rangle\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}}| \le R_2|\boldsymbol{\eta}|_{L^4(0,T;\mathbf{X})} \quad \textit{for all } \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K} \textit{ and } n \in \mathbf{N}.$$

(iii)$L_{\mathbf{w}_0}+A : D(L_{\mathbf{w}_0}) \to L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)$ は極大単調作用素. さらに任意の $t \in [0,T]$ と $\mathbf{w} \in D(L_{\mathbf{w}_0})$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{w}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + 2R_3 \int_0^t |\mathbf{w}(\tau)|_{\mathbf{V}}^2 d\tau \\
\leq\ & |\mathbf{w}_0|_{\mathbf{H}}^2 + 2\int_0^t \langle \boldsymbol{\omega}^*(\tau), \mathbf{w}(\tau)\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} d\tau \quad \textit{for all } \boldsymbol{\omega}^* \in L_{\mathbf{w}_0}\mathbf{w} + A\mathbf{w},
\end{aligned}
$$

R_3 は正定数.

$\delta > 0$ とする. いま, 作用素 A と同様に B, C そして F を $L^4(0,T;\mathbf{X})$ から $L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)$ への双対写像とし (2.3) を次のように書き直す.

$$
L_{\mathbf{w}_0}\mathbf{w} + A\mathbf{w} + B\mathbf{w} + \delta F\mathbf{w} + C\mathbf{w} + \frac{1}{\delta}P(\beta(u))\mathbf{w} \ni \tilde{g}(\beta(u)) \quad \text{in } L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*),
$$

ここで $1/\delta P(\beta(u))\mathbf{w}$ は処罰項. さらに以下の補題を用いることで近似解の存在が証明できる. 交差項の処理は時間離散化と遅れを利用したアイデアが有効である (参照 [7]).

補題 2.2. 任意の $\delta > 0$ に対して, 作用素 $B_\delta := B + \delta F + C + 1/\delta P(\beta(u))$ は $(L_{\mathbf{w}_0} + A)$-擬単調作用素である, すなわち, 任意の $\mathbf{w}_n \in D(L_{\mathbf{w}_0} + A) = D(L_{\mathbf{w}_0})$ で以下を満たすものを用意する: $\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}$ *weakly in* $L^4(0,T;\mathbf{X})$ でさらに主要部 $\{(L_{\mathbf{w}_0} + A)^\circ \mathbf{w}_n\}$ は $L^{4/3}(0,T;\mathbf{X}^*)$ で有界で

$$
\limsup_{n\to+\infty} \langle\!\langle B_\delta \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}\rangle\!\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} \leq 0.
$$

このとき, $\mathbf{w} \in D(B_\delta) = L^4(0,T;\mathbf{X})$ で

$$
\liminf_{n\to+\infty} \langle\!\langle B_\delta \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n - \boldsymbol{\eta}\rangle\!\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} \geq \langle\!\langle B_{\delta,}\mathbf{w}, \mathbf{w} - \boldsymbol{\eta}\rangle\!\rangle_{\mathbf{X}^*,\mathbf{X}} \quad \textit{for all } \boldsymbol{\eta} \in D(L_{\mathbf{w}_0}).
$$

オリジナルの問題 (CZ) に対しては近似解 $\{u_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon\}$ の極限として次の定理で構成することができる.

定理 2.2. 定理 2.1 と同様な仮定の下, $\{u_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を定理 2.1 で構成した近似解とする. このときある部分列 $\{\varepsilon_n\}$ が $\varepsilon_n \to 0$ (as $n \to +\infty$) を満たす様に存在し

$$
u_{\varepsilon_n} \to u \quad \textit{weakly in } L^2(Q_m),
$$

$$
\mathbf{w}_{\varepsilon_n} \to \mathbf{w} \quad \textit{weakly in } L^2(0,T;\mathbf{V}) \quad \textit{as } n \to +\infty,
$$

さらに, u は (1.2)-(1.4) を $\mathbf{v} := \mathbf{w} + \mathbf{v}_D$ と共に (2.2) タイプの弱形式の意味で満たす.

定理 2.2 の証明には論文 [5] で用いられたコンパクト柱状領域の方法が有効であり, さらに定理 2.1 の一様評価から得られるある種の Aubin[1] タイプのコンパクト性が重要である. 詳しくは深尾, 剣持 [7] を参照.

参考文献

[1] J. P. Aubin, Un théorème de compacité. C. R. Acad. Sci. Paris, **256**(1963), 5042–5044.

[2] J. R. Cannon, E. DiBenedetto and G. H. Knightly, The bidimensional Stefan problem with convection: The time dependent case, Comm. Partial Differential Equations, **14**(1983), 1549–1604.

[3] E. Casella and M. Giangi, An analytical and numerical study of the Stefan problem with convection by means of an enthalpy method, Math. Methods Appl. Sci., **24**(2001), 623–639.

[4] E. DiBenedetto and M. O'Leary, Three-dimensional conduction-convection problems with change of phase, Arch. Ration. Mech. Anal., **123**(1993), 99–116.

[5] H. Fujita and N. Sauer, On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math., **17**(1970), 403–420.

[6] T. Fukao and N. Kenmochi, Degenerate parabolic equations with convection in non-cylindrical domain, Tech. Rep. Math. Sci., Chiba Univ., No. 4, **19**(2003), 1–12.

[7] T. Fukao and N. Kenmochi Stefan problems with convection governed by Navier-Stokes equations, Tech. Rep. Math. Sci., Chiba Univ., No. 5, **19**(2003), 1–20.

[8] T. Fukao, N. Kenmochi and I. Pawłow, Stefan problems in non-cylindrical domains arising in Czochralski process of crystal growth, to appear in Control Cybernet., **32**(2003).

[9] A. Inoue and M. Wakimoto, On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math., **24**(1977), 303–319.

[10] H. Inoue and M. Ôtani, Strong solutions of initial boundary value problems for heat convection equations in noncylindrical domains, Nonlinear Anal., **24**(1995), 1061–1090.

[11] N. Kenmochi, Résultats de compacité dans des espaces de Banach dépendant du temps, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, Exposé 1, (1979), 1–26.

[12] N. Kenmochi, Résolution de problèmes variationels paraboliques non linéaires par les méthodes de compacité et monotonie, Theses, Universite Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1979).

[13] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Math. Monographs, **Vol.23**, Amer. Math. Soci., 1968.

[14] H. Morimoto, On existence of periodic weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math., **18**(1971/1972), 499–524.

[15] M. Ôtani and Y. Yamada, On the Navier-Stokes equations in non-cylindrical domains: An approach by the subdifferential operator theory, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math., **25**(1978), 185–204.

[16] J. F. Rodrigues, Variational methods in the Stefan problem, pp.147–212 in *Phase Transitions and Hysteresis*, Lecture Notes Math., **Vol.1584**, Springer-Verlag, 1994.

[17] J. F. Rodrigues and F. H. Yi, On a two-phase continuous casting Stefan problem with nonlinear flux, European J. Appl. Math., **1**(1990), 259–278.

[18] R. Temam, *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*, 3rd edition, Studies in Mathematics and its Applications, **Vol.2**, North Holland Amsterdam, New York-Oxford, 1984.

[19] A. Visintin, *Models of phase transitions*, PNLDE, Birkhäuser, Boston, 1996.

[20] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operator, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math., **23**(1976), 491–515.

[21] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries, Nagoya Math. J., **70**(1978), 111–123.

半線形 *Damped Wave Equations* の初期値問題の解の漸近挙動

細野 敬史 (九州大学大学院数理学府・博士課程1年)
小川 卓克 (九州大学大学院数理学研究院)

1 Introduction

次の消散項を持つ波動方程式である半線形 Damped Wave Equations に関する初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |u|^\alpha u, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

の可解性や解の性質、特に時間無限大での解の挙動に興味がある。以下は (1.1) の線形化問題

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.2}$$

である。(1.1) の非線形項の α は $\alpha > 0$ とする。

Damped Wave Equations に関する初期値問題については Matsumura [12] の線形問題 (1.2) の解に対する減衰評価、Nakao - Ono [13] や Kawashima - Nakao - Ono [8] の大域存在やエネルギー評価についての結果、Todorova - Yordanov [18] や Ikehata - Ohta [6] の臨界指数に関する研究など、様々な研究者によって解析がなされている。

ここでは空間2次元において、線形問題 (1.2) の解の漸近挙動を示す $L^p - L^q$ 評価と半線形問題 (1.1) の大域的可解性および解の減衰評価を求め、それらを応用して (1.1) の漸近挙動についての $L^p - L^q$ 評価を導く。

以前より Damped wave equation は散逸構造を持つことが指摘されており、Nishihara [15] は $n=3$ の場合に (1.2) について次のような $L^p - L^q$ 評価を得た。

$$\begin{aligned} &\left\| u(t) - v(t) - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} \\ &\qquad \le C t^{-\gamma-1} (\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}), \quad t \ge 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで $u(t,x)$ は線形問題 (1.2) の解、$v(t,x)$, $w(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$ は適当な初期値を与えた熱及び波動方程式の初期値問題の解で、$\gamma = \frac{3}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$ である。すなわちこの評価は (1.2) の解が $t \to \infty$ のとき線形の熱方程式と波動方程式の解の和に収束することを示している。Marcati - Nishihara [10] は $n=1$ の場合にも Nishihara [15] と同様の $L^p - L^q$ 評価が得られることを示した。今回はまず Nishihara [15] と同様の $L^p - L^q$ 評価を空間2次元で求める。

(1.1) に関係の深い次の半線形熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = |v|^\alpha v, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.4}$$

については古くから研究がなされているが、とりわけ Fujita [4] は (1.4) の正値解が有限時間内に爆発するということを示した。非線形項のべきの指数 α が $\alpha > \frac{2}{n}$ であれば時間大域解が存在し $\alpha < \frac{2}{n}$ であれば初期値の大小に関係なく解が有限時間内で爆発することが知られている。このような指数 $\alpha_n = \frac{2}{n}$ は臨界指数と呼ばれているが、(1.3) のような線形評価から半線形問題 (1.1) についての臨界指数が熱方程式と同じ $\alpha_n = \frac{2}{n}$ であることが推定される。実際 Todorova - Yordanov [18] は compact な台の初期値

$(u_0, u_1) \in (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$ が十分小さければ、半線形問題 (1.1) の α の臨界指数が $\frac{2}{n}$ であることをすべての空間次元 $n \geq 1$ で示し、Ikehata - Miyaoka - Nakatake [7] では $n = 1, 2$ のときに同じクラスの compact な台を持たない小さな初期値に対して (1.1) の α の臨界指数が $\frac{2}{N}$ であることを示している。今回の我々の時間大域的可解性に関する結果も $n = 2$ の臨界である $\alpha > 1$ に対して得られている。

さらに線形評価および時間大域的可解性に関する結果を半線形問題へ応用して、自己相似解への漸近を示す $L^p - L^q$ 評価を導く。このような性質に関する研究は例えば移流拡散方程式や Navier-Stokes 方程式において研究されており (cf. Escobedo-Zuazua [2], Carpio [1], Fujigaki-Miyakawa [3])、(1.1) のもう少し一般化された方程式に対しては Gallay-Raugel [5] が空間 1 次元で線形問題の場合に結果を得ている。我々のここでの結果はすべての $\alpha > 1$ を含んでいる。

まず線形評価の証明には Fourier 変換を用いるが、それは $n = 2$ で (1.2) の解を Bessel 関数により表すと積分核が複雑で評価が困難なためである。Fourier 変換による (1.2) の解の表現はよく知られている (例えば Matsumura [12]) ので、線形評価は具体的に表された式を直接計算することによって得られる。半線形問題については逐次近似法を用いて解の存在、一意性や解の減衰評価を得て、その評価と線形問題について得られた評価を使って半線形問題に対する $L^p - L^q$ 評価を空間 2 次元で求める。

記号、関数空間について

関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、f の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f]$、逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ を次で定義する。

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(\xi) := c_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) := \check{f}(\xi) := c_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi.$$

ここで $c_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ である。$k, p \in \mathbb{R}$ に対して、Sobolev 空間 $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ を

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|u\|_{W^{k,p}} := \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^k \hat{u}(\xi) \right] \right\|_{L^p} < \infty \right\}$$

とする。ここで $\langle\cdot\rangle := (1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$ である。また

$$H^s(\mathbb{R}^n) := W^{s,2}(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R}$$

であり、以下しばしば簡単のため $H^s(\mathbb{R}^n) := H^s$, $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}$ と略す。

Littlewood-Paley の 2 進単位分解 : 関数列 $\{\hat{\phi}_j(\xi)\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}_\xi^n)$ が Littlewood-Paley の 2 進単位分解であるとは

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\xi) \geq 0 \ : \ \text{球対称}, \\ \hat{\phi}(\xi) = 0, \quad \xi \in B_2^c \cup B_{\frac{1}{2}}, \\ \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(\frac{\xi}{2^j}), \quad \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_j(\xi) = 1 \ (\xi \neq 0) \end{cases}$$

を満たすときをいう。$s \geq 0$, $1 \leq p, \sigma \leq \infty$ に対して、Besov 空間 $B_{p,\sigma}^s$ を

$$B_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|u\|_{B_{p,\sigma}^s} := \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{\sigma js} \|\phi_j * u\|_{L^p}^\sigma \Big)^{\frac{1}{\sigma}} < \infty \right\}$$

で定義する。以下しばしば $B_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,\sigma}^s$ と略記する。

2 Main Theorem

はじめに線形問題 (1.2) についての $L^p - L^q$ 評価の結果を以下に述べる。

Theorem 1. $n=2$, $1 \le q \le p \le \infty$ とする。$u_0 \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in L^q(\mathbb{R}^2)$ とし、$u(t,x)$ を線形の Damped Wave Equations に関する初期値問題 (1.2) の解とする。また $v(t,x)$, $w(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$ をそれぞれ次の初期値問題 (2.1) , (2.2) , (2.3) の解とする。

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ v(0,x) = u_0(x) + u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ w(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t w(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w} - \Delta \tilde{w} = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \tilde{w}(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t \tilde{w}(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

このとき $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ として次の評価式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\left\| u(t) - v(t) - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} \\ &\le \begin{cases} Ct^{-\gamma-1}(\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}), & t \ge 1, \\ Ct^{-\gamma}(\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}), & 0 < t < 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Remark $n=2$ のとき、$v(t,x)$ は熱方程式の $L^p - L^q$ 評価より次を満たす。

$$\|v(t)\|_{L^p} \le Ct^{-(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(\|u_0\|_q + \|u_1\|_q), \qquad 1 \le q \le p \le \infty.$$

また $w(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$ は波動方程式の $L^p - L^q$ 評価よりそれぞれ次を満たす。

$$\begin{aligned} &\|w(t)\|_{L^p} \le Ct^{-\gamma}(\||\nabla|^{\mu} u_0\|_q + \||\nabla|^{\mu-1} u_1\|_q), \\ &\|\tilde{w}(t)\|_{L^p} \le Ct^{-\gamma}\||\nabla|^{\mu-1} u_0\|_q. \\ &\left(2 \le p < \frac{2(n+1)}{n+1-2\mu}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \gamma = n(1 - \frac{2}{p}) - \mu \right) \end{aligned}$$

したがって Damped Wave Equations の解は $t \to \infty$ の挙動は熱方程式の解のように振る舞う。また regularity、すなわち滑らかさに関しては波動方程式の解の影響が大きい。つまり Theorem 1 で初期値に可微分性を要求しないでよいのは波動方程式の解の部分を引き去っているためである。

次に半線形の問題 (1.1) について、時間大域的可解性の結果を Theorem 2 に述べる。
Theorem 2. $n=2$, $2 \le p \le \infty$ とする。また $u_0 \in B^1_{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ とし、$\alpha > 1$ とする。もし $\|u_0, u_1\|_X := \|u_0\|_{B^1_{2,1}} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{B^0_{2,1}} + \|u_1\|_{L^1}$ が十分小さければ、

Damped Wave equations に関する半線形の初期値問題 (1.1) の解 $u(t,x) \in C([0,\infty); L^2 \cap L^\infty)$ が唯一つ存在して、$u(t,x)$ は次を満たす。

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le C(1+t)^{-(1-\frac{1}{p})}\|u_0,u_1\|_X. \tag{2.5}$$

さらに $u(t,x)$ は

$$u(t) \in C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2) \tag{2.6}$$

で、次の評価を満たす。

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-1}\|u_0,u_1\|_X. \tag{2.7}$$

Remark Matsumura [12] は $n=2$ のときに、非線形項のべき $\alpha>1$, $u_0 \in H^4(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in H^3(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)$ が十分小さいときに (1.1) の解の存在、一意性と解の L^2 norm , L^∞ norm の減衰評価を得ている。減衰の order は Theorem 2 で $p=2,\infty$ としたものと同じである。Nakao - Ono [13] は $\frac{4}{n} \le \alpha < \frac{4}{n-2}$ $(n\ge 3)$、$\frac{4}{n} \le \alpha < \infty$ $(n=1,2)$ で小さな初期値 $(u_0,u_1)\in H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して (1.1) の大域解 $u(t)\in C([0,\infty);H^1)\cap C^1([0,\infty);L^2)$ の存在と一意性、減衰評価 $\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \le C(1+t)^{-1}$ を示した。Nishihara [15] は $n=3$ で初期値のクラスが $(u_0,u_1)\in (W^{1,1}\cap W^{1,\infty})\times(L^1\cap L^\infty)$ のときに、$\alpha>\frac{2}{3}$ ならば (1.1) の大域解が唯一つ存在することを示し、解の減衰評価を得ている。Theorem 2 の初期値のクラスで $B^1_{2,1}$ は H^1 より少し狭い空間ではあるが、初期値の可微分性の order を同じにして解の L^p norm $(2\le p \le \infty)$ の減衰評価を得たという点が既存の結果を改良した点である。α については $n=2$ での臨界である $\alpha>1$ の条件になっている。

Nishihara [15] の結果を $n=2$ に拡張したものが以下の Theorem 3 である。

Theorem 3. $n=2$, $1\le p\le\infty$, $u_0\in B^1_{2,1}(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)$ とし、$\alpha>1$ とする。$\bar{v}(t,x)$ を次の線形の熱方程式 (2.8) の解とし、$u(t,x)$ は Damped Wave equations に関する半線形の初期値問題 (1.1) の解、$w(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$ はそれぞれ初期値問題 (2.2) , (2.3) の解とする。

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v} - \Delta \bar{v} = |u|^\alpha u, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ \bar{v}(0,x) = u_0(x)+u_1(x), & x\in\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.8}$$

このとき $\|u_0,u_1\|_X := \|u_0\|_{B^1_{2,1}} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{B^0_{2,1}} + \|u_1\|_{L^1}$ が十分小さければ、$\epsilon = \min\{1, \alpha-(1-\frac{1}{p})\} > 0$ に対して以下の評価式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\left\| u(t) - \bar{v}(t) - e^{-\frac{t}{2}}\left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)\tilde{w}(t)\right\}\right\|_{L^p} \\ &\qquad \le Ct^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon}\|u_0,u_1\|_X, \qquad t\ge 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Corollary Theorem 3 の条件下の元で次の評価が成り立つ。

$$\left\| u(t) - MG_t - e^{-\frac{t}{2}}\left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)\tilde{w}(t)\right\}\right\|_{L^p} = o(t^{-(1-\frac{1}{p})}), \tag{2.10}$$

ここで G_t は熱核 $G_t(x) = \frac{1}{4\pi t}e^{-|x|^2/4t}$、

$$M = \int_{\mathbb{R}^2}(u_0+u_1)dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u(s)|^\alpha u(s)dxds$$

である。ただし $M\neq 0$ とする。

2.1 Fourier 変換による基本解表示

線形問題 (1.2) を Fourier 変換した

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^2\hat{u} + \hat{u}_t = 0, & (t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.11}$$

は 2 階の常微分方程式である。特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + |\xi|^2 = 0$ の解は $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}$ である。

Definition

$$\mathcal{F}[\alpha(|\nabla|)](\xi) = \alpha(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} & |\xi| > \frac{1}{2}, \\ i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} & |\xi| \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

とする。このとき Damped Wave Equations の基本解を $K_0(t)$, $K_1(t)$ で定義する。すなわち

$$K_0(t) := e^{-\frac{t}{2}} \cos\{t\alpha(|\nabla|)\}, \tag{2.12}$$

$$K_1(t) := e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin\{t\alpha(|\nabla|)\}}{\alpha(|\nabla|)}. \tag{2.13}$$

このとき線形の Damped Wave Equations の初期値問題 (1.2) の解は Fourier 変換により以下のように表されることが知られている (cf. Matsumura [12])。

$$u(t,x) := K(u_0,u_1) = K_0(t)u_0 + K_1(t)\left(\frac{1}{2}u_0 + u_1\right). \tag{2.14}$$

同様に波動方程式 (2.2) , (2.3) の基本解を $W_0(t), W_1(t)$ とする。

$$W_0(t) := \cos(t|\nabla|) = \mathcal{F}^{-1}[\cos(t|\xi|)], \tag{2.15}$$

$$W_1(t) := \frac{\sin(t|\nabla|)}{|\nabla|} = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right]. \tag{2.16}$$

線形の波動方程式 (2.2) の解についても以下のように表すことができる。

$$w(t) := W_0(t)u_0 + W_1(t)u_1. \tag{2.17}$$

一方半線形の Damped Wave Equations の初期値問題 (1.1) の解は Duhamel の原理により次のように表すことができる。

$$u(t,x) = K(u_0,u_1) + \int_0^t K_1(t-s) * |u|^\alpha u(s,\cdot)ds. \tag{2.18}$$

波動方程式に関する次の $L^p - L^q$ は我々の半線形問題に関する定理の証明に不可欠である。

Lemma 2.1
(i) 空間次元を n , $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ とし、$W_1(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right]$ とする。$2\le p\le\frac{2(n+1)}{n-1}$ に対して次の評価式が成り立つ。

$$\left\|W_1(t)g\right\|_p\le Ct^{n(1-\frac{2}{p})-1}\|g\|_{p'}. \tag{2.19}$$

(ii) 特に $n=2$ のとき、以下の $L^\infty-L^\infty$ 評価が成り立つ。

$$\left\|W_1(t)g\right\|_\infty\le t\|g\|_\infty. \tag{2.20}$$

3 Proof of Theorem 1

まず $\widehat{K}_0(t)$, $\widehat{K}_1(t)$ の定義から、$|\xi|\le\frac{1}{2}$ 、すなわち低周波領域で

$$\begin{aligned}\widehat{K}_0(t)=&e^{-\frac{t}{2}}\cosh\left(t\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\right)\\=&\frac{1}{2}\left(e^{t\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\right)}+e^{t\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\right)}\right),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{K}_1(t)=&e^{-\frac{t}{2}}\frac{\sinh\left(t\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}}\\=&\frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\left(e^{t\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\right)}-e^{t\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\right)}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

である。(3.1) , (3.2) それぞれの右辺第2項は $t\to\infty$ で指数減衰する。したがって $-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-|\xi|^2}\simeq-|\xi|^2$ ($|\xi|<<1$) より

$$\widehat{K}_0(t)\simeq\frac{1}{2}e^{-t|\xi|^2},\ \widehat{K}_1(t)\simeq e^{-t|\xi|^2},$$

すなわち $\widehat{K}_0(t)$, $\widehat{K}_1(t)$ は低周波領域では熱核の Fourier 像で近似される。一方 $|\xi|>1$ の部分、つまり高周波領域において $\widehat{K}_0(t)$, $\widehat{K}_1(t)$ を ξ 変数について Taylor 展開すると

$$e^{-\frac{t}{2}}\cos\{t\alpha(\xi)\}\simeq e^{-\frac{t}{2}}\cos(t|\xi|)+e^{-\frac{t}{2}}\frac{t}{8|\xi|}\sin(t|\xi|)+O(t^\delta|\xi|^{-2}). \tag{3.3}$$

$$e^{-\frac{t}{2}}\frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{\alpha(\xi)}\simeq e^{-\frac{t}{2}}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}+O(t^\delta|\xi|^{-2}). \tag{3.4}$$

となるので、$\widehat{K}_0(t)$, $\widehat{K}_1(t)$ は高周波領域では波動方程式の解作用素 $W_0(t)$, $W_1(t)$ の Fourier 像で近似されることがわかる。したがって (2.15) , (2.16) , (2.14) より

$$
\begin{aligned}
&u(t,x)-v(t,x)-e^{-\frac{t}{2}}\left\{w(t)+\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)\tilde{w}(t)\right\}\\
=&K_0(t)u_0+K_1(t)\left(\frac{1}{2}u_0+u_1\right)-e^{t\Delta}(u_0+u_1)\\
&\quad -e^{-\frac{t}{2}}\left\{W_0(t)u_0+W_1(t)u_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)W_1(t)u_0\right\}\\
=&\left\{K_0(t)-e^{-\frac{t}{2}}\Big(W_0(t)+\frac{t}{8}W_1(t)\Big)\right\}u_0-\frac{1}{2}e^{t\Delta}u_0\\
&\quad +\Big(K_1(t)-e^{-\frac{t}{2}}W_1(t)\Big)\Big(\frac{1}{2}u_0+u_1\Big)-e^{t\Delta}(\frac{1}{2}u_0+u_1)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

と変形する。

高周波および低周波領域に対する cut-off 関数 χ_h, $\chi_l\in C^\infty$ を

$$
\chi_h(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|>2,\\ 0, & |\xi|\le 1,\end{cases}
$$

$$
\chi_l(\xi)=\begin{cases}0, & |\xi|>\frac{1}{3},\\ 1, & |\xi|\le\frac{1}{4}\end{cases}
$$

で定めると、Fourier 変換を用いて低周波と高周波とに分けた次の評価を示せば Theorem 1 は証明される。

Proposition 3.1

$1\le q\le p\le\infty$, $g\in L^q(\mathbb{R}^2)$ とする。このとき任意の $t\ge 0$ に対して次の評価式が成り立つ。ただし δ はある正の定数、$\gamma=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ とする。

$$
\left\|\chi_h*\left\{K_0(t)-e^{-\frac{t}{2}}\left(W_0(t)+\frac{t}{8}W_1(t)\right)-\frac{1}{2}e^{t\Delta}\right\}g\right\|_{L^p}\le Ct^{-\gamma}e^{-\delta t}\|g\|_{L^q}. \tag{3.6}
$$

$$
\left\|\chi_h*\left\{\Big(K_1(t)-e^{-\frac{t}{2}}W_1(t)\Big)-e^{t\Delta}\right\}g\right\|_{L^p}\le Ct^{-\gamma}e^{-\delta t}\|g\|_{L^q}. \tag{3.7}
$$

$$
\left\|\chi_l*\left\{K_0(t)-e^{-\frac{t}{2}}\left(W_0(t)+\frac{t}{8}W_1(t)\right)-\frac{1}{2}e^{t\Delta}\right\}g\right\|_{L^p}\le C(1+t)^{-\gamma-1}\|g\|_{L^q},\quad t\ge 0. \tag{3.8}
$$

$$
\left\|\chi_l*\left\{\Big(K_1(t)-e^{-\frac{t}{2}}W_1(t)\Big)-e^{t\Delta}\right\}g\right\|_{L^p}\le C(1+t)^{-\gamma-1}\|g\|_{L^q},\quad t\ge 0. \tag{3.9}
$$

Proof of Proposition 3.1

証明の概略は、まず Fourier multiplier theory により $1\le p\le\infty$ に対して L^p-L^p 評価を示し、これと $p=\infty$, $q=1$ の場合を示すことによって Riesz-Thorin の複素補間定理で補間するという方針である。ここでは (3.6) について、$p=\infty$, $q=1$ の場合のみを Key estimate を中心に示す。Housdorff-Young の不等式により

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\Big\{e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\{t\alpha(\xi)\}-\cos(t|\xi|)-\frac{t}{8}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right)-\frac{1}{2}e^{-t|\xi|^2}\Big\}\hat{g}(\xi)\right]\right\|_{L^\infty}\\
\le&\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\Big\{e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\{t\alpha(\xi)\}-\cos(t|\xi|)-\frac{t}{8}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right)-\frac{1}{2}e^{-t|\xi|^2}\Big\}\right]\right\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

となるから、$t > 0$ に対して

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left\{e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right) - \frac{1}{2}e^{-t|\xi|^2}\right\}\right]\right\|_{L^\infty}$$
$$\leq Ct^{-1}e^{-\delta t}$$

を示せば十分である。$t > 0$ と $|\xi| > 1$ に対して $\alpha(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}$ である。$|\xi| - \alpha(\xi) = \frac{1}{8|\xi|} + O(|\xi|^{-3})$ に注意すると、平均値の定理からある $0 < \theta < 1$, $0 < \theta' < 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&\cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8|\xi|}\sin(t|\xi|)\\
=&\frac{t}{8|\xi|}\sin\{t\left(|\xi| + \theta\left(\alpha(\xi) - |\xi|\right)\right)\} - \frac{t}{8|\xi|}\sin(t|\xi|) + O(t|\xi|^{-3})\\
=&\frac{1}{64}t^2\frac{1}{|\xi|^2}\cos\{t\left(|\xi| + \theta'\left(\alpha(\xi) - |\xi|\right)\right)\} + O(t^2|\xi|^{-4}) + O(t|\xi|^{-3})\\
=&Ct^2\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} + Ct^2\frac{1}{|\xi|^2}\left\{\cos\{t\left(|\xi| + \theta'\left(\alpha(\xi) - |\xi|\right)\right)\} - \cos t|\xi|\right\}\\
&+ O(t^2|\xi|^{-4}) + O(t|\xi|^{-3}), \qquad |\xi| > 1, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

と変形することにより

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left\{e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right) - \frac{1}{2}e^{-t|\xi|^2}\right\}\right]\right\|_{L^\infty}\\
\leq&e^{-\frac{t}{2}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left(\cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} - Ct^2\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2}\right)\right]\right\|_{L^\infty}\\
&+ Ct^2e^{-\frac{t}{2}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left(\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2}\right)\right]\right\|_{L^\infty} + \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left(\frac{1}{2}e^{-t|\xi|^2}\right)\right]\right\|_{L^\infty}\\
\leq&Ct^2e^{-\frac{t}{2}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left(\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2}\right)\right]\right\|_{L^\infty} + Ct^{-1}e^{-\delta t}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

を得る。球対称関数に関する Fourier 変換 と部分積分を用いて、(3.11) の右辺第1項の L^∞ norm を評価するのが証明の鍵である。

Lemma 3.2 (**球対称関数の逆 Fourier 変換**)
$\hat{f}$ を球対称関数、すなわち任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(|\xi|)$$

が成り立つとき、$\hat{f}$ の逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$ も球対称で

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](|x|) = C(n)|x|^{1-\frac{n}{2}}\int_0^\infty \hat{f}(r)J_{\frac{n}{2}-1}(|x|r)r^{\frac{n}{2}}dr, \quad (r = |\xi|)$$

が成り立つ。ここで $J_k(s)$ $(s \in \mathbb{R})$ は k 次 Bessel 関数。

Lemma 3.3
任意の $t \geq 0$ と $x \in \mathbb{R}^2$ に対してある $0 < \delta < \frac{1}{2}$ が存在して次の評価式が成り立つ。

$$t^2e^{-\frac{t}{2}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_h(\xi)\left(\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2}\right)\right]\right\|_{L^\infty} \leq Ce^{-\delta t}. \tag{3.12}$$

4 Proof of Theorem 3.

時間大域解の存在定理である Theorem 2 の証明は省略する。ここでは半線形問題の解の時間無限大の挙動についての定理である Theorem 3 の証明の概要を述べる。(2.8) の解は線形方程式 (2.1) の解 $v(t,x)$ を用いて以下のように表せる。

$$\bar{v}(t,x) = v(t,x) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}|u|^\alpha u(s,x)ds. \tag{4.13}$$

(2.18) , (4.13) より

$$\begin{aligned}
&u(t) - \bar{v}(t) - e^{-\frac{t}{2}}\left\{w(t) + \left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)\tilde{w}(t)\right\}\\
=&u(t) - v(t) - e^{-\frac{t}{2}}\left\{w(t) + \left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)\tilde{w}(t)\right\}\\
&\quad + \int_0^t e^{-\frac{t-s}{2}}W_1(t-s)|u|^\alpha u(s)ds\\
&\quad\quad + \int_0^t \left\{\left(K_1(t-s) - e^{-\frac{t-s}{2}}W_1(t-s)\right) - e^{(t-s)\Delta}\right\}|u|^\alpha u(s)ds.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

よって Theorem 1 より

$$\begin{aligned}
&\left\|u(t) - \bar{v}(t) - e^{-\frac{t}{2}}\left\{\bar{w}(t) + \left(\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\right)\tilde{w}(t)\right\}\right\|_{L^p}\\
=&Ct^{-(1-\frac{1}{p})-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1})\\
&\quad + \int_0^t e^{-\frac{t-s}{2}}\|W_1(t-s)|u|^\alpha u(s)\|_{L^p}ds\\
&\quad\quad + \int_0^t \left\|\left\{\left(K_1(t-s) - e^{-\frac{t-s}{2}}W_1(t-s)\right) - e^{(t-s)\Delta}\right\}|u|^\alpha u(s)\right\|_{L^p}ds.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

特に (4.15) の第 3 項について評価する。各発展作用素 $K_1(t)$, $W_1(t-s)$, $e^{(t)\Delta}$ は初期値問題の解作用素で互いに可換であるから、次の恒等式

$$a^2 - b^2 - c^2 = (a-b)(a-b-c) + (a-b-c)c + 2(a-b)b$$

を用いて

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\|\left\{\left(K_1(t-s) - e^{-\frac{t-s}{2}}W_1(t-s)\right) - e^{(t-s)\Delta}\right\}|u|^\alpha u(s)\right\|_{L^p}ds\\
\leq&\int_0^t \left\|\left\{K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}}W_1\left(\frac{t-s}{2}\right)\right\}\right.\\
&\qquad\left.\left\{K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}}W_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{(\frac{t-s}{2})\Delta}\right\}|u|^\alpha u(s)\right\|_{L^p}ds\\
&+\int_0^t \left\|\left\{K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}}W_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{(\frac{t-s}{2})\Delta}\right\}e^{(\frac{t-s}{2})\Delta}|u|^\alpha u(s)\right\|_{L^p}ds\\
&+2\int_0^t \left\|e^{-\frac{t-s}{4}}\left\{K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}}W_1\left(\frac{t-s}{2}\right)\right\}W_1\left(\frac{t-s}{2}\right)|u|^\alpha u(s)\right\|_{L^p}ds\\
=:&I_1 + I_2 + 2I_3.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

と変形する。ここで例えば I_1 は次のように評価できる。

$$I_1 = \int_0^t \left\| \left\{ K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}} W_1\left(\frac{t-s}{2}\right) \right\} \left\{ K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}} W_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{(\frac{t-s}{2})\Delta} \right\} |u|^\alpha u(s) \right\|_{L^p} ds$$
$$\le C\int_0^t (1+t-s)^{-1} \left\| \left\{ K_1\left(\frac{t-s}{2}\right) - e^{-\frac{t-s}{4}} W_1\left(\frac{t-s}{2}\right) \right\} |u|^\alpha u(s) \right\|_{L^p} ds$$
$$\le C\int_0^t (1+t-s)^{-1}(1+t-s)^{-(1-\frac{1}{p})} \| |u|^\alpha u(s) \|_{L^1} ds$$
$$\le C\int_0^t (1+t-s)^{-(1-\frac{1}{p})-1}(1+s)^{-\alpha} ds \|u_0, u_1\|_X.$$

よって $\alpha > 1$ ならば
$$I_1 \le C(1+t)^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon} \|u_0, u_1\|_X. \tag{4.17}$$
I_2, I_3 についても $\alpha > 1$ ならば
$$I_2 \le Ct^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon}\|u_0, u_1\|_X + C(1+t)^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon}\|u_0, u_1\|_X, \tag{4.18}$$
$$I_3 \le (1+s)^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon}\|u_0, u_1\|_X \tag{4.19}$$
と評価できる。(4.15), (4.17), (4.18), (4.19) より、$1 \le p \le \infty$, $\alpha > 1$ ならば
$$\left\| u(t) - \bar{v}(t) - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8}\right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} \le Ct^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon}\|u_0, u_1\|_X$$
が成り立つ。 □

参考文献

[1] A. Carpio, *Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations,* SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 449-475.

[2] M. Escobedo, E. Zuazua, *Large time behavior for convection-diffusion equation in* $\mathbb{R}^n$, J. Funct. Anal. **100** (1991), 119-161.

[3] Y. Fujigaki, T. Miyakawa, *Asymptitoc profiles of the nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the whole space,* SIAM J. Math. Anal. **33** no. 3 (2001), 523-544.

[4] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t - \Delta u = u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, **13** (1966), 109-124.

[5] Th. Gallay, G. Raugel, *Scaling Vatiables and Asymptotic Expansions in Damped Wave Equations,* J. Differential Equations **150** (1998), 42-97.

[6] R. Ikehata, M. Ohta, *Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), no.1, 87-97.

[7] R. Ikehata, Y. Miyaoka, T. Nakatake, Decay estimates of solutions for dissipative wave equations in $\mathbb{R}^N$ with lower power nonlinearities, preprint (2001).

[8] S. Kawashima, M. Nakao, K. Ono, *On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term* , J. Math. Soc. Japan. **47** (1995), 617-653.

[9] E. H. Lieb, M. Loss, ANALYSIS, Am. Math. Soc., (1997).

[10] P. Marcati, K. Nishihara, *The $L^p - L^q$ estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to the compressible flow through porous media*, preprint.

[11] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, *$L^p - L^q$ estimates for the Klein-Gordon equations*, J. Math. Pures Appl. **59** (1980), 417-440.

[12] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solution of semi-linear wave equation* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 169-189.

[13] M. Nakao, K. Ono, *Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations* , Math. Z. **214** (1993), 325-342.

[14] T. Narazaki, *$L^p - L^q$ estimates for damped wave equation and their applications to semi-linear problem*, preprint, Tokai univ.

[15] K. Nishihara, *$L^p - L^q$ Estimates of Solutions to the Damped Wave Equation in 3-Dimensional Space and their Application*, preprint, Waseda univ.

[16] T. Ogawa, 非線形分散型及び波動方程式に対する実解析的手法と適切性, to appear.

[17] M. Sugiura, 解析入門 I, 東京大学出版会.

[18] G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations, **174** (2000), 464-489.

低階の微分項をもつ非線形熱方程式の時間大域解の存在について

伊藤 直子 (東京理科大学理学研究科数学専攻 D2)

E-mail:j1102701@ed.kagu.tus.ac.jp

1 序

次の非線形消散型方程式に対する初期値問題を考える.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u - |u|^{\gamma-1}u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

但し,$0 < \theta < 2$, $1 < \gamma$ とする. 本稿では初期値問題 (1) に対する時間大域解の存在を示す.

初期値問題 (1) において, $\theta = 2$ の場合は次のような藤田型と呼ばれる冪乗の非線形項を持つ次の非線形熱方程式の初期値問題になる.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - |u|^{\gamma-1}u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

初期値問題 (2) に対する既知の結果としては, Fujita [1] において $\gamma < 1 + \frac{2}{n}$ の場合について正値解の爆発が知られており, また $\gamma = 1 + \frac{2}{n}$ の場合は, 空間次元 $n = 1, 2$ の場合に対し Hayakawa [3], 一般次元 n については Kobayashi-Sirao-Tanaka [4] よって解の爆発が示されている. 一方 $\gamma > 1 + \frac{2}{n}$ の条件下においては十分小さい初期値に対する時間大域解の存在が Fujita [1], Weissler [6] によって示されている.

また初期値問題 (2) の非線形熱方程式に対し, 分数冪のラプラシアンをもつ方程式 (以下, 分数冪ラプラシアン方程式と呼ぶ) に対する初期値問題は以下のようになる.

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} u - |u|^{\gamma-1}u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

分数冪ラプラシアン方程式は, 物理学において流体力学や表面拡散現象等の関連分野で研究されている異常拡散に相当するものである. 初期値問題 (3) に対する既知の結果としては, 非線形項の指数 γ が $\gamma < 1 + \frac{\theta}{n}$ を満たし, かつ $0 < \theta \leqq 2$ の場合に Sugitani [5] によって正値解の爆発が示されている. この θ についての条件は Green 関数が正値性を保つ条件である. 一方で正値性が保たれない $2 < \theta$ の場合については, Galaktionov-Pohozaev [2] の結果が知られている. この結果は非線形項の指数 γ に対する条件において等号を含む $\gamma \leqq 1 + \frac{\theta}{n}$ に対し, 有限時間での解の爆発が示されている. また γ に対する条件が $\gamma > 1 + \frac{\theta}{n}$ の場合は十分小さい初期値に対する時間大域解の存在が知られている. Galaktionov-Pohozaev

[2] においては, 初期値が$\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$ を満たしかつ, 十分小さい場合についての時間大域解の存在が示されている. このように非線形項の指数γ に対する条件がθを用いて一般化された形で得られている (熱方程式は (3) の方程式において$\theta = 2$の場合である).

今回扱う初期値問題 (1) は非線形熱方程式に低階の分数冪ラプラシアンを加えた方程式であり, 本稿においては定理 1 として, 初期値問題 (1) に対する時間大域解の存在を示す.

定理 1. θ,γが$0 < \theta < 2$, $1 + \frac{\theta}{n} < \gamma < 1 + \frac{2}{n}$, を満たすものと仮定する. また初期値$\phi(x)$ に対し,$\phi \in \mathbf{L}^1$ かつ $\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}$ が十分小であるとすると, $u \in C([0,\infty);\mathbf{L}^1)$ となる初期値問題 (1) を満たす時間大域解が一意に存在する.

上の結果より, 初期値問題 (2) について, 非線形項の指数γ が$\gamma > 1 + \frac{2}{n}$ の場合に時間大域解が存在していたのに対して, 低階の微分項をもつと$1 + \frac{\theta}{n}$ まで指数の条件が下がることが分かった. また, 初期値問題 (2),(3) のように一つのラプラシアンもしくは分数冪ラプラシアンの場合は初期値がある$p > 1$の$\mathbf{L}^p$ に入ることを仮定していたのに対し, 今回は$\mathbf{L}^1$ で時間大域解の存在を示すことができた.

ここで関数空間と記号の定義をする.$\mathbf{L}^p$は通常用いられる Lebesgue 空間とする. $C(\mathbf{I};\mathbf{B})$ は時間区間$\mathbf{I}$から Banach 空間$\mathbf{B}$への連続関数の空間を表すこととする. $\mathcal{F}\phi(x)$ また$\hat{\phi}(x)$ は, 関数ϕに対するフーリエ変換を意味し, $\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi}\phi(x)dx$ で定義され, 一方フーリエ逆変換は$\mathcal{F}^{-1}\phi(x)$, $\check{\phi}(x)$ で表わし, $\check{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi}\phi(\xi)d\xi$ と定義する. 本稿では分数冪の微分を取り扱うが, 分数冪の微分はフーリエ変換を用いて以下のように定義される.

$$|\partial_x|^\delta = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^\delta\mathcal{F}.$$

初期値問題 (1) に対応する次の積分方程式を考える.

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(v)d\tau, \tag{4}$$

但し,

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{F}^{-1}e^{-(|\xi|^\theta+|\xi|^2)t}\mathcal{F}\phi, \tag{5}$$

$$f(u) = |u|^{\gamma-1}u. \tag{6}$$

定理 1 の証明の前に証明に用いる補題について述べる.

2 解の評価について

この節においては補題 1 として基本解$\mathcal{G}(t)\phi$についての評価を与える.

補題 1. $\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{F}^{-1}e^{-(|\xi|^\theta+|\xi|^2)t}\mathcal{F}\phi$ に対して,

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leqq CK_{p,\infty}(t)\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \quad 但し, K_{p,\infty}(t) = \min\{t^{-\frac{n}{\theta p}}, t^{-\frac{n}{2p}}\}$$
$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^1} \leqq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}$$

一方で, よく知られている熱方程式の基本解については次のような評価となる.

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}\phi\right\|_{\mathbf{L}^p} \leqq t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|\phi\|_{\mathbf{L}^q}. \tag{7}$$

また分数冪ラプラシアン方程式に対しては次の評価式が成り立つことが知られている.

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}e^{-|\xi|^\theta t}\mathcal{F}\phi\right\|_{\mathbf{L}^p} \leqq t^{-\frac{n}{\theta}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|\phi\|_{\mathbf{L}^q}. \tag{8}$$

上の2つの評価式を用いることで補題1は次のように容易に示すことができる.

補題1の証明

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}e^{-(|\xi|^\theta+|\xi|^2)t}\mathcal{F}\phi\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}e^{-|\xi|^\theta t}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}\phi\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\\
&\leqq Ct^{-\frac{n}{\theta}\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{F}^{-1}e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}\phi\right\|_{\mathbf{L}^q}\\
&\leqq Ct^{-\frac{n}{\theta}\frac{1}{q}}t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} \quad \text{但し},1\leqq p\leqq q\leqq\infty\\
&= Ct^{-\frac{n}{q}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)-\frac{n}{2p}}\|\phi\|_{\mathbf{L}^p}.
\end{aligned}$$

ここで, $t\geqq 1$ のとき $q=p$, $0<t<1$ の場合は $q=\infty$ とすることによって, 次の評価式が得られる.

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leqq CK_{p,\infty}\|\phi\|_{\mathbf{L}^q}, \quad \text{但し}, \quad K_{p,\infty}(t)=\min\{t^{-\frac{n}{\theta p}}, t^{-\frac{n}{2p}}\}.$$

3 定理1の証明

この節においては定理1について縮小写像の原理を用いて証明を与える. ここで証明に用いる関数空間を導入する.

$$X=\{g\in C([0,\infty);\mathbf{L}^1); \|g\|_X<\infty\}.$$

ノルムは

$$\|g\|_X = \sup_t K_{1,\infty}^{-1}\|g(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \sup_t\|g(t)\|_{\mathbf{L}^1},$$

と定義する. 但し $K_{1,\infty}(t)=\min\{t^{-\frac{n}{\theta}}, t^{-\frac{n}{2}}\}$. また閉球を次のように定義する.

$$X_\rho=\{g\in X; \|g\|_X\leqq\rho\}.$$

写像 $\mathcal{M}$ を次のように定義する.

$$\mathcal{M}v = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(v)d\tau,$$

但し,$f(v)=|v|^{\gamma-1}v,\ v\in X_\rho$. $\rho>0$ を十分小さくとると写像 $\mathcal{M}$ が X_ρ からそれ自身に移すことを示す. 積分方程式 (4) の両辺で $\mathbf{L}^1$ ノルムをとる. 尚ここで補題 1 を用いる.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}v(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leqq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}+\int_0^t\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau\\ &\leqq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}+C\int_0^t\|f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau\\ &\leqq C\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}+C\int_0^1\|f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau+C\int_1^t\|f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau\\ &=C\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}+CI_1+CI_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1\|f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau\leqq\int_0^1\|v\|_{\mathbf{L}^1}\left(\tau^{\frac{n}{2}}\|v\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)^{\gamma-1}\tau^{-\frac{n}{2}(\gamma-1)}d\tau\leqq\rho^\gamma\int_0^1\tau^{-\frac{n}{2}(\gamma-1)}d\tau,\\ I_2&=\int_1^t\|f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau\leqq\int_1^t\|v\|_{\mathbf{L}^1}\left(\tau^{\frac{n}{\theta}}\|v\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)^{\gamma-1}\tau^{-\frac{n}{\theta}(\gamma-1)}d\tau\leqq\rho^\gamma\int_1^t\tau^{-\frac{n}{\theta}(\gamma-1)}d\tau.\end{aligned}$$

γ は $1+\frac{\theta}{n}<\gamma<1+\frac{2}{n}$ を満たすことから $I_1\leqq C\rho^\gamma,\ I_2\leqq C\rho^\gamma$ とすることが出来る. よって ρ を十分小さくとることにより次の式が成り立つ.

$$\|\mathcal{M}v(t)\|_{\mathbf{L}^1}\leqq C\varepsilon+C\rho^\gamma\leqq\rho. \tag{9}$$

次に $\mathbf{L}^\infty$ ノルムをとる.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}v(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}&\leqq\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}+\int_0^t\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^\infty}d\tau\\ &\leqq CK_{1,\infty}\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}+\int_0^1\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^\infty}d\tau+\int_1^{\frac{t}{2}}\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^\infty}d\tau\\ &\qquad+\int_{\frac{t}{2}}^{t-1}\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^\infty}d\tau+\int_{t-1}^t\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^\infty}d\tau\\ &=\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}+I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

$$I_1=\int_0^1\|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\mathbf{L}^\infty}d\tau\leqq C\int_0^1(t-\tau)^{-\frac{n}{\theta}}\|f(v)\|_{\mathbf{L}^1}d\tau\leqq C\rho^\gamma\int_0^1(t-\tau)^{-\frac{n}{\theta}}\tau^{-\frac{n}{2}(\gamma-1)}d\tau,$$

$$K_{1,\infty}^{-1}(t)\times I_1\leqq C\rho^\gamma t^{\frac{n}{\theta}}\int_0^1(t-\tau)^{-\frac{n}{\theta}}\tau^{-\frac{n}{2}(\gamma-1)}d\tau\leqq C\rho^\gamma\left(\frac{t}{t-1}\right)^{\frac{n}{\theta}}\int_0^1\tau^{-\frac{n}{2}(\gamma-1)}d\tau\leqq C\rho^\gamma.$$

$$I_2 \leqq C \int_1^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta}} \|f(v)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leqq C\rho^\gamma \int_1^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta}} \tau^{-\frac{n}{\theta}(\gamma-1)} d\tau,$$

$$K_{1,\infty}^{-1}(t) \times I_2 \leqq C\rho^\gamma t^{\frac{n}{\theta}} \int_1^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta}} \tau^{-\frac{n}{\theta}(\gamma-1)} d\tau \leqq C\rho^\gamma \int_1^{\frac{t}{2}} \tau^{-\frac{n}{\theta}(\gamma-1)} d\tau \leqq C\rho^\gamma,$$

$$I_3 = \leqq C \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta p}} \|f(v)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \leqq C\rho^\gamma \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta p}} \tau^{-\frac{n}{\theta}\left(\gamma-\frac{1}{p}\right)} d\tau,$$

$$K_{1,\infty}^{-1}(t) \times I_3 \leqq C\rho^\gamma t^{\frac{n}{\theta}} \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta p}} \tau^{-\frac{n}{\theta}\left(\gamma-\frac{1}{p}\right)} d\tau \leqq C\rho^\gamma t^{\frac{n}{\theta}\left(1-\gamma+\frac{1}{p}\right)} \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{n}{\theta p}} d\tau \leqq C\rho^\gamma,$$

$$I_4 \leqq C \int_{t-1}^{t} (t-\tau)^{-\frac{n}{2p}} \|f(v)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \leqq C\rho^\gamma \int_{t-1}^{t} (t-\tau)^{-\frac{n}{2p}} \tau^{-\frac{n}{\theta}\left(\gamma-\frac{1}{p}\right)} d\tau,$$

$$K_{1,\infty}^{-1}(t) \times I_4 \leqq C\rho^\gamma t^{\frac{n}{\theta}} \int_{t-1}^{t} (t-\tau)^{-\frac{n}{2p}} \tau^{-\frac{n}{\theta}\left(\gamma-\frac{1}{p}\right)} d\tau \leqq C\rho^\gamma t^{\frac{n}{\theta}\left(1-\gamma+\frac{1}{p}\right)} \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{n}{2p}} d\tau \leqq C\rho^\gamma.$$

上の不等式は γ についての条件と $\frac{1}{p} < \gamma - 1$ を満たす p をとることによって得られ,ρ を十分小さくとることにより次の不等式が成り立つ.

$$K_{1,\infty}^{-1}(t) \|\mathcal{M}v(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leqq C\varepsilon + C\rho^\gamma \leqq \rho. \tag{10}$$

尚, 上の不等式の評価を $t > 2$ として扱ったが,$t \leqq 2$ の場合も同様に示すことができる. よって (9) と (10) により,

$$\|\mathcal{M}v\|_X \leqq C\epsilon + C\rho^\gamma \leqq \rho,$$

が成り立ち, 写像 $\mathcal{M}$ が ρ を十分小さくとることにより X_ρ からそれ自身に移すことがいえた. 同様に

$$0 < \exists r < 1 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathcal{M}v_1 - \mathcal{M}v_2\|_X \leqq r\|v_1 - v_2\|_X \quad \text{for} \quad v_1, v_2 \in X_\rho$$

を得ることが出来る. よって, 縮小写像の原理より時間大域解が存在することが示せた.

参考文献

[1] H.Fujita, *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, **13** (1966), pp. 109–124.

[2] Galaktionov V.A.,Pohozaev S.I, *Existence and blow-up for higher-order semilinear parabolic equations: majorizing order-preserving operators*, Indiana Univ. Math. J., **51**(2002), pp. 1321–1338.

[3] K. Hayakawa, *On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), pp. 503–505.

[4] K.Kobayashi, T.Sirao and H.Tanaka, *On the growing up problem for semi-linear heat equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), pp. 407–424.

[5] S.Sugitani, *On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations*, Osaka J. Math., **12** (1975), pp.45–51

[6] F. B. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math., **38** (1981),no1-2, pp.29–40.

On blow up rate for sign-changing solutions in a convex domain

Yoshikazu Giga[1] Shin'ya Matsui[2] and Satoshi Sasayama[3]

[1,3] *Hokkaido University, Department of Mathematics*

[2] *Hokkaido Information University, Department of Information Science*

SUMMARY

This paper studies a growth rate of a solution blowing up at time T of the semilinear heat equation $u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u = 0$ in a convex domain D in $\mathbf{R}^n$ with zero-boundary condition. For a subcritical $p \in (1, (n+2)/(n-2))$ a growth rate estimate $|u(x,t)| \leq C(T-t)^{-1/(p-1)}, x \in D, t \in (0,T)$ is established with C independent of t provided that D is uniformly C^2. The estimate applies to sign-changing solutions. The same estimate has been recently established when $D = \mathbf{R}^n$ by authors. The proof is similar but we need to establish $L^h - L^k$ estimate for a time-dependent domain because of the presence of the boundary.

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULTS

This is a continuation of our work [12] on a growth rate estimate of a blowup solution of a semilinear heat equation. We consider the initial-boundary value problem for the semilinear heat equation of the form

$$u_t - \Delta u - |u|^{p-1}\, u = 0 \quad \text{in} \quad D \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{at} \quad t = 0, \tag{1.3}$$

where D is a domain in $\mathbf{R}^n$ and $p > 1$. As well-known this problem admits a local-in-time solution u for a bounded initial data u_0, *i.e.*, $u_0 \in L^\infty(D)$ under suitable assumptions on D; however, the solution u may blow up at some T in the sense that $\limsup_{t\uparrow T} \|u\|_\infty(t) = \infty$, where $\|u\|_\infty(t) = \sup_{x\in D} |u(x,t)|$. Our main concern is a growth rate estimate of a blowup solution of (1.1)-(1.3) when p is subcritical in the sense that $1 < p < p_S(n)$ with the Sobolev critical number

$$p_S(n) = \begin{cases} (n+2)/(n-2) & n \geq 3, \\ \infty & n = 1, 2. \end{cases}$$

By a solution u of (1.1)-(1.3) we mean that $u \in C^{2,1}(D \times (0,T)) \cap C(\bar{D} \times [0,T))$ solves (1.1)-(1.3) and that u is bounded in $D \times (0, T_1)$ for any $T_1 \in (0,T)$ (if D is unbounded). Of course all blowup solution enjoys this property when $u_0 \in L^\infty(D)$. Our main result in this paper is

Theorem 1.1. Assume that $1 < p < p_S(n)$ and that D is a bounded, C^2 convex domain. Then there exists a constant C depending only on n, p, D and a bound for $T^{1/(p-1)}\|u_0\|_\infty$ such that any solution u of (1.1)-(1.3) fulfills

$$\|u\|_\infty(t) \leq C(T-t)^{-1/(p-1)} \quad \text{for} \quad t \in (0,T). \tag{1.4}$$

In these almost two decades an asymptotic behavior of a blowup solution near blowup point has been well studied. Here we only list some crucial earlier works by Giga and Kohn [9],[10],[11], Filippas and Kohn [5], Herrero and Velázquez [14],[15],[16] Merle and Zaag [21],[22]. As already pointed out by Giga and Kohn [9] the growth estimate like (1.4) is crucial in studying the asymptotic behavior. The bound (1.4) was first proved by Weissler [24] for a radial solution on a ball with rather restrictive initial data. The result was extended by Friedman and McLeod [6] when D is a smoothly bounded, convex domain with initial data satisfying $u_0 \geq 0$, $\Delta u_0 + u_0^p \geq 0$ but for all p including $p \geq p_S(n)$. Their assumption on initial data guarantees that $u \geq 0$ and $u_t \geq 0$ for all $t < T$ so that it excludes all possible oscillation of u in time. For a general initial data including sign-changing data the bound (1.4) was proved by Giga and Kohn [10] under more restrictive assumption of the form $p < (3n+8)/(3n-4)$ for $n \geq 2$ than $p < p_S(n)$. (They also proved (1.4) for all $p \in (1, p_S(n))$ under the assumption $u_0 \geq 0$ so that the solution is positive.) Theorem 1.1 is interpreted as an improvement of their result since we impose no assumption on sign of u_0 and no further restriction on p other than $p < p_S(n)$. Moreover, dependence of C on T and $\|u_0\|_\infty$ is explicit compared with earlier results. Similar result has been proved by the authors [12] for $D = \mathbf{R}^n$. The restriction $p < p_S(n)$ is optimal by the results of Filippas, Herrero and Velázquez [4] for $p = p_S(n)$ and Herrero and Velázquez [17] for a very large p. For a general domain not necessarily convex, (1.4) is proved by Fila and Souplet [3] only for a positive solution and for $p \in (1, 1+2/(n+1))$. For a Neumann problem the bound (1.4) has been recently proved by Ishige and Mizoguchi [18] for a positive solution and for $p \in (1, 1+2/n]$. In these two results dependence of C on T and $\|u_0\|_\infty$ is also implicit. By the way the power $-1/(p-1)$ in (1.4) is optimal since we always has the converse inequality with different C; see Giga [8].

Remark 1.2. The boundedness of D in Theorem 1.1 is unnecessary if D is uniformly C^2 in the sense that ∂D is of *positive reach* (Krantz and Parks [19]) and that all principal curvatures are bounded on ∂D; see Appendix for the definition of positive reach. In particular (1.4) is still valid when D is a half space. (If D is a bounded C^2 domain, then ∂D always has positive reach (Krantz and Parks [19, Theorem 4.4.10]). By the way ∂D has always positive reach if D is a C^2 convex domain and all principal curvatures are bounded on ∂D. See Appendix for the proof.

The basic strategy of the proof of Theorem 1.1 is similar to that in [12] where $D = \mathbf{R}^n$ is studied. We convert the problem to establish a uniform bound for a global solution of the rescaled equation (renormalized equation)

$$\rho w_s - \nabla \cdot (\rho \nabla w) + \beta \rho w - \rho |w|^{p-1} w = 0 \quad \text{in} \quad W_a \tag{1.5}$$

with

$$\begin{aligned} W_a &= \{(y,s); s > s_0 := -\log T, e^{-s/2}y + a \in D\} = \bigcup_{s>s_0} \Omega_a(s) \times \{s\}, \\ \rho(y) &= \exp(-|y|^2/4),\ \beta = 1/(p-1),\ a \in D,\ \Omega_a(s) = \{y; e^{-s/2}y + a \in D\}. \end{aligned}$$

This equation is obtained from (1.1) by rescaling the variables x, t, u by y, s, w and

$$w = w^a(y,s) = (T-t)^\beta u(a + y\sqrt{T-t}, t).$$

As in [12], Remark 2.1 we may assume $T = 1$ in Theorem 1.1 by scaling so we may assume $s_0 = 0$. By a regularizing effect (cf. [12, §3.3]) we may assume that $u, \nabla u, \nabla^2 u$ and u_t are bounded and continuous on $\bar{D} \times [0, T_1]$ for each $T_1 < T$. The corresponding w now satisfies

$$\begin{cases} w, \nabla w, \nabla^2 w & \text{and} \quad (1+|y|)^{-1} w_s & \text{are bounded and} \\ \text{continuous} & \text{on} \quad \cup_{S \geq s \geq 0} \bar{\Omega}_a(s) \times \{s\} & \text{for each } S < \infty. \end{cases} \tag{1.6}$$

As in [12, §4] Theorem 1.1 follows from the following uniform bound for w (independent of a).

Theorem 1.3. (Uniform bound) Assume that $1 < p < p_S(n)$ and that D is uniformly C^2 convex domain. Then there exists a constant $R_0 = R_0(n, p, D) > 0$ such that the estimate

$$\|w\|_{L^\infty(B_{R_0} \cap \Omega_a(s))} \leq C \quad \text{for} \quad s \geq 0 \tag{1.7}$$

holds for all w satisfying (1.5) (with $s_0 = 0$), (1.6) and the boundary condition

$$w = 0 \quad \text{on} \quad \bigcup_{s>0} \partial\Omega_a(s) \times \{s\} \tag{1.8}$$

with some constant C depending only on n, p, D and a bound for $\|w_0\|_\infty$, where w_0 is the initial value of w. The constant C is independent of $a \in D$. (Here B_R denotes the open ball of radius R centered at the origin of $\mathbf{R}^n$.)

Indeed, (1.8) implies that $|u(a,t)| \leq C_R(1-t)^{-1/(p-1)}$ by fixing $R < R_0$ (independent of a). Since a is arbitrary, this implies (1.4) with $T = 1$. For a whole space problem we are able to choose R_0 arbitrary [12].

This uniform bound follows from the following integral bound.

Theorem 1.4. (Key integral estimate) Assume that $1 < p < p_S(n)$ and that D is uniformly C^2 convex domain. For each $q \geq 2$ there exists a constant $R_1 = R_1(n, p, q, D) > 0$ such that the estimate

$$(A_{q,R_1}) \quad \sup_{s \geq 0} \int_s^{s+1} \|w(\cdot, \tau); L^{p+1}(\Omega_a^{R_1}(\tau))\|^{(p+1)q} d\tau \leq \hat{C}_q, \quad a \in D$$

holds for all w satisfying (1.5),(1.6) and (1.8) with some constant $\hat{C}_q$ depending only on n, p, D and a bound for $E[w](0)$ and for $\|w_0\|_{BC^2(D)}$, where $\Omega_a^{R_1}(\tau) = \Omega_a(\tau) \cap B_{R_1}$.

Here $BC^m(D)$ denotes the Banach space of all C^m functions on D such that all derivatives up to m-th order are bounded in D. The quantity $E[w](\tau)$ denotes the energy of the equation (1.5) which is defined by

$$E[w](\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\tau)} (|\nabla w|^2 + \beta |w|^2) \rho dy - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega(\tau)} |w|^{p+1} \rho dy, \tag{1.9}$$

where $w = w(\cdot, \tau)$.

The way to derive uniform bound from integral estimate is essentially known by Giga and Kohn [10]. Actually, they proved only $(A_{2,R})$ which yields a uniform bound (1.7) but they are forced to assume that $1 < p < (3n+8)/(3n-4)$. To derive (1.7) we apply an interpolation theorem due to Cazenave and Lions [2] and an interior and boundary regularity theorem for linear parabolic equations found in

Ladyzhenskaya, Solonnikov and Ural'ceva [20] as discussed by Giga and Kohn [10]. We also need some regularizing effect to complete the proof of Theorem 1.3 as discussed by the authors [12, §4]. Estimate $(A_{q,R})$ for arbitrary $q \geq 2$ enables us to prove (1.7) for all $p \in (1, p_S(n))$.

The integral estimate $(A_{2,R})$ (for all $R > 0$) is obtained by integral identities involving the energy (1.9) as proved by Giga and Kohn [10, Propositions 2.1, 2.2]. For example we have

$$\int_{\Omega_a(s)} |w_s|^2 \rho dy = -\frac{d}{ds} E[w](s) - \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega_a(s)} (y \cdot \nu) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \rho d\sigma,$$

where ν is the exterior unit normal vector to $\partial\Omega(s)$ and $d\sigma$ is surface area element. If D is convex, then evidently the last term is negative, so we have

$$\int_{\Omega_a(s)} |w_s|^2 \rho dy \leq -\frac{d}{ds} E[w](s).$$

This in particular implies that $E[w](s)$ is decreasing in s. Using another identity obtained by multiplying w with (1.5), we also observe that $E[w](s) \geq 0$ if w is a global solution of (1.5) and (1.8). Thus under the assumption of convexity of D we have

$$0 \leq E[w](s) \leq E[w](0) \quad \text{for} \quad s \geq 0. \tag{1.10}$$

To obtain integral estimate $(A_{q,R})$ for $q > 2$ it is convenient to introduce a localized energy of the form

$$\mathcal{E}_\varphi[w](s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_a(s)} \varphi^2 (|\nabla w|^2 + \beta |w|^2) \rho dy - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_a(s)} \varphi^2 |w|^{p+1} \rho dy,$$

where φ is a cut-off function of a ball. Of course $\mathcal{E}_\varphi[w] = E[w]$ if $\varphi \equiv 1$. Such a localized energy was first introduced by the authors [12]. An argument similar to that in [12] yields bounds for $\mathcal{E}_\varphi[w]$, which is weaker than (1.10) for global energy $E[w]$.

Lemma 1.5. (Bounds for a localized energy) Assume that $p > 1$ and that D is a convex domain. Then there exist positive constants L_1 and L_2 depending only on $n, p, M_j (j = 0, 1, 2)$ and a bound for $E[w](0)$ and for $\|w_0\|_\infty$ such that

$$-L_2 \leq \mathcal{E}_\varphi[w](s) \leq L_1 \quad \text{for all} \quad s \geq 0 \tag{1.11}$$

for all w satisfying (1.5),(1.6) and (1.8) provided that $\varphi \in BC^2(\mathbf{R}^n)$ satisfies $\|\varphi\|_\infty \leq M_0$, $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq M_1$, $\|\Delta\varphi\|_\infty \leq M_2$.

We note that the convexity of D is substantially invoked here to prove (1.10) and also (1.11).

For a given ball B_R we fix a cut-off function φ of B_R defined by

$$\varphi(x) = \phi(|x|/R), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

with $\phi \in C^\infty[0, \infty)$ satisfying $\phi(\eta) = 1$ for $\eta \leq 1$, $\phi(\eta) = 0$ for $\eta \geq 2$ and $0 \leq \phi \leq 1$ on $[0, \infty)$; we shall fix such a φ depending on R. As in [12] thanks to a lower bound (1.11) for $\mathcal{E}_\varphi$ we observe that the following bound in an L^2- Sobolev space $W^{1,2}$ is sufficient to prove Theorem 1.5.

Theorem 1.6. (Key $W^{1,2}$- bound) Assume that $1 < p < p_S(n)$ and that D is uniformly C^2 convex domain. For each $q \geq 2$ there exists a constant $R_1 = R_1(n,p,q,D) > 0$ such that the estimate

$$(B_{q,R_1}) \quad \sup_{s\geq 0} \int_s^{s+1} \|w(\cdot,\tau); W^{1,2}(\Omega_a^{R_1}(\tau))\|^{2q} d\tau \leq C_q, \quad a \in D$$

holds for all w satisfying (1.5), (1.6) and (1.8) with some constant C_q depending only on 8, n, p, D and a bound for $E[w](0)$ and for $\|w_0\|_{BC^2(D)}$.

It remains to prove $W^{1,2}$- bound. The basic strategy is a bootstrap argument which is basically similar to the case $D = \mathbf{R}^n$ discussed in [12, §6]. The estimate $(B_{2,R})$ for all $R > 0$ is easily proved by global theory developed by Giga and Kohn [10]; see [12, Proposition 6.1.]. Assume that $(B_{q,2R})$ holds. Then by an upper bound (1.11) for $\mathcal{E}_\varphi$ we have

$$\|w(\cdot,\tau); W^{1,2}(\Omega_a^R(\tau))\|^2 \leq L_3(1 + \|\varphi w \varphi w_s(\cdot,\tau); L^1(\Omega_a^{2R}(\tau))\|)$$

with a constant $L_3 = L_3(n,p,R,M_1,M_2)$ as in [12, Proposition 6.3.]. We estimate φw- part by $(A_{q,2R})$ and the interpolation theorem due to Cazenave and Lions [2] and φw_s - part by $L^h - L^k$ estimate for a linear parabolic equation for which we should be careful because of the presence of the boundary. This $L^h - L^k$ estimate (Theorem 2.1) is a main technical contribution of this paper. Upper and lower bounds (1.11) for $\mathcal{E}_\varphi$ enable us to prove $(B_{\tilde{q},R})$ for all $\tilde{q} \in (q, q+2/(p+1))$. We repeat this procedure infinitely many times to obtain $(B_{q,R})$ for arbitrary $q \geq 2$ with some R and complete the proof of Theorem 1.6. A similar bootstrap argument has been developed by Quittner [23], where he established a global bound for a sign-changing global solution of (1.1)-(1.2) for any smoothly bounded domain. In that case the problem is global in space so there is no need to localize the energy.

In the next section we shall discuss $L^h - L^k$ estimate (Theorem 2.1) for a heat equation in a time-dependent domain which is essential to estimate φw_s- part.

2. HEAT EQUATION IN A TIME DEPENDENT DOMAIN

Our goal in this section is to prove $L^h - L^k$ estimate for the heat equation in W_a. The convexity of the domain is unnecessary. To simplify the notation we set

$$Q_{as_1s_2} = W_a \cap \{s_1 \leq s < s_2\} = \{(y,s) \in W_a; s_1 \leq s < s_2\}$$

and

$$S_{as_1s_2} = \bigcup_{s_1 \leq s < s_2} \partial\Omega_a(s) \times \{s\}.$$

For f defined in $Q_{as_1s_2}$ we define for $\tau \in [s_1, s_2)$

$$\|f\|_k(\tau) = (\int_{\Omega_a(\tau)} |f|^k dy)^{1/k}, \quad \|f\|_{BC^2}(\tau) = \max_{0\leq k\leq 2} \sup_{y\in\Omega_a(\tau)} |\nabla^k f(y,\tau)|.$$

Theorem 2.1. Assume that $1 < h,\ k < \infty$ and $\Lambda > 0$ and that D is a uniformly C^2 domain in $\mathbf{R}^n$. Then there exists constants $R_*(h,k,n,D) > 0$ and $C_* = C_*(h,k,n,D,\Lambda)$ such that the estimate

$$\int_{s_1}^{s_2} \{\|w_s\|_k^h(s) + \|\nabla^2 w\|_k^h(s)\} ds \leq C_*(\int_{s_1}^{s_2} \|f\|_k^h(s) ds + \|w\|_{BC^2}^h(s_1)) \tag{2.1}$$

holds for all $w \in C^{2,1}(Q_{as_1s_2}) \cap C(\bar{Q}_{as_1s_2})$ satisfying

$$w_s - \Delta w = f \quad \text{in} \quad Q_{as_1s_2}, \tag{2.2}$$

$$w = 0 \quad \text{on} \quad S_{as_1s_2}, \tag{2.3}$$

$$\text{supp } w \subset B_{R_*} \times [s_1, s_2) \cap \overline{Q}_{as_1s_2} \tag{2.4}$$

with $s_2 > s_1 \geq 0$, $s_2 - s_1 \leq \Lambda$. and for all $a \in D$. (In particular constants R_* and C_* are independent of $a \in D$.)

To prove Theorem 2.1 one way would be to use $L^h - L^k$ estimate of $u_t + A(t)u = f$, where $A(t)$ is a time-dependent elliptic operator by changing $\Omega_a(s)$ to D. Although such an estimate is established in an abstract level by Giga, Giga and Sohr [7] and Yamamoto [25], our main purpose is to estimate w_s not u_t for a fixed domain which is not comparable. So we shall prove (2.1) be localizing the problem and by reducing it to a half space $L^h - L^k$ estimate.

For this purpose we recall an $L^h - L^k$ estimate for the heat equation in the whole space $\mathbf{R}^n$ and the half space $\mathbf{R}^n_+ = \{(x', x_n); x_n > 0\}$; see e.g. book of Amann [1] or a paper by Giga and Sohr [13].

Lemma 2.2. Assume that $\Omega = \mathbf{R}^n$ or $\mathbf{R}^n_+$ and that $1 < h,\ k < \infty$ and $R > 0$. Then there exist constants $C_1 = C_1(h, k, n)$ and $C_2 = C_2(h, k, n, R)$ such that

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\|v_t\|_k^h(t) + \|\nabla^2 v\|_k^h(t)\} dt \leq C_1 \int_{t_1}^{t_2} \|v_t - \Delta v\|_k^h(t) dt + C_2 \|v\|_{BC^2}^h(t_1) \tag{2.5}$$

for all $v \in C^{2,1}(\Omega \times [t_1, t_2)) \cap C(\bar{\Omega} \times [t_1, t_2))$ satisfying $v = 0$ on $\partial\Omega \times [t_1, t_2)$(if $\partial\Omega \neq \emptyset$) with supp $v(t_1) \subset B_R$.

In the literature the last term is often replaced by some Besov norm of $v(t_1)$ which is dominated by $BC^2(\Omega)$ norm by restricting support of $v(t_1)$. The second term $\|\nabla^2 v\|_h^k$ is often replaced by a weaker norm $\|\Delta v\|_k^h$ but it is equivalent for $\Omega = \mathbf{R}^n$ or $\mathbf{R}^n_+$ with the Dirichlet condition by the Calderón - Zygmund inequality.

We shall first establish an $L^h - L^k$ estimate for the heat equation when D is close to a half space. For $\xi \in BC^2(\mathbf{R}^{n-1})$ with $\xi(0) < 0$ let D be the domain of the form

$$D = \{(y', y_n) \in \mathbf{R}^n; y_n > \xi(y')\}.$$

Evidently D contains the origin and $\Omega_0(s) \uparrow \mathbf{R}^n$ as $s \to \infty$, where

$$\Omega_0(s) = e^{s/2}D = \{e^{s/2}y; y \in D\}.$$

We simply write $Q_{s_1s_2}$ instead of $Q_{0s_1s_2}$.

By the definition we observe that

$$Q_{s_1s_2} = \{(y', y_n, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R};\ y_n > \xi^s(y'),\ s_1 \leq s < s_2\}$$

with $\xi^s(y') := e^{s/2}\xi(e^{-s/2}y')$. Since $\xi(0) < 0$, the minimum time for $B_R \subset \Omega_0(s)$ defined by

$$s_*(R, \xi) = \inf\{s \geq 0; B_R \subset e^{s/2}D\} \tag{2.6}$$

is finite. If

$$\sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |\nabla \xi| \le 1, \quad \text{so that} \quad \sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |\nabla \xi^s| \le 1,$$

we observe, by definition of s_* and geometry, that

$$\sup_{|y'|<R} |\xi^s(y')| \le (\sqrt{2}+1)R \quad \text{for} \quad s \in [0, s_*]. \tag{2.7}$$

Thus

$$\sup_{|y'|<R} |\xi^s(y')| \le e^{(s-s_*)/2}(\sqrt{2}+1)R \quad \text{for all} \quad s \ge s_*. \tag{2.8}$$

Lemma 2.3. Assume that $1 < h,\ k < \infty,\ 0 < \Lambda,\ N,\ R < \infty$. Then there exist constants $\delta = \delta(h,k,n) \in (0,1)$, $C_3 = C_3(h,k,n)$, $C_4 = C_4(N,\Lambda,R,h,k,n)$ and $C_5 = C_5(h,k,n,R)$ such that

$$\int_{s_1}^{s_2} \{\|w_s\|_k^h(s) + \|\nabla^2 w\|_k^h(s)\} ds \le C_3 \int_{s_1}^{s_2} \|f\|_h^k(s) ds + C_4 \int_{s_1}^{s_2} \|w\|_k^h(s) ds + C_5 \|w\|_{BC^2}^h(s_1) \tag{2.9}$$

for all $w \in C^{2,1}(Q_{s_1 s_2}) \cap C(\bar{Q}_{s_1 s_2})$ satisfying (2.2)-(2.4) (with $R_* = R$) provided that $s_2 - s_1 \le \Lambda,\ 0 \le s_1 \le s_2,\ \sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |\nabla \xi| \le \delta,\ \sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |\nabla^2 \xi| \le N$.

Proof. If $s_1 \ge s_*$ where s_* is defind in (2.6), we apply $L^h - L^k$ estimate (2.5) for $\mathbf{R}^n$ (Lemma 2.2) to get (2.9) with $C_4 = 0$ without any restriction on δ. So we may assume that $s_1 < s_*$.

We introduce a time-dependent change of coordinates to make $S_{s_1 s_2}$ flat and time-independent: let $v(x,t) = w(y,s)$ with

$$x_n = y_n - \xi^s(y'), \quad x' = y', \quad t = s.$$

Since $\nabla_{y'} \xi^s(y') = (\nabla \xi)(e^{-s/2} y')$, the Jacobian J of the mapping $(y', y_n) \mapsto (x', x_n)$ fulfills $|J| = 1$ if $\kappa = \sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |\nabla \xi|$ is small, say $\kappa \le \delta_0 < 1$, where $\delta_0 = \delta_0(n)$. We shall assume that $\kappa \le \delta_0$. Then the norms $\|v\|_k(t)$ and $\|w\|_k(s)$ is comparable in the sense that there is a constant $\lambda = \lambda(k,n)$

$$\lambda^{-1} \|w\|_k(s) \le \|v\|_k(t) \le \lambda \|w\|_k(s). \tag{2.10}$$

Since w solves (2.2) and (2.3), v solves a linear parabolic equation in $\mathbf{R}^n_+ \times (s_1, s_2)$ with $v = 0$ on the boundary. The parabolic equation v solves is easily calculated. We note that

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_n}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_n}, \\ \nabla_{y'} &= \nabla_{x'} + \nabla_{y'} x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial}{\partial y_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \end{aligned}$$

with

$$\frac{\partial x_n}{\partial s} = -\frac{1}{2}\xi^s(y') + \frac{1}{2} y' \cdot \nabla \xi(e^{-s/2} y'), \quad \nabla_{y'} x_n = -\nabla \xi(e^{-s/2} y').$$

By (2.7) and (2.8) we see that

$$\left| \frac{\partial x_n}{\partial s} \right| \le C' = C'(\Lambda, R) \quad \text{on} \quad B_R \times [s_1, s_2] \cap Q_{s_1, s_2} \tag{2.11}$$

of $s_2 - s_1 \le \Lambda$. Thus (2.2) is transformed into

$$v_t = \Delta v + p(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} v + \sum_{j=1}^{n-1} 2 p_j(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_n} v + g(x,t) \frac{\partial}{\partial x_n} v + \tilde{f} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n_+ \times (s_1, s_2)$$

with $|p(x,t)| \le \kappa^2$, $|p_j(x,t)| \le \kappa$ $(j = 1, \dots, n-1)$, $|g(x,t)| \le C' + N$, where N is a bound for $|\nabla^2 \xi|$ in $\mathbf{R}^{n-1}$ and $\tilde{f}(x,t) = f(y,s)$. We now apply (2.5) with $\Omega = \mathbf{R}^n_+$ and obtain that

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\|v_t\|_k^h + \|\nabla^2 v\|_k^h\} dt \le C_1 \left(\int_{t_1}^{t_2} (\kappa^h \|\nabla^2 v\|_k^h + C'' \|\nabla v\|_k^h + \|\tilde{f}\|_k^h) dt \right) + C_2 \|v\|_{BC^2}^h (t_1)$$

with $C'' = (C' + N)^h$. We take $\delta \in (0, \delta_0)$ small so that $C_1 \delta^h < 1/2$ to absorb the first term in RHS to LHS if $\kappa < \delta$. By (2.10) and (2.11) we see that

$$\|w_s\|_k(s) \le \lambda(\|v_t\|_k(t) + C' \|\nabla v\|_k(t)), \ \|\nabla^2 w\|_k \le \lambda(1 + 2\kappa)\|\nabla^2 v\|_k + \lambda N \|\nabla v\|_k.$$

These observations yields (2.1) if we use an interpolation

$$\|\nabla v\|_k \le \varepsilon \|\nabla^2 v\|_k + C_\varepsilon \|v\|_k$$

for small $\varepsilon > 0$. □

Proof of Theorem 2.1. Since the principal curvature of ∂D is bounded on ∂D , for a given $\delta > 0$ there exists a small number $r_0 > 0$ such that for any $x_0 \in \partial D$ the hypersurface ∂D in $B_{2r_0}(x_0)$ is represented as the graph $x_n = \xi(x')$ up to rotation with some $\xi \in C^2(\overline{B_{2r_0}(x_0')})$ satisfying

$$\nabla \xi(x_0') = 0 \quad \text{and} \quad \sup_{|x' - x_0'| \le 2r_0} |\nabla \xi(x')| \le \delta/2.$$

Here $B_R(x_0)$ is an open ball centered at $x_0 \in \mathbf{R}^n$ and $x_0 = (x_0', x_{0n})$. Note that $r_0 > 0$ can be taken independent of x_0. We may assume that D is located in $x_n > \xi(x')$.

Since ∂D is of positive reach, we may assume that for any $x \in B_{2r_0}(x_0)$ there is unique $z \in \partial D$ such that $\mathrm{dist}(x, z) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ by taking $r_0 = r_0(\delta)$ smaller.

We now take $\delta = \delta(h, k, n)$ as in Lemma 2.3 and fix $r_0 = r_0(\delta, D)$. We divide D into two parts

$$D_1 = \{a \in D; \mathrm{dist}(a, \partial D) \ge r_0\}, \quad D_2 = \{a \in D; \mathrm{dist}(a, \partial D) < r_0\}$$

and take $R_* = r_0$. If a is not close to ∂D in the sense that $a \in D_1$, then $\overline{B_{R_*}(a)} \times [s_1, s_2] \subset Q_{a s_1 s_2}$ so one is able to apply $L^h - L^k$ estimate (2.5) for $\mathbf{R}^n$ (Lemma 2.2) to get (2.1). For $a \in D_2$ there is a unique $x_0 \in \partial D$ such that $\eta = \mathrm{dist}(a, x_0) = \mathrm{dist}(a, \partial D)$. By rotation and translation we may assume that $a = 0$ and $x_0 = (0, -\eta)$. We take ξ as above and represent $D \cap B_{2r_0}(x_0)$ by $x_n > \xi(x')$, $x' \in B_{2r_0}(0)$. We extend ξ outside $\bar{B}_{2r_0} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ such that

$$\sup_{x' \in \mathbf{R}^{n-1}} |\nabla \xi(x')| \le \delta.$$

Since $B_{R_*} \times [s_1, s_2] \cap S_{a s_1 s_1} \subset B_{2r_0}(x_0) \times [s_1, s_2] \cap S_{a s_1 s_2}$, we are able to apply $L^h - L^k$ estimate in Lemma 2.3. Applying a Poincaré type inequality

$$\int_{s_1}^{s_2} \|w\|_k^h \mathrm{ds} \le C_0 \left(\int_{s_1}^{s_2} \|w_s\|_k^h \mathrm{ds} + \|w\|_k^h (s_1) \right)$$

to (2.9) yields (2.1). □

Using Theorem 2.1 we are able to estimate $w_s \varphi$ term as in [12, Lemma 6.4.]. The only difference is that R should be small so that $2R \le R_* = R_*(p_1, \theta \tilde{q} \alpha', n, D)$. We also need a boundary version of a regularing effect [12, Lemma 6.6.] for the proof; see also Giga and Kohn [10, Proposition 3.4.].

APPENDIX

Lemma A. Let D be a C^2 convex domain in $\mathbf{R}^n$ with $n \geq 2$. Assume that all principal curvatures of ∂D is bounded. Then ∂D is of positive reach, that is there exists $r > 0$ such that for all $x \in D$ $\mathrm{dist}(x, \partial D) < r$ implies that there is a unique point $\xi \in \partial D$ with $|x - \xi| = \mathrm{dist}(x, \partial D)$.

Proof. Let $\kappa > 0$ be a bound of all principle curvatures of ∂D. We shall assert that for each point $x_0 \in \partial D$ there is a ball B of radius $1/\kappa$ contained in D such that $\partial B \cap \partial D = \{x_0\}$. This is an interior ball condition which guarantees the positive reach of ∂D. For $n = 2$ such a property is easily proved since ∂D is a convex curve. For $n \geq 3$ it can be proved by induction on n. If there is $x_0 \in \partial D$, $y_0 \in \partial D$ such that B is tangent to ∂D at x_0 and that $y_0 \in B$ although B is contained in D near x_0 by the rotation of the curvature. Let H be a hyperplane containing x_0 and y_0. Then $D \cap H$ does not satisfy the interior ball condition (of radius $1/\kappa$) which contradicts the induction assumption for $n - 1$. □

References

[1] Amann H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Volume I : Abstract Linear Theory.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[2] Cazenave T, Lions PL. Solution globales d'équations de la chaleur semi linéaies. *Comm. Partial Differential Equations.* 1984; **9**:955-978.

[3] Fila M, Souplet P. The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 2001; **8**:473-480.

[4] Filippas S, Herrero MA, Velázquez JJL. Fast blow-up mechanisms for sign-changing solutions of a semilinear parabolic equation with critical nonlinearity. *Proc. Royal Soc. Lond. A* 2000; **456**:2957-2982.

[5] Filippas S, Kohn RV. Refined asymptotics for the blowup of $u_t - \Delta u = u^p$. *Comm. Pure Appl. Math.* 1992; **45**:821-869.

[6] Friedman A, McLeod B. Blowup of positive solutions of semilinear heat equations. *Indiana Univ. Math. J.* 1985; **34**:425-447.

[7] Giga M, Giga Y, Sohr H. L^p estimate for abstract linear parabolic equations. *Proc. Japan. Acad. Ser A.* 1991; **67**: 197-202.

[8] Giga Y. Solutions for semilinear parabolic equations L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. *J. Differential Equations* 1986; **62**:541-554.

[9] Giga Y, Kohn RV. Asymptotically self-similar blowup of semilinear heat equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 1985; **38**:297-319.

[10] Giga Y, Kohn RV. Characterizing blowup using similarity variables. *Indiana Univ. Math J.* 1987; **36**:1-40.

[11] Giga Y, Kohn RV. Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1989; **42**:845-884.

[12] Giga Y, Matsui S, Sasayama S. Blow up rate for semilinear heat equation with subcritical nonlinearity. *Indiana Univ. Math. J.* to appear

[13] Giga Y, Sohr H. Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with application to the Navier-Stokes equations in exterior domains. *J. Functional Anal.* 1991; **102**:72-94.

[14] Herrero MA, Velázquez JJL. Blow-up profiles in one-dimensional, semilinear parabolic problems. *Comm. Partial Differential Equations.* 1992; **17**:205-219.

[15] Herrero MA, Velázquez JJL. Flat blow-up in one-dimensional semilinear heat equations. *Differential and Integral Equations.* 1992; **5**:973-997.

[16] Herrero MA, Velázquez JJL. Blow-up behaviour of one-dimensional semilinear parabolic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 1993; **10**:131-189.

[17] Herrero MA, Velázquez JJL. Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1994; **319**:141-145.

[18] Ishige K, Mizoguchi N. Blow-up behavior for semilinear heat equation with Neumann boundary conditions. *Preprint.*

[19] Krantz SG, Parks HR. *The Implicit Function Theorem, History, Theory and Applications.* Birkhäuser, Boston, 2002.

[20] Ladyzenskaya OA, Solonnikov VA, Ural'ceva NN. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* Amer. Math. Soc.: Providence, 1968.

[21] Merle F, Zaag H. Stability of the blow-up profile for equations of the type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$. *Duke Math. J.* 1997; **86**:143-195.

[22] Melre F, Zaag H. Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1998; **51**:139-196.

[23] Quittner P. A priori bounds for global solutions of a semilinear parabolic problem. *Acta Math. Univ. Comenianae* 1999; **68-2**:195-203.

[24] Weissler FB. An L^∞ blowup estimate for a nonlinear heat equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 1985; **38**: 291-296.

[25] Yamamoto Y. Solution in L^p of abstract parabolic equations in Hilbert spaces. *J. Math. Kyoto Univ.* 1993; **33**: 299-314.

非線形熱方程式の大域解の存在・非存在について

五十嵐 威文（日本大学大学院理工学研究科数学専攻D 3）

igarashi@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

1 Introduction

We consider the initial value problem

$$(\mathrm{IVP})\begin{cases} u_t - \Delta u = k(x)u + h(x,t)u^p & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = a(x) \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Here we assume that $k \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $h \in C(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$, $h(x,t) \geq 0$, initial data $a \in BC^2(\mathbf{R}^n) \equiv C^2(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ and $p > 1$. Moreover, we shall only deal with classical solutions, that is, $u \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbf{R}^n \times [0,T))$.

In the case of $k(x) \equiv 0$ and $h(x,t) \equiv 1$, (IVP) is reduced to the so-called Fujita type, then the results of Fujita [1], Hayakawa [2] and Kobayashi-Sirao-Tanaka [3] are well-known, but they are as follows,

- If $1 < p \leq 1 + 2/n$, then (IVP) does not have any global positive solution for any nontrivial initial data $a(x)$.
- If $p > 1 + 2/n$, then (IVP) has global positive solutions for sufficiently small initial data $a(x)$.

In the case of $k(x) \equiv 0$ and $h(x,t) = h(t)$, the results of Meier [4] are known. In the case of $k(x) \equiv 0$ and $h(x,t) = |x|^\sigma t^q$ with $\sigma > -2$ and $q \geq 0$, the results of Qi [5] are known. In the case of $h(x,t) \equiv 0$, Zhang [7, 8, 9] constructed the fundamental solution, and has obtained some interesting results by virtue of his fundamental solution. In the case of $h(x,t) \equiv 1$, the results of Zhang [6] are known. In this paper, we are studying the existence and nonexistence of global solutions for more general equations than those of the preceding authors.

2 Preliminaries and Main Results

We sum up the results obtained by Qi S.Zhang [7, 8, 9].

For some $b > 0$ depending on k, we write

$$G_b(x,t;y,s) \equiv \frac{1}{(t-s)^{n/2}} \exp\left(-b\frac{|x-y|^2}{t-s}\right), \tag{1}$$

where $x, y \in \mathbf{R}^n,\ t > s$.

Qi S.Zhang proved existence of the fundamental solution to the equation

$$u_t - \Delta u = k(x)u, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \tag{2}$$

and obtained the followng interesting and convenient result.

Lemma 1
Suppose that for $b_1 > 2$ and a sufficiently small $\delta > 0$,

$$0 \le k(x) \le \frac{\delta}{1+|x|^{b_1}},$$

or that for $b_1 > 2$ and a given number $a > 0$,

$$-\frac{a}{1+|x|^{b_1}} \le k(x) \le 0.$$

Then the equation (2) has a fundamental solution $G = G(x,t;y,0)$, and G has global Gaussian lower and upper bounds, i.e.

$$\frac{1}{C}G_{\frac{1}{b}}(x,t;y,s) \le G(x,t;y,s) \le CG_b(x,t;y,s)$$

for all $x, y \in \mathbf{R}^n$, all $t > s$ and some positive constants C and b.

Proof. See [7, Theorem C], [8, Lemma 6.1] or [9, Theorem A, Part (b)]. ∎

Our main results are the following theorem.

Theorem 1
Suppose that for $b_1 > 2$ and a sufficiently small $\delta > 0$,

$$0 \le k(x) \le \frac{\delta}{1+|x|^{b_1}}, \tag{3}$$

or that for $b_1 > 2$ and a given number $a > 0$,

$$-\frac{a}{1+|x|^{b_1}} \le k(x) \le 0. \tag{4}$$

1. *Assume that for any given number $a_1 > 1$, there exists $h_0 \in C([0,\infty))$ such that*

   $$h(x,t) \ge h_0(t) \ge (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r, \quad q > -1, \ r \in \mathbf{R}.$$

   (a) *If $1 < p \le 1+(2q+2)/n$, then* (IVP) *does not have any global positive solution for any nontrivial initial data $a(x)$ when $r > 0$.*

   (b) *If $1 < p < 1+(2q+2)/n$, then* (IVP) *does not have any global positive solution for any nontrivial initial data $a(x)$ when $r \le 0$.*

2. *Assume that for any given number $a_1 > 1$, there exists $h_1 \in C([0,\infty))$ such that*

   $$0 \le h(x,t) \le h_1(t) \le (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r, \quad q > -1, \ r \in \mathbf{R}.$$

   (a) *If $p > 1+(2q+2)/n$, then* (IVP) *has global positive solutions for some initial data $a(x) \in S$ when $r \ge -1$, where the set S is defined as follows*

   $$S = \{a(x) \in BC^2(\mathbf{R}^n) \mid 0 \le a(x) \le \delta_1 G_b(x,\gamma;0,0), \gamma > 0, \delta_1 > 0\}.$$

(b) *If* $p \geq 1 + (2q+2)/n$*, then* (IVP) *has global positive solutions for some initial data* $a(x) \in S$ *when* $r < -1$.

Remark 1
We denote the critical exponent by $p^* = p^*(q,n)$*. According to the Theorem 1, in case of* $h(x,t) = (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r$*, if* $k(x)$ *satisfies (3) or (4), then*

$$p^* = 1 + \frac{2q+2}{n}, \quad q > -1. \tag{5}$$

In section 3, we prove that there are no global positive solutions if $1 < p \leq p^*$; that is, we prove the part 1 of Theorem 1.

In section 4, we prove that for $p \geq p^*$, there exist global positive solutions for sufficiently small initial data; that is, we prove the part 2 of Theorem 1.

3 The case $1 < p \leq p^*$ (Global nonexistence)

3.1 Preliminary

We shall prove our result by applying the previous lemma. As a preparation, we state the following definitions and propositions.

Definition 1
T being a positive number, $\Sigma[0,T)$ *denotes the set of all* $C(\mathbf{R}^n \times [0,T))$*-functions* $u = u(x,t)$ *satisfying*

$$|u(x,t)| \leq M \exp\left(|x|^\beta\right), \quad (x \in \mathbf{R}^n, 0 \leq t < T)$$

with some constants $M > 0$ *and* $0 < \beta < 2$*.* M *and* β *may depend on* u*. Furthermore,* $\Sigma[0,\infty)$ *denotes the set of all* u *which belongs to* $\Sigma[0,T)$ *for any* $T > 0$.

Definition 2
$\Pi[0,\infty)$ *denotes the set of all* $C(\mathbf{R}^n \times [0,T))$*-functions* $u = u(x,t)$ *such that the inequality*

$$0 \leq u(x,t) \leq MG_b(x, t+\gamma; 0, 0) \quad (x \in \mathbf{R}^n, t \geq 0)$$

is satisfied for some constants $M > 0$*,* $b > 0$ *and* $\gamma > 0$*.* M *may depend on* u.

Proposition 1
Let u *be a classical solution of* (IVP) *in* $\Sigma[0,T)$ *for* $T > 0$*. Then* u *satisfies the integral equation* $u = u_0 + \Phi u$ *in* $0 \leq t < T$*, where*

$$u_0(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,0)a(y)dy, \tag{6}$$

$$(\Phi u)(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,s)h(y,s)u^p(y,s)dyds. \tag{7}$$

Proposition 2
Let $u \in C(\mathbf{R}^n \times [0,T))$ be a nonnegative solution of $u = u_0 + \Phi u$. Suppose that u is bounded in $\mathbf{R}^n \times [0,T)$. Then $\nabla_x u, \nabla_x \nabla_x u$ and u_t are continuous and bounded in $\mathbf{R}^n \times [0,T)$, and u is a classical solution of (IVP).

The previous propositions are obtained by using the fundamental solution G which has global Gaussian lower and upper bounds proved by Qi S.Zhang [7, 8, 9] and by applying the technique originated by H. Fujita [1, Appendix].

3.2 Proof of nonexistence of global positive solutions

This is proved by following Fujita's [1] original argument. Suppose u is a global positive solution of (IVP). By Proposition 1, we know that u solves the integral equation

$$u(x,t) = u_0(x,t) + (\Phi u)(x,t),$$

for all $x \in \mathbf{R}^n$ and $0 \le t < T$.

Let $T > 1$. Multiplying $G(x,T;0,t)$ on both sides of the above and integrating with respect to x, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} G(x,T;0,t)u(x,t)dx &= \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} G(x,T;0,t)G(x,t;y,0)dx\ a(y)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} G(x,T;0,t)G(x,t;y,s)dx\ h(y,s)u^p(y,s)dyds. \end{aligned}$$

Using the semi-group property of G, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} G(x,T;0,t)u(x,t)dx &\ge \int_{\mathbf{R}^n} G(y,T;0,0)a(y)dy \\ &+ C\int_0^t h_0(s)\left[\int_{\mathbf{R}^n} G(y,T;0,s)u(y,s)dy\right]^p ds. \end{aligned}$$

Without loss of generality we assume that $a(x)$ is strictly positive in a neighborhood of 0. By Lemma 1, using the lower bound assumption for G, we can then find a constant $C > 0$ such that

$$\int_{\mathbf{R}^n} G(y,T;0,0)a(y)dy \gtrsim C\int_{|y|^2 \le 1} \frac{1}{T^{n/2}}a(y)dy \ge \frac{C}{T^{n/2}}.$$

Writing $J(t) \equiv \int_{\mathbf{R}^n} G(x,T;0,t)u(x,t)dx$, we have, from the last two inequalities,

$$J(t) \ge \frac{C}{T^{n/2}} + C\int_0^t J^p(s)h_0(s)ds.$$

Using the notation $g(t) \equiv \int_0^t J^p(s)h_0(s)ds$, we obtain

$$\frac{g'(t)}{(T^{-n/2} + g(t))^p} \ge Ch_0(t),$$

$$\left[-\frac{1}{(p-1)(T^{-n/2}+g(t))^{(p-1)}}\right]_0^T \geq C\int_0^T h_0(t)dt,$$

and therefore

$$T^{n(p-1)/2} \geq (p-1)C\int_0^T h_0(t)dt. \tag{8}$$

Proof of Part 1(a)

By the assumption that $h_0(t) \geq (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r$ for $r > 0$, via the Hölder inequality and integration by parts, we can reduce (8) to

$$\begin{aligned}
T^{n(p-1)/2} &\geq (p-1)C\int_0^T (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r dt \\
&\geq (p-1)C\left(\int_0^T (t+a_1)^q dt\right)^{1-r}\left(\int_0^T (t+a_1)^q\log(t+a_1)dt\right)^r \\
&= \frac{(p-1)C}{q+1}\left\{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}\right\}^{1-r} \\
&\quad\times\left\{(T+a_1)^{q+1}\left(\log(T+a_1)-\frac{1}{q+1}\right)+a_1^{q+1}\left(\frac{1}{q+1}-\log a_1\right)\right\}^r \\
&= \frac{(p-1)C}{q+1}\left\{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}\right\} \\
&\quad\times\left\{\frac{(T+a_1)^{q+1}\left(\log(T+a_1)-\frac{1}{q+1}\right)+a_1^{q+1}\left(\frac{1}{q+1}-\log a_1\right)}{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}}\right\}^r \\
&= \frac{(p-1)C}{q+1}\left\{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}\right\} \\
&\quad\times\left\{-\frac{1}{q+1}+\frac{(T+a_1)^{q+1}\left\{\log(T+a_1)-\log a_1\right\}}{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}}+\log a_1\right\}^r \\
&= \frac{(p-1)C}{q+1}\left\{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}\right\} \\
&\quad\times\left\{-\frac{1}{q+1}+\frac{\log(T+a_1)-\log a_1}{1-\left(\frac{a_1}{T+a_1}\right)^{q+1}}+\log a_1\right\}^r.
\end{aligned} \tag{9}$$

When T is sufficiently large, (9) is impossible under the assumptions that $n(p-1)/2 \leq q+1$. Hence no global positive solutions exist for such p.

Proof of Part 1(b)

By the assumption that $h_0(t) \geq (t+a_1)^q(\log(t+a_1))^r$ for $r \leq 0$, via the Hölder inequality and integration by parts, we can reduce (8) to

$$\begin{aligned}
T^{n(p-1)/2} &\geq \frac{(p-1)C}{q+1}\left\{(T+a_1)^{q+1}-a_1^{q+1}\right\} \\
&\quad\times\left\{-\frac{1}{q+1}+\frac{\log(T+a_1)-\log a_1}{1-\left(\frac{a_1}{T+a_1}\right)^{q+1}}+\log a_1\right\}^r.
\end{aligned} \tag{10}$$

When T is sufficiently large, (10) is impossible under the assumptions that $n(p-1)/2 < q+1$. Hence no global positive solutions exist for such p. ■

4 The case $p \geq p^*$ (Global existence)

4.1 Preliminary

As a preparation for the proof of the part 2 of Theorem 1, we state the following lemma.

Lemma 2

Suppose that $k(x)$ satisfies (3) or (4). Suppose that for any given number $a_1 > 1$, there exists h_1 such that

$$0 \leq h(x,t) \leq h_1(t) \leq (t+a_1)^q (\log(t+a_1))^r, \quad q > -1, \ r \in \mathbf{R}.$$

Then if $p > 1 + (2q+2)/n$, $\Phi\rho_b \in \Pi[0,\infty)$ and there exists $C_0 > 0$ such that

$$\|\Phi\rho_b\| \leq C_0, \tag{11}$$

where $\rho_b(x,t) = G_b(x,t+\gamma;0,0)$ and we put

$$\|v\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^n, t\geq 0} \frac{|v(x,t)|}{\rho_b(x,t)} \tag{12}$$

for any function $v \in \Pi[0,\infty)$. Moreover, if $p = 1 + (2q+2)/n$ and $r < -1$, $\Phi\rho_b \in \Pi[0,\infty)$ and $\Phi\rho_b$ satisfies (11).

Proof.

The continuity of $\Phi\rho_b$ is clear. $\Phi\rho_b \geq 0$ is obvious. From $\exp\left(-\frac{(p-1)b|y|^2}{s+\gamma}\right) \leq 1$,

$$\rho_b^{(p-1)}(y,s) = G_b^{(p-1)}(y,s+\gamma;0,0) \leq C(s+\gamma)^{-n(p-1)/2} \tag{13}$$

is obvious. Let $a_1' \geq a_1$ and γ. Then $(s+\gamma)^{-n(p-1)/2}(s+a_1)^q \leq (s+a_1')^{-n(p-1)/2+q}$. Using Lemma 1 and the semi-group property of G_b, then we have, for $r \geq 0$,

$$\begin{aligned}
0 \leq (\Phi\rho_b)(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,s)h(y,s)\rho_b^p(y,s)dyds \\
&\leq C\int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,s)h(y,s)(s+\gamma)^{-n(p-1)/2}G_b(y,s+\gamma;0,0)dyds \\
&\leq C\int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} G_b(x,t;y,s)G_b(y,s+\gamma;0,0)dy\ (s+\gamma)^{-n(p-1)/2}h_1(s)ds \\
&= C\int_0^t (s+\gamma)^{-n(p-1)/2}h_1(s)G_b(x,t+\gamma;0,0)ds \\
&\leq \left(C\int_0^\infty (s+\gamma)^{-n(p-1)/2}h_1(s)ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0) \\
&\leq \left(C\int_0^\infty (s+\gamma)^{-n(p-1)/2}(s+a_1)^q(\log(s+a_1))^r ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0) \\
&\leq \left(C\int_0^\infty (s+a_1')^{-n(p-1)/2+q}(\log(s+a_1))^r ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0) \\
&\leq C_0\rho_b(x,t).
\end{aligned}$$

We note that existence of the integral is based on the assumption $-n(p-1)/2+q<-1$. For $r<0$ and $-n(p-1)/2+q<-1$, we have

$$\begin{aligned}
0 \le (\Phi\rho_b)(x,t) &\le \left(C\int_0^\infty (s+a_1')^{-n(p-1)/2+q}(\log(s+a_1))^r ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0)\\
&\le \left(C\int_0^\infty (s+a_1')^{-n(p-1)/2+q} ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0)\\
&\le C_0\rho_b(x,t).
\end{aligned}$$

For $r<-1$ and $-n(p-1)/2+q=-1$, we have

$$\begin{aligned}
0 \le (\Phi\rho_b)(x,t) &\le \left(C\int_0^\infty (s+a_1')^{-1}(\log(s+a_1))^r ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0)\\
&\le \left(C\int_0^\infty (s+a_1)^{-1}(\log(s+a_1))^r ds\right) G_b(x,t+\gamma;0,0)\\
&= \left(C\left[\frac{1}{r+1}(\log(s+a_1))^{r+1}\right]_0^\infty\right) G_b(x,t+\gamma;0,0)\\
&\le C_0\rho_b(x,t).
\end{aligned}$$

Thus we have established. ■

As corollaries of Lemma 2, we have the following lemmas, where C_0 means the same as in Lemma 2.

Lemma 3

Suppose that $k(x)$ satisfies (3) or (4). Let $h(x,t)$ be as in Lemma 2, and let $u \in \Pi[0,\infty)$. Then $\Phi u \in \Pi[0,\infty)$ and we have

$$\|\Phi u\| \le C_0\|u\|^p. \tag{14}$$

Proof. According to the preceding lemma, we have

$$\begin{aligned}
0 \le (\Phi u)(x,t) &\le \|u\|^p \int_0^t\int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,s)h(x,t)\rho_b^p(s,y)dyds\\
&= \|u\|^p(\Phi\rho_b)(x,t) \le C_0\|u\|^p\rho_b(x,t).
\end{aligned}$$

Thus we have

$$\frac{(\Phi u)(x,t)}{\rho_b(x,t)} \le C_0\|u\|^p.$$

Therefore it follows (14). ■

Lemma 4

Suppose that $k(x)$ satisfies (3) or (4). Let $h(x,t)$ be as in Lemma 2. Suppose that u_1 and u_2 are in $\Pi[0,\infty)$ and they satisfy

$$\|u_1\| \le M \quad \textit{and} \quad \|u_2\| \le M \tag{15}$$

for a number $M>0$. Then we have

$$\|\Phi u_1 - \Phi u_2\| \le pC_0M^{p-1}\|u_1-u_2\|. \tag{16}$$

Proof. Making use of the inequality

$$|q_1^p - q_2^p| \le p|q_1 - q_2| \max\{q_1^{p-1}, q_2^{p-1}\}, \quad (q_1 \ge 0, q_2 \ge 0),$$

we have

$$\begin{aligned} |u_1^p(y,s) - u_2^p(y,s)| &\le pM^{p-1}\rho_b^{p-1}(y,s)|u_1(y,s) - u_2(y,s)| \\ &\le pM^{p-1}\|u_1 - u_2\|\rho_b^p(y,s). \end{aligned}$$

Hence it follows that

$$\begin{aligned} |(\Phi u_1)(x,t) &- (\Phi u_2)(x,t)| \\ &\le \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,s)h(y,s)|u_1^p(y,s) - u_2^p(y,s)|dyds \\ &\le pM^{p-1}\|u_1 - u_2\| \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,s)h(y,s)\rho_b^p(y,s)dyds \\ &= pM^{p-1}\|u_1 - u_2\|(\Phi\rho_b)(x,t) \\ &\le pC_0M^{p-1}\|u_1 - u_2\|\rho_b(x,t). \end{aligned}$$

Thus we have (16). ■

4.2 Proof of existence of global positive solutions

By the assumption, suppose that we are given a function $a \in BC^2(\mathbf{R}^n)$ subject to

$$0 \le a(x) \le \delta_1 G_b(x,\gamma;0,0) \tag{17}$$

for some positive constants γ and δ_1. We shall solve the integral equation associated with (IVP)

$$u(x,t) = u_0(x,t) + (\Phi u)(x,t) \tag{18}$$

by iteration in $\Pi[0,\infty)$. We proceed to the iteration, setting

$$u_{n+1} = u_0 + \Phi u_n \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{19}$$

with u_0. According to Lemma 3, we can continue the iteration indefinitely within $\Pi[0,\infty)$. According to Lemma 1, (17) implies

$$\begin{aligned} 0 \le u_0(t,x) &\le \delta_1 \int_{\mathbf{R}^n} G(x,t;y,0)G_b(y,\gamma;0,0)dy \\ &\le \delta_1 C \int_{\mathbf{R}^n} G_b(x,t;y,0)G_b(y,\gamma;0,0)dy \\ &= \delta_1 C G_b(x,t+\gamma;0,0) = \delta_1 C\rho_b(x,t) \end{aligned}$$

and thus $\|u_0\| \le \delta_1 C$. Thus we have the inequalities

$$\|u_{n+1}\| \le \delta_1 C + C_0\|u_n\|^p, \quad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{20}$$

Then we have

$$\|u_n\| \leq M, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{21}$$

with a constant $M = M(\delta_1)$ for sufficiently small $\delta_1 > 0$, where $M(\delta_1) \to 0$ as $\delta_1 \to 0$. We choose a δ_1 such that

$$r \equiv C_0 p M^{p-1} < 1. \tag{22}$$

Since $u_{n+2} - u_{n+1} = \Phi u_{n+1} - \Phi u_n$ by (19),

$$\|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leq r\|u_{n+1} - u_n\|, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{23}$$

by means of Lemma 4. (23) implies in vertue of $r < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_{n+1} - u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n \|u_1 - u_0\| = \|u_1 - u_0\| \frac{1}{1-r} < \infty$$

and the convergence of

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_{n+1} - u_n\|.$$

Hence there exists a function $u \in \Pi[0, \infty)$ such that

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad as \quad n \to \infty, \tag{24}$$

that is, u_n/ρ_b converges to u/ρ_b uniformly in $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$.

Making use of (19) and (24), we find that u is a solution of integral equation

$$u(x, t) = u_0(x, t) + (\Phi u)(x, t).$$

Therefore the solution u of integral equation $u(x, t) = u_0(x, t) + (\Phi u)(x, t)$ is the required global solution of (IVP), since $\Pi[0, \infty) \subset \Sigma[0, \infty)$ and since a solution of integral equation in $\Pi[0, \infty)$ is a classical solution of (IVP) according to Proposition 2. ■

References

[1] H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math.* **16** (1966), 109-124.

[2] K.Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, *Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 503-505.

[3] K.Kobayashi, T.Sirao and H.Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), 407-424.

[4] P.Meier, On the critical exponent for reaction-diffusion equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **109** (1990), 63-71.

[5] Y.-W.Qi, The critical exponents of parabolic equations and blow-up in $\mathbf{R}^n$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* **128A** (1998), 123-136.

[6] Qi S.Zhang, The quantizing effect of potentials on the critical number of reaction-diffusion equations, *J. Diff. Eq.* **170** (2001), 188-214.

[7] Qi S.Zhang, An optimal parabolic esitimate and its applications in prescribing scalar curvature on some open manifolds with *Ricci* ≥ 0, *Math Ann.* **316** (2000), 703-731.

[8] Qi S.Zhang, Semilinear parabolic problems on manifolds and applications to the non-compact Yamabe problem, *Electron. J. Differential Equations* **2000**, No.46 (2000), 1-30.

[9] Qi S.Zhang, On a parabolic equation with a singular lower order term, II, *Indiana Univ. Math. J.* **46**, No.3 (1997), 989-1020.

Bounds for Global Solutions of Some Semilinear Parabolic Problems on general domains

高市 恭治 早稲田大学理工学部

1. Introduction.

次の半線形熱方程式の初期値境界値問題 (P) の大域解の漸近挙動について、考察する。

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
1.\quad u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=u^p(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times[0,\infty) \\
2.\quad u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\Omega \\
3.\quad u(x,t)\ =\ 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\infty)
\end{cases}
$$

ここで、Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の一様 $C^{2,\alpha}$ 級の滑らかさの境界 $\partial\Omega$ を持つ有界または非有界領域であり、非線形項の増大度 p は、『スーパーリニア・サブクリティカル』すなわち、『$2<p<2^*$』である。また、ここで、 2^* は、一般に臨界ソボレフ指数と呼ばれ、$2^*=\infty\ for\ N=1,2;\ 2^*=2N/(N-2)\ for\ N\ \geq\ 3$ である:

初期値 u_0 が $L^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ に入っている場合、局所解の存在が一般に知られている。解の最大存在時間を T_m として、i)$T_m<+\infty$ の場合、爆発時間、爆発レート、爆発解の形状等について、研究されている。ii)$T_m=+\infty$ の場合について、初期値 u_0 のノルムが十分小さい時、大域解が存在するのが知られている。さらに、この大域解が存在する場合につき、解の漸近挙動の分類を考える。(a) ノルムが無限大になる解 (Growing Up Solution) は存在するか？すなわち、解はこのノルムで有界であるか？(b) 解の Bound の初期値依存性はあるか？すなわち、解のあるノルムでの Bound は初期値のそのノルムだけに依存する定数でおさえられるのか？これまで、上記の半線形放物型方程式の境界条件がディリクレゼロで、考える領域が有界領域の場合は、数多く研究されてきているが、領域が非有界領域の場合はほとんど研究されていない。発表者は、修士論文において、領域が有界領域で境界条件が第三種境界条件の場合、第22回本セミナーにおいて、一相ステファン問題に対して、そして第24回本セミナーにおいて、境界条件が非線形の場合につき、研究に取り組んだ。

特に、本発表では、大域解が存在する事を仮定した時の、解の漸近挙動に関して発表する。

(研究の歴史)

$\boxed{\text{境界条件 ： ディリクレ}}$

(i) $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\| \ < \ +\infty$

	非線形項 f に関する条件	増大度 p	有界性
M.Ôtani '80	$u\|u\|^{p-2}$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{H_0^1} < \infty$
Ni-Sacks-Tavantzis '84	$u\|u\|^{p-2} = u^{p-1}$ (u : Positive) Ω : convex	$2 < p < 2 + \frac{2}{N}$	$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$
Cazenave-Lions '84	$f \in C^1(\mathbb{R})$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$

(ii) $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\| \leq C(\|u_0\|)$

	非線形項 f に関する条件	増大度 p	初期値依存性
Cazenave-Lions '84	$f \in C^1(\mathbb{R})$	$2 < p < 2_*$	$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(\|u_0\|_{L^\infty})$
Giga '86	$u\|u\|^{p-2} = u^{p-1}$ (u : Positive)	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(\|u_0\|_{L^\infty})$
P.Quittner '99	$u\|u\|^{p-2}$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{C^1} \leq C(\|u_0\|_{H^1})$

2. Main Results

<u>定理</u>

uが、(P)の大域解であるとする。そのとき、以下を満たす様な正定数Cが存在する。

$$\sup_{t\geq 0}|u(t)|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

3. Key Lemma

uが、(P)の$Q=\Omega\times[0,T)$における解であるとする。さらに、次の２つの仮定が成り立つならば、仮定（１）$\int_0^T\int_\Omega |u_t|^2dxdt < N < \infty$ 仮定（２）ある時刻t_0が存在して、

$\sup_Q u(x,t)$ が $\Omega\times(t_0,T)$ で実現される。

このとき、uとu_0とTには依存しない(Nとt_0には依存する)定数Aが存在して、

$$u(x,t) \leq A \quad \text{in } Q.$$

4. 補題の証明の概略

背理法に依る。

Not⇒ 仮定（１）を満たす解の列u_kと

点列$(x_k,t_k)\in\Omega\times(t_0,T_k)$が存在して

$$M_k := \sup_Q u_k = u_k(x_k,t_k) \to \infty \quad \text{as} \quad k\to\infty.$$

$\lambda_k \Leftarrow {\lambda_k}^{\frac{2}{p-1}}M_k = 1$

$M_k \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda_k \to 0$

$d_k :=x_k$と$\partial\Omega$との間の距離[3]に従って、次の２ケースに場合分け。

$$(a)\limsup_{k\to\infty}\frac{d_k}{\lambda_k} = \infty$$

と

$$(b)\limsup_{k\to\infty}\frac{d_k}{\lambda_k} = c < \infty$$

<u>Case(a)</u>

部分列をとって、$\lim_{k\to\infty} \to \infty$。

(i) $\boxed{\text{スケール変換}}$

$v_k(y,s) := {\lambda_k}^{\frac{2}{p-1}}({\lambda_k}^{-1}y+x_k, {\lambda_k}^{-2}s+t_k)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} v_k(0,0) = 1 \\ v_k(y,s) \le 1 \end{array} \right.$$

(ii) $\boxed{\text{方程式の Invariant 性}}$

$$\Downarrow$$

v_k も $v_{ks} = \Delta_y v_k + {v_k}^p$ の解

$$k \to \infty \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\boxed{v_s = \Delta v + v^p}$$

(iii) 定義域

$\Omega_k := \{y \in \mathbb{R}^N; \lambda_k y + x_k \in \Omega\}$

$\downarrow k \to \infty$

$\mathbb{R}^N$

$(-{\lambda_k}^{-2} t_k, {\lambda_k}^{-2}(T_k - t_k))$

$$\downarrow$$

$(-\infty, 0)$ 以上の事より、

v は、$\mathbb{R}^N \times (-/infty, 0)$ における

$$v_s = \Delta v + v^p$$

の解となる。

(iv)

$$\int\int_{\Omega_{\lambda_k} \times (-{\lambda_k}^{-2} t_k, {\lambda_k}^{-2}(T_k - t_k))} |v_{ks}|^2 dyds = {\lambda_k}^{\sigma} \int\int_{\Omega \times (0, T_k)} |u_{kt}|^2 dxdt$$

ここで、$\sigma = -n + 2 + 4/(p-1)$

$$\Downarrow$$

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow n/2 < (p+1)/(p-1)$$

$$\Downarrow$$

$$v_s = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0)$$

(v) $\boxed{\text{リウビル定理の適用}}$

$$v_s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta v + v^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

かつ $v \ge 0$

今、$v(0,0) = 1$ なので、リウビル定理に$\boxed{\text{矛盾}}$。

Case(b)

部分列をとり直して、$\lim_{k \to \infty} = c < \infty$。

定義域

$$\Omega_k := \{y \in \mathbb{R}^N : \lambda_k y + x_k \in \Omega\}$$

$$\downarrow \ k \to \infty \quad \text{(locally)}$$

$\{y \in \mathbb{R}^N : y_1 > -c\}$

5. 主結果の証明の概略

$\boxed{\text{エネルギー等式}}$

$$\int_\Omega (E) \times u \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 dx = -4E[u](t) + \frac{2(p-1)}{p-1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \quad \text{(I)}$$

$$\int_\Omega (E) \times u_t \;\Rightarrow\; \int_\Omega |u_t|^2 dx = -\frac{d}{dt}E[u](t) \quad \text{(II)}$$

ここで、

$$E[u] = \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{P+1}dx$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le\tau\le 2t'} \sup_\Omega u(x,t) \;\le\; B \;\; \text{(A)} \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2(x,t')dx \;\le B \;\; \text{(B)}$$

(t', B は $|u_0|_\infty$ と $|u_0|_2$ だけに依存)

(II) $\Rightarrow$ $E[u] \searrow$

Blow up しない $\Rightarrow$ $E[u] \ge 0$

$$\int_{t'}^T \text{(II)} \;\Rightarrow\; \int_{t'}^T \int_\Omega |u_t|^2 dxdt \le E[u](t') \le \frac{B}{2}$$

$\Downarrow$ Key Lemma and (A)

$$\sup_\Omega u(x,t) < C$$

(C は $|u_0|_\infty$ と $|u_0|_2$ だけに依存)

6. まとめ

目的だった領域の拡張は一応 OK！

<u>今後の課題</u>

正値解だけでなく符号変化する解も考えるなど。

参考文献

[1] Ôtani, M.: *Bounds for global solutions of some semilinear parabolic equations*, 京都大学数理解析研究所講究録 (1989)

[2] Ôtani, M.: *Existence and asymtotic stability of strong sllution of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai,*,**30**, Qualitative theory of dufferentail equations, North Holland, 1980.

[3] Fila, M. and Souplet, P.:*The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains*, Nonlinear differ. equ. appl. **8**(2001)

[4] Giga, Y.: *A bound for global solutions of semilinear heat equations* , Comm.Math.Phys.,**103**(1986), 415-421

[5] Ni, W.M, Sacks, P.E., and J.Tavantzis, *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equation of parabolic type*, J. Differ. Equations **54**(1984), 97-120.

[6] Cazenave, T. and Lions, P.L., *Solutions glolales d'équations de la chaleur semi linéaires*, ibid., **9**(1984), 955-978.

[7] Quittner,P.: *A priori bound for global solutions of a semilinear parabolic problem* **30**, Acta Math.Univ.Comenianae(1999).

Homogenization and penalization for infinite systems of first order PDE

嶋野　和史
(東京都立大学大学院理学研究科数学専攻)
E-mail address: kshimano@comp.metro-u.ac.jp

1. Introduction

We consider the functional partial differential equation

$$\dot{u}^\varepsilon(x,\xi) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du^\varepsilon(x,\xi), \xi\right) = \frac{1}{\delta(\varepsilon)}\int_I k(\xi,\eta)\,[u^\varepsilon(x,\eta) - u^\varepsilon(x,\xi)]\,d\eta \qquad \text{(E)}_\varepsilon$$

$$\text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I,$$

where ε and $\delta(\varepsilon)$ are a positive parameter and a positive parameter satisfying $\delta(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \searrow 0$ respectively, I is a finite interval of $\mathbf{R}$, H is a Borel measurable function on $\mathbf{R}^{2n} \times I$ such that for each $\xi \in I$ the function $H(\cdot,\xi)$ is continuous on $\mathbf{R}^{2n}$, and k is a bounded, positive, Borel measurable function on $I \times I$.

Equation $(\mathrm{E})_\varepsilon$ appears as a fundamental equation in optimal control of the system whose states are described by ordinary differential equations, subject to random changes of states in I and to control which induce the integral term in $(\mathrm{E})_\varepsilon$ and the nonlinearity of H, respectively.

An evolution equation similar to $(\mathrm{E})_\varepsilon$ was considered in Ishii-Shimano[14]. They proved a convergence theorem in which the limit equation is identified with a nonlinear parabolic PDE. The second and third terms of $(\mathrm{E})_\varepsilon$ indicate the effects of homogenization and penalization, respectively. Our motivation is to study the interaction in the asymptotics between the effects of the almost periodic homogenization and penalization in $(\mathrm{E})_\varepsilon$.

In this paper we deal with the almost periodic homogenization. In [13], Ishii studied the almost periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations. There are many references concerning the homogenization of Hamilton-Jacobi equations. However most of these deal with the periodic homogenization. See e.g., [1,4,6,9,11,15]. Except for the periodic and almost periodic cases, Souganidis studied stochastic homogenization for the Cauchy problem for first-order PDE in [17], and Arisawa dealt with the quasi-periodic homogenization for second-order Hamilton-Jacobi-Bellman equations in [3].

In Horie-Ishii[12], they considered the interaction in the asymptotics between the effects of periodic homogenization and vanishing viscosity for uniformly and degenerate elliptic PDE.

Our plan is the following. In Section 2 we explain some properties for the integral operator of $(\mathrm{E})_\varepsilon$ and give our definition of viscosity solutions. In Section 3 we consider three cell problems. These cell problems play important parts in proofs of our main theorems. In Section 4 we state convergence theorems which are our main theorems. Our main theorems, Theorems 4.2, 4.3 and 4.4, say that the equation, which the limit function of the viscosity solution u^ε of $(\mathrm{E})_\varepsilon$, as $\varepsilon \to 0$, varies according to the ranges of $\gamma := \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)/\varepsilon$, $\gamma = 0$, $0 < \gamma < \infty$, or $\gamma = \infty$. In Section 5 we deal with functional first-order PDE including two positive parameters. Theorem 5.2 says that in the case where $\gamma = 0$ $(\mathrm{E})_\varepsilon$ is influenced by the penalization first, and then the penalized PDE is homogenized, and that in the case where $\gamma = \infty$ it is homogenized first, and then is penalized. In the case where $\gamma \in (0,\infty)$ we can interpret that $(\mathrm{E})_\varepsilon$ is homogenized and penalized at the same time.

2. Preliminaries

For any Borel subset $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $\mathcal{B}(\Omega)$ denotes the space of all Borel functions on Ω, and $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ denotes the Banach space of bounded Borel functions f on Ω with norm $\|f\|_\infty$, where we write $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$. I denotes a fixed finite interval, with length $|I| > 0$, and also the identity operator on a given space.

Throughout this paper we fix positive numbers κ_0, κ_1, with $\kappa_0 < \kappa_1$, and assume that k is a Borel function on $I \times I$ such that $\kappa_0 \le k(\xi,\eta) \le \kappa_1$ for all $\xi, \eta \in I$.

Next we define the continuous linear operator $K : \mathcal{B}^\infty(I) \to \mathcal{B}^\infty(I)$ by

$$Kf(\xi) = \int_I k(\xi,\eta)f(\eta)d\eta \qquad \text{for } \xi \in I.$$

We define $\overline{k}$ by

$$\overline{k}(\xi) = \int_I k(\xi,\eta)d\eta \qquad \text{for } \xi \in I$$

and define $C : \mathcal{B}^\infty(I) \to \mathcal{B}^\infty(I)$ and $L : \mathcal{B}^\infty(I) \to \mathcal{B}^\infty(I)$ by

$$Cf(\xi) = \overline{k}(\xi)f(\xi) \qquad \text{for } \xi \in I$$

and

$$Lf(\xi) = \int_I \frac{k(\xi,\eta)}{\overline{k}(\xi)} f(\eta)d\eta \qquad \text{for } \xi \in I.$$

We set

$$l(\xi,\eta) = \frac{k(\xi,\eta)}{\overline{k}(\xi)} \qquad \text{for } \xi,\ \eta \in I.$$

By the Fredholm-Riesz-Schauder theory (see, e.g., [14,18]), there exists a unique function $r \in \mathcal{B}^\infty(I)$ such that

$$\int_I r(\xi)l(\xi,\eta)d\xi = r(\eta) \qquad \text{for all } \eta \in I, \tag{2.1}$$

$$\int_I r(\xi)d\xi = 1. \tag{2.2}$$

Moreover, by the Perron-Frobenius theory, we see that $r(\xi) > 0$ for all $\xi \in I$. Then by (2.1) we see that

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_1|I|} \le r(\xi) \le \frac{\kappa_1}{\kappa_0|I|} \qquad \text{for } \xi \in I. \tag{2.3}$$

We define $\overline{r}$ by

$$\overline{r}(\xi) = \frac{r(\xi)}{\overline{k}(\xi)} \Big/ \int_I \frac{r(\eta)}{\overline{k}(\eta)} d\eta \qquad \text{for } \xi \in I.$$

Then from (2.3) we have

$$\frac{\kappa_0^3}{\kappa_1{}^3|I|} \le \overline{r}(\xi) \le \frac{\kappa_1^3}{\kappa_0{}^3|I|} \qquad \text{for } \xi \in I. \tag{2.4}$$

For any integrable function $h : I \to \mathbf{R}$, we define

$$\{h\}^{\perp,\infty} = \{f \in \mathcal{B}^\infty(I) \mid \int_I h(\xi)f(\xi)d\xi = 0\}.$$

Since $\mathrm{Im}(K-C) \subset \{\overline{r}\}^{\perp,\infty}$, we may regard $K-C$ as an operator from $\{\overline{r}\}^{\perp,\infty}$ into $\{\overline{r}\}^{\perp,\infty}$. Observe that the bounded linear operator $L - I : \{r\}^{\perp,\infty} \to \{\mathbf{1}\}^{\perp,\infty}$ is invertible, where $\mathbf{1}(\xi) = 1$ for all $\xi \in I$. (See [14].) Consequently, $K - C$ is invertible. We denote this inverse operator by $(K - C)^{-1}$.

Before we give the definition of viscosity solutions of

$$F(x, u(x,\xi), D_x u(x,\xi), \xi) = \int_I k(\xi,\eta)[u(x,\eta) - u(x,\xi)]d\eta \quad \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R} \times I, \tag{E}$$

where F is Borel measurable on $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times I$ such that for each $\xi \in I$ the function $F(\cdot,\xi)$ is continuous on $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, we introduce the notation. We denote by $\mathcal{U}^+(\mathbf{R}^n \times I)$ the set of those functions u on $\mathbf{R}^n \times I$ such that for each $x \in \mathbf{R}^n$ the function $u(x,\cdot)$ is Borel measurable and integrable in I and for each $\xi \in I$ the function $u(\cdot,\xi)$ is upper semicontinuous in $\mathbf{R}^n$. We set $\mathcal{U}^-(\mathbf{R}^n \times I) = -\mathcal{U}^+(\mathbf{R}^n \times I)$. For any $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ and $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $C^k(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$ denotes the set of functions f on $\Omega \times I$ such that for each $x \in \Omega$ the function $f(x,\cdot)$ is Borel measurable in I and for each $\xi \in I$ the function $f(\cdot,\xi)$ is k times continuously differentiable in Ω. We also write $C(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$ for $C^0(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$. We call a continuous function $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ a modulus if ω is non-decreasing in $[0,\infty)$ and $\omega(0) = 0$.

Definition. (i) *We call $u \in \mathcal{U}^+(\mathbf{R}^n \times I)$ a viscosity subsolution of* (E) *if whenever $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $\xi \in I$, and $u(\cdot,\xi) - \varphi$ attains its local maximum at $\hat{x}$, then*

$$F(\hat{x}, u(\hat{x},\xi), D\varphi(\hat{x}), \xi) \le \int_I k(\xi,\eta)[u(\hat{x},\eta) - u(\hat{x},\xi)]d\eta.$$

(ii) *We call $u \in \mathcal{U}^-(\mathbf{R}^n \times I)$ a viscosity supersolution of* (E) *if whenever $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $\xi \in I$, and $u(\cdot,\xi) - \varphi$ attains its local minimum at $\hat{x}$, then*

$$F(\hat{x}, u(\hat{x},\xi), D\varphi(\hat{x}), \xi) \ge \int_I k(\xi,\eta)[u(\hat{x},\eta) - u(\hat{x},\xi)]d\eta.$$

(iii) *We call* $u \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ *a viscosity solution of* (E) *if it is both a viscosity sub- and supersolution of* (E).

3. Three cell problems

We begin this section by giving our assumptions on H.

(A1) $H \in C(\mathbf{R}^{2n}) \otimes \mathcal{B}(I)$.

(A2) $\lim_{R\to\infty} \inf\{H(x,p,\xi) \mid x,p \in \mathbf{R}^n, \xi \in I, |p| \geq R\} = \infty$.

(A3) For each $R > 0$ the family $\{H(\cdot+z,\cdot,\cdot) \mid z \in \mathbf{R}^n\}$ of functions is relatively compact in $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n \times B(0,R) \times I)$, where $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n \times B(0,R) \times I)$ denotes the set of functions $f \in C(\mathbf{R}^n \times B(0,R)) \otimes \mathcal{B}(I)$, with norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(R^n\times B(0,R)\times I)} := \sup_{\mathbf{R}^n\times B(0,R)\times I} |\cdot|$, which satisfy for a modulus μ_R and a positive constant M_R,

$$|f(x,p,\xi) - f(y,q,\xi)| \leq \mu_R(|x-y| + |p-q|), \quad |f(x,p,\xi)| \leq M_R$$
$$\text{for all } x,y \in \mathbf{R}^n, p,q \in B(0,R), \xi \in I, \tag{\#}$$

where $B(0,R)$ denotes the closed ball of $\mathbf{R}^n$ with radius R centered at the origin.

(A4) The family $\{H(\cdot+z,\cdot,\cdot) \mid z \in \mathbf{R}^n\}$ of functions is subset of $\mathcal{A}(\mathbf{R}^{2n} \times I)$, where $\mathcal{A}(\mathbf{R}^{2n} \times I)$ denotes the set of functions $f \in C(\mathbf{R}^{2n}) \otimes \mathcal{B}(I)$ such that for each $R > 0$ there exist a modulus μ_R and a positive constant M_R for which condition (#) is satisfied. Moreover, for every sequence $\{z_j\} \subset \mathbf{R}^n$ there are a subsequence $\{z_{j_k}\} \subset \{z_j\}$ and a function $\tilde{H} \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^{2n} \times I)$ such that

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{(x,p,\xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times I} |H(x+z_{j_k},p,\xi) - \tilde{H}(x,p,\xi)| = 0.$$

Assumptions (A3) and (A4) relate to the almost periodic homogenization. Note that (A4) is a stronger condition than (A3).

Remark. We call $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ an almost periodic function if from every sequence $\{a_n\} \subset \mathbf{R}^n$ one can extract a subsequence $\{a_{n_k}\}$ such that $\lim_{k\to\infty} f(x+a_n)$ exists uniformly on $\mathbf{R}^n$. As an example, $f(x) = \cos 2x + \cos\sqrt{2}x$ is not periodic but almost periodic on $\mathbf{R}$. See Fink[10] for basic properties of almost periodic functions.

Example. We consider the function $H(x,p,\xi) = b(\xi)|p|^m + f(x)$, where $m > 0$, $b \in \mathcal{B}^\infty(I)$ is positive, and $f \in C(\mathbf{R}^n)$ is almost periodic. Then the function H satisfies (A1), (A2) and (A4).

Theorem 3.1. *Assume that* (A1)-(A3) *hold. Let* $\hat{p} \in \mathbf{R}^n$. *There is a unique constant* $\lambda \in \mathbf{R}$ *such that for each* $\theta > 0$ *there is a bounded and Lipschitz continuous viscosity solution* v *of*

$$\begin{cases} \int_I \overline{r}(\eta)H(x,\hat{p}+Dv(x),\eta)d\eta \leq \lambda + \theta \text{ for } x \in \mathbf{R}^n, \\ \int_I \overline{r}(\eta)H(x,\hat{p}+Dv(x),\eta)d\eta \geq \lambda - \theta \text{ for } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

The problem of finding a constant λ described in the above theorem is a type of the so-called ergodic problem. We adapted here the formulation of Arisawa[2].

We can define the effective function $\bar{H}_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ by setting $\bar{H}_0(\hat{p}) = \lambda$, where λ is the constant given by Theorem 3.1.

Proposition 3.2. *$\bar{H}_0$ is continuous on $\mathbf{R}^n$.*

We refer to [13] for a proof of Theorem 3.1 and Proposition 3.2.

Theorem 3.3. *Assume that (A1), (A2) and (A4) hold. Let $\hat{p} \in \mathbf{R}^n$ and $\gamma > 0$. There is a unique constant $\lambda_\gamma \in \mathbf{R}$ such that for each $\theta > 0$ there is a bounded viscosity solution $v \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ of*

$$\begin{cases} H(x, \hat{p} + D_x v(x,\xi), \xi) \le \lambda_\gamma + \theta + \dfrac{1}{\gamma} \displaystyle\int_I k(\xi,\eta)\,[v(x,\eta) - v(x,\xi)]\,d\eta \\ \qquad\qquad \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I, \\ H(x, \hat{p} + D_x v(x,\xi), \xi) \ge \lambda_\gamma - \theta + \dfrac{1}{\gamma} \displaystyle\int_I k(\xi,\eta)\,[v(x,\eta) - v(x,\xi)]\,d\eta \\ \qquad\qquad \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I. \end{cases}$$

Here we define $\bar{H}_\gamma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ by setting $\bar{H}_\gamma(\hat{p}) = \lambda_\gamma$, where λ_γ is the constant given by Theorem 3.3.

Proposition 3.4. *$\bar{H}_\gamma$ is continuous on $\mathbf{R}^n$.*

Theorem 3.5. *Assume that (A1)-(A3) hold. Let $p \in \mathbf{R}^n$. There is a unique function $\lambda \in \mathcal{B}^\infty(I)$ such that for each $\theta > 0$ there is a bounded viscosity solution $v \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ of*

$$\begin{cases} H(x, \hat{p} + D_x v(x,\xi), \xi) \le \lambda(\xi) + h(\xi) & \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I, \\ H(x, \hat{p} + D_x v(x,\xi), \xi) \ge \lambda(\xi) - h(\xi) & \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I, \end{cases}$$

for all $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I$, where $h \in \mathcal{B}^\infty(I)$ and h satisfies $\int_I |h(\eta)|d\eta \le \theta$.

Here we define $\bar{H}_\infty : \mathbf{R}^n \times I \to \mathbf{R}$ by setting $\bar{H}_\infty(\hat{p}, \xi) = \lambda(\xi)$, where λ is the function given by Theorem 3.5.

Proposition 3.6. *$\bar{H}_\infty \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$. Moreover, for each $R > 0$ there is a modulus ω_R such that*

$$|\bar{H}_\infty(p,\xi) - \bar{H}_\infty(q,\xi)| \le \omega_R(|p-q|) \qquad \text{for all } p, q \in B(0,R), \xi \in I.$$

4. Convergence theorems

We state uniqueness and existence results for $(\mathrm{E})_\varepsilon$.

Theorem 4.1. *Assume that* (A1)-(A3) *hold. Let* $\varepsilon > 0$. *There is a unique bounded viscosity solution* $u^\varepsilon \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ *of* $(\mathrm{E})_\varepsilon$.

Consult sections 3 and 4 of [14] for the proof of Theorem 4.1. However, note that the equations considered in [14] are slightly different from $(\mathrm{E})_\varepsilon$.

Theorem 4.2. *Assume that* (A1)-(A3) *hold and that* $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon)/\varepsilon = 0$. *Let* u^ε *be the bounded viscosity solution of* $(\mathrm{E})_\varepsilon$ *and* u *be the (unique) bounded viscosity solution of*

$$u(x) + \bar{H}_0(Du(x)) = 0 \qquad \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \tag{LE$_0$}$$

Then

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \sup\{|u^\varepsilon(x,\xi) - u(x)| \mid x \in \mathbf{R}^n, \xi \in I\} = 0.$$

Theorem 4.3. *Assume that* (A1), (A2) *and* (A4) *hold and that*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \gamma \in (0,\infty).$$

Let u^ε *be the bounded viscosity solution of* $(\mathrm{E})_\varepsilon$ *and* u *be the bounded viscosity solution of*

$$u(x) + \bar{H}_\gamma(Du(x)) = 0 \qquad \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \tag{LE$_\gamma$}$$

Then

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \sup\{|u^\varepsilon(x,\xi) - u(x)| \mid x \in \mathbf{R}^n, \xi \in I\} = 0.$$

Theorem 4.4. *Assume that* (A1)-(A3) *hold and that* $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon)/\varepsilon = \infty$. *Let* u^ε *be the bounded viscosity solution of* $(\mathrm{E})_\varepsilon$ *and* u *be the bounded viscosity solution of*

$$u(x) + \int_I \bar{\tau}(\eta)\bar{H}_\infty(Du(x),\eta)d\eta = 0 \qquad \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \tag{LE$_\infty$}$$

Then

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \sup\{|u^\varepsilon(x,\xi) - u(x)| \mid x \in \mathbf{R}^n, \xi \in I\} = 0.$$

5. Functional first-order PDE with two parameters

In this section we consider the functional PDE with two parameters:

$$u^{\varepsilon,\delta}(x,\xi) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du^{\varepsilon,\delta}(x,\xi),\xi\right) = \frac{1}{\delta}\int_I k(\xi,\eta)\left[u^{\varepsilon,\delta}(x,\eta) - u^{\varepsilon,\delta}(x,\xi)\right]d\eta \tag{E$_{\varepsilon,\delta}$}$$

for $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I$, where ε and δ are positive parameters.

We give a result for the existence and uniqueness of viscosity solution of $(\mathrm{E})_{\varepsilon,\delta}$ without proving it. (See Theorem 4.1.)

Theorem 5.1. *Assume that* (A1)-(A3) *hold. Let* ε, $\delta > 0$. *There is a unique bounded viscosity solution* $u^{\varepsilon,\delta} \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ *of* $(\mathrm{E})_{\varepsilon,\delta}$.

We consider the asymptotic behavior of the viscosity solution of $(\mathrm{E})_{\varepsilon,\delta}$, as $\delta \searrow 0$, and then $\varepsilon \searrow 0$ or $\varepsilon \searrow 0$, and then $\delta \searrow 0$. We state a main theorem of this section.

Theorem 5.2. *Assume that* (A1)-(A3) *hold.*

(i) *If* u *is a bounded viscosity solution of* $(\mathrm{LE})_0$, *then*

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} u^{\varepsilon,\delta}(x,\xi) \qquad \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I.$$

(ii) *If* u *is a bounded viscosity solution of* $(\mathrm{LE})_\infty$, *then*

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} u^{\varepsilon,\delta}(x,\xi) \qquad \text{for } (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times I.$$

References

1. O. Alvarez and H. Ishii, Hamilton-Jacobi equations with partial gradient and application to homogenization, *Comm. Partial Differential Equations*, **26** (2001), no.5/6, 983-1002.

2. M. Arisawa, Some ergodic problems for Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces, *Differential and Integral Equations*, **9** (1996), no.1, 59-70.

3. M. Arisawa, Quasi-periodic homogenization for second-order Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **11** (2001), no.1, 465-480.

4. M. Arisawa, Multiscale homogenizations for first-order Hamilton-Jacobi-Bellman equations, to appear.

5. M. Bardi and I. Cappuzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser, Boston, 1997.

6. M. C. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations, II. Eikonal equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **127** (1997), 665-689.

7. M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **27** (1992), 1-67.

8. L. C. Evans, The perturbed test function technique for viscosity solutions of partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **111** (1989), 359-375.

9. L. C. Evans, Periodic homogenisation of fully nonlinear partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **120** (1992), 245-265.

10. A. M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 377, Springer, Berlin, 1974.

11. K. Horie and H. Ishii, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations on domains with small scale periodic structure, *Indiana Univ. Math. J.*, **47** (1998), 1011-1058.

12. K. Horie and H. Ishii, Simultaneous effects of homogenization and vanishing viscosity in fully nonlinear elliptic equations, to appear in *Funkcialaj Ekvacioj*.

13. H. Ishii, Almost periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations, *International Conference on Differential Equations*, Vol. 1,2 (Berlin, 1999), 600-605, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

14. H. Ishii and K. Shimano, Asymptotic analysis for a class of infinite systems of first-order PDE : nonlinear parabolic PDE in the singular limit, *Comm. Partial Differential Equations*, **28** (2003), no.1/2, 409-438.

15. P.-L. Lions, G. Papanicolaou and S. R. S. Varadhan, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations, unpublished.

16. K. Shimano, Homogenization and penalization of functional first-order PDE, to appear in Nonlinear Differential Equations and Applications.

17. P. E. Souganidis, Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations and some applications, *Asymptotic Analysis*, **20** (1999), no.1, 1-11.

18. K. Yosida, *Functional analysis. Fifth edition*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

Some Remarks on Dissipative Solutions

Satoru Takagi*

Department of Mathematics, School of Education, Waseda University
1-6-1 Nishi-waseda, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8050 Japan

1 Introduction

We cônsider the following Cauchy problem

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F}(u) = f & \text{in} \quad Q := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, \cdot) = g & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $N \geq 1$, and assume that $f \in L^1(Q)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ and $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ is a locally Lipschitz continuous flux.

Portilheiro defined dissipative solutions of (CP) and proved the equivalence of such solutions and entropy solutions in the sense of Kružkov [2] for (CP) with globally Lipschitz $\mathbf{F}$ by using accretive operator theory. The equivalence of dissipative solutions and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and several relaxation limits for (CP) were also obtained in [3] and [4]. It is useful to extend $\mathbf{F}$ in order to deal with more general phenomena which written as equations like Burgers' type, for example. Our purpose of this report is to extend the flux $\mathbf{F}$ to a locally Lipschitz continuous function.

We consider for simplicity the following stationary problem

$$\text{(E)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{F}(u) = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N$$

with locally Lipschitz $\mathbf{F}$. In this case, the mild solution u is unbounded in general, and the flux function $\mathbf{F}(u)$ may fail to be locally integrable since no growth

*E-mail: satoru@edu.waseda.ac.jp. The author is supported by Waseda University Grant for Special Research Projects ♯2003A-856.

condition is assumed on the flux $\mathbf{F}$. As a consequence, the entropy condition does not make sense, and therefore we need to consider renormalization. In this report, we shall introduce a new notion of renormalized dissipative solutions based on the concept of dissipative solutions in the sense of [3], and show that the equivalence of such solutions and renormalized entropy solutions in the sense of [1] for (E).

2 Preliminaries

We begin with notations and definitions. For $r \in \mathbb{R}$ and $j \in [-1,1]$, we introduce these sign functions

$$S_j(r) := \begin{cases} 1 & \text{if } r > 0, \\ j & \text{if } r = 0, \\ -1 & \text{if } r < 0, \end{cases}$$
$$S_j^+(r) := \begin{cases} 1 & \text{if } r > 0, \\ j & \text{if } r = 0, \\ 0 & \text{if } r < 0, \end{cases}$$
$$S_j^-(r) := \begin{cases} 0 & \text{if } r > 0, \\ j & \text{if } r = 0, \\ -1 & \text{if } r < 0, \end{cases}$$

and note that

$$S_0(r) = S_j^+(r) + S_{-j}^-(r) \tag{2.1}$$

for any $r \in \mathbb{R}$ and $j \in [-1,1]$. For r, $s \in \mathbb{R}$ and $\ell > 0$, we also introduce some notations $r \wedge s := \min(r,s)$, $r \vee s := \max(r,s)$, $r^+ := r \vee 0$, $r^- := (-r) \vee 0 \geq 0$ and $T_\ell(r) := (r \vee (-\ell)) \wedge \ell$, and note that $r = r^+ - r^-$. For $\ell > 0$, the Lipschitz constant of $\mathbf{F}$ on $K := [-\ell, \ell]$ shall be denoted by L_K.

We now recall definitions of entropy, renormalized entropy and dissipative solutions, and introduce renormalized dissipative solutions of (E).

Definition 2.1. *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. We say u is an entropy solution of* (E) *provided $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is measurable with $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfying*

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0(u-k)\,(f\theta + (\mathbf{F}(u) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx \geq 0 \tag{2.2}$$

for any $k \in \mathbb{R}$ and $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+ := \{\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\,;\, \theta(x) \geq 0 \text{ for any } x \in \mathbb{R}^N\}$.

Definition 2.2. *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. We say $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ is a renormalized entropy solution of* (E) *provided for each $\ell > 0$, we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(u \wedge \ell - k)\,(f\,\theta + (\mathbf{F}(u \wedge \ell) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\,d\mu_{k,\ell}^+ \geq 0 \quad (2.3)$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^-(u \vee (-\ell) - k)\,(f\,\theta + (\mathbf{F}(u \vee (-\ell)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\,d\nu_{k,-\ell}^+ \geq 0 \quad (2.4)$$

for any smooth function $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+$ and $k \in K$, where $\mu_{k,\ell}$ and $\nu_{k,\ell}$ are Radon measures on $\mathbb{R}^N$ defined by

$$\mu_{k,\ell} := S_0^+(u \wedge \ell - k)\,(\operatorname{div}(\mathbf{F}(u \wedge \ell) - \mathbf{F}(k)) - f)$$

and

$$\nu_{k,-\ell} := S_0^-(u \vee (-\ell) - k)\,(\operatorname{div}(\mathbf{F}(u \vee (-\ell)) - \mathbf{F}(k)) - f),$$

respectively, and satisfy

$$\lim_{\ell\to\infty} \mu_{k,\ell}^+(\mathbb{R}^N) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\ell\to\infty} \nu_{k,-\ell}^+(\mathbb{R}^N) = 0$$

for any $k \in K$.

Definition 2.3. *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. We say $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ is a dissipative solution of* (E) *provided for each $\phi \in \mathcal{T}$, we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0(u - \phi)\,(f - \operatorname{div}\mathbf{F}(\phi))\,dx \geq 0, \quad (2.5)$$

where $\mathcal{T} := C^1(\mathbb{R}^N) \cap \{\phi;\ \phi(x) \equiv k \text{ if } |x| > R \text{ for some } k \in \mathbb{R} \text{ and } R > 0\}$.

Definition 2.4. *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. We say $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ is a renormalized dissipative solution of* (E) *provided for each $\ell > 0$ and $\phi \in \mathcal{T}_K$, we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u) - \phi)\,(f - \operatorname{div}\mathbf{F}(\phi))\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\mu_{\phi,\ell}^+ \geq 0 \quad (2.6)$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^-(T_\ell(u) - \phi)\,(f - \operatorname{div}\mathbf{F}(\phi))\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\nu_{\phi,-\ell}^+ \geq 0, \quad (2.7)$$

where $\mathcal{T}_K := C^1(\mathbb{R}^N) \cap \{\phi;\, \phi(x) \equiv k$ if $|x| > R$ for some $k \in K$ and $R > 0\}$, $\mu_{\phi,\ell}$ *and* $\nu_{\phi,-\ell}$ *are defined as above with*

$$\lim_{\ell\to\infty} \mu^+_{\phi,\ell}(\mathbb{R}^N) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\ell\to\infty} \nu^+_{\phi,-\ell}(\mathbb{R}^N) = 0$$

for each $\phi \in \mathcal{T}_K$.

Then we obtain the following main result.

Theorem 2.5. *$u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ is a renormalized dissipative solution of* (E) *if and only if u is a renormalized entropy solution of* (E).

3 Proof of the main theorem

We shall prove our main theorem briefly. See [5] for more details.

Lemma 3.1. *If $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ is a renormalized entropy solution of* (E) *then u is a renormalized dissipative solution of* (E).

Sketch of the proof. Fix $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ and $\ell > 0$. We first assume that u is a renormalized entropy solution of (E). Then we see from (2.3) and (2.4) that

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u) - k)\,(f\theta + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\, d\mu^+_{k,\ell} \tag{3.1}$$

and

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} S_0^-(T_\ell(u) - k)\,(f\theta + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\, d\nu^+_{k,-\ell} \tag{3.2}$$

for any smooth function $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+$ and $k \in K$. We hereafter consider (3.1).

Let η_ε be a standard mollifier on $\mathbb{R}^N$ and ζ_n be a nonnegative smooth function defined by

$$\zeta_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le n, \\ 0 & \text{if } |x| \ge 2n, \end{cases}$$

with $|\nabla\zeta_n| \le C_1/n$ for $n > 0$, where C_1 is a positive constant. We put $\theta = \eta_\varepsilon(x-y)\,\zeta_n(x)$ and $k = \phi(y)$ with $\phi \in \mathcal{T}_K$. Integrating in y over $\mathbb{R}^N$ in (3.1), we obtain that

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; & \int_{\mathbb{R}^{2N}} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,(f\,\eta_\varepsilon\,\zeta_n + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(\phi))\cdot\nabla_x(\eta_\varepsilon\,\zeta_n))\,dydx \\
& \quad + 2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \eta_\varepsilon\,\zeta_n\,d\mu^+_{\phi,\ell} \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^{2N}} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,(f\,\eta_\varepsilon\,\zeta_n - \mathrm{div}_y\mathbf{F}(\phi)\,\eta_\varepsilon\,\zeta_n + \eta_\varepsilon(\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(\phi))\cdot\nabla_x\zeta_n \\
& \quad - \mathrm{div}_y((\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(\phi))\,\eta_\varepsilon\,\zeta_n))\,dydx + 2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \eta_\varepsilon\,\zeta_n\,d\mu^+_{\phi,\ell} \\
=: \; & \sum_{j=1}^{4} I_j^{\varepsilon,n} + 2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \eta_\varepsilon\,\zeta_n\,d\mu^+_{\phi,\ell}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Using some technical calculation, we obtain from (3.3) that

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; & \sum_{j=1}^{4} \limsup_{\varepsilon\to 0} I_j^{\varepsilon,n} + 2\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \eta_\varepsilon\,\zeta_n\,d\mu^+_{\phi,\ell} \\
\leq\; & \int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,f\,\zeta_n\,dx + \int_{T_\ell(u)=\phi} f^+\,\zeta_n\,dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}(\phi)\,\zeta_n\,dx + \int_{T_\ell(u)=\phi} (\mathrm{div}\,\mathbf{F}(\phi))^+\,\zeta_n\,dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,(\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(\phi))\cdot\nabla\zeta_n\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \zeta_n\,d\mu^+_{\phi,\ell}.
\end{aligned}$$

Passing to the limit as $n\to\infty$, we have

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; & \int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,(f - \mathrm{div}\,\mathbf{F}(\phi))\,dx + \int_{T_\ell(u)=\phi} (\,f^+ + (\mathrm{div}\,\mathbf{F}(\phi))^+\,)\,dx \\
& + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\mu^+_{\phi,\ell} + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,(\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(\phi))\cdot\nabla\zeta_n\,dx.
\end{aligned}$$

We see from Lebesgue's convergence theorem and N-dimensional Lebesgue measure theory that

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-\phi)\,(f - \mathrm{div}\,\mathbf{F}(\phi))\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\mu^+_{\phi,\ell} \geq 0.$$

In a similar way, we also find that

$$\int_{\mathbb{R}^N} S^-(T_\ell(u)-\phi)\,(f - \mathrm{div}\,\mathbf{F}(\phi))\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\nu^+_{\phi,-\ell} \geq 0,$$

and we conclude that u is a renormalized dissipative solution of (E). $\square$

Lemma 3.2. *If $u\in L^1(\mathbb{R}^N)$ is a renormalized dissipative solution of* (E) *then u is a renormalized entropy solution of* (E).

Sketch of the proof. For given $f,\ u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, we assume that u is a renormalized dissipative solution of (E). Then we see from (2.6) and (2.7) that for each $\ell > 0$ and $\phi \in \mathcal{T}_K$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u) - \phi)\,(f - \operatorname{div}\mathbf{F}(\phi))\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\mu_{\phi,\ell}^+ \geq 0 \tag{3.4}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^-(T_\ell(u) - \phi)\,(f - \operatorname{div}\mathbf{F}(\phi))\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} d\nu_{\phi,-\ell}^+ \geq 0. \tag{3.5}$$

We here show that for each $\ell > 0$ and $\phi \in \mathcal{T}_K$, (3.4) implies

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u) - k)\,(f\theta + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\,d\mu_{k,\ell}^+ \geq 0 \tag{3.6}$$

for any $k \in K$ and any $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+$. Now we define the following smooth function. For each $\delta,\ \varepsilon > 0$, we choose a function $\psi_{\delta,\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ such that

$$\psi_{\delta,\varepsilon}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \leq \delta, \\ 1/\varepsilon & \text{if } |x| > \delta + \varepsilon, \end{cases}$$

and $\psi_{\delta,\varepsilon} \to \infty$ as $\varepsilon \to 0$ for $|x| > \delta$. We put $\phi(x,y) := k + \psi_{\delta,\varepsilon}(x-y)$. Note that this ϕ belongs to $\mathcal{T}_K$ for fixed $y \in \mathbb{R}^N$. Multiplying (3.4) by an arbitrary y variable function $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+$ and integrating in y over $\mathbb{R}^N$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} S_0^+(T_\ell(u) - \phi)\,(f\,\theta - \operatorname{div}_x\mathbf{F}(\phi)\,\theta)\,dydx + 2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \theta\,d\mu_{\phi,\ell}^+ \geq 0. \tag{3.7}$$

Since $S_0^+(T_\ell(u) - \phi) \to S_0^+(T_\ell(u) - k)\,\chi_{\{|x-y|\leq\delta\}}$ as $\varepsilon \to 0$ for each $y \in \mathbb{R}^N$, we obtain that

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{2N}} S_0^+(T_\ell(u) - \phi)\,f\,\theta\,dydx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\{|y-x|\leq\delta\}} S_0^+(T_\ell(u) - k)\,f\,\theta\,dydx.$$

As in the proof of previous lemma, we see that the second term of the first integral in (3.7) implies that

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2N}} S_0^+(T_\ell(u) - \phi)\,(\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(\phi))\cdot\nabla_y\theta\,dydx \\ &\quad\to \int_{\mathbb{R}^N}\int_{|y-x|\leq\delta} S_0^+(T_\ell(u) - k)\,(\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla_y\theta\,dydx \qquad \text{as } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Therefore we obtain that

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{|y-x|\leq\delta} S_0^+(T_\ell(u) - k)\,(f\,\theta + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla_y\theta)\,dydx \\ &\qquad + 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{|y-x|\leq\delta} \theta\,d\mu_{k,\ell}^+ \geq 0.\end{aligned}$$

Dividing by volume of the ball $\{|y-x| \leq \delta\}$ and passing to the limit as $\delta \to 0$, we obtain from Lebesgue's differentiation theorem that

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^+(T_\ell(u)-k)\,(f\,\theta + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\,d\mu_{k,\ell}^+ \geq 0.$$

In a similar way, we also see that

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_0^-(T_\ell(u)-k)\,(f\theta + (\mathbf{F}(T_\ell(u)) - \mathbf{F}(k))\cdot\nabla\theta)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \theta\,d\nu_{k,-\ell}^+ \geq 0.$$

These inequalities imply that u is a renormalized entropy solution of (E). □

Combining Lemmas 3.1 and 3.2, we conclude Theorem 2.5.

References

[1] Ph. Benilan, J. Carrillo and P. Wittbold, *Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), 313-327.

[2] S. N. Kružkov, *First order quasilinear equations with several independent variables*, Math. USSR-Sb. **10** (1970), 217-243.

[3] M. Portilheiro, *Weak solutions for equations defined by accretive operators I*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, to appear.

[4] M. Portilheiro, *Weak solutions for equations defined by accretive operators II*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, to appear.

[5] S. Takagi, *An equivalent definition of renormalized entropy solutions for divergence form equations*, preprint.

ある種の相変化問題に関連する非線形発展方程式について

阿曽 雅泰 (千葉大学大学院 自然科学研究科)

本稿では, ある依存関係を持った適正下半連続凸関数の劣微分を含む非線形発展方程式の解の存在について考察する. また, ある種の相変化問題がこの非線形発展方程式に帰着されることを述べる. この結果は, 剣持信幸 (千葉大学教育学部) と Michel Frémond (Laboratoire Lagrange, LCPC) との共同研究によって得られたものである.

1. 導入

H を実 Hilbert 空間とし, その内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)_H$, $|\cdot|_H$ とする. このとき, 次の Cauchy 問題を考える:

$$(CP;u_0)\quad \begin{cases} \partial\varphi_{u(t)}(u'(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni g(t,u(t)) & \text{in } H, \text{ a.e. } t\in(0,T), \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

ここで, u' は u の時間微分, ψ は H における適正下半連続凸関数, φ_u は各 $u\in D(\psi)$ について H 上の適正下半連続凸関数, $\partial\varphi_u$, $\partial\psi$ はそれぞれ u', u に対する劣微分を表す. ここで, 適正下半連続凸関数 φ_u が u に依存するという点で新しいタイプの非線形発展方程式といえる. したがって, $(CP;u_0)$ の可解性を保証する φ_u に対する u の依存の満たすべき条件を決定することが重要である.

2. 主結果

仮定 : $(CP;u_0)$ を考える際, 以下の $(A1)$-$(A4)$ を仮定する.

$(A1)$ H における適正下半連続凸関数 ψ は次を満たす:

- $\partial\psi$ のグラフは $H\times H$ において閉凸.
- 任意の $r>0$ について, $\{v\in H;\psi(v)\le r\}$ は H においてコンパクト.
- 正定数 C_0 が存在して以下を満たす:
$$\psi(v)\ge C_0|v|_H^2,\quad \forall v\in H.$$

(A2) u をパラメーターとする H 上の適正下半連続凸関数族 $\{\varphi_u(\cdot);u\in D(\psi)\}$ は次を満たす:

- 任意の $v\in H$, $u\in L^2(0,T;H)$ with $u(t)\in D(\psi)$ に対して, $\varphi_{u(t)}(v)$ は t について可測.
- 正定数 C_1,C_2,C_3 が存在して以下を満たす:
$$C_1|v|_H^2\le\varphi_u(v)\le C_2(|v|_H^2+1),\quad \forall u\in D(\psi),\ \forall v\in H,$$
$$|v^*|_H\le C_3(|v|_H+1),\quad \forall u\in D(\psi),\ \forall v\in H,\ \forall v^*\in\partial\varphi_u(v).$$

(A3) 関数 $g(\cdot,\cdot):[0,T]\times H\to H$ は次を満たす:

- 任意の $u\in L^2(0,T;H)$ with $u(t)\in D(\psi)$ に対して, $g(\cdot,u(\cdot))$ は $(0,T)$ 上で強可測.

- 正定数 C_4 と $(0,T)$ 上非負値可積分関数 g_0 が存在して以下を満たす:

$$|g(t,u)|_H^2 \le C_4\psi(u) + g_0(t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T), \ \forall u \in D(\psi).$$

(A4) 各 $u \in L^2(0,T;H)$ with $u(t) \in D(\psi)$ について, $L^2(0,T;H)$ 上の凸関数 $\Phi_u(\cdot)$ を

$$\Phi_u(v) := \int_0^T \varphi_{u(t)}(v(t))dt, \quad \forall v \in L^2(0,T;H),$$

で定める. このとき以下の収束条件 (C) を仮定する:

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} u_n^*(t) \in \partial\psi(u_n(t)) \text{ for a.e. } t \in (0,T) \text{ について,} \\ u_n \text{ が } u \text{ に } W^{1,2}(0,T;H) \text{ で弱収束し, かつ } \{u_n^*\} \text{ が } L^2(0,T;H) \text{ において有界ならば,} \\ \Phi_{u_n}(\cdot) \text{ は} \Phi_u(\cdot) \text{ に } L^2(0,T;H) \text{ で Mosco の意味で収束し,} \\ \text{さらに } g(\cdot,u_n) \text{ は } g(\cdot,u) \text{ に } L^2(0,T;H) \text{ で強収束する.} \end{array} \right.$$

Mosco 収束については, Attouch[2], Kenmochi[7], Mosco[11] などを参照.

定義 1 ($(CP;u_0)$ の解) 任意に与えられた $u_0 \in D(\psi)$ に対し, 関数 $u \in C([0,T];H)$ が以下の二つの条件 (1),(2) を満たすとき $(CP;u_0)$ の解であるという:

(1) $u \in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0) = u_0$ かつ $\psi(u)$ は $[0,T]$ 上で有界.

(2) 関数 ξ, $\zeta \in L^2(0,T;H)$ が存在して以下を満たす:

$$\xi(t) \in \partial\varphi_{u(t)}(u'(t)), \ \zeta(t) \in \partial\psi(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T),$$

$$\xi(t) + \zeta(t) = g(t,u(t)) \quad \text{in } H \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

定理 1 (解の存在) 上の $(A1)$ から $(A4)$ を仮定する. このとき任意に与えられた $u_0 \in D(\psi)$ に対し $(CP;u_0)$ は少なくとも一つの解を持つ.

3. 証明の概略

近似問題 定理の証明において, 以下の近似問題 $(CP;\tilde{u}_0)_\varepsilon$ を考える:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon u'(t) + \partial\varphi_{J_\varepsilon^\psi u(t)}(u'(t)) + \partial\psi_\varepsilon(u(t)) \ni g(t, J_\varepsilon^\psi u(t)) \quad \text{in } H, \quad \text{a.e. } t \in [a,a+T], \\ u(a) = \tilde{u}_0. \end{array} \right.$$

ただし, $\varepsilon \in (0,1]$, $a \in [0,T]$ で, $\partial\psi_\varepsilon$ は $\partial\psi$ の Moreau-Yosida 近似, J_ε^ψ は $\partial\psi$ の resolvent, つまり

$$\partial\psi_\varepsilon(u) := \frac{u - J_\varepsilon^\psi u}{\varepsilon}, \quad J_\varepsilon^\psi u := (I + \varepsilon\partial\psi)^{-1}u, \quad \forall\, u \in H,$$

とする. ここで, $\psi(u_0) < M_0$ を満たす正定数 M_0 と, 十分小さい $T_0 > 0$ をとり, $a \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,1]$ に対して次の集合 $X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0)$ を用意する:

$$X_{a,T_0}^\varepsilon(M_0) := \left\{ \bar{u} \;\middle|\; \begin{array}{l} \bar{u} \in W^{1,2}(a,a+T_0;H), \ \psi_\varepsilon(\bar{u}(a)) \le M_0, \\ |\bar{u}'|_{L^2(a,a+T_0;H)} \le M_1, \\ \exists\eta \in \partial\psi(J_\varepsilon^\psi \bar{u}) \ \text{ a.e. on } [a,a+T_0] \ \text{ s.t.} \\ |\eta|_{L^2(a,a+T_0;H)} \le M_2. \end{array} \right\}.$$

ここで, M_1 と M_2 は ε に依存しない正定数とする. いま, $\varepsilon \in (0,1]$ を任意に与え, 固定する. このとき, 任意の $\bar{u} \in X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ に対し, 方程式

$$\varepsilon u'(t) + \partial\varphi_{J^{\psi}_{\varepsilon}\bar{u}(t)}(u'(t)) + \partial\psi_{\varepsilon}(u(t)) \ni g(t, J^{\psi}_{\varepsilon}\bar{u}(t)) \quad \text{in } H, \quad \text{a.e. } t \in [a, a+T], \tag{1}$$

を考える. また, 集合 $X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ は $C([a,a+T_0];H_w)$ の位相で, 空でない凸コンパクト集合となる. ただし, H_w は H の弱位相によって位相の定まった線形位相空間である. (1) の解 u は T_0 が十分小さいとき $u \in X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ となることがわかるから, $\bar{u}$ を (1) の解 u に対応させる写像 S を

$$S : X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0) \ni \bar{u} \mapsto u \in X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0),$$

と定義することができ, 次のことが示される:

$$S(X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)) \subset X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0), \quad S \text{ は } C([a,a+T_0];H_w) \text{ の位相で連続.}$$

したがって, Schauder-Tychonoff の不動点定理によって, 写像 S に対し 不動点 u_ε, すなわち, $Su_\varepsilon = u_\varepsilon$ となる $X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ の元 u_ε が存在する. よって u_ε は $(CP;\tilde{u}_0)_\varepsilon$ の解であることがわかる. さらに, エネルギー不等式を用いて解の延長の議論をし, 最後に ε の収束の議論をして, 証明が完了する. 以下に, 利用した補題を挙げておく.

補題 1 空間 $X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ は次の性質を持つ:

(i) $X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ は $C([a,a+T_0];H_w)$ の位相で, 空でない凸コンパクト集合となる.

(ii) 任意の $\bar{u} \in X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$ に対し, 以下が成り立つ:

$$\sup_{a \le t \le a+T_0} \psi(J^{\psi}_{\varepsilon}\bar{u}(t)) \le M_0 + M_1M_2,$$

$$|g(\cdot, J^{\psi}_{\varepsilon}\bar{u})|^2_{L^2(a,a+T_0;H)} \le C_4(M_0 + M_1M_2)T_0 + \int_a^{a+T_0} g_*(t)dt,$$

$$|J^{\psi}_{\varepsilon}\bar{u}|_{C([a,a+T_0];H)} \le \left\{\frac{M_0 + M_1M_2}{C_0}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ここで, g_* は g_0 を $[0,2T]$ まで, 0 拡張した関数である.

補題 2 写像 S について次が成り立つ:

(i) $S(X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)) \subset X^{\varepsilon}_{a,T_0}(M_0)$, (ii) S は $C([a,a+T_0];H_w)$ の位相で連続.

補題 3 与えられた $\varepsilon \in (0,1]$ と $\tilde{u}_0 \in D(\psi)$ に対し, $(CP,\tilde{u}_0)_\varepsilon$ の解 $u_\varepsilon \in W^{1,2}(a,a+T_0;H)$ が存在する.

補題 4 $v \in W^{1,2}(0,T';H)$ を初期条件 $v(0) = v_0$ を満たす

$$\varepsilon v'(t) + \partial\varphi_{J^{\psi}_{\varepsilon}v(t)}(v(t)) + \partial\psi_{\varepsilon}(v(t)) \ni g(t, J^{\psi}_{\varepsilon}v(t)) \quad in\ H, \ a.e.\ t \in [0,T'],$$

の解とする. ただし, $v_0 \in D(\psi)$ かつ $0 < T' \le T$ とする. このとき, T' と ε に依存しない正定数 M_0 が存在して, 以下の不等式を満たす:

$$\psi_\varepsilon(v(t)) \le M_0, \quad \forall t \in [0,T'], \quad |v'|_{L^2(0,T';H)} \le M_0.$$

補題 5 T^* を次のように定義する:

$$T^* := \sup\{T' > 0 \mid (CP;\tilde{u})_\varepsilon \text{が} [T_0,T] \text{ 上で解を持つ.}\}.$$

このとき, $T^* = T$ である.

4. 定理の応用

相変化問題 以下の相変化を記述する偏微分方程式系について考える:

$$(\theta + w)_t - \Delta\theta = h(t,x) \quad \text{in } Q := (0,T)\times\Omega,$$

$$\alpha(\theta, w, w_t) + \beta(w) - \nu\Delta w \ni f(\theta, w) \quad \text{in } Q,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma := (0,T)\times\Gamma,$$

$$\theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad w(0,\cdot) = w_0 \quad \text{on } \Omega.$$

ここで, Ω は滑らかな境界 Γ を持つ $\mathbf{R}^3$ の有界領域, T は 固定された有限な正の実数, ν は固定された正定数, θ_t と w_t はそれぞれ θ と w の時間微分, Δ は空間変数 x に対するラプラス作用素, $\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ における外向き法線方向の微分を表す; f は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ において与えられた関数, θ_0 と w_0 はそれぞれ θ と w の初期値, h は与えられた関数とする; 各 $(\theta, w)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ について, $\alpha(\theta, w,\cdot)$ は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ における極大単調グラフ, β は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ における極大単調グラフとする. この問題を $(P; h, \theta_0, w_0)$ と書くことにする.

仮定 上の偏微分方程式における α, β, f についての仮定を述べる.

- $\hat{\alpha}(\cdot,\cdot,\cdot)$ は $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}$ への関数で, 各 $p, q\in\mathbf{R}$ について $\hat{\alpha}(p,q,r)$ は変数 r について凸関数である.
- ある正定数 K_1, K_2, K_3 が存在して以下の不等式を満たす:

$$K_1 r^2 \le \hat{\alpha}(p,q,r) \le K_2(r^2+1), \quad \forall p,q,r\in\mathbf{R},$$

$$|\hat{\alpha}(p_1,q_1,r) - \hat{\alpha}(p_2,q_2,r)| \le K_3(|p_1-p_2| + |q_1-q_2|)(|r|+1), \quad \forall p_i, q_i (i=1,2), r\in\mathbf{R}.$$

- 各 $p, q\in\mathbf{R}$ に対し, $\hat{\alpha}(p,q,\cdot)$ の $\mathbf{R}$ における劣微分を $\alpha(p,q,\cdot)$ と書く. つまり, $\partial\hat{\alpha}(p,q,\cdot) = \alpha(p,q,\cdot)$. このとき, 正定数 K_4 が存在して

$$\sup_{r^*\in\alpha(p,q,r)} |r^*| \le K_4(|r|+1), \quad \forall p,q,r\in\mathbf{R}.$$

- $\hat{\beta}$ は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への非負な適正下半連続凸関数で, $D(\hat{\beta})$ は空でない有界集合とする. $\hat{\beta}$ の $\mathbf{R}$ における劣微分を β とする.
- f は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への Lipschitz 連続関数である. つまり, $L_f > 0$ を Lipschitz 定数として次の不等式が成り立つ:

$$|f(p_1,p_2) - f(p_2,q_2)| \le L_f(|p_1-q_1| + |q_1-q_2|), \quad p_i, q_i\in\mathbf{R},\ i=1,2.$$

記法 $(\cdot,\cdot)$ を $L^2(\Omega)$ における内積, $H^1(\Omega)^*$ を $H^1(\Omega)$ の共役空間とする. F_0 と F を以下で定義される $H^1(\Omega)$ から $H^1(\Omega)^*$ への写像とする:

$$\langle F_0 v, z\rangle := \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla z dx, \quad \forall v, z\in H^1(\Omega),$$

$$\langle F v, z\rangle := \langle F_0 v, z\rangle + (v,z), \quad \forall v, z\in H^1(\Omega),$$

ここで, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $H^1(\Omega)^*$ と $H^1(\Omega)$ の双対ペアである. また

$$(v^*, z^*)_* := \langle v^*, F^{-1}z^*\rangle, \quad \forall v^*, z^*\in H^1(\Omega)^*$$

と定義すると $H^1(\Omega)^*$ は $(\cdot,\cdot)_*$ を内積にもつ Hilbert 空間になる.

定義 2 ($(P; h, \theta_0, w_0)$ の解) 任意に与えられた $h\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta_0\in L^2(\Omega)$, $w_0\in H^1(\Omega)$ with $\hat{\beta}(w_0)\in L^1(\Omega)$ に対し, 関数の組 $\{\theta, w\}$ が以下を満たすとき, $(P; h, \theta_0, w_0)$ の解であるという:

(1) $\theta \in W^{1,2}(0,T;H^1(\Omega)^*) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$
かつ $w \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

(2) $\theta'(t) + w'(t) + F_0(\theta(t)) = h(t)$ in $H^1(\Omega)^*$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(3) 関数 $\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ with $\xi \in \alpha(\theta, w, w')$ a.e. on Q と, 関数 $\eta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ with $\eta \in \beta(w)$ a.e. on Q が存在して以下を満たす:

$$\xi(t) + \eta(t) + \nu F_0(w(t)) = f(\theta(t), w(t)) \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ for a.e. } t \in (0,T).$$

(4) $\theta(0,\cdot) = \theta_0$ in $L^2(\Omega)$ かつ $w(0,\cdot) = w_0$ in $L^2(\Omega)$.

定理 2 (解の存在) 任意の $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$, $w_0 \in H^1(\Omega)$ with $\hat{\beta}(w_0) \in L^1(\Omega)$ に対し, $(P;h,\theta_0,w_0)$ は少なくとも一つの解を持つ.

定理 2 の証明の概略 近似問題 $(P;h,\theta_0,w_0)_\delta$ を考える.

$$(\theta + w)_t - \Delta\theta = h(t,x) \quad \text{in } Q,$$

$$\alpha(\theta, w, w_t) + \beta_\delta(w) - \nu\Delta w \ni f(\theta, w) \quad \text{in } Q,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$

$$\theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad w(0,\cdot) = w_0 \quad \text{on } \Omega.$$

ただし, β_δ は β の Moreau-Yosida 近似を表す. つまり, $\beta_\delta(w) := \frac{w - J_\delta^\beta w}{\delta}$, $\delta > 0$ である.

抽象理論の適用 ここでは $(P;h,\theta_0,w_0)_\delta$ が, 先に述べた非線形発展方程式の Cauchy 問題 $(CP;u_0)$ に帰着されることを述べる. まず, 直積空間

$$H := \begin{matrix} H^1(\Omega)^* \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix}$$

を用意する. H は以下で与えられる内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を持った Hilbert 空間である.

$$(v, v_1)_H = (e, e_1)_* + (w, w_1), \quad \forall v := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in H, \ \forall v_1 := \begin{pmatrix} e_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H.$$

H における凸関数 ψ と φ_u を次のように定義する:

$$\psi(v) := \begin{cases} \frac{1}{2}|e - w|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + |w|^2_{L^2(\Omega)}, & \text{if } v := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ H^1(\Omega) \end{matrix}, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\varphi_u(v) := \begin{cases} \frac{1}{2}|e|^2_{H^1(\Omega)^*} + \int_\Omega \hat{\alpha}(e_1 - w_1, w_1, w)dx, \\ \qquad \text{if } v := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in H, \quad u := \begin{pmatrix} e_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H \text{ with } \psi(u) < \infty, \\ +\infty, \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

さらに, 各 $\delta \in (0,1]$ に対し, $[0,T] \times D(\psi)$ から H への関数 g_δ を以下で定義する:

$$g_\delta(t,v) := \begin{pmatrix} h(t) + e - w \\ f(e - w, w) + 3w - e - \beta_\delta(w) \end{pmatrix}, \quad \forall v := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in D(\psi), \quad \forall t \in (0,T).$$

このとき, ψ, φ_u, g_δ は仮定 $(A1)$-$(A3)$ を満たすことが示される. また, Φ_u を仮定 $(A4)$ と同様に

$$\Phi_u(v) := \int_0^T \varphi_{u(t)}(v(t))dt, \quad \forall v \in L^2(0,T;H)$$

と定義すると, 以下の補題6と7を使うことにより, ψ, Φ_u, g_δ についての仮定 (A4) における収束条件 (C) が満たされることもわかる.

補題 6 $v := \binom{e}{w}$, $v^* = \binom{e^*}{w^*}$ とする. このとき $v^* \in \partial\psi(v)$ となるための必要十分条件は

$$e^* = F(e-w)(= F_0(e-w) + e - w) \ \ in\ H^1(\Omega)^* \quad \text{かつ} \quad w^* = \nu F_0 w + 3w - e \ \ in\ L^2(\Omega),$$

となることである. したがって, このとき $e \in H^1(\Omega)$ かつ $w \in H^2(\Omega)$ となる.

補題 7 もし $u_n := \binom{e_n}{w_n}$ が $u := \binom{e}{w}$ に $W^{1,2}(0,T;H)$ で弱収束し, $u_n^*(t) \in \partial\psi(u_n(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ となる $\{u_n^*\}$ が $L^2(0,T;H)$ において有界ならば, 次が成り立つ:

$$e_n \to e, \quad w_n \to w \quad in\ L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

これらの補題の証明については, Kenmochi[8] を参照. さて, ψ, φ_u, g_δ を上のように定義すれば, 先の抽象非線形発展方程式の Cauchy 問題

$$(CP;u_0)\quad \begin{cases} \partial\varphi_{u(t)}(u'(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni g_\delta(t,u(t)) \ \text{ in } H, \ \text{ a.e. } t \in (0,T), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

に帰着することができる. ただし, $u_0 := \binom{e_0}{w_0}$ with $e_0 := \theta_0 + w_0$ とする. したがって, 定理1を用いれば $(P;h,\theta_0,w_0)_\delta$ の解の存在がいえる. 後は近似パラメーター δ の収束を議論すれば, 定理2の証明が完了する. これは以下のように示される: $(P;h,\theta_0,w_0)_\delta$ の解を $\{\theta_\delta, w_\delta\}$ とすると $\{\theta_\delta, w_\delta\}$ は

$$\theta_\delta'(t) + w_\delta'(t) + F_0(\theta_\delta(t)) = h(t) \ \text{ in } H^1(\Omega)^* \ \text{ for a.e. } t \in (0,T), \tag{2}$$

を満たし, さらに $\xi_\delta \in \alpha(\theta_\delta, w_\delta, w_\delta')$ a.e. on Q となる $\xi_\delta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が存在して

$$\xi_\delta(t) + \beta_\delta(w_\delta(t)) + \nu F_0(w_\delta(t)) = f(\theta_\delta(t), w_\delta(t)) \ \text{ in } L^2(\Omega) \ \text{ for a.e. } t \in (0,T), \tag{3}$$

を満たす. さて δ についての一様評価を得るために, $(2) \times \theta_\delta$ と $(3) \times w_\delta'$ により以下を得る:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla\theta_\delta|^2_{L^2(\Omega)} \le \left\{|h|_{L^2(\Omega)} + |w_\delta'|_{L^2(\Omega)}\right\}|\theta_\delta|_{L^2(\Omega)},$$

$$K_1|w_\delta'|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\nu}{2}|\nabla w_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \hat\beta_\delta(w_\delta)dx\right\} \le |f(\theta_\delta, w_\delta)|_{L^2(\Omega)}|w_\delta'|_{L^2(\Omega)} + K_2\cdot \text{vol}.\Omega,$$

a.e. on $(0,T)$. さらに, この二つの不等式から, 次の評価式を得る:

$$\begin{aligned} &\frac{K_1}{2}|w_\delta'|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla\theta_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|\theta_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}|\nabla w_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \hat\beta_\delta(w_\delta)dx\right\} \\ &\qquad \le K_5\left\{|\theta_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + |w_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + |h|^2_{L^2(\Omega)} + 1\right\} \\ &\qquad \le K_6\left\{\frac{1}{2}|\theta_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}|\nabla w_\delta|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \hat\beta_\delta(w_\delta)dx + 1\right\}, \end{aligned}$$

a.e. on $(0,T)$, ここで K_5 と K_6 は $\delta \in (0,1]$ に依存しない正定数. Gronwall の補題をこの不等式に用いれば, 以下の一様評価が得られる:

$$|w_\delta|^2_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))} + |w_\delta|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega \hat\beta_\delta(w_\delta(t))dx$$

$$+|\theta_\delta|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |\theta_\delta|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le K_7,$$

かつ

$$|\theta'_\delta|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^*)} \le K_8.$$

ここで, K_7, K_8 は $\delta \in (0,1]$ に依存しない正定数. したがって, これらの評価式から, $\delta_1 > \cdots > \delta_n > \cdots$ となるような 0 に収束する数列 $\{\delta_n\}$ と関数 $\theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $\eta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が存在して, 次を満たす:

$$\theta_n := \theta_{\delta_n} \to \theta \ \text{ in } C([0,T];H^1(\Omega)^*) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega)), \ \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

$$w_n := w_{\delta_n} \to w \ \text{ in } C([0,T];L^2(\Omega)), \ \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

$$w_n(t) \to w(t) \ \text{ weakly in } H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0,T],$$

$$\xi_n := \xi_{\delta_n} \to \xi, \ \ \beta_{\delta_n}(w_n) \to \eta \ \text{ weakly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

したがって, 方程式 (2), (3) において δ を δ_n として $n \to +\infty$ とすれば

$$\theta'(t) + w'(t) + F_0(w(t)) = h(t) \quad \text{in } H^1(\Omega)^*, \quad \text{a.e. } t \in (0,T),$$

$$\xi(t) + \eta(t) + \nu F_0(w(t)) = f(\theta(t), w(t)) \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \text{a.e. } t \in (0,T),$$

が成り立つ. ここで劣微分の demiclosedness から $\eta \in \beta(w)$ a.e. on Q が得られる. さらに不等式

$$\int_0^T (\xi_n, w'_n)dt \le \int_0^T (\xi, w')dt$$

が成り立つので, $\xi \in \alpha(\theta, w, w')$ a.e. on Q を得る. したがって, $\{\theta, w\}$ は定義 2 の (1) から (4) を満たす.

参考文献

1. M. Aso, M. Frémond and N. Kenmochi, Phase change problems with temperature dependent constraints for the volume fraction velocities, preprint.

2. H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Applicable Mathematics Series, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, (1984).

3. D. Blanchard, A. Damlamian and H. Ghidouche, A nonlinear system for phase change with dissipation, Differential Integral Equations, **2** (1989), 342-362.

4. G. Bonfanti, M. Frémond and F. Luterotti, Global solution to a nonlinear system for irreversible phase changes, Adv. Math. Sci. Appl., **10** (2000), 1-24.

5. H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.

6. M. Frémond, *Non-smooth Thermomechanics*, Springer-Verlag, Berlin (2002).

7. N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time - dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., **30** (1981), 1-87.

8. N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, pp. 39-86 in *Phase Transitions and Hysteresis*, Lecture Notes Math. 1584, Springer-Verlag, 1994.

9. J.L.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

10. J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Sém. sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966/67.

11. U. Mosco, Convergence of convex set and of solutions of variational inequalities, Adv. Math. 3(1969), 510-585.

全変動流を含む非等温系相転移モデルと 2次元定常解の安定性

白川　健　（東京電機大・情報環境）

1　導入

$n \in \{1,2,3\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $n \geq 2$ ならば Ω の境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は滑らかであるとします.

本論文では, 主に固体・液体相転移において安定性を持つような相の状態について幾何学的な側面から考察します. 固体・液体相転移の数学モデルは数多く存在しますが, 本論文において考察の対象とするモデルは, 次のような Fix-Caginalp 型の連立微分方程式です.

$$\begin{cases} (\theta + w)_t - \varDelta(\theta + \mu\theta_t) = 0 \ \text{ in } Q := (0, +\infty) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(\theta + \mu\theta_t) + n_0(\theta + \mu\theta_t) = 0 \ \text{ on } \Sigma := (0, \infty) \times \Gamma, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0 \ \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} w_t - \sigma \,\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla w}{|\nabla w|}\right) + \partial I_{[-1,1]}(w) \ni w + \theta \ \text{ in } Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \ \text{ on } \Sigma, \\ w(0, \cdot) = w_0 \ \text{ in } \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

この連立方程式における未知関数は θ と w で, 物理的には θ は相対温度, w は物質の状態を表すパラメータ（相関数）を表します. 物質の状態を表すやり方（流儀）も人それぞれですが, 本論文では

$$\begin{cases} \bullet \ \ \text{液相（固相）の領域上では } w = 1 \ (w = -1), \\ \bullet \ \ \text{液相と固相の境目または2相の混合状態の領域上では } -1 < w < 1, \end{cases}$$

と定めます. ちなみに, 方程式 (1.2) 中に $\partial I_{[-1,1]}(\cdot)$ という項がありますが, これは閉区間 $[-1, 1]$ 上の指示関数 $I_{[-1,1]}(\cdot)$ の劣微分作用素で, w の値域を閉区間 $[-1, 1]$ へ制限するために導入された項です.

(1.1) はいわゆる熱方程式で, 境界条件の中に出てくる n_0 は正の定数とします. 通常の熱方程式では, 温度の拡散はラプラシアン $(-\varDelta\theta)$ によって記述されますが, この数学モデルでは拡散項の中に温度の時間微分の項（粘性項）$\mu\theta_t$ が組み込まれています. この時間微分の項には特にこれといった物理的な意味はないため, ここではその影響をなるべく微少とするために係数 μ を十分小さな正の定数とします.

それに対し (1.2) は1つの Allen-Cahn 型方程式で, 対応する自由エネルギーには全変動汎関数が含まれます. (1.2) に登場する $-\mathrm{div}\left(\frac{\nabla w}{|\nabla w|}\right)$ という項は 全変動汎関数（の第1変分）から導出される項ですが, 方程式中の表現はあくまで形式的なもので 厳密には全変

動汎関数の劣微分作用素の枠組みで定義されます. 大雑把な捉え方をすれば, $-\mathrm{div}\left(\frac{\nabla w}{|\nabla w|}\right)$ には w の等高線の曲率を表す関数が対応するため, 物理的には表面張力が界面ダイナミクスへ及ぼす作用と解釈できます. したがって σ はその強さを表す係数（表面張力定数）ということになりますが, ここではそれを十分に小さな正の定数とします.

近年, 温度が定数であるとして方程式 (1.2) のみを考えた場合（等温系）の定常解の構造や安定性が論文 [3, 4, 6, 7, 8] などで詳しく議論され, 特に論文 [6, 7] では一般多次元の定常解が安定性を持つための幾何学的条件が幾つか示されています. 更に 空間次元が 1 次元ならば 論文 [5] において温度が定数でない場合（非等温系）も議論されており, 時刻無限大で温度が定数になるような枠組みでは 等温系で安定性を持つ定常解は非等温系でも同様の安定性を示すことがわかっています. 等温系での安定性理論を非等温系の枠組みへ適用させるには, 温度に関する強い一様有界性を示すことが必要ですが, この性質を導く際に鍵となるのが熱流の中に組み込まれている粘性項です. しかしながら, 空間次元が 1 次元の場合に限っては 粘性項の有無にかかわらずこの性質が得られるため, 論文 [5] では $\mu = 0$ の場合のみが考察の対象とされています.

本論文では上記の事実を踏まえ, 論文 [5] で得られた 1 次元における安定性理論の一般多次元の枠組みへの拡張を試みます. 冒頭で述べたように, ここでは解の持つ幾何学的な特徴を主に考察したいので, 空間次元を簡単のため 2 次元とし, 2 次元定常解が安定な性質を持つための十分条件を幾つか紹介します. 結果として, 非等温系における 2 次元定常解が安定性を持つためには 論文 [6] の等温系での議論に示された幾何学的条件だけでは不十分で, 特に境界 Γ の付近でより厳しい条件が必要になることが示されます.

2 解の基本性質

本節以降, Ω は 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の有界領域で, Ω の境界 $\partial\Omega := \Gamma$ は滑らかであるとします.

本論文では 作用素 Δ_R およびその定義域 $D(\Delta_R)$ をそれぞれ次で定義します：

$$D(\Delta_R) := \left\{ z \in H^2(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial z}{\partial n} + n_0 z = 0 \right\}, \quad \Delta_R z := \Delta z \quad \text{for any } z \in D(\Delta_R).$$

良く知られるように, Δ_R は $L^2(\Omega)$ からそれ自身への有界線形作用素で, $-\Delta_R$ のグラフは直積空間 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 内で極大単調となります.

また, 関数空間 $L^2(\Omega)$ 上の汎関数 V を次で定義します：

$$V(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla z|, & \text{if } z \in BV(\Omega) \text{ and } |z| \le 1, \text{ a.e. in } \Omega, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, V は $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数となります. 以下, 汎関数 V の有効領域を $D(V)$ と書きます, 即ち

$$D(V) := \left\{ z \in BV(\Omega) \;\middle|\; |z| \le 1, \ \text{a.e. in } \Omega \right\}$$

と定めます.

本節では主に連立方程式 $\{(1.1),(1.2)\}$ の解が持つ基本的な性質を紹介します。

定義 2.1 (解の定義) 2 つの関数の組 $\{\theta, w\}$ が以下の条件 (p1)~(p3) を満足するとき, $\{\theta, w\}$ は連立方程式 $\{(1.1),(1.2)\}$ の解であるといいます.

(p1) $\theta \in W^{1,2}(0,+\infty; H^2(\Omega))$, $w \in C([0,+\infty); L^2(\Omega))$, $w_t \in L^2(0,+\infty; L^2(\Omega))$, $V(w) \in L^\infty(0,+\infty)$, $\theta_0 \in D(\Delta_R)$, $w_0 \in D(V)$.

(p2) $\theta(t), \theta_t(t) \in D(\Delta_R)$, a.e. $t>0$, and $(\theta + w)_t(t) - \Delta_R(\theta + \mu\theta_t)(t) = 0$ in $L^2(\Omega)$, a.e. $t > 0$.

(p3) $\sigma V(w(t)) - (w(t) + \theta(t) - w_t(t), w(t)) \le \sigma V(z) - (w(t) + \theta(t) - w_t(t), z)$ for any $z \in D(V)$, ここに $(\cdot,\cdot)$ は関数空間 $L^2(\Omega)$ 内の通常の内積とします.

注意 2.1 定義 2.1 中の条件 (p3) から読み取れるように, 方程式 (1.2) の解は全変動汎関数 V を含む変分不等式の枠組みで定義されます. よって大雑把な見方をすれば条件 (p3) は放物型境界地問題 (1.2) の弱解を定義していると捉える事も出来ます.

また, この変分不等式は全変動汎関数 V の劣微分作用素を用いると次のような発展方程式:

$$w_t(t) + \sigma\partial V(w(t)) \ni w(t) + \theta(t) \text{ in } L^2(\Omega),\ t > 0.$$

と同値になります. したがって条件 (p3) は, 方程式 (1.2) 中のシンギュラリティーを含む項 $-\mathrm{div}\left(\frac{\nabla w}{|\nabla w|}\right)$ が実際には全変動汎関数 V の劣微分 ∂V の枠組みで取り扱われる事も示唆しています.

命題 2.1 (可解性及び有界性) 任意の初期値 $\theta_0 \in D(\Delta_R)$, $w_0 \in D(V)$ に対し, 連立方程式 $\{(1.1),(1.2)\}$ には一意的に解が存在します. 更に, 十分大きな正の定数 N_0 を選べば, 解 $\{\theta, w\}$ について次のような時間大域的評価式が成立します.

$$|\theta|^2_{W^{1,2}(0,+\infty;H^2(\Omega))} + |w|^2_{W^{1,2}(0,+\infty;L^2(\Omega))} \le N_0\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)(1 + |\theta_0|^2_{H^2(\Omega)} + \sigma V(w_0)). \tag{2.1}$$

命題 2.2 (漸近挙動) 連立方程式 $\{(1.1),(1.2)\}$ の解 $\{\theta, w\}$ について次の 2 つが成り立ちます.

(I) (温度の収束) $\theta(t) \to 0$ in $H^2(\Omega)$ as $t \to +\infty$.

(II) (相関数の極限の集合) 集合 $\omega(\theta, w)$ を

$$\omega(\theta, w) := \left\{ w_\infty \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\{t_i\} \subset (0,+\infty) \text{ s.t. } t_i \nearrow +\infty, \\ w(t_i) \to w_\infty \text{ as } i \to +\infty \end{array} \right\}$$

によって定めるとき：

(i) $\omega(\theta, w)$ は $L^2(\Omega)$ 内の空でない連結コンパクト集合;

(ii) （定常問題）任意の関数 $w_\infty \in \omega(\theta, w)$ は次の変分不等式を満たす;

$$\sigma V(w_\infty) - (w_\infty, w_\infty) \leq \sigma V(z) - (w_\infty, z) \text{ for any } z \in D(V). \tag{2.2}$$

注意 2.2 本節以降では Ω は2次元の領域とされているので, 命題 2.2 (I) および Sobolev の埋め込み定理から 温度 θ は時間無限大で $\overline{\Omega}$ 上 一様収束することがわかります.

また, 命題 2.2 (II) は時間無限大で温度が一定となるため, 定常問題は実質上 相関数のみについての方程式（変分不等式）になるということを意味しています. 大雑把な言い方をすれば, 定常問題 (2.2) 解は次の楕円型境界地問題の弱解に対応するものです:

$$\begin{cases} -\sigma \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla w_\infty}{|\nabla w_\infty|}\right) + \partial I_{[-1,1]}(w_\infty) \ni w_\infty \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial w_\infty}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

3 定常解の例とその安定性解析

本節では定常問題 (2.2) の解の例を紹介し, 安定性を持つ定常解のグラフの特徴を幾何学的な観点から考察します. 基本的に Allen-Cahn 型方程式 (1.2) の解は自由エネルギーの値を小さくする様に時間発展しますが, 本論文では自由エネルギーの主要項に全変動汎関数が含まれるため 定常解のクラスには比較的変動の少ない区分的定数値の関数が多数含まれます（論文 [3, 4, 5, 6, 7, 8] 参照）. 更にエネルギーの極小元は 1 または -1 の値しか持たないということもわかっていますので（Visintin [9] 参照）, 定常解の安定性解析では必然的に区分的定数値の定常解が主な考察の対象となります.

こういった区分的定数値の定常解を見つける手がかりは 全変動汎関数 V の劣微分作用素 ∂V が具体的にどういった表現を持つのかを調べることですが, 見方を変えるとそれは楕円型境界地問題 (2.3) 中のベクトル場 $\frac{\nabla w_\infty}{|\nabla w_\infty|}$ が $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ の枠組みでどの様な表現を持つのかを明らかにすることでもあります.

近年, 全変動汎関数の劣微分作用素の構造が論文 [1, 2, 6, 7] などで関数解析の立場から詳しく議論され, ベクトル場 $\frac{\nabla w_\infty}{|\nabla w_\infty|}$ の $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 2)$ での表現がはっきりとした形で示されました. これらの結果を参考にすると, 次の定理に示されるような 区分的定数値の関数が定常解となるための十分条件が導かれます.

定理 3.1 （区分的定数値の定常解）$D \subset \Omega$ をリプシッツ連続な境界 ∂D を持つ領域とし, $c_k \in [-1, 1]$, $k = 0, 1$, を $c_0 c_1 < 0$ となるような2つの定数とします. 区分的定数値の関数 w_D を:

$$w_D(x) := \begin{cases} c_1, \text{ if } x \in D, \\ c_0, \text{ if } x \in \Omega \setminus D; \end{cases}$$

と定めるとき, 次の4つの条件 (a)~(d) を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{\nu}_D \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ が見つかれば w_D は定常問題 (2.2) の解であると判定できます.

(a) $|\boldsymbol{\nu}_D| \leq 1$, a.e. in Ω, $\operatorname{div} \boldsymbol{\nu}_D \in L^2(\Omega)$;

(b) (∂D 上の単位法線ベクトルとの関係) $\boldsymbol{n}_{\partial D}$ を ∂D 上の外向き単位法線ベクトルとするとき, $\boldsymbol{\nu}_D = \dfrac{c_0}{|c_0|}\boldsymbol{n}_{\partial D}$, $\mathcal{H}^1$-a.e. on ∂D, ここに $\mathcal{H}^1$ は1次元の Hausdorff 測度とします;

(c) (Γ 上の単位法線ベクトルとの関係) $\boldsymbol{n}_\Gamma$ を Γ 上の外向き単位法線ベクトルとするとき, $\boldsymbol{\nu}_D \cdot \boldsymbol{n}_\Gamma = 0$, $\mathcal{H}^1$-a.e. on Γ;

(d) $$-\sigma \operatorname{div} \boldsymbol{\nu}_D(x) \begin{cases} \le w_D(x), & \text{if } w_D(x) = 1, \\ = w_D(x), & \text{if } -1 < w_D(x) < 1, \\ \ge w_D(x), & \text{if } w_D(x) = -1, \end{cases} \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

注意 3.1 定理 3.1 では開集合 D が連結である場合のみを考えましたが, 一般に D がいくつかの連結領域 $D_1, \cdots, D_m$ $(m \in \mathbb{N})$ の和集合で, 区分的定数値関数 w_D が各部分領域 D_k 毎に異なる定数値 $c_k \in [-1,1]$ $(1 \le k \le m)$ を持つ場合に関しても定理と同様の結論が得られます.

上の定理を手がかりにすると, 次の様な定常解の例を見つけることが出来ます.

例 3.1 $r \ge 2\sigma$, D を Ω 内の部分領域とし, D は以下の意味で境界 Γ から十分に離れているとします:

$$\inf_{\substack{x \in \partial D \\ y \in \Gamma}} |x - y| \ge 2r.$$

c を $|c| = 1$ を満たす定数とし, Ω 上の区分的定数値の関数 $\bar{w}_D$ を次で与えます:

$$\bar{w}_D(x) := \begin{cases} c, & \text{if } x \in D, \\ -c, & \text{if } x \in \Omega \setminus D. \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき, 領域 D が次の条件:

$$\begin{cases} D = \displaystyle\bigcup_{\substack{x \in D \\ B_r(x) \subset D}} B_r(x) \\ \Omega \setminus \overline{D} = \displaystyle\bigcup_{\substack{x \in \Omega \setminus \overline{D} \\ B_r(x) \cap \Omega \subset \Omega \setminus \overline{D}}} B_r(x) \cap \Omega; \end{cases} \tag{3.2}$$

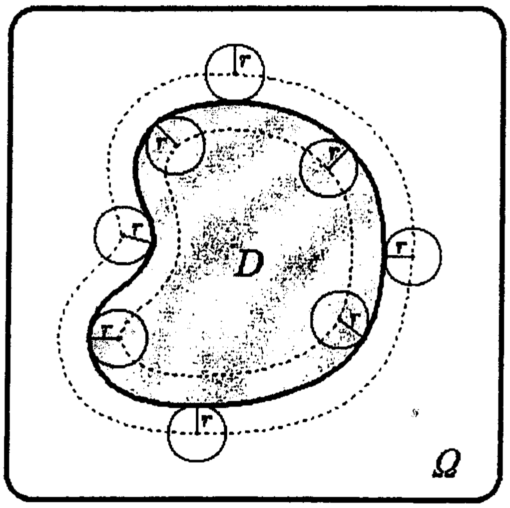


図 1

を満たすならば (3.1) で与えられた区分的定数値関数 $\bar{w}_D$ は定常問題 (2.2) の解になります. ただし, 任意の $\rho > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ に対し, $B_\rho(x)$ は中心 x 半径 ρ の開円板とします.

注意 3.2 条件 (3.2) は, 噛み砕いていえば 領域 D の外側と内側を十分大きな半径 r $(\ge 2\sigma)$ を持つ円によって塗りつぶすことが出来るという条件ですが (図 1 参照), D の境界 ∂D の周辺に着目すれば この条件は ∂D の曲率が $1/r$ 以下であることも示唆しています. 物理的には ∂D は固体領域と液体領域の境目 (界面) に対応しており ∂D 上の曲率は表面張

力による作用を表しますが, この観点に立つと (3.2) は表面張力が界面に及す影響を（部分的に）再現しているという点で興味深い条件であるといえます.

本論文の主要な定理は 例 3.1 で挙げられたタイプの定常解 $\bar{w}_D$ の安定性に関するものです. 定常解の安定性を議論する際には, 定常解の近傍を明確な形で与える必要がありますが, そのためには 例 3.1 で仮定した条件のほかにも幾何学的に強い条件が必要となります. したがって本論文では (3.1) で与えられる区分的定数値の定常解 $\bar{w}_D$ に対し, 更に次の 4 つの条件を仮定として追加します.

(A1) $\exists J$: 有界閉区間, $\exists\gamma \in C^2(J;\mathbb{R}^2)$ s.t. $\partial D = \gamma(J)$.

(A2) $\kappa(s)$ を曲線 $\gamma(\cdot)$ の $s \in J$ における曲率 ($\kappa(s) := \det[\gamma'(s), \gamma''(s)]$) とするとき $\kappa^{-1}(0)$ は高々有限個の閉区間の和集合である.

(A3) $\exists r_* > 2\sigma, \exists\Psi : J \times (-r_*, r_*) \longmapsto \partial D(r_*) := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \mathrm{dist}(x, \partial D) < r_* \right\}$ s.t. $\partial D(r_*) \subset \Omega$ かつ Ψ は C^2-級の微分同相写像.

(A4) $\exists G \subset \Omega$: 正方領域 s.t.

(α1) 正方領域 G の 1 辺の長さを ℓ_G とするとき, $\ell_G \geq 8r_*$;

(α2) g_i, $i = 1, 2, 3, 4$, を正方領域 G の 4 つの頂点とするとき,
$\mathrm{dist}(g_i, \partial D) \geq 4r_*$, $i = 1, 2, 3, 4$;

(α3) $\overline{D} \subset G(r_*) := \left\{ x \in G \,\middle|\, \mathrm{dist}(x, \partial G) > r_* \right\} \subset G$;

(α4) $D = \displaystyle\bigcup_{\substack{x \in D \\ B_{r_*}(x) \subset D}} B_{r_*}(x), \quad G \setminus \overline{D} = \bigcup_{\substack{x \in G\setminus\overline{D} \\ B_{r_*}(x) \cap G \subset G \setminus \overline{D}}} B_{r_*}(x) \cap G.$

上記の (A1)~(A4) を仮定すると, 定常温度を表す定数 0 と (3.1) で与えられる区分的定数値の定常解 $\bar{w}_D$ の組 $\{0, \bar{w}_D\}$ に対して次のような近傍を定義することが出来ます:

$$U_\lambda\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}_D \end{pmatrix}; \varepsilon, \delta\right) := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \begin{array}{c} H^2(\Omega) \\ \times \\ BV(\Omega) \end{array} \,\middle|\, \begin{array}{c} |\xi|_{H^2(\Omega)} < \lambda, \ |\xi|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon \\ |\eta - \bar{w}_D|_{L^\infty(\Omega \setminus \partial D(\frac{\delta}{2}))} < \varepsilon \\ V(\eta) < V(\bar{w}_D) + \varepsilon \\ \eta = \bar{w}_D \text{ on } \Omega \setminus G(r_*) \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

$\forall\lambda > 0$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\delta \in (0, r_*)$.

(3.3) で定義された近傍系を用いると, 定常解の組 $\{0, \bar{w}_D\}$ は連立方程式 $\{(1.1), (1.2)\}$ に対して以下の定理に示される様な意味で安定な性質を持つ事がわかります.

定理 3.2 （定常解の安定性）$\bar{w}_D$ を (3.1) で与えられる区分的定数値の関数とし, 条件 (A1)~(A4) をすべて満たすとします. このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対し十分小さな 2 つの正の定数 $\varepsilon_*(\lambda)$, $\delta_*(\lambda)$ が存在し, 次の条件 ($\star$) を満たします.

(★) 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(\lambda))$, $\delta \in (0, \delta_*(\lambda))$ に対し, 連立方程式 $\{(1.1),(1.2)\}$ の解 $\{\theta, w\}$ が初期条件

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in U_\lambda \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}_D \end{pmatrix} ; \varepsilon, \delta \right) \tag{3.4}$$

を満足するならば, 次を満たすような有限の時間 $t_*(\varepsilon, \delta) \geq 0$ が存在する:

$$w(t) = w_*, \text{ a.e. in } \Omega \setminus \partial D(\tfrac{\delta}{2}), \forall t \geq t_*(\varepsilon, \delta).$$

注意 3.3 定理 3.2 において, 初期条件 (3.4) から 相関数 w は時刻 0 において定常解 $\bar{w}_D$ と小正方領域 $G(r_*)$ の外側で一致していなくてはなりませんが, 実は (3.4) から正方領域 G の外側では任意の時刻で両者は一致することを導くことが出来ます. したがって, (3.3) で定義した近傍は領域 Ω の境界 Γ の近辺においてとても強い条件を含んでいることになりますが, 見方を変えれば 境界 Γ の周辺の解の挙動はそれだけデリケートであると捉える事も出来ます.

参考文献

[1] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, Minimizing total variation flow, Differential Integral Equations, Vol. 14, No. 3 (2001), pp. 321-360.

[2] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, The Dirichlet Problem for the Total Variation Flow, J. Funct. Anal., Vol. 180 (2001), pp. 347-403.

[3] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation functional with constraint, Nonlinear Analysis, Vol. 46, 2001, pp. 435-455.

[4] N. Kenmochi and K. Shirakawa, Stability for a parabolic variational inequality associated with total variation functional, Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 44, No. 1, 2001, pp. 119-137.

[5] N. Kenmochi and K. Shirakawa, Stability for a phase field model with the total variation functional as the interfacial energy, Nonlinear Analysis, Vol. 53, 2003, pp. 425-440.

[6] K. Shirakawa and M. Kimura, Stability Analysis for Allen-Cahn type equation associated with the total variation energy, Technical Reports of Mathematical Sciences Chiba University, Vol. 18, No. 3, 2002.

[7] 白川 健, 木村 正人, 全変動汎関数に支配される放物型方程式に対する局所安定性, 第 24 回発展方程式若手セミナー報告集, pp. 48-67.

[8] K. Shirakawa, Parabolic variational inequality associated with the total variation functional, Nonlinear Analysis, Vol. 47, 2001, pp. 3195-3206.

[9] A. Visintin, *Models of Phase Transitions,* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **Vol. 28**, Birkhäuser, Boston, 1996.

On a system of nonlinear PDE's for phase transitions with vector order parameter and convective effect

Emil Minchev

Department of Mathematics, Faculty of Education,
Chiba University, Yayoi - cho 1 - 33, Inage - ku,
Chiba 263 - 8522, Japan
minchev@graduate.chiba-u.jp, eminchev@hotmail.com

Abstract

The paper deals with a system of nonlinear PDE's which describes a phase - field model with convection and temperature dependent constraint to the vector order parameter. Existence of solutions for the system under consideration is proved by the method of Yosida approximation and fixed point arguments.

AMS Subject Classification Code: 35R70, 35K50, 74N30
Keywords: nonlinear PDE's, existence of solutions, subdifferential, Yosida approximation, hysteresis, vector order parameter, convection

1 Introduction

The present paper deals with a class of phase transition models which takes into account the hysteresis, diffusive and convective effects and is described by the following system of PDE's

$$a\mathbf{w}_t + \partial \mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w}, u) \quad in\ Q, \tag{1}$$

$$(c_1 w_1 + c_2 w_2)_t + du_t - \nabla \cdot (\nabla u + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{w})) = h(\mathbf{w}, u) \quad in\ Q, \tag{2}$$

where $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $T > 0$, $\Omega \subset R^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$; a, c_1, c_2, d are given constants; $\hat{\mathbf{K}} : R^2 \to R^N$, $F : R^2 \times R \to R^2$, $h : R^2 \times R \to R$, $f_*, f^*, g_*, g^* : R \to R$ are given functions. We assume that $0 \le b \le 1$ is a given constant, $f_*, f^*, g_*, g^* \in C^2(R)$, $f_*(u) \le f^*(u)$ on R, $g_*(u) \le g^*(u)$ on R, $f_*(u)$, $f^*(u)$, $g_*(u)$, $g^*(u)$ are nondecreasing functions on R. Also we suppose that there exists a constant $k_0 > 0$ such that $f_*(u) = f^*(u) = g_*(u) = g^*(u) = -1$ on $(-\infty, -k_0]$ and $f_*(u) = f^*(u) = g_*(u) = g^*(u) = 1$ on $[k_0, \infty)$.

Define

$$K(u) = \{(w_1, w_2) : \ f_*(u) \le w_1 + bw_2 \le f^*(u), \ g_*(u) \le -bw_1 + w_2 \le g^*(u)\}.$$

We denote by $\mathbf{I}_{K(u)}(\cdot)$ the indicator function of the set $K(u)$ and $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\cdot)$ denotes the subdifferential of $\mathbf{I}_{K(u)}(\cdot)$. The subdifferential $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w})$ is a set - valued mapping and in our statement of the problem $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) = \{0\}$ if $\mathbf{w} \in \mathrm{int}K$, and $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w})$ coincides with the cone of normals to K at the point $\mathbf{w}$ if $\mathbf{w} \in \partial K$.

In this paper we study the system (1),(2) together with the following boundary and initial conditions

$$\nu \cdot (\nabla u + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{w})) = 0 \quad on\ \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{w}(0,x) = \mathbf{w}_0(x), \quad u(0,x) = u_0(x) \quad in\ \Omega, \tag{4}$$

where ν is the unit outward normal vector on $\partial\Omega$, $\mathbf{w}_0$, u_0 are given initial data.

Equations (1) and (2) correspond respectively to the kinetics of the vector order parameter $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ and the balance of the internal energy; u is the relative temperature. The system (1),(2) describes solid-liquid phase transitions of a physical system which is a mixture of two substances having different solidification temperatures. If we consider melting problem of only one substance then the respective system contains scalar function for the order parameter. However, in the case when we have mixture of two different substances, the adequate mathematical model describing their solid-liquid phase transitions contains two component vector order parameter. Let us note that models with vector hysteresis are object of active recent investigations (see papers [7], [19] as well as the monograph [17]).

Various special cases of the system (1),(2) have been already studied. In [20], [21] Visintin proposed the following system

$$a w_t + \partial I_{[-1,1]}(w) \ni a_1 w + a_2 u \quad in\ Q, \tag{5}$$

$$c w_t + d u_t - \Delta u = g(x,t) \quad in\ Q \tag{6}$$

as a model for Stefan problem with phase relaxation, where $f_*(u) \equiv -1$, $f^*(u) \equiv 1$. Further investigations deal with the case of cubic nonlinearity $-a_0 w^3 + a_1 w + a_2 u$ in the kinetics of the order parameter, see [6], [9], [10]. The equation

$$w_t + \partial I_u(w) \ni 0 \quad in\ Q,$$

including the constraint $f_*(u) \leq w \leq f^*(u)$, was investigated in [3] and [20], see also [8], [11], [12]. In [5], P. Colli, N. Kenmochi and M. Kubo studied the system (1),(2) in the special case when w is scalar function, $h = h(t,x)$ and there is no convective effects: $\hat{\mathbf{K}} = 0$. Later, M. Kubo in [13] studied the case of scalar order parameter in the presence of convective effects.

Let us note that in mathematical aspect the present paper has been influenced by the paper [13] as well as [5] and [18]. Our goal is to incorporate the case of vector order parameter to the phase transition phenomena with diffusive, hysteresis and convective effect.

In the present paper we obtain results for boundedness and existence of solutions of the system (1)-(4). Using the method of Yosida approximation and fixed point arguments we prove that there exists at least one solution of the problem under consideration.

2 Preliminary Notes

Denote by H the Hilbert space $L^2(\Omega)$ with the usual scalar product $(\cdot,\cdot)_H$ and norm $|\cdot|_H$, and by $\mathbf{H}$ the product space $H \times H$. Denote by V the Sobolev space $H^1(\Omega)$ equipped with the norm $|u|_V = (u,u)_V^{1/2}$, where

$$(u,v)_V = (u,v)_H + a(u,v),$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad u, v \in V,$$

and by $\mathbf{V}$ the product space $V \times V$.

We give the definition of solutions in a weak (variational) sense for the system (1)-(4).

Definition 2.1 *A pair of functions $\{\mathbf{w}, u\}$ is called a solution of the system (1)-(4) if:*
(i) $w_1, w_2 \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V)$.
(ii) $u \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$.
(iii) $a\mathbf{w}' + \partial \mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w},u)$ *in* $H \times H$ *a.e. in* $(0,T)$.
(iv) $(c_1 w_1 + c_2 w_2)' + du' - \nabla \cdot (\nabla u + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{w})) = h(\mathbf{w},u)$ *in* H *a.e. in* $(0,T)$.
(v) $\nu \cdot (\nabla u + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{w})) = 0$ *in* $L^2(\partial\Omega)$ *a.e. in* $(0,T)$.
(vi) $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad u(0) = u_0$.

For simplicity we denote respectively by $\mathbf{w}'$ and u' the time - derivatives $\mathbf{w}_t$ and u_t of $\mathbf{w}$ and u.

Note that the inclusion (iii) is equivalent to the following conditions:
(iii)-(a) $\mathbf{w} \in K(u)$ *a.e. in* Q.
(iii)-(b) $(a\mathbf{w}'(t) - \mathbf{F}(\mathbf{w}(t),u(t)), \mathbf{w}(t) - \mathbf{z}) \le 0$ for all $\mathbf{z} \in \mathbf{H}$ with $\mathbf{z} \in K(u(t))$ *a.e. in* Ω *for a.e.* $t \in (0,T)$.

Throughout the paper we suppose that the following assumptions hold:

H1. a, c_1, c_2, d, b are given constants such that $a > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $d > 0$, $0 \le b \le 1$, and $bc_1 < c_2$.

H2. $f_*, f^*, g_*, g^* \in C^2(R)$ are such that $f_*(u) \le f^*(u)$ on R, $g_*(u) \le g^*(u)$ on R, $f_*(u)$, $f^*(u)$, $g_*(u)$, $g^*(u)$ are nondecreasing functions on R and there exists a constant $k_0 > 0$ such that $f_*(u) = f^*(u) = g_*(u) = g^*(u) = -1$ on $(-\infty, -k_0]$ and $f_*(u) = f^*(u) = g_*(u) = g^*(u) = 1$ on $[k_0, \infty)$.

H3. $\sup_{(\mathbf{w},u) \in R^2 \times R} | h(\mathbf{w},u) | < +\infty$.

H4. $\mathbf{F}$ and h are locally Lipschitz continuous functions on $R^2 \times R$, $\hat{\mathbf{K}} : R^2 \to R^N$ is locally Lipschitz continuous function on R^2.

H5. $w_{01}, w_{02}, u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap V$ and $\mathbf{w}_0 \in K(u_0)$ a.e. in Ω, where $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, w_{02})$.

3 Main Results

3.1 Boundedness of solutions

Theorem 3.1 *Any solution $\{\mathbf{w}, u\}$ of (1)-(4) satisfies the estimate*

$$|w_1|_\infty, \ |w_2|_\infty, \ |u|_\infty \le M_0, \tag{7}$$

where $M_0 > 0$ is a constant which depends on T, $|h|_\infty$, $|u_0|_\infty$, k_0 and $|\hat{\mathbf{K}}|_\infty$.

Remark 3.1 From Theorem 3.1 it follows that by cutting outside the set $\{|u| \le M_0,\ |w_i| \le M_0,\ i = 1, 2\}$ (if necessary), we can assume without loss of generality that the function $\mathbf{F}$ is bounded and Lipschitz continuous on $R^2 \times R$.

Remark 3.2 Because of the constraint for $\mathbf{w}$ in the problem (1)-(4) we can assume without loss of generality that $\hat{\mathbf{K}} : R^2 \to R^N$ is a bounded and Lipschitz continuous function on R^2.

3.2 Auxiliary Problems

In this section we introduce the following problem:

$$a\mathbf{w}' + \partial \mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w}, u) \quad in\ Q, \tag{8}$$

$$(c_1 w_1 + c_2 w_2)' + du' - \Delta u = h(\mathbf{w}, u) + \nabla \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}}) \quad in\ Q, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\nu \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}}) \quad on\ \Sigma, \tag{10}$$

$$\mathbf{w}(0, x) = \mathbf{w}_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad in\ \Omega, \tag{11}$$

namely, we have replaced the terms $\nabla \cdot \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{w})$ and $\nu \cdot \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{w})$ by $\nabla \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}})$ and $\nu \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}})$, where $\bar{\mathbf{w}}$ is a given function.

Definition 3.2 *Let $\bar{\mathbf{w}} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ be a given function. A pair of functions $\{\mathbf{w}, u\}$ is called a solution of the system (8)-(11) if:*
(i) $w_1, w_2 \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$.
(ii) $u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$.
(iii) $a\mathbf{w}' + \partial \mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w}, u)$ in $H \times H$ a.e. in $(0, T)$.
(iv) $(c_1 w_1 + c_2 w_2)' + du' - \Delta u = h(\mathbf{w}, u) + \nabla \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}})$ in H a.e. in $(0, T)$.
(v) $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\nu \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}})$ in $L^2(\partial\Omega)$ a.e. in $(0, T)$.
(vi) $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad u(0) = u_0$.

We will prove existence and uniqueness of the solutions of the systems (8)-(11) as well as continuous dependence on the data $\bar{\mathbf{w}}$.

Theorem 3.3 *For any given $\bar{\mathbf{w}} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$, there exists a unique solution $\{\mathbf{w}, u\}$ of (8)-(11).*
Moreover, the solution $\{\mathbf{w}, u\}$ satisfies the following inequality

$$\int_0^t (|\mathbf{w}'(s)|_{\mathbf{H}}^2 + |u'(s)|_H^2) ds + |\nabla \mathbf{w}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + |\nabla u(t)|_H^2 \tag{12}$$

$$\le N_1 \left\{ 1 + \int_0^t |\bar{\mathbf{w}}'(s)|_{\mathbf{H}} |\nabla u(s)|_H ds + \int_0^t |\nabla \bar{\mathbf{w}}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds \right\}$$

for all $t \in [0, T]$, where $N_1 > 0$ is a constant independent of $\bar{\mathbf{w}}$ and $\{\mathbf{w}, u\}$.

In order to study the system (8)-(11) we introduce an approximate system with approximation parameters $\mu > 0$ and $\kappa > 0$. To this for $(\mathbf{w}, u) \in R^2 \times R$ we denote

$$\mathbf{J}_u\mathbf{w} = (J_u^{(1)}\mathbf{w}, J_u^{(2)}\mathbf{w})$$

$$= (\max\{\min\{w_1 + bw_2, f^*(u)\}, f_*(u)\}, \max\{\min\{-bw_1 + w_2, g^*(u)\}, g_*(u)\}).$$

Consider also the Yosida regularization of the subdifferential graph $\partial\mathbf{I}_{K(u)}$ which is defined as

$$\begin{aligned}\partial\mathbf{I}^\mu_{K(u)}(\mathbf{w}) = & \frac{1}{\mu\sqrt{b^2+1}}[g_*(u) - (-bw_1 + w_2)]^+(b, -1) \\ & + \frac{1}{\mu\sqrt{b^2+1}}[(w_1 + bw_2) - f^*(u)]^+(1, b) \\ & + \frac{1}{\mu\sqrt{b^2+1}}[(-bw_1 + w_2) - g^*(u)]^+(-b, 1) \\ & + \frac{1}{\mu\sqrt{b^2+1}}[f_*(u) - (w_1 + bw_2)]^+(-1, -b).\end{aligned}$$

Consider the following approximate system of PDE's

$$a\mathbf{w}' - \kappa\Delta\mathbf{w} + \partial\mathbf{I}^\mu_{K(u)}(\mathbf{w}) = \mathbf{F}(\mathbf{w}, u) \quad in\ Q, \tag{13}$$

$$\left(\frac{c_1 + bc_2}{1+b^2}J_u^{(1)}\mathbf{w} + \frac{-bc_1 + c_2}{1+b^2}J_u^{(2)}\mathbf{w}\right)' + du' - \Delta u = h(\mathbf{w}, u) + \nabla \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}}) \quad in\ Q, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\nu \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}}), \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \nu} = 0 \quad on\ \Sigma, \tag{15}$$

$$\mathbf{w}(0, x) = \mathbf{w}_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad in\ \Omega. \tag{16}$$

The regularization term $-\kappa\Delta\mathbf{w}$ is needed since we need not only existence of unique solution of the problem (8)-(11) but also some compactness property (implicitly given in inequality (12)).

Below we give a definition of the solution of the approximate system (13)-(16). For the sake of simplicity we will denote the solution again by $\{\mathbf{w}, u\}$ instead of $\{\mathbf{w}_{\mu,\kappa}, u_{\mu,\kappa}\}$.

Definition 3.4 *Let $\bar{\mathbf{w}} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ be a given function. A pair of functions $\{\mathbf{w}, u\}$ is called a solution of the system (13)-(16) if:*

(i) $w_1, w_2 \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$.
(ii) $u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$.
(iii) $a\mathbf{w}' - \kappa\Delta\mathbf{w} + \partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w}, u)$ in $H \times H$ a.e. in $(0, T)$.
(iv) $\left(\frac{c_1+bc_2}{1+b^2}J_u^{(1)}\mathbf{w} + \frac{-bc_1+c_2}{1+b^2}J_u^{(2)}\mathbf{w}\right)' + du' - \Delta u = h(\mathbf{w}, u) + \nabla\cdot\hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}})$ in H a.e. in $(0, T)$.
(v) $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\nu \cdot \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{w}})$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \nu} = 0$ in $L^2(\partial\Omega)$ a.e. in $(0, T)$.
(vi) $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$, $u(0) = u_0$.

Lemma 3.5 *For each $\bar{\mathbf{w}} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$ there exists a unique solution of the system (13)-(16). Moreover*

$$|u|_\infty \le M_0,$$

for the same constant M_0 as in Theorem 3.1.

3.3 Continuous dependence of the solutions of system (8)-(11) on $\bar{\mathbf{w}}$

Theorem 3.6 *Let $\bar{\mathbf{w}}_n$, $\bar{\mathbf{w}} \in W^{1,2}(0,T;\mathbf{H}) \cap L^2(0,T;\mathbf{V})$, $n = 1,2,\dots$, and let $\{\mathbf{w}_n, u_n\}$, $\{\mathbf{w}, u\}$ be the respective solutions of the system (8)-(11). Suppose that $\{\bar{\mathbf{w}}_n\}$ is bounded in $W^{1,2}(0,T;\mathbf{H}) \cap L^2(0,T;\mathbf{V})$ and*

$$\bar{\mathbf{w}}_n \to \bar{\mathbf{w}} \text{ in } L^2(0,T;\mathbf{H}).$$

Then we have that

$$u_n \to u \quad \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$$
$$\text{and weakly-* in } L^\infty(0,T;V),$$
$$\mathbf{w}_n \to \mathbf{w} \quad \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;\mathbf{H}) \text{ and weakly-* in } L^\infty(0,T;\mathbf{V}).$$

3.4 Existence of solutions of system (1)-(4)

In this section we will formulate the main result of the paper:

Theorem 3.7 *There exists at least one solution of the system (1)-(4).*

References

[1] H. Attouch, *Mesurabilite et Monotonie*, Publication Mathematique d'Orsay, 1973.

[2] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi - Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North - Holland / American Elsevier, Amsterdam - London - New York, 1973.

[3] M. Brokate, J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, New York, 1996.

[4] P. Colli, K. H. Hoffmann, A nonlinear evolution problem describing multi - component phase changes with dissipation, *Numer. Funct. Anal. Optim.,* **14** (1993), 275 - 297.

[5] P. Colli, N. Kenmochi, M. Kubo, A phase field model with temperature dependent constraint, *J. Math. Anal. Appl.,* **256** (2001), 668 - 685.

[6] A. Damlamian, N. Kenmochi, N. Sato, Subdifferential operator approach to a class of nonlinear systems for Stefan problems with phase relaxation, *Nonlinear Analysis,* **23** (1994), 115 - 142.

[7] J. Füzi, A. Ivanyi, Isotropic vector Preisach particle, *Physica B,* **275** (2000), 179 - 182.

[8] M. Hilpert, On uniqueness for evolution problems with hysteresis, in: *Mathematical Models for Phase Change Problems,* Birkhauser, Basel, (1989), 377 - 388.

[9] N. Kenmochi, T. Koyama, G. H. Meyer, Parabolic PDEs with hysteresis and quasi-variational inequalities, *Nonlinear Analysis,* **34** (1998), 665 - 686.

[10] N. Kenmochi, M. Kubo, Weak solutions of nonlinear systems for non-isothermal phase transitions, *Adv. Math. Sci. Appl.,* **9** (1999), 499 - 521.

[11] N. Kenmochi, A. Visintin, Asymptotic stability for nonlinear PDEs with hysteresis, *Euro. J. Appl. Math.,* **5** (1994), 39 - 56.

[12] P. Krejci, J. Sprekels, A hysteresis approach to phase - field models, *Nonlinear Analysis,* **39** (2000), 569 - 586.

[13] M. Kubo, A filtration model with hysteresis, *to appear.*

[14] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type,* Transl. Math. Monographs, Vol. 23, AMS, Rhode Island, 1967.

[15] J. L. Lions, *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires,* Dunod, Gouthiers-Villars, Paris, 1969.

[16] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Application I,* Springer, New York, 1972.

[17] I. D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis,* Springer, New York, 1991.

[18] E. Minchev, On a system of nonlinear PDE's for phase transitions with vector order parameter, *to appear in Advances in Mathematical Sciences and Applications.*

[19] A. Visintin, A Weiss - type model of ferromagnetism, *Physica B,* **275** (2000), 87 - 91.

[20] A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis,* Springer, Berlin, 1994.

[21] A. Visintin, *Models of Phase Transitions,* Birkhauser, Boston, 1996.

[22] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A Linear Monotone Operators,* Springer, New York - Berlin, 1990.

ある相転移現象を記述する常微分方程式系について

岡崎　貴宣（千葉大・自然）

1. 序

次のような常微分方程式系を考える.

$$aw' + bu' + \partial I_u(w) \ni F(u,w) \text{ in } (0,T), \tag{1}$$

$$cw' + du' = h(u,w) \text{ in } (0,T), \tag{2}$$

$$u(0) = u_0,\ w(0) = w_0, \tag{3}$$

ここに, a,b,c,d は $a>0, b<0, c>0, d>0$ を満たす定数, $\partial I_u(w)$ は閉区間 $[f_*(u), f^*(u)]$ 上の指示関数の劣微分を表し, 次のように定義される.

$$\partial I_u(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{for } w > f^*(u) \text{ or } w < f_*(u), \\ [0,+\infty) & \text{for } w = f^*(u) > f_*(u), \\ \{0\} & \text{for } f_*(u) < w < f^*(u), \\ (-\infty, 0] & \text{for } w = f_*(u) < f^*(u), \\ (-\infty,+\infty) & \text{for } w = f_*(u) = f^*(u). \end{cases} \tag{4}$$

また $f_*(u)$, $f^*(u): R \to R$ は $(f_* \leq f^*)$ を満たす非減少で有界なリップシッツ関数, F, h : $R \times R \to R$ はリップシッツ関数とする. (1) は u をインプット, w をアウトプットとするヒステリシスの関係を表している. ヒステリシスは様々な現象に現れるが, 例えば相転移現象では, 過過熱, 過冷却効果を持つ液体-固体相転移における温度と物質の状態を表す相関数との間に観察される. それらを表現するための方法として, 上記のような常微分方程式を考えた. これまで [2] において, 上記のシステムがヒステリシスを表現する上で, どの程度有効なのかを数値計算も兼ねて行われてきた. そこでは同じ初期値を持つ場合でも特に F, h を適切に選ぶことで Fig. 1 のような clockwise, anti-clockwise の周期軌道を表現できることがわかっており, ある種のヒステリシスを表現することに対する有効性が得られていた.

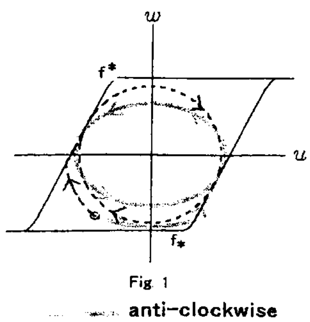


Fig 1

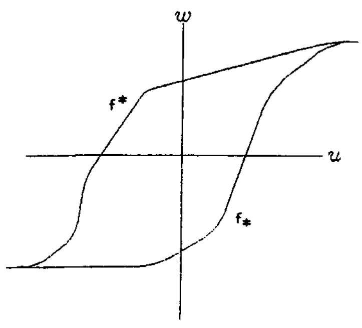


Fig. 2

しかし, Fig. 1における場合でもすべての初期値に対して周期解になるわけではなく, 発散してしまう場合もあり, その解軌道についての解析が進められてきた. 今回は, $f_*(u)$, $f^*(u)$ において Fig. 1 のような対称性を持たない, より一般的な場合についての解軌道について検証する.

2. 仮定及び主結果

Assumption

Fig. 1 のような対称性を持つ f_*, f^* の場合でも, a,b,c,d 及び F,h を変化させることによって様々な挙動が実現できるわけであるが, Fig. 2 のような非対称な f_*,f^* に至っては, さらに解軌道を分類することに複雑さが増してしまう. そこで今回は次のような仮定を a,b,c,d, F,h 及び f_*, f^* に課すことにする.

(i) $F := \alpha u + \beta w,\ h := \gamma u + \delta w,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in R,$
$a\gamma - c\alpha = d\beta - b\delta = 0,\ d\alpha - b\gamma = c\beta - a\delta > 0.$

(ii) f_*,f^* において, 正定数 $\kappa_*,\kappa^* > 0$ が存在し, $f_*(u) = f^*(u)$ on $(-\infty,-\kappa_*]$,
$f_*(u) < f^*(u)$ on $(-\kappa_*,\kappa^*), f_*(0) < 0 < f^*(0), f_*(u) = f^*(u)$ on $[\kappa^*,+\infty)$

(iii) Γ^* と Γ_* をそれぞれ $w = f^*(u)$ と $w = f_*(u)$ の二つのカーブを表すこととする. また関数 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}(u,w) := u^2+w^2$ とする. この $\mathcal{B}(u,w) = \text{const}$ とすることにより, 一つの円を定める. この時, 任意の $r > 0$ に対し, Γ^* と $\mathcal{B}(u,w) = r$ 及び Γ_* と $\mathcal{B}(u,w) = r$ との交点の個数は有限個であるとする. もしある閉区間上で円 $\mathcal{B}(u,w) = r$ と Γ_*, または Γ^* が一致している場合は, その区間を一つと数える.

仮定 (i) は a,b,c,d, F,h に関するもので, もし (1) において $\partial I_u(w)$ の項が無い場合に, 常微分方程式系 (1), (2) の解軌道は常に初期値 (u_0,w_0) を通る反時計周りの円になり, その軌道は $\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{B}(u_0,w_0)$ 上を動くことを保証するものである. (ii),(iii) は f_*,f^* に関する仮定である. 以上の仮定のもと, 次のような定理を得た.

Theorem

(i),(ii).(iii) の仮定が成立しているとする. この時, $\mathcal{S} := \{(u,w)|f_*(u) \le w \le f^*(u)\}$ と定めると, $r_p,r_q,r_*,r_{**},r^*,r^{**}$(詳細は後述) に依存した領域 $\mathcal{S}_{i(i=0,1,2,3)} \subset \mathcal{S}$ を具体的に定めることができて, 解軌道は次のようになる.

- 初期値 (u_0,w_0) が $\mathcal{S}_{0,1}$ に含まれる場合の解軌道は, 時間が経過すると周期解になる.
- 初期値 (u_0,w_0) が $\mathcal{S}_2$ に含まれる場合の解軌道は, 定常解に収束する.
- 初期値 (u_0,w_0) が $\mathcal{S}_3$ に含まれる場合は, 解軌道は発散する.

この定理を証明するために, 領域 $\mathcal{S}$ をいくつかの領域に分割することを考え, 初期値がそれぞれの領域に含まれる場合において, 解軌道を考察していくことにする.

3. 領域の分割

実際に領域を $u-w$ 平面において分割することを考える. いくつかの段階を踏んで領域を定めることにする.

step 1

まず, 原点中心の半径 $\sqrt{r}>0$ の円 $\mathcal{B}(u,w)=r$ を考える. 仮定 (ii) より原点は $\mathcal{S}$ の内部にあることから Γ_*, Γ^* との交点を持たない円を内部にとることができる. この円の半径を大きくしていけば, この円と Γ_* と Γ^* はそれぞれ, $u\geq 0$, $f_*(u)<0$ 及び $u\leq 0, f^*(u)>0$ において初めて交点を持つことになる. どちらが先に交点を持つかは Γ_*, Γ^* の形状による. Γ_* と交点を持つ最小の円を $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ と表すことにする.

$$r_q := \min_{(u,w)\in\Gamma_*} \mathcal{B}(u,w). \tag{5}$$

この円 $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ と Γ_* において, その共通部分においては,

$$-\frac{u}{f_*(u)} = f_*'(u) \text{ on } \Gamma_* \text{ with } \mathcal{B}(u,w)=r_q. \tag{6}$$

が成立する. もし (6) が成立しないとすると, $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ よりも小さな円で Γ_* と交点を持つようなものが取れてしまう. (6) はその共通部分においては, Γ_* と円は接していることを表している. 仮定 (iii) より, 共通な部分は有限個であるから, その共通部分上で u 座標の最大値 $(q>0)$ を取ることができて

$$q=\max\{u|(u,w)\in\Gamma_*,\ \mathcal{B}(u,w)=r_q\}, \tag{7}$$

と定める.

(5), (7) と同様にして, Γ^* と交点を持つ最小な円 $\mathcal{B}(u,w)=r_p$ と, その共通部分における u 座標の最小値 $(p<0)$ を取ることができる.

$$r_p := \min_{(u,w)\in\Gamma^*} \mathcal{B}(u,w) \tag{8}$$

$$p=\min\{u|(u,w)\in\Gamma^*,\ \mathcal{B}(u,w)=r_p\}. \tag{9}$$

(6) と同様に

$$-\frac{u}{f^*(u)} = f^{*\prime}(u) \text{ on } \Gamma^* \text{ with } \mathcal{B}(u,w)=r_p. \tag{10}$$

step 2

先に定めた p,q を用いて, 原点から引かれる二つの半直線 $qw-f_*(q)u=0\ (u\geq 0)$ と $f^*(p)u-pw=0\ (u\leq 0)$ を考える. これを用いて $u-w$ 平面を二つの領域 A^+, A^- に分割する.

$$A^+ := \left\{ (u,w) \;\middle|\; \begin{array}{l} qw-f_*(q)u\geq 0 \text{ if } u>0 \\ f^*(p)u-pw\leq 0 \text{ if } u\leq 0 \end{array} \right\}, \tag{11}$$

$$A^- := \left\{ (u,w) \;\middle|\; \begin{array}{l} qw - f_*(q)u > 0 \text{ if } u > 0 \\ f^*(p)u - pw > 0 \text{ if } u \le 0 \end{array} \right\}. \tag{12}$$

step 3

$\gamma u + \delta w = 0$ (すなわち (2) において $h = 0$ なる直線) と Γ_* $(u < 0)$, $\Gamma^*(u > 0)$ との交点を考える. これらの交点は (1), (2) における定常解になっている. 実際 (1), (2) において, $u' = 0$, $w' = 0$ とすることで求められる. 詳しくは, [5] を参照されたい. ここに, $\{(u_*, w^*)\}$, $\{(u^*, w^*)\}$ を Γ_*, Γ^* 上における, 定常解の条件を満たす集合とする.

$$\{(u^*, w^*)\} = \{(u,w) \in \Gamma^* | \gamma u + \delta w = 0,\ u > 0\}, \tag{13}$$

$$\{(u_*, w_*)\} = \{(u,w) \in \Gamma_* | \gamma u + \delta w = 0,\ u < 0\}. \tag{14}$$

次にこれらの定常解の条件を満たす点を通るような原点中心の円を考える. r_*, r_{**} をそれぞれ, $\{(u_*, w_*)\}$ に含まれる点を通るような円の中で最小なもの, 最大なものと定める.

$$r_* := \min_{(u,w)\in\{(u_*,w_*)\}} \mathcal{B}(u,w), \tag{15}$$

$$r_{**} := \max_{(u,w)\in\{(u_*,w_*)\}} \mathcal{B}(u,w). \tag{16}$$

同様にして, $\{u^*, w^*)\}$ に関しても, そこに含まれる点を通るような円の中で最小なもの, 最大なものを r^*, r^{**} とする.

$$r^* := \min_{(u,w)\in\{(u^*,w^*)\}} \mathcal{B}(u,w), \tag{17}$$

$$r^{**} := \max_{(u,w)\in\{(u^*,w^*)\}} \mathcal{B}(u,w). \tag{18}$$

step 4

$\mathcal{S}$ を分割することを考える. $r_p, r_q, r_*, r_{**}, r^*, r^{**}$ の大きさを比較すると, $r_p < r^* \le r^{**}$, $r_q < r_* \le r_{**}$ は常に成り立つが, r_p と r_q, また r_* と r_*, r^* と r_q については Γ_*, Γ^* の形状に依存する. そこで, $r_q < r_p$, $r_* > r_p$, $r^* > r_q$ の場合について述べる. 他の場合でも似たような形で $\mathcal{S}_{i(i=0,1,2,3)}$ を取ることができる.

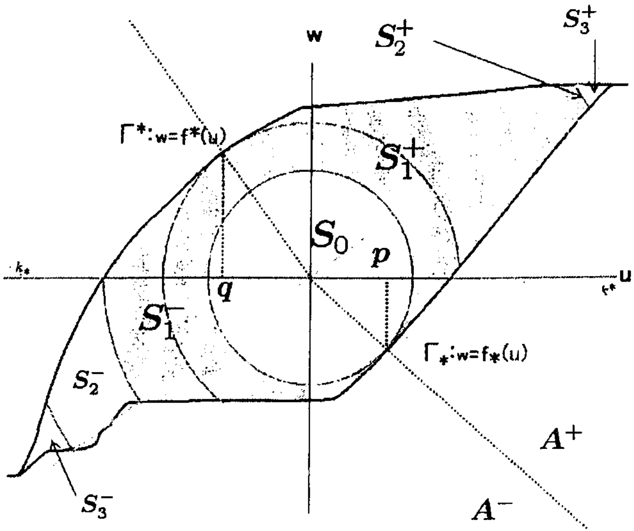
$$\mathcal{S}_0 := \{(u,w) | \mathcal{B}(u,w) < r_q\}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}_1^+ \cup \mathcal{S}_1^-, \\ &\mathcal{S}_1^+ := \{(u,w) \in \mathcal{S} \cap A^+ | r_q \le \mathcal{B}(u,w) < r^*\}, \\ &\mathcal{S}_1^- := \{(u,w) \in \mathcal{S} \cap A^- | r_q \le \mathcal{B}(u,w) < r_*\}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_2^+ \cup \mathcal{S}_2^-, \\ &\mathcal{S}_2^+ := \{(u,w) \in \mathcal{S} \cap A^+ | r^* \le \mathcal{B}(u,w) \le r^{**}\}, \\ &\mathcal{S}_2^- := \{(u,w) \in \mathcal{S} \cap A^- | r_* \le \mathcal{B}(u,w) \le r_{**}\}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_3 &:= \mathcal{S}_3^+ \cup \mathcal{S}_3^-, \\
\mathcal{S}_3^+ &:= \{(u,w) \in \mathcal{S} \cap A^+ | r^{**} < \mathcal{B}(u,w)\}, \\
\mathcal{S}_3^- &:= \{(u,w) \in \mathcal{S} \cap A^- | r_{**} < \mathcal{B}(u,w)\},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

例えば, それぞれの領域 $\mathcal{S}_{i(i=0,1,2,3)}$ は次のように定められる.



初期値が $\mathcal{S}_{0,1}$ にある場合の解軌道は, 最初のうちはそれぞれ異なる軌道になるものの, 時間が経過すると周期軌道になる. 初期値が $\mathcal{S}_2$ にある場合は, 定常解に収束するが, 有限時間で収束する軌道と, 無限時間で収束する軌道が現れる. $\mathcal{S}_3$ に初期値がある場合は, 解軌道は発散してしまう.

4. 証明の概略

先に定めた各領域 $\mathcal{S}_{i(i=0,1,2,3)}$ において, 初期値がそれぞれの領域に含まれる場合に, 解軌道がどのようになるかを調べていく.

(a). $(u_0, w_0) \in \mathcal{S}_0$ の場合

この場合, $\mathcal{B}(u_0, w_0) < r_q$ が成り立つ. $f_*(u_0) < w_0 < f^*(u_0)$ であるから, 仮定 (i) より, 解軌道は反時計回りで円 $\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{B}(u_0, w_0)$ 上を動く. $\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{B}(u_0, w_0) < r_q$ より, 解軌道は r_q の定め方から Γ_*, Γ^* と交わらない. これにより, 初期値が $\mathcal{S}_0$ 上にある場合, 解軌道は $\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{B}(u_0, w_0)$ 上を動き続ける. この軌道は反時計周りの円の周期軌道である.

(b). $(u_0, w_0) \in \mathcal{S}_1^-$ の場合

$(u_0, w_0) \in \mathcal{S}_1^-$, 特に, $w_0 = 0$, $u_0 = -\sqrt{p^2 + f^{*2}(p)}$ とする. 他の場合においても, 同様に示すことができる. 明らかに $\mathcal{B}(u_0, w_0) = r_p > r_q$ であるから, 解軌道は必ず Γ_* と交点を持ち, そこに到達する. 到達した点を $(u_1, f_*(u_1))$ と書くことにする. この時, $f_*(u_1) < 0$, さらに

$$
-\frac{u}{f_*(u)} \leq f_*'(u) \text{ for } u_1 \leq u \leq 0. \tag{23}
$$

また, $\mathcal{S}_1^-$ の定め方から, 正定数 $M>0$ を取ることができて

$$\gamma u+\delta f_*(u)>M>0 \text{ on } \Gamma_* \text{ with } u_1\le u<0. \tag{24}$$

これにより, $(u_1, f_*(u_1))$ からの解軌道は, 次のように表される.

$$u'=\tfrac{\gamma u+\delta f_*(u)}{cf_*'(u)+d}>M,\quad w'=f_*'u'>0. \tag{25}$$

(25) は解軌道が Γ_* に沿って上っていくことを表している. 実際, (23) が成立している区間であれば, 解軌道は Γ_* 上に沿って上がっていくことが示される. (25) が (1), (2) の解軌道を表していることの証明は [5] を参照のこと. これにより, 解軌道は Γ_* に到達した後, $(0, f_*(0))$ まで必ず上ってくる. もし, (23) がさらに $0\le u\le q$ まで成立していれば, さらに Γ_* に沿って, $(q, f_*(q))$ に到達する. $(q, f_*(q))$ においては, (6) より, そこから $\mathcal{S}$ の内部に円弧を取ることができ, 解軌道はそれに沿って, $(q, f_*(q))$ から円軌道 $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ にスイッチする. $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ は Γ_* と接する最小の円軌道であり, Γ^* とは交点を持たない. つまり, $(q, f_*(q))$ に到達した後は, $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ の反時計回りの円軌道を動き続けることになる.
仮に, (23) が $u>0$ において成立していない場合は, $(0, f_*(0))$ から反時計周りの円軌道になるわけであるが, $\mathcal{B}(0, f_*(0))=r_q$ であれば, 既に最小円の軌道に乗っていることになり, $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ の反時計周りの円軌道を動き続ける. また, $\mathcal{B}(0, f_*(0))>r_q$ であれば, 再び Γ_* と交点を持ち, 同じ議論をすることになる. Γ_* 上に沿って解軌道が上る場合も, $w<0$ において反時計周りの円軌道を描く場合も, $u'>0$ であることが示されることと, (4) より解軌道は常に $f_*(u)\le w\le f^*(u)$ を保つことから, 最終的には有限時間で $(q, f_*(q))$ に到達することになる.

$(u_0, w_0)\in\mathcal{S}_1^-$ における他の初期値についても, 同じような議論により, $(q, f_*(q))$ に到達することが示される.

$(u_0, w_0)\in\mathcal{S}_1^+$ の場合も, 同様な議論により, 解軌道は $(p, f^*(p))$ に到達することになる. $(p, f^*(p))$ は, Γ^* と接する最小円で, かつ p よりも小なる u においては Γ^* と $\mathcal{B}(u,w)=r_p$ は交点を持たない. これにより, 解軌道は $(p, f^*(p))$ から $\mathcal{B}(u,w)=r_p$ の円上を反時計回りに動き, $(-\sqrt{p^2+f^{*2}(p)}, 0)$ に到達する. その後は, 先の例と同じになり, 結論として解軌道は $(q, f_*(q))$ に到達した後, $\mathcal{B}(u,w)=r_q$ の円軌道になる.

(c). $(u_0, w_0)\in\mathcal{S}_2^-$ の場合
この場合は, 次の二つのケースに分けることができる.
$\mathcal{B}(u_0, w_0)=\mathcal{B}(u,w)$, $(u,w)\in\{(u_*, w_*)\}$ の場合, 反時計回りの円軌道上を動きながら, 定常解の条件を満たす Γ_* 上に有限時間で到達することになる.
$\mathcal{B}(u_0, w_0)\ne\mathcal{B}(u,w)$, $(u,w)\in\{(u_*, w_*)\}$ の場合, 解軌道は Γ_* に到達するものの ($(u_1, f_*(u_1))$ と書くことにする), 定常解上ではない. また, (23) は $u\le 0$ において常に成立するた

め, 解軌道はΓ_*に沿って動くことになる. $r_* < \mathcal{B}(u,w) < r_{**}$であることから, Γ_*上にu_1から最も近い$\{(u_*,w_*)\}$上の点を$u_1 < u \le u_{r_*}$と, $u_{r_{**}} \le u < u_1$上にそれぞれ取ることができる. ここに, u_{r_*}, $u_{r_{**}}$はそれぞれ, Γ_*上の定常解の条件をを満たす点でかつ, $\mathcal{B}(u_{r_*}, f_*(u_{r_*})) = r_*$, $\mathcal{B}(u_{r_{**}}, f_*(u_{r_{**}})) = r_{**}$を満たす点である. もし, $(u_1, f_*(u_1))$において, $\gamma u_1 + \delta f_*(u_1) > 0$であれば, 解軌道は$(u_1, f_*(u_1))$から$\Gamma_*$に沿って定常解に向かって上っていくことになり, 逆に$\gamma u_1 + \delta f_*(u_1) < 0$であれば, 解軌道は$(u_1, f_*(u_1))$から$\Gamma_*$に沿って定常解に向かって下っていくことになる. いずれの場合も, その定常解に到達する時間を計算すると, 無限時間かかることが示される. 詳細は[5]を参照のこと. 結論として, 有限時間でΓ_*に到達した後, 定常解に無限時間で収束する.

$(u_0,w_0) \in \mathcal{S}_2^+$の場合も同様に示される. $\mathcal{B}(u_0,w_0) = \mathcal{B}(u,w), (u,w) \in \{(u^*,w^*)\}$ならば, 有限時間で解軌道は$\Gamma^*$上の定常解に収束し, $\mathcal{B}(u_0,w_0) \ne \mathcal{B}(u,w), (u,w) \in \{(u^*,w^*)\}$である場合は, 解軌道は有限時間で$\Gamma^*$に到達した後, Γ^*上の定常解に無限時間で収束する.

(c). $(u_0,w_0) \in \mathcal{S}_3^-$ の場合

先の(b)と同様に議論することができる. 解軌道はΓ_*に到達した後, (23)が成立していることと, $\gamma u + \delta f_*(u) < -M$ ($M > 0$なる定数) が常に成り立つことから, 解軌道はΓ_*に沿って下り, 発散することが示される. $(u_0,w_0) \in \mathcal{S}_3^+$の場合は, 同様な議論から$\Gamma^*$に到達した後, Γ^*に沿って上り, 発散することになる.

References

1. P. Colli, N. Kenmochi, M. Kubo, A phase field model with temperature dependent constraint, J. Math. Anal. Appl., **256** (2001), 668-685.
2. N. Kenmochi, E. Minchev, T. Okazaki, Ordinary differential systems describing hysteresis effects and numerical simulations, Abstr. Appl. Anal., **7** (2002), No. 11, 563-583.
3. J. Kopfova, T. Kopf, Differential equations, hysteresis, and time delay, Z. Angew. Math. Phis., **53** (2002), No. 4, 676-691.
4. R. H. Martin jr, *Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill, Inc., 1983.
5. T. Okazaki, Large time behaviour of orbit of the nonlinear ODE system with hysteresis effect, accepted in Adv. Math. sci. Appl,.
6. A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis,* Springer, Berlin, 1994.

漸近周期時間依存劣微分作用素支配された発展方程式に対応する多価力学系について

山崎　教昭　（室蘭工業大学・数理科学）

§1．序

H を可分な実ヒルベルト空間とし、その内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)_H$, $|\cdot|_H$ とする。[9] では、与えられた周期 $T_0>0$ に対し、T_0-時間周期非線形発展方程式

$$(\mathrm{P})_s \qquad u'(t)+\partial\varphi_p^t(u(t))+G_p(t,u(t))\ni f_p(t) \quad \text{in } H, \quad t>s$$

を考察した。ここで、$s\in R$、$\partial\varphi_p^t$ は H 上で定義された T_0-時間周期適正下半連続凸関数 φ_p^t の劣微分、$G_p(t,\cdot)$ は T_0-時間周期多価作用素で、f_p は与えられた時間 T_0-周期 forcing term である。つまり、φ_p^t, $G_p(t,\cdot)$, $f_p(t)$ は T_0-時間周期条件

$$\varphi_p^t=\varphi_p^{t+T_0}, \quad G_p(t,\cdot)=G_p(t+T_0,\cdot), \quad f_p(t)=f_p(t+T_0), \qquad \forall t\in R$$

を満たすとする。[9] では、解の一意性なしで T_0-時間周期問題 $(\mathrm{P})_s$ の漸近安定性を大域的アトラクターの立場から議論した。

本稿では、漸近 T_0-時間周期非線形発展方程式

$$(\mathrm{AP})_s \qquad v'(t)+\partial\varphi^t(v(t))+G(t,v(t))\ni f(t) \quad \text{in } H, \quad t>s(\geq 0)$$

を考える。つまり、φ^t, $G(t,\cdot)$, $f(t)$ は 漸近 T_0-時間周期条件

$$\varphi^t-\varphi_p^t\to 0, \quad G(t,\cdot)-G_p(t,\cdot)\to 0, \quad f(t)-f_p(t)\to 0 \ \text{ as } t\to+\infty$$

を満たすとする。このとき、明らかに $(\mathrm{P})_s$ は $(\mathrm{AP})_s$ の極限問題である。本稿では、漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ の漸近安定性、及び極限問題 $(\mathrm{P})_s$ との関係について考察する。

§2．仮定

漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ 及びその極限 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{P})_s$ を以下の仮定の下で考察する。

パラメータ $r>0$ をもつ $R_+:=[0,+\infty)$ 上で定義された絶対連続関数族 $\{a_r\}:=\{a_r; r\geq 0\}\subset W^{1,2}_{loc}(R_+)$ と $\{b_r\}:=\{b_r; r\geq 0\}\subset W^{1,1}_{loc}(R_+)$ は、

$$\sup_{t\geq 0}|a_r'|_{L^2(t,t+1)}+\sup_{t\geq 0}|b_r'|_{L^1(t,t+1)}<+\infty \quad \text{for each } r\geq 0$$

を満たすとする。

定義 2.1. 以下の条件を満たす適正下半連続凸関数の族 $\{\varphi^t\}_{t\in R_+}$ の全体を $\Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ とする：

(Φ1) 任意の時間 $t\in R_+$ に対し、φ^t は H 上の適正下半連続凸関数である。

(Φ2) $$\varphi^t(z) \geq C_1|z|_H^2, \quad \forall t \in R_+, \ \forall z \in D(\varphi^t)$$

となる正定数 $C_1 > 0$ が存在する。

(Φ3) 任意の定数 $k > 0$ と $t \in R_+$ に対し、レベル集合 $\{z \in H; \varphi^t(z) \leq k\}$ が H でコンパクトである。

(Φ4) 任意の定数 $r > 0$、任意の時間 $s, \ t \in R_+$ と $z \in D(\varphi^s)$ with $|z|_H \leq r$ に対し、

$$|\tilde{z} - z|_H \leq |a_r(t) - a_r(s)|(1 + \varphi^s(z)^{\frac{1}{2}}),$$

$$\varphi^t(\tilde{z}) - \varphi^s(z) \leq |b_r(t) - b_r(s)|(1 + \varphi^s(z))$$

を満たす $\tilde{z} \in D(\varphi^t)$ が存在する。

定義 2.2. 以下の条件を満たす時間依存多価摂動項 $G(t,\cdot) : D(G(t,\cdot)) \subset H \to H$ の族 $\{G(t,\cdot)\}_{t\in R_+}$ の全体を $\mathcal{G}(\{\varphi^t\})$ とする：

(G1) $D(\varphi^t) \subset D(G(t,\cdot)) \subset H$ for all $t \in R_+$、そして任意の区間 $J \subset R_+$ と $v \in L^2_{loc}(J;H)$ with $v(t) \in D(\varphi^t)$ for a.e. $t \in J$ に対し、

$$g(t) \in G(t, v(t)) \text{ for a.e. } t \in J$$

となる J 上の (強) 可測関数 $g(\cdot)$ が存在する。

(G2) 任意の元 $z \in D(\varphi^t)$ と時間 $t \in R_+$ に対し $G(t,z)$ は H の凸部分集合である。

(G3) $$|g|_H^2 \leq C_2\varphi^t(z) + C_3, \quad \forall t \in R_+, \ \forall z \in D(\varphi^t), \forall g \in G(t,z)$$

を満たす正定数 $C_2, \ C_3$ が存在する。

(G4) $z_n \in D(\varphi^{t_n}), \ g_n \in G(t_n, z_n), \ \{t_n\} \subset R_+, \ \{\varphi^{t_n}(z_n)\}$ が有界, $z_n \to z$ in H, $t_n \to t$, $g_n \to g$ weakly in H as $n \to +\infty$ ならば、$g(t_n, z_n) \to g(t,z)$ weakly in H as $n \to +\infty$ である。

(G5) 任意の有界集合 $B \subset H$ に対し、

$$\varphi^t(z) + (g, z - b)_H \geq C_4(B)|z|_H^2 - C_5(B),$$

$$\forall t \in R_+, \ \forall g \in G(t,z), \forall z \in D(\varphi^t), \ \forall b \in B$$

となる正定数 $C_4(B)$ と $C_5(B)$ が存在する。

§ 3. 極限 T_0-時間周期問題

[9] では、解の一意性なしで T_0-時間周期問題 $(\mathrm{P})_s$ の漸近安定性を大域的アトラクターの立場から議論した。本節では、[9] で得られた結果について述べる。

定義 3.1. J を初期時間 s をもつ R_+ の任意の区間とする。このとき、関数 $u: J \to H$ が J 上で $(\mathrm{P})_s$ の解であるとは、$u \in C(J;H) \cap W^{1,2}_{loc}(J;H)$, $\varphi_p^{(\cdot)}(u(\cdot)) \in L^1_{loc}(J)$, $u(t) \in D(\partial\varphi_p^t)$ for a.e. $t \in J$ そして

$$g(t) \in G_p(t, u(t)) \quad \text{and} \quad f(t) - u'(t) - g(t) \in \partial\varphi_p^t(v(t)), \quad \text{a.e. } t \in J,$$

を満たす関数 $g \in L^2_{loc}(J;H)$ が存在するときをいう。

さて、φ_p^t. $G_p(t,\cdot)$, $f_p \in L^2_{loc}(R_+;H)$ は T_0-時間周期条件

$$\varphi_p^t = \varphi_p^{t+T_0}, \quad G_p(t,\cdot) = G_p(t+T_0,\cdot), \quad f_p(t) = f_p(t+T_0), \qquad \forall t \in R_+$$

を満たすとし、$\{\varphi_p^t\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$, $\{G_p(t,\cdot)\} \in \mathcal{G}(\{\varphi_p^t\})$ と仮定する。このとき、T_0-時間周期問題 $(\mathrm{P})_s$ について、以下の結果が得られている：

[A] (cf. [6, 7]) $(\mathrm{P})_s$ に対する初期値問題は、少なくとも 1 つ解 u on $[s,+\infty)$ をもつ。そして、それぞれの有界集合 $B \subset H$ に対し、

$$\sup_{t\ge s} |u(t)|_H^2 + \sup_{t\ge s}\int_t^{t+1} |\varphi_p^\tau(u(\tau))| d\tau + \sup_{t\ge s+1} |u'|^2_{L^2(t,t+1;H)} + \sup_{t\ge s+1} |\varphi_p^t(u(t))| \le N(B)$$

となる（B にのみ依存する）定数 $N(B) > 0$ が存在する。ここで、u は $[s,+\infty)$ 上の初期条件 $u(s) = u_0 \in \overline{D(\varphi_p^s)} \cap B$ を満たす $(\mathrm{P})_s$ の解である。

[A] の結果により、T_0-時間周期多価力学系 $\{U(t,s)\} := \{U(t,s); 0 \le s \le t < +\infty\}$ を定義することができる。つまり、$U(t,s)$ は $\overline{D(\varphi_p^s)}$ から $\overline{D(\varphi_p^t)}$ への多価作用素で初期値 $u_0 \in \overline{D(\varphi_p^s)}$ に対し、集合

$$U(t,s)u_0 := \left\{ w \in H \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{There is the solution } u \text{ of } (\mathrm{P})_s \text{ on } [s,+\infty) \\ \text{such that} \\ u(s) = u_0 \text{ and } u(t) = w. \end{array} \right\}.$$

を対応させる。

このとき、明らかに次の性質を満たす：つまり、

(U1) $U(s,s) = I$ on $\overline{D(\varphi_p^s)}$ for any $s \in R_+$;

(U2) $U(t_2,s) = U(t_2,t_1) \circ U(t_1,s)$ for any $0 \le s \le t_1 \le t_2 < +\infty$;

(U3) $U(t+T_0, s+T_0) = U(t,s)$ for any $0 \le s \le t < +\infty$, that is, U is T_0-periodic.

(U4) If $0 \le s_n \le t_n < +\infty$, $s_n \to s$, $t_n \to t$, $z_n \in \overline{D(\varphi_p^{s_n})}$, $z \in \overline{D(\varphi_p^s)}$, $z_n \to z$ in H and a element $w_n \in U(t_n,s_n)z_n$ converges to some element $w \in H$ as $n \to +\infty$, then $w \in U(t,s)z$.

[B] (cf. [9]) 任意の $\tau \in R_+$ に対し、離散力学系 $U_\tau := U(\tau + T_0, \tau)$ に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_\tau$ が存在する。つまり、集合 $\mathcal{A}_\tau$ $(\subset D(\varphi_p^\tau))$ は、次の性質をもつ：

(i) $\mathcal{A}_\tau$ は、H の空でないコンパクトな部分集合である;

(ii) 任意の有界部分集合 $B \subset H$ に対し、

$$\mathrm{dist}_H(U_\tau^k z, \mathcal{A}_\tau) := \sup_{x \in U_\tau^k z} \inf_{y \in \mathcal{A}_\tau} |x - y|_H \longrightarrow 0 \quad \text{uniformly in } z \in \overline{D(\varphi_p^\tau)} \cap B$$

as $k \to +\infty$, where $U_\tau^k := U(\tau + kT_0, \tau)$ for each $k \in Z_+ := N \cup \{0\}$;

(iii) $U_\tau^k \mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_\tau$ for any $k \in Z_+$.

[C] (cf. [9]) 集合 $\mathcal{A} := \bigcup_{0 \le \tau \le T_0} \mathcal{A}_\tau$ と定める。このとき、$\mathcal{A}$ は次の性質を持つ：

(i) $\mathcal{A}$ は、H の空でないコンパクトな部分集合である;

(ii) 任意の有界部分集合 $B \subset H$ に対し、

$$\mathrm{dist}_H(U(t + \tau, \tau)z, \mathcal{A}_\tau) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformly in } \tau \in R_+ \text{ and } z \in \overline{D(\varphi_p^\tau)} \cap B$$

as $t \to +\infty$.

§4. 漸近 T_0-時間周期問題

本節の目的は、漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ の漸近安定性を解の一意性なしで、大域的アトラクターの立場から考察することである。その為、まず [5] で構築された距離位相を紹介する。

この節を通し、M を十分大きい正定数とし固定する。そして、関数族

$$\Psi_M := \left\{ \psi; \begin{array}{l} \psi \text{ is proper, l.s.c. and convex on } H, \\ \exists z \in D(\psi) \text{ s.t. } |z|_H \le M, \ \psi(z) \le M \end{array} \right\}$$

とおく。このとき、任意の φ, $\psi \in \Psi_M$ に対し、$\rho(\varphi, \psi; \cdot): D(\varphi) \to R$ を

$$\rho(\varphi, \psi; z) = \inf\{\max(|y - z|_H, \psi(y) - \varphi(z)); y \in D(\psi)\} \quad \text{for each } z \in D(\varphi)$$

と定義する。また、任意の $r \in [M, +\infty)$ に対し

$$\rho_r(\varphi, \psi) := \sup_{z \in L_\varphi(r)} \rho(\varphi, \psi; z)$$

と定める。ここで、$L_\varphi(r) := \{z \in D(\varphi); |z|_H \le r, \ \varphi(z) \le r\}$ である。更に、任意の $r \ge M$ に対し、

$$\pi_r(\varphi, \psi) := \rho_r(\varphi, \psi) + \rho_r(\psi, \varphi) \qquad \text{for } \varphi, \psi \in \Psi_M$$

と定める。このとき、[5, Proposition 3.1] により、族 $\{\pi_r(\cdot,\cdot); r \geq M\}$ を用いると Ψ_M 上の完備距離位相を定義することができ、

$$\pi_r(\psi_n, \psi) \to 0 \quad \text{for every } r \geq M$$

により収束 $\psi_n \to \psi$ in Ψ_M (as $n \to +\infty$) を定義する。

以下、定数 $M > 0$ を固定し、任意の $t \in R_+$ に対し $\varphi^t \in \Psi_M$ と仮定する。このとき、漸近 T_0-時間周期条件

$$\varphi^t - \varphi_p^t \to 0, \quad G(t,\cdot) - G_p(t,\cdot) \to 0, \quad f(t) - f_p(t) \to 0 \quad \text{as } t \to +\infty$$

の仮定を述べる。

(A1) (Convergence of $\varphi^t - \varphi_p^t \to 0$ as $t \to +\infty$) For each $r \geq M$,

$$J_m^{(r)} := \sup_{\sigma \in [0,T_0]} \pi_r(\varphi^{mT_0+\sigma}, \varphi_p^\sigma) \to 0 \quad \text{as } m \to +\infty;$$

(A2) (Convergence of $G(t,\cdot) - G_p(t,\cdot) \to 0$ as $t \to +\infty$) If $\{\tau_n\} \subset [0, T_0]$, $\{m_n\} \subset Z_+$, $m_n \to +\infty$, $z_n \in D(\varphi^{m_nT_0+\tau_n})$, $g_n \in G(m_nT_0 + \tau_n, z_n)$, $\{\varphi^{m_nT_0+\tau_n}(z_n)\}$ is bounded, $z_n \to z$ in H, $\tau_n \to \tau$ and $g_n \to g$ weakly in H (as $n \to +\infty$), then $g \in G_p(\tau, z)$;

(A3) (Convergence of $f(t) - f_p(t) \to 0$ as $t \to +\infty$)

$$|f(mT_0 + \cdot) - f_p|_{L^2(0,T_0;H)} \longrightarrow 0 \text{ as } m \to +\infty.$$

さて、漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ を考察しよう。極限 T_0-時間周期問題と同様 [6] により $(\mathrm{AP})_s$ に対する初期値問題が少なくとも 1 つ解 v on $[s, +\infty)$ をもつことがわかる。従って、多価発展力学系 $\{E(t,s)\} := \{E(t,s); 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ を定義することができる。それは、$\overline{D(\varphi^s)}$ から $\overline{D(\varphi^t)}$ への多価作用素で初期値 $v_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$ に対し、集合

$$E(t,s)v_0 := \left\{ w \in H \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{There is the solution } v \text{ of } (\mathrm{AP})_s \text{ on } [s,+\infty) \\ \text{such that} \\ v(s) = v_0 \text{ and } v(t) = w. \end{array} \right\}.$$

を対応させる。

このとき、明らかに次の性質を満たす：

(E1) $E(s,s) = I$ (the identity) on $\overline{D(\varphi^s)}$ for any $s \geq 0$.

(E2) $E(t_2,s)z = E(t_2,t_1)E(t_1,s)z$ for any $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$ and $z \in \overline{D(\varphi^s)}$.

(E3) Assume that $s_n, s, t_n, t \in R_+$ with $s_n \to s$ and $t_n \to t$, $u_{0n} \in \overline{D(\varphi^{s_n})}$, $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$ with $u_{0n} \to u_0$ in H and a element $z_n \in E(t_n + s_n, s_n)u_{0n}$ converges to some element z in H as $n \to +\infty$. Then, $z \in E(t+s,s)u_0$.

ここで、解作用素 $\{E(t,s)\}$ と $\{U(t,s)\}$ の間には、次の関係があることがわかる。

補題 3.1. *If* $\{s_n\} \subset R_+$, $\{\tau_n\} \subset R_+$, $s \in R_+$, $\tau \in R_+$, $s_n \to s$, $\tau_n \to \tau$, $\{m_n\} \subset Z_+$ *with* $m_n \to +\infty$, $z_n \in \overline{D(\varphi^{m_nT_0+s_n})}$, $z \in \overline{D(\varphi_p^s)}$, $z_n \to z$ *in* H *and a element* $w_n \in E(m_nT_0+\tau_n+s_n, m_nT_0+s_n)z_n$ *converges to some element* $w \in H$ *as* $n \to +\infty$, *then* $w \in U(\tau+s,s)z$.

[9] において、極限 T_0-時間周期問題の多価解作用素 $\{U(t,s)\}$ に対し、離散力学系 $U_\tau := U(\tau+T_0,\tau)$ を考え、離散大域的アトラクターを構成した。その考え方と同様に、漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ も、まず時間離散で考える。その為、$(\mathrm{AP})_s$ の多価解作用素 $\{E(t,s)\}$ に対し、離散 ω-極限集合を以下のように定義する。

定義 3.1. ($E(\cdot,\cdot)$ に対する離散 ω-極限集合) $\mathcal{B}(H)$ を H の有界部分集合の族とする。このとき、任意の $\tau \in R_+$ と $B \in \mathcal{B}(H)$ に対し、集合

$$\omega_\tau(B) := \bigcap_{n\in Z_+} \overline{\bigcup_{k\geq n, m\in Z_+} E(kT_0+mT_0+\tau, mT_0+\tau)(\overline{D(\varphi^{mT_0+\tau})}\cap B)}$$

を $E(\cdot,\cdot)$ の下での B の離散 ω-極限集合という。

Remark 3.1. $x \in \omega_\tau(B)$ であることと、次の条件 $(\star)$ は必要十分である：

$(\star)$ There exist sequences $\{k_n\} \subset Z_+$ with $k_n \uparrow +\infty$, $\{m_n\} \subset Z_+$, $\{z_n\} \subset B$ with $z_n \in \overline{D(\varphi^{m_nT_0+\tau})}$ and $\{x_n\} \subset H$ with $x_n \in E(k_nT_0+m_nT_0+\tau, m_nT_0+\tau)z_n$ such that $x_n \longrightarrow x$ in H as $n \to +\infty$.

このとき、以下の主定理を得た。

定理 3.1. ($(\mathrm{AP})_s$ の離散アトラクター) 任意の $\tau \in R_+$ に対し、集合 $\mathcal{A}_\tau^* := \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(H)} \omega_\tau(B)}$ と定める。このとき、$\mathcal{A}_\tau^*$ は次の性質を持つ：

(i) $\mathcal{A}_\tau^*(\subset D(\varphi_p^\tau))$、$H$ の空でないコンパクトな部分集合である。

(ii) 任意の有界部分集合 $B \in \mathcal{B}(H)$ に対し、

$$dist_H(E(kT_0+\tau,\tau)z, \mathcal{A}_\tau^*) \longrightarrow 0 \quad \textit{uniformly in } z \in \overline{D(\varphi_p^\tau)} \cap B$$

as $k \to +\infty$.

(iii) $\mathcal{A}_\tau^* \subset U_\tau^l \mathcal{A}_\tau^* \subset \mathcal{A}_\tau$ *for any* $l \in N$.

Remark 3.2. 離散 ω-極限集合 $\omega_\tau(B)$ と $\mathcal{A}_\tau^*$ の定義から、任意の $n \in N$ に対し $\mathcal{A}_\tau^* = \mathcal{A}_{\tau+nT_0}^*$ であることがわかる。従って、$\mathcal{A}_\tau^*$ は時間 T_0-周期であるといえる。

次の定理は 大域的アトラクター $\mathcal{A}_s^*$ と $\mathcal{A}_\tau^*$ の関係である。

定理 3.2. $0 \leq s \leq \tau < +\infty$ とし、$\mathcal{A}_s^*$ と $\mathcal{A}_\tau^*$ を定理 *3.1* で得られた時間 $s \in R_+$ と $t \in R_+$ における離散アトラクターとする。このとき、$\mathcal{A}_\tau^* \subset U(\tau, s)\mathcal{A}_s^*$ となる。

定理 3.3. ($(\mathrm{AP})_s$ のアトラクター) 集合 $\mathcal{A}^* := \bigcup_{\tau \in [0, T_0]} \mathcal{A}_\tau^*$ と定める。このとき、任意の有界部分集合 $B \in \mathcal{B}(H)$ に対し、

$$\bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s, \tau \in R_+} E(t+\tau, \tau)(\overline{D(\varphi^\tau)} \cap B)} \subset \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$$

となる。

定理 3.3 により、集合 $\mathcal{A}^*$ は漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ の大域的アトラクターであるといえる。従って、漸近 T_0-時間周期問題 $(\mathrm{AP})_s$ は解の一意性なしでも漸近挙動が考察でき、極限 T_0-時間周期問題のアトラクター $\mathcal{A}$ により特徴付けできることがわかる。

参考文献

1. V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, Attractors of periodic processes and estimates of their dimensions, Mathematical Notes, **57**(1995), 127-140.

2. V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Colloquium Publications **49**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2002.

3. J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988.

4. A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Attractors of periodic systems generated by time-dependent subdifferentials, Nonlinear Anal. TMA., **37**(1999), 97-124.

5. N. Kenmochi and M. Ôtani, Nonlinear evolution equations governed by subdifferential operators with almost periodic time-dependence, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Memorie di Mat., **140**(1986), 65-91.

6. M. Ôtani, Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems, J. Differential Equations, **46**(1982), 268-299.

7. K. Shirakawa, A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Asymptotic stability for evolution equations governed by subdifferentials, pp. 287-310, in *Recent Developments in Domain Decomposition Methods and Flow Problems*, GAKUTO Intern. Ser. Math. Appl., vol 11, Gakkotosho, Tokyo, 1998.

8. R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

9. N. Yamazaki, Attractors for non-autonomous multivalued evolution systems generated by time-dependent subdifferentials, *Abstract and Applied Analysis*, **7**(2002), 453-473.

10. N. Yamazaki, Global attractor for periodic multivalued dynamical systems generated by time-dependent subdifferential operators, to appear in Advances in Mathematical Sciences and Applications.