

第24回

**発展方程式若手セミナー
報告集**

2003年1月

第24回
発展方程式若手セミナー
報告集

2003年1月

報告集発刊にあたって

「発展方程式、及び、その周辺分野の将来の方向を探るために若手研究者の討論と情報交換の設けよう」という趣旨の下で、発展方程式若手セミナーは1979年の夏に発足しました。そして、24回目を迎えた今年は、8月1日から4日までの4日間、広島県東広島市高屋うめの辺に位置する近畿大学工学部を会場として行われました。

今回の会議では、広島大学理学部・坂元国望先生をお招きして「非一様媒体における界面ダイナミクス」というタイトルで3時間にもおよぶ特別講演をして頂いたほか、22名の若手研究者及び大学院生による一般講演、及び、ショート・コミュニケーションが行われました。更に、それらの講演を通して、会議期間中常に活発な質問や情報交換が行われました。

特に、坂元先生による特別講演は基本的な部分から発展的な部分までを網羅しながら、わかりやすく丁寧に行われました。その結果として、学生だけでなく若手研究者にとっても非常に有意義な実りある講義であったことを確信しています。

この報告集は、本セミナーにおいて講演をされた坂元先生（特別講演）をはじめとし、若手研究者及び大学院生の方々（一般講演）にお願いして、その内容を書き上げて頂いた原稿をまとめ上げたものです。幹事の独断で、出来る限り初学者でも理解してもらえるよう平易な証明も掲載して欲しいという大変な依頼にもかかわらず、多くの講演者が快くこの依頼を受け入れてくれましたことを心より感謝申し上げます。そして、皆様方に少しでも本報告集を活用して頂ければ、幹事として非常にうれしく思います。

次に、本セミナーを開催するにあたり、以下の援助を頂きました。この場をお借りして厚くお礼申し上げます。

平成13年度科学研究費補助金基盤研究B(2) (課題番号：13440052)

「相転移現象を記述する力学系の構造と安定性の研究」

研究代表者：剣持 信幸（千葉大学教育学部教授）

平成14年度科学研究費補助金基盤研究C (課題番号：14540169)

「ヒステリシス作用素で表現される非線形現象の解析」

研究代表者：愛木 豊彦（岐阜大学教育学部助教授）

平成14年度科学研究費補助金若手研究B (課題番号：14740109)

「解の一意性が保証されていない相転移問題に対応する力学系の研究」

研究代表者：山崎 教昭（室蘭工業大学工学部講師）

平成14年度東広島市学術振興補助金

また、会場をはじめとする各施設・備品を快く提供してくださいました近畿大学工学部事務部、セミナー期間中に色々と手伝って頂いた近畿大学工学部教職課程の学生の方々に対しても深く感謝いたします。

最後に、来年度開催されます第25回発展方程式若手セミナーの幹事は、九州大学の北直泰先生です。

2002年12月

第24回発展方程式若手セミナー幹事

近畿大学工学部：伊藤 昭夫

目次

坂元国望 (広島大・特別講演)	
非一様媒体における界面ダイナミクス	1-28
阿曾雅泰 (千葉大)	
新しいタイプの二重非線形発展方程式について	29-47
白川健 (東京電機大), 木村正人 (九州大)	
全変動関数汎関数に支配される放物型方程式に対する局所安定性	48-67
久藤衡介 (早稲田大)	
Stability of steady-state solutions to a prey-predator system with cross-diffusion	68-87
佐藤典弘 (早稲田大)	
Gray-Scott モデルにおける定常解と安定性について	88-93
田中孝明 (早稲田大)	
A stability of the steady flow of compressible viscous fluid with respect to initial disturbance and its convergence rate ($v_\infty \neq 0$)	94-114
五十嵐威文 (日本大), 上坂洋司 (日本大)	
Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation	115-124
伊藤直子 (東京理科大)	
Large time behavior of solutions to nonlinear dissipative equations	125-130
浦野道雄 (早稲田大)	
Transition layers for general bistable equations	131-138
松澤寛 (東京都立大)	
Asymptotic profiles of variational solutions for a FitzHugh-Nagumo type elliptic system	139-158
横田智巳 (東京理科大), 小川卓克 (九州大)	
Uniqueness of weak solutions for the complex Ginzburg-Landau equation	159-165
Emil Minchev (千葉大)	
On a system of nonlinear PDE's for phase transitions with vector order parameter	166-171
松浦啓 (早稲田大)	
非 Newton 流体の方程式について	172-191
高市恭治 (早稲田大)	
Asymptotic behavior of solutions of semilinear parabolic equations	192-201

北直泰 (九州大)	
The solution to derivative nonlinear nonlinear Schrödinger equation via integral equation	202-222
嶋野和史 (東京都立大)	
Approximation of nonlinear parabolic PDE by first order functional PDE	223-237
瀬片純市 (九州大), 北直泰 (九州大)	
Boussinesq 系の初期値問題に対する適切性	238-247
町原秀二 (島根大), 中村能久 (熊本大)	
The inviscid limit for the complex Ginzburg-Landau equation	248-258
前田梨絵 (九州大), 小川卓克 (九州大)	
非線形 Dirac 方程式の初期値問題	259-268
赤木剛朗 (早稲田大)	
ある超伝導状態を記述する巨視的モデルについて	269-288
細野敬史 (九州大)	
Damped wave equations の解について	289-296
岡崎貴宣 (千葉大), Emil Minchev (千葉大)	
相転移モデルのための微分方程式系とその数値計算	297-316

非一様媒体における界面ダイナミクス

坂元 国望 (広島大学)

2002年8月2日 - 3日

時空間パターンを記述する典型的なモデルとして、最も単純な反応拡散方程式を取り上げる。その解の特徴的な挙動を界面（内部遷移層）のダイナミクスとして捉えることが目標である。現実的に、純粋に一様な媒体は存在しない。不純物や、欠陥といった非一様性があるのは、常識的に考えて、当たり前であろう。本講演では、一様媒体での界面ダイナミクスについて触れた後、媒体の非一様性が界面（パターン）のダイナミクスにどのような影響を与えるのかを扱う。

CONTENTS

1. 勾配系としての反応拡散方程式	1
1.1. 反応拡散方程式	1
1.2. エネルギー汎関数	2
1.3. 勾配系のダイナミクス	4
2. 界面現象・内部遷移層	6
2.1. 空間一様解への漸近	6
2.2. 内部遷移層	8
2.3. 1次元進行波解	9
2.4. 界面近傍の座標系	10
2.5. 遷移層解のエネルギーと界面方程式	11
2.6. 平均曲率流	13
3. 非一様媒体における反応拡散方程式	14
3.1. 空間非一様な反応項	14
3.2. 均衡型反応項	17
3.3. 非退化条件	19
3.4. 平衡内部遷移層解の存在と安定性	20
3.5. 非一様性に起因する幾何学的変分問題の例	20
3.6. 球対称条件下における例の解析	22
4. 証明の概略	23
References	28

1. 勾配系としての反応拡散方程式

簡単な例から始めよう。

平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された滑らかな実数値関数 $F(x)$ を考える。点 x_0 におけるベクトル v -方向へのこの関数の変化率は、

$$\frac{d}{ds}F(x_0 + sv)\Big|_{s=0} = \nabla F(x_0) \cdot v$$

である。ただし、

$$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \right)^T$$

であり、中点「 $\cdot$ 」は内積を表す。ベクトル $\nabla F(x_0)$ を関数 F の x_0 における勾配 (gradient) と呼ぶ。定義から、勾配は $F(x)$ の等高線と直交することが分かる。実

際、ベクトル v として、等高線の接ベクトルを考えれば良い。従って、関数 F の勾配の方向は、その関数の値を最も効率良く増やす方向である。

この勾配の逆向きベクトル場に従う常微分方程式系

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt}x(t) = -\nabla F(x(t))$$

は、関数 $F(x)$ に対する勾配系と呼ばれる。 $x(t)$ がこの微分方程式の解ならば、

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \nabla F(x(t)) \cdot \frac{d}{dt}x(t) = -|\nabla F(x(t))|^2 \leq 0$$

だから、実数値関数 $F(x)$ の値を最も効率良く減少させるように、勾配系 (1.1) の解は時間発展していくことが分かる。

このように、「あるスカラー量（エネルギー）を、最も速やかに減らす方向に状態が変化する」という考え方は、自然科学の多くの分野で古くから用いられてきた。このような考え方に従って、スカラー（単独）反応拡散方程式を導入しよう。

1.1. 反応拡散方程式. 反応拡散方程式は、その名が示す通り、反応（項）と拡散（項）から成る、“状態” $u(t, x)$ に関する次のような偏微分方程式である。

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} u_t & = & D\Delta u + f(u) \\ & & \text{(拡散)} \quad \quad \text{(反応)} \end{array}$$

ここで、 u_t は“時間” t に関する偏微分であり、 Δ はラプラス作用素である。時刻 t 場所 $x \in \Omega$ における系の状態が、関数 $u(t, x)$ で表されていると見ている。今後、空間領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は、有界であり、その境界は滑らかであるとする。反応拡散方程式 (1.2) は、質量保存則（微分形）

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = S$$

において、フラックス $\mathbf{j}$ がフィック則： $\mathbf{j} = -D\nabla u$ に従い、供給項 S が $S(t, x) = f(u(t, x))$ で与えられる場合に相当する。通常は、このようにして方程式 (1.2) を導くのだが、ここでは、ある関数の勾配系としてこの方程式を見てみよう。

1.2. エネルギー汎関数. 空間領域 Ω 上の関数 $u(x)$ に対して、そのエネルギー $E(u)$ を次で定める。

$$(1.3) \quad E(u) = \int_{\Omega} \frac{D}{2} |\nabla u(x)|^2 + W(u(x)) dx$$

ここで、 D は正数である。この汎関数の勾配を計算してみよう。平面上の関数の場合と同様に計算すると

$$(1.4) \quad \frac{d}{ds} E(u + sv) \Big|_{s=0} = \int_{\Omega} D \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + W'(u(x)) v(x) dx$$

である。この右辺が、ある関数 A を用いて、

$$\int_{\Omega} A(x) v(x) dx$$

と表現できれば、この $A(x)$ が状態 u における E の (L^2 -) 勾配である。ここで、関数 u や v が棲む空間の“内積”は、 $\int u(x) v(x) dx$ で定義されていると見ている。勿論、内積はこれ以外にもたくさんあるから、内積の選び方に依って、違った勾配が

得られる。これはさておいて、 $A(x)$ は何物だろうか。これを見るために、(1.4) の右辺第1項を部分積分して変形してみる。

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} D \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + W'(u(x))v(x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} v(x) ds_x + \int_{\Omega} \{-\Delta u(x) + W'(u(x))\} v(x) dx \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法ベクトルを表し、 ds_x は $\partial\Omega$ 上の面要素である。(1.5) において、 v として、境界でゼロになるようなものだけを考えれば、

$$A(x) = -D\Delta u(x) + W'(u(x))$$

である。この式が、制限条件無しでも成り立つためには、 u に条件

$$(1.6) \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0$$

を課せば良い。この (1.6) を、自然境界条件、または、(斉次) Neumann 境界条件と呼ぶ。さて、エネルギー汎関数 E の勾配が計算できたので、その勾配系は、 $u_t = -A$ 、すなわち、

$$u_t(t, x) = D\Delta u(t, x) + f(u(t, x)), \quad (\text{ただし、} f(u) = -W'(u))$$

となり、式 (1.2) が得られた。今後、この偏微分方程式と境界条件 (1.6) を組にした

$$(1.7) \quad \begin{cases} u_t(t, x) = D\Delta u(t, x) + f(u(t, x)), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \quad (\text{境界条件}) \end{cases}$$

を考える。ただし、これだけでは、まだ解が定まらない。系の初期状態を指定する必要がある。これは、常微分方程式 (1.1) に対しても同様であった。ここでは、“時刻” $t = 0$ における状態 u の空間分布を与えればよい。

$$(1.8) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (\text{初期条件})$$

初期値・境界値問題 (1.7)-(1.8) に対する解の存在と一意性の議論は、様々な関数空間において可能だが、ここでは、 $L^2(\Omega)$ を基礎空間として議論する。技術的な煩雑さを避ける為に、非線形項 f に次の条件を課すことにしよう。

$$(C-f) \quad \exists k_0 > 0; \quad \begin{cases} |f(u) - f(v)| \leq k_0 |u - v|, \\ |f'(u) - f'(v)| \leq k_0 |u - v|, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

注意 非線形項の重要な例 $f(u) = u - u^3$ は、この条件 (C-f) を満たさないが、十分大きな $|u|$ に対して3次関数 $u - u^3$ を適当な1次関数で置き換えて滑らかにつなげば良い。

さて、 $H_N^2(\Omega)$ 、 $H_N^1(\Omega)$ を

$$(D) \quad H_N^2(\Omega) := \text{cl}_{H^2} \left\{ u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \right\}$$

$$(D^{1/2}) \quad H_N^1(\Omega) := \text{cl}_{H^1} \left\{ u \in C^1(\bar{\Omega}) \mid \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \right\}$$

と定義する。ここで、 cl_{H^2} と cl_{H^1} は、それぞれ、ソボレフ $H^2(\Omega)$ -ノルム、ソボレフ $H^1(\Omega)$ -ノルムに関する閉包を意味する。ここで定義した空間 $H_N^2(\Omega)$ は、ラプラ

シアン $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial^2 / \partial x_i^2$ の L^2 の意味での定義域である。このことをもう少し詳しく説明すると、次のようになる。

$u \in H_N^2(\Omega)$ とすると、定義より u の近似列 $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset C^2(\bar{\Omega})$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{H^2} = 0$) が存在する。そこで、 u にラプラシアンを施した Δu を $\Delta u_k \in C(\bar{\Omega})$ の極限を用いて

$$\Delta u := \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u_k \quad (L^2\text{-極限})$$

と定義するのである。

一方、空間 $H_N^1(\Omega)$ は、マイナス・ラプラシアン、 $-\Delta$ の $1/2$ -乗 $\sqrt{-\Delta}$ の定義域であるが、このことの解説は長くなる（この事実自体は以下の議論で必要になることはない）ので省略する（詳しくは文献 [12, 4] 参照）。

また、次の包含関係に注意しておく。

$$(1.9) \quad H_N^2(\Omega) \subset H_N^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad H_N^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$$

また、非線形項 f によって定まる作用素 $u(\cdot) \mapsto f(u(\cdot))$ は、 $f: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ と $f: H_N^1(\Omega) \rightarrow H_N^1(\Omega)$ の両方の意味でリプシッツ連続である。

以上の準備の下で、初期値・境界値問題 (1.7)-(1.8) に対する解の存在・一意性定理を述べよう。

Theorem 1.1. 非線形項 f は滑らかで条件 (C-f) を満たすとする。

- (i) 初期値・境界値問題 (1.7) – (1.8) は、任意の $u_0(\cdot) \in L^2(\Omega)$ に対して、一意解 $u(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ を区間 $[0, \infty)$ 上で持つ。
- (i') 初期値・境界値問題 (1.7) – (1.8) は、任意の $u_0(\cdot) \in H_N^1(\Omega)$ に対して、一意解 $u(t, \cdot) \in H_N^1(\Omega)$ を区間 $[0, \infty)$ 上で持つ。
- (ii) 初期値を $u_0 \in L^2(\Omega)$ とする。任意の $t > 0$ に対して、解 $u(t, x)$ は $u(t, \cdot) \in H_N^2(\Omega)$ を満たす。
- (iii) 初期値 u_0 を通る軌道 $\gamma(u_0) := \{u(t, \cdot) \in L^2(\Omega) \mid t \geq 0\}$ が $L^2(\Omega)$ -ノルムに関して有界ならば、任意の $t_0 > 0$ に対して $u(t_0, \cdot)$ を通る軌道 $\gamma(u(t_0, \cdot))$ は $H^1(\Omega)$ -ノルムに関してプレコンパクトである。 (**smoothing effect**)

上の定理の (i) をもう少し正確に書くと、解 u の棲みかは

$$u \in C([0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty), L^2(\Omega))$$

となる。従って、 $t > 0$ ならば L^2 の意味で時間に関する微分 $du(t)/dt$ が存在する。一方、(ii) より、 $t > 0$ に対して $\Delta u(t)$ が L^2 関数として意味を持つ。上の定理において $u(t, x)$ が (1.7)-(1.8) の解であるとは、 $L^2(\Omega)$ -関数としての等式

$$(1.10) \quad \frac{du(t, \cdot)}{dt} = D\Delta u(t, \cdot) + f(u(t, \cdot))$$

が $t \in (0, \infty)$ に対して成り立つこと意味する。

同様に、定理の (i') の正確な意味は、

$$u \in C([0, \infty), H_N^1(\Omega)) \cap C^1((0, \infty), H_N^1(\Omega))$$

であり、等式 (1.10) が $t \in (0, \infty)$ にたいして $H_N^1(\Omega)$ の意味で成り立っている。一方、初期値が $u_0 \in L^2$ であっても、定理の (ii) により、解はすぐに滑らか ($u(t, \cdot) \in H_N^2, \forall t > 0$) になるから、この場合も解 $u(t, x)$ は

$$C^1((0, \infty), H_N^1(\Omega))$$

を満たし、等式 (1.10) は $t \in (0, \infty)$ に対して $H_N^1(\Omega)$ の意味で成り立っていることが分かる。

定理 1.1 の証明は、文献 [12, 4] を参照していただきたい。

1.3. 勾配系のダイナミクス. 反応拡散系 (1.7) は、エネルギー汎関数 E の勾配系として導入されたから、その解 $u(t, \cdot)$ に沿って、 $E(u)$ の値は最も効率良く減少していくはずである。実際、 $u(t, x)$ が (1.7) の解ならば、すでに説明したように

$$u \in C^1((0, \infty), H_N^1(\Omega)) \subset C^1((0, \infty), H^1(\Omega))$$

であり、さらに、 $E : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続的微分可能だから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t, \cdot)) &= \int_{\Omega} D \nabla u(t, x) \cdot \nabla u_t(t, x) + W'(u(t, x)) u_t(t, x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \{D \Delta u + f(u)\} u_t dx = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

となっている。したがって、もし、汎関数 E が下に有界¹ ($\inf_u E(u) \geq 0$) ²ならば、どのような初期状態 ($u_0 \in H^1$) から出発しても、

$$E(u(t, \cdot)) - E(u_0) = \int_0^t \frac{d}{dt} E(u(t, \cdot)) dt = - \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt, \quad \forall t \geq 0$$

だから、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W(u(t, \cdot)) dx &\leq \int_{\Omega} \frac{D}{2} |\nabla u(t, \cdot)|^2 + W(u(t, \cdot)) dx \\ &= E(u(t, \cdot)) \leq E(u_0) < \infty \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

を得る。従って、 W に適当な条件、例えば、 $|u| \rightarrow \infty$ の時 $W(u) \rightarrow \infty$ 、を課せば、任意の $u_0 \in H^1(\Omega)$ に対して、解 $u(t, x)$ の軌道は L^∞ -有界、すなわち、 L^2 -有界である。定理 1.1 (iii) の **smoothing effect** により、解軌道は $H^1(\Omega)$ でコンパクトであることが言えるから、 $u_0 \in H^1(\Omega)$ の ω -極限集合

$$\omega(u_0) := \bigcap_{t \geq 0} \text{cl}_{H^1} \{u(s, \cdot) \mid s \geq t\} \neq \emptyset$$

が存在する。一方、 ω -極限集合の定義より、任意の $\phi \in \omega(u_0)$ に対して、 $+\infty$ に発散する時間列 $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ ($\lim t_k = \infty$) が存在し、 $\lim \|u(t_k, \cdot) - \phi(\cdot)\|_{H^1} = 0$ となる。さらに、エネルギー $E(u(t, \cdot))$ は下に有界であり、 t に関して単調減少だから、極限 $\lim E(u(t_k, \cdot)) = E(\phi)$ は $\phi \in \omega(u_0)$ に依らず一定の値を取る。従って、 ω -極限集合上で

$$0 = \frac{d}{dt} E(u(t, \cdot)) = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx$$

となり、 $\omega(u_0)$ は平衡解の集まりであることが結論できる。従って、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t = 0$ 、すなわち、 $u(t, x)$ は時間 t に依存しない解（平衡解）の集まりに収束する。このことは、勾配系の最も特徴的な性質である。ただし、一般の場合、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot)$ が存在することは保証されない。空間次元が $N = 1$ のとき、あるいは、非線形項 f が解析的である場合は、この極限は平衡解であることが知られている。また、平衡解がそれぞれ孤立している場合には、この収束は保証される。

¹もし、 $W(u)$ が下に有界、例えば、 $W(u) \geq 0$ 、ならば、汎関数 E は下に有界 $E(u) \geq 0$ である。

²汎関数 E が下に有界ならば、適当な定数を加えて、いつでも $\inf_u E(u) \geq 0$ とできる。

ここで、拡散方程式 $u_t = D\Delta u$ の解挙動を、勾配系の視点から見ておこう。拡散方程式は、エネルギー汎関数 E において、 $W \equiv 0$ の場合の勾配系である。 $E(u) = \int D|\nabla u|^2 dx/2$ だから、拡散方程式の解は、時間が経つにつれて、その空間勾配 $|\nabla u(t, x)|$ が小さくなっていき、いずれは、空間勾配がゼロの空間一様解（定数解）に収束する。実際、

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = \int_{\Omega} u_t(t, x) dx = \int_{\Omega} D\Delta u(t, x) dx = D \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(t, x)}{\partial \mathbf{n}} d\sigma_x = 0$$

だから、解の空間平均は一定であり、 $u(t, x)$ はその初期値の空間平均に収束する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(0, x) dx$$

ここでの要点は、拡散効果は空間一様化を促進する、である。

注意 上で、拡散方程式の解は初期値の空間平均に収束する、と述べたが、これは、自然境界条件 (1.6) の下でのことである。別の境界条件の下では、違った振る舞いをする。例えば、斉次ディリクレ境界条件： $u(t, x) = 0, x \in \partial\Omega$, の下では、拡散方程式の解 $u(t, x)$ は、初期値に関わらず、零に収束する。このことは、次のようにして確認できる。まず、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx &= 2 \int_{\Omega} u(t, x) u_t(t, x) dx = 2D \int_{\Omega} u \Delta u dx \\ &= 2D \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma_x - 2D \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ &\leq -2D\lambda_1^\infty \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx \end{aligned}$$

を得る。最後の不等式には、境界条件とディリクレ・ラプラシアン $-\Delta$ の第一固有値 $\lambda_1^\infty > 0$ の変分法的特徴付け：

$$\lambda_1^\infty := \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx} \mid \phi \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

を用いた。この不等式から、

$$(1.11) \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq e^{-(D\lambda_1^\infty)t} \|u(0, \cdot)\|_{L^2} \quad \forall t \geq 0$$

を得る。従って、 $t \rightarrow \infty$ の時、 $\|u(t, \cdot)\|_{L^2} \rightarrow 0$ となる。

いずれにしろ、拡散効果は空間一様化を促進することには変わりはない。このことは、ロバン境界条件（第三種境界条件）：

$$(Robin) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \mu u = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (\mu > 0 \text{ 定数})$$

の場合も同様である。ディリクレ境界条件との違いは、評価式 (1.11) 右辺の減衰指数が、 $D\lambda_1^\infty$ から $D\lambda_1^\mu$ に変わるだけである。ここで、 $\lambda_1^\mu > 0$ は、ロバン境界条件 (Robin) に対する $-\Delta$ の第一固有値である。

2. 界面現象・内部遷移層

2.1. 空間一様解への漸近. 反応拡散方程式 (1.7) のもう一つの特徴は、空間一様解を持つということである。 $w(t)$ が常微分方程式

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt}w(t) = f(w(t))$$

の解ならば、 $u(t, x) \equiv w(t)$ は、(1.7) の解でもある。このことは、拡散係数 $D > 0$ の大小に関係無く成り立つ。

一方、拡散係数 $D > 0$ が“十分”大きいとき、適当な条件の下、(1.7) の解は、 $t \rightarrow \infty$ のとき (2.1) の解に近づくことが知られている (Conway- Hoff-Smoller [5] の結果)。このような現象が非線形項がゼロの場合に成立することは、すでに見た。拡散係数 D が十分大きいとは、非線形項 f の効果を抑えるくらい十分大きいという意味である。このことを説明しよう。

まず、上述の“適当な条件”を明記する。

散逸性条件: ある正数 M, δ が存在し、

$$f(w) \geq \delta \quad (w \leq -M), \quad f(w) \leq -\delta \quad (w \geq M)$$

が成り立つ。

この条件は、(2.1) によって生成される流れが点散逸的 (point dissipative) であるための十分条件である。すなわち、(2.1) の解は、どのような初期値から出発しても、ある有限時間内に集合 $[-M, M]$ に入ってきて、その後、永久にこの集合内に留まる。同様に、(1.7) の解は、どのような初期値から出発しても、ある有限時刻 $t_0(u_0) > 0$ が存在し、任意の $t \geq t_0(u_0)$ に対して $u(t, x) \in [-M, M]$, $x \in \bar{\Omega}$ を満たす。すなわち、(1.7) によって生成される流れも点散逸的である。

この事実から、(1.7) の解の漸近挙動を議論する際、初めから、初期関数 u_0 は $u_0(x) \in [-M, M]$, $x \in \bar{\Omega}$ を満たしているとしても良いことが分かる。

また、(1.7) が点散逸的であると言うことは、その解の漸近挙動 ($t \rightarrow \infty$ における挙動) は、非線形項 $f(u)$ の $u \in [-M, M]$ における値のみで決定されることを意味する。この非線形項 f の強さ、あるいは、 f の攪乱効果、を計る指標として、

$$0 \leq k_f := \max\{|f'(u)| \mid u \in [-M, M]\}$$

を導入しよう。

次に、拡散が領域 Ω に及ぼす効果 (強さ) を表す目安を説明しよう。固有値問題

$$(2.2) \quad \begin{cases} \lambda \phi = -\Delta \phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega, \end{cases}$$

を考える。この固有値 λ は、全て実数であり、

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots \rightarrow \infty$$

となっている。主固有値 $\lambda_0 = 0$ の固有関数は、定数関数 (空間一様な関数) である。つぎの命題は、拡散が空間領域に及ぼす効果 (空間一様化) は、第一固有値 λ_1 の大きさを表現できることを示している。

Proposition 2.1 (Poincaré の補題).

$$(2.3) \quad (i) \quad \lambda_1 \|u(\cdot) - \bar{u}\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$$

$$(2.4) \quad (ii) \quad \lambda_1 \|\nabla u\|_{L^2} \leq \|\Delta u\|_{L^2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ を満たす関数に対して}\right)$$

これらの不等式の証明は、[5]にあるので参照されたい。

さて、 $u(t, x)$ を (1.7)-(1.8) の解とする。先に注意したように、散逸性条件のもと、 $u(t, x) \in [-M, M] \quad \forall t \geq 0$ として良い。拡散係数が十分大きい、すなわち、条件

$$(C-H-S) \quad D > \frac{k_f}{\lambda_1}$$

が成り立っているとしよう。このとき、 $a(t) := \|\nabla u(t, \cdot)\|^2/2$ を t に関して微分して、微分方程式と不等式 (2.4) を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \int \nabla u \cdot \nabla u_t = \int \nabla u \cdot \nabla \{D\Delta u + f(u)\} \\ &= - \int D|\Delta u|^2 + \int f'(u)|\nabla u|^2 \leq -2(D\lambda_1 - k_f)a(t) \end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\|\nabla u(t)\| \leq e^{-\mu t} \|\nabla u_0\|, \quad (\mu := D\lambda_1 - k_f > 0)$$

となり、初期時刻における空間非一様性 $\|\nabla u_0\|$ が、時間と共に指数関数的に減衰していくことを示している。さらに (2.3) を用いて、

$$(2.5) \quad \|u(t, \cdot) - \bar{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u_0\|_{L^2} e^{-\mu t} \quad (t \geq 0)$$

を得る。すなわち、(1.7) の解はそれ自身の空間平均に収束する。これが、上で述べた、「解の空間一様化」が意味するところである。(2.5) の L^2 -評価は、 L^∞ -評価に改良できるが、ここでは省略する。

この結果から、特に、拡散係数が十分大きいとき、(1.7) の平衡解は、安定・不安定を問わず、空間一様な定数解のみであることが分かる。

問題 条件 (C-H-S) の解釈を考えてみよ。第一固有値 λ_1 は、領域 Ω が大きくなると、小さくなる。別の言い方では、拡散係数 D の [次元] は、固有値 λ の [次元] の逆数である。 $D\lambda$ は、無次元量。

では、条件 (C-H-S) が破れたら、何が起こるのだろうか。このとき、空間領域の広さに比べて、拡散効果が伝わる速さが相対的に遅くなるため、反応項の影響を領域全体で抑えられなくなる。その結果、(非自明な) 平衡解の分岐が起こる。

2.2. 内部遷移層. 前小節では、拡散係数が“大きい”とき、(1.7) の解は、空間一様な解に漸近することを見た。すなわち、(1.7) は、偏微分方程式としての特徴はあまり無いということである。それでは、拡散係数が「あまり大きくない」場合、解挙動はどのようになるだろうか。実は、「あまり大きくない」とき、大域的な挙動を調べる有効な数学的解析法は、現在のところ無いと言って良い。数値シミュレーションが威力を発揮するのは、この時である。その一方、「拡散係数 D が小さい (非常に小さい)」場合には、「特異摂動法」と呼ばれる有効な数学的解析法がある。この

方法の特徴は、 $D = 0$ という「特異極限」から、十分小さい $D > 0$ における (1.7) の解挙動を摂動的に引き出そうという試みである。

ここでは、拡散係数が十分小さいとして、 $D = \epsilon^2$ 、 $0 < \epsilon \ll 1$ とし、また、非線形項として双安定型の $f(u) = u - u^3$ を採用して、

$$(2.6) \quad \begin{cases} u_t = \epsilon^2 \Delta u + u - u^3, & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

を考えよう。

二つの平衡解 $u(x) \equiv \pm 1$ は漸近安定である（双安定）。いま、拡散係数は非常に小さいから、(2.6) の解は、常微分方程式で

$$\frac{d}{dt}u(t, x) \approx f(u(t, x))$$

と近似できるだろう。したがって、

$$u(t, x) \rightarrow \begin{cases} -1 & x \in \Omega^-(t) \\ +1 & x \in \Omega^+(t) \end{cases} \quad (\Omega^\pm(t) := \{x \in \Omega \mid \pm u(t, x) > 0\})$$

となることが、拡散項 $\epsilon^2 \Delta u$ が非線形項に比べて無視できる限り、期待できる（実際、そうになっている）。また、

$$\Gamma(t) := \{x \in \Omega \mid u(t, x) = 0\} = \Omega \setminus (\Omega^-(t) \cup \Omega^+(t))$$

を界面と呼び、この界面を横切って u の値が -1 から $+1$ へ急激に変化している状態を内部遷移層と呼ぶ。解の空間変動が緩やかな領域 $\Omega^\pm(t)$ をバルク領域と呼ぶことにする。

今後、「界面 $\Gamma(t)$ が、時間と共にどのように変化して行くか」を調べるのが、われわれの関心事である。そのために、界面方程式と呼ばれる $\Gamma(t)$ の運動方程式を導出するが、このとき、内部遷移層の詳細な情報が重要な役割を担うことになる。

注意 上の説明では、解 u も界面 $\Gamma(t)$ も、拡散係数の正の平方根 ϵ に依存しないかのように表現した³。これは、厳密には正しくない。正確には、 u^ϵ とか、 $\Gamma_\epsilon(t)$ と書くべきである。つまり、上述の状況においては、

$$\Gamma_\epsilon(t) = \{x \in \Omega \mid u^\epsilon(t, x) = 0\}$$

が界面の正確な定義である。従って、バルク領域も $\Omega_\epsilon^\pm(t)$ と書くのが正しい。

もう一つの留意点として、界面は領域境界と交わる場合もあり得るということである。しかし、この講演では、界面が領域境界 $\partial\Omega$ から一様に離れている場合のみを考察対象とする。界面と領域境界が交わる場合は、新たな難しさと共に、面白い現象も出てくる (cf. [14])。

³この ϵ は、層径数 (layer parameter)、層の厚さ (thickness of layer)、ミクロな相互作用距離 (microscopic interaction length) などと呼ばれる

2.3. 1次元進行波解. 前小節で、(2.6) の解は、界面の近傍で内部遷移層を形成することを述べた。内部遷移層領域（内部領域ともよばれる）における解 $u(t, x)$ の急激な空間変動は、界面に垂直な方向に起こっている。本小節では、この様子を記述するための準備をしよう。

界面に垂直な1次元方向に沿って解が急激な空間変動を起こす訳だから、この方向に空間スケールを引き伸ばして考えれば良さそうだ。 $\xi = x/\epsilon \in \mathbb{R}$ として、(2.6) の微分方程式を書きかえると、

$$(2.7) \quad u_t = u_{\xi\xi} + f(u), \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

となる。ここで、非線形項は一般形に取りなおした。以下では、

$$f(u) = u(u-a)(b-u), \quad (\text{ただし、} a < 0 < b \text{ とする})$$

として議論を進める。ここで、 a が (2.6) における -1 の役割を、 b が (2.6) における $+1$ の役割を担っている。微分方程式 (2.7) の解で、 $u(t, \xi) = Q(\xi - ct)$ (c は定数) の形をしたもの（進行波解と呼ばれる）を求めてみよう。バルク領域では、 $u \approx a$ 、 $u \approx b$ に注意して、 Q の満たす方程式と境界条件を書くと

$$(2.8) \quad \begin{cases} Q_{zz} + cQ_z + f(Q) = 0, & z \in \mathbb{R} \\ Q(-\infty) = a, Q(0) = 0, Q(+\infty) = b \end{cases}$$

となる。ただし、変数 $z := \xi - ct$ を用いた。ここで、進行波の速度 c も未知定数であり、未知関数 Q と共に決定されなければならない。この問題は、一意解

$$Q(z) = \frac{ab(1 - e^{-z/(\sqrt{2}(b-a))})}{a - be^{-z/(\sqrt{2}(b-a))}}, \quad c = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$$

を持つ。ここで重要なことは、解 $(Q(z), c)$ を具体的に与えることでは無く、

1. $Q(z)$ は、 $|z| \rightarrow \infty$ のとき、指数関数的に平衡解へ近づく
2. $Q_z(z)$, $Q_{zz}(z)$ は、 $|z| \rightarrow \infty$ のとき、指数関数的に 0 に近づく
3. 速度 $c = c_f$ は、双安定型非線形項 f によって一意的に決定される
4. 非線形項が3次関数でなくても、一般の双安定型非線形項 f にたいしても、(2.8) のような問題は一意的な解を持ち、その解は事項 1.、2.、3. の性質をみたす

ということである。これらの事実については、[8] を参照して頂きたい。あとで使用するので、このことを一般の場合に明示しておく。

非線形項の零点 $f(u) = 0$ は、 $u = h^-, h^0, h^+$ ($h^- < h^0 < h^+$) のみであり、 $f'(h^\pm) < 0$, $f'(h^0) > 0$ を満たすとする。このとき、非線形固有値問題

$$(2.8-f) \quad \begin{cases} Q_{zz} + cQ_z + f(Q) = 0, & z \in \mathbb{R} \\ Q(-\infty) = h^-, Q(0) = h^0, Q(+\infty) = h^+ \end{cases}$$

は、ただ一つの解 $(Q(z), c_f)$ をもち、この解は上述の事項 1.、2.、3. の性質をみたす。また、微分方程式に Q_z を乗じて積分すればすぐ分かるように、進行速度 c_f は

$$(2.8-c) \quad m_f c_f = - \int_{h^-}^{h^+} f(u) du = W(h^+) - W(h^-) = [W]_-^+$$

によって特徴付けられる。ただし、

$$m_f := \int_{-\infty}^{\infty} (Q_z(z))^2 dz > 0, \quad W(u) := - \int_{h^-}^u f(s) du$$

である。

2.4. 界面近傍の座標系. 界面は、ある実数値関数の零点集合（一般には、等高集合）として定義された。この関数が滑らかであっても、その零点集合が滑らかである保証はない。しかし、ここでは、界面は $\mathbb{R}^N$ における余次元 1 の滑らかで向き付け可能な閉超曲面であるとする。

時間に依存する超曲面 $\Gamma(t)$ を、固定された $N-1$ 次元多様体（参照多様体） $\mathcal{M}$ から $\mathbb{R}^N$ への滑らかな写像の像として表現する。

$$(2.9) \quad \gamma(t, \cdot) : \mathcal{M} \longrightarrow \Gamma(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

参照多様体 $\mathcal{M}$ の点を y で表すことにし、 $\Gamma(t)$ の滑らかな単位法ベクトル場を $\nu(t, y)$ で表す。すなわち、 $\nu(t, y) \in \mathbb{R}^N$ は、界面上の点 $\gamma(t, y)$ における単位ベクトルである。この表現を次のように標準化しておく。

$$(ST) \quad \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, y) \parallel \nu(t, y) \quad (\forall t \geq 0, \forall y \in \mathcal{M}) \quad (\text{界面表現の標準化})$$

つまり、界面の時間変化方向は常に単位法ベクトル ν に平行であるように、(2.9) の parametrization を標準化しておく。このような標準化はたくさんあり得るが、それらが $\mathcal{M}$ 上の時間に依存しない変換で移り合うことの証明は、文献 [6] を参照のこと。

閉超曲面 $\Gamma(t) \subset \Omega$ は、領域 Ω を二つの連結成分に分割するが、この内、単位法ベクトル場 ν が向いている側にある成分を $\Omega^+(t)$ 、もう一方の成分を $\Omega^-(t)$ 、と表すことにする。また、界面 $\Gamma(t)$ の r_0 -近傍 ($r_0 > 0$) を $\Gamma(t)^{r_0}$ で表す。

$$\Gamma(t)^{r_0} := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \Gamma(t)) < r_0\}$$

十分小さな $r_0 > 0$ に対して、 $\Gamma(t)^{r_0}$ に座標系 (r, y) を次のように導入する。

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \Phi(t, \cdot, \cdot) : (-r_0, r_0) \times \mathcal{M} &\longrightarrow \Gamma(t)^{r_0} \\ (r, y) &\longmapsto x = \gamma(t, y) + r\nu(t, y) \end{aligned}$$

陰関数定理により、十分小さな $r_0 > 0$ にたいして、(2.10) は $\Gamma(t)^{r_0}$ の座標系を与えることが分かる。

次に、界面 $\Gamma(t)$ の点 $x = \gamma(t, y)$ における主曲率の和 $\kappa(x; \Gamma(t))$ を定義する。このために、単位法ベクトル $\nu(t, y)$ を界面の近傍に次のように拡張する。

$$\bar{\nu}(t, x) := \nu(t, y) \quad \text{for } x = \gamma(t, y) + r\nu(t, y) \text{ with } |r| < r_0$$

主曲率の和は、この拡張されたベクトル場の発散 (divergence) として定義される。

$$\kappa(x; \Gamma(t)) := \text{div}_x \bar{\nu}(t, x), \quad x \in \Gamma(t)$$

この定義に従うと、 $\Omega^-(t)$ が凸のとき、 $\kappa > 0$ である。

2.5. 遷移層解のエネルギーと界面方程式. さて、界面 $\Gamma(t)$ の近傍で遷移層を持つ (2.6) の解 $u_\epsilon(t, x)$ のエネルギーを評価してみよう。バルク領域 $\Omega^\pm(t)$ においては、 $u_\epsilon(t, x) \approx \pm 1$ 、 $|\nabla u_\epsilon(t, x)| \approx 0$ だから、内部遷移層の幅が $O(\epsilon)$ とすれば、 $W'(u) = -f(u)$ として、原始関数 W は $W(\pm 1) = 0$ となっていることに注意すると

$$\begin{aligned} E(u_\epsilon(t, \cdot)) &= \int_{\Omega} \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla u_\epsilon(t, x)|^2 + W(u_\epsilon(t, x)) dx \\ &\approx \int_{\Gamma(t)^\epsilon} \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla u_\epsilon(t, x)|^2 + W(u_\epsilon(t, x)) dx \end{aligned}$$

を得る。一方、内部遷移層領域 $\Gamma(t)^\epsilon$ では、 $|\nabla u_\epsilon(t, x)| = O(1/\epsilon)$ であり、その体積は $|\Gamma(t)^\epsilon| = O(\epsilon)$ だから、 $E(u_\epsilon(t, \cdot)) = O(\epsilon)$ を得る。従って、このままで勾配系を考えれば、 $u_t = O(\epsilon)$ となり、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において方程式は、 $u_t \equiv 0$ となって、ダイナミクスが捉えられないことが分かる。つまり、 $\epsilon > 0$ が小さいときは、運動が非常にゆっくりとしているため、あたかも動いていないように見えるということである。このような、非常にゆっくりとした動きを見やすくする為には、時間を早く進ませれば良い。

このことを、分かりやすい例で説明しよう。常微分方程式 $dp(t)/dt = \epsilon p(t)$ の解挙動を見やすくするために、 $t = \tau/\epsilon$ によって、新たな時間変数 τ を導入して、微分方程式を書きなおすと、 $d\bar{p}(\tau)/d\tau = \bar{p}(\tau)$ となる。この方程式の解は、一般に、 $O(1)$ の速さで動くから見やすい。

したがって、(2.6) の、あるいは、その一般形 $u_t = \epsilon^2 \Delta u + f(u)$ の遷移層解の動きを捉えるためには、時間をリスケールした

$$(2.11) \quad \begin{cases} u_t = \epsilon \Delta u + \frac{1}{\epsilon} f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

を考える必要がある。これは、リスケールされたエネルギー

$$\bar{E}(u) := \frac{1}{\epsilon} E(u) = \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u) dx$$

の勾配系である。

内部遷移層の挙動を詳しくみることににより、(2.11) の遷移層解 u_ϵ の界面の運動を記述する方程式が

$$\frac{\partial \gamma(t, y)}{\partial t} \cdot \nu(t, y) = c_f$$

であることが分かる。ただし、解 u_ϵ は

$$u_\epsilon(t, x) \approx \begin{cases} h^-, & x \in \Omega^-(t) \\ h^+, & x \in \Omega^+(t) \end{cases}$$

としている。ここでは、界面方程式の詳しい導出法を説明している余裕はないが、その代わり、直感的な説明を与えよう。

界面 $\Gamma(t)$ は解 $u(t, x)$ の零点集合 $\{x \in \Omega \mid u(t, x) = 0\}$ として定義されているから、 $u(t, \gamma(t, y)) = 0$ を時間に関して微分すると、 γ_t が ν と平行であることに注意

して、

$$0 = u_t + (\gamma_t \cdot \nu) \nabla_\nu u = \frac{1}{\epsilon} \{ \epsilon u_t + (\gamma_t \cdot \nu) \nabla_{\tilde{\nu}} u \}$$

を得る。ここで、 $\nu = \epsilon \tilde{\nu}$ とした。ここで、(2.11) の微分方程式を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \Delta u + (\gamma_t \cdot \nu) \nabla_{\tilde{\nu}} u + f(u, v) \\ &= \nabla_{\tilde{\nu}}^2 u + \{ \epsilon \kappa + \gamma_t \cdot \nu \} \nabla_{\tilde{\nu}} u + f(u, v) \end{aligned}$$

となる。ここで、ラプラシアン²の界面における表現 $\epsilon^2 \Delta u = \nabla_{\tilde{\nu}}^2 u + \epsilon \kappa \nabla_{\tilde{\nu}} u$ を用いた。これと、方程式 (2.8) を比較して

$$\nabla_{\tilde{\nu}} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_{\tilde{\nu}} u = Q$$

とすれば、

$$(A-S) \quad c(v) = \epsilon \kappa + \gamma_t \cdot \nu \approx \gamma_t \cdot \nu$$

となり上述の界面方程式を得る。

この界面方程式の左辺を今後、 $\mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x)$, $x \in \Gamma(t)$ と書くことにする。すなわち、

$$\mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x) = \frac{\partial \gamma(t, y)}{\partial t} \cdot \nu(t, y), \quad x = \gamma(t, y)$$

この流儀に従うと、(2.11) の界面方程式は、

$$(2.12) \quad \mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x) = c_f$$

となる。

さて、(2.12) に従って、界面 $\Gamma(t)$ の運動を調べてみよう。

Case-(1): $c_f > 0$. このとき、界面は h^+ -相を侵食し、最終的には Ω 全体が h^- -相で占められる。

Case-(2): $c_f < 0$. このとき、上とは逆に、界面は h^- -相を侵食し、最終的には Ω 全体が h^+ -相で占められる。

(2.8-c) に依ると、 $c_f > 0$ と $W(h^+) > W(h^-)$ が同値であり、 $c_f < 0$ と $W(h^+) < W(h^-)$ が同値であることが分かる。従って、上の *Case-(1), (2)* の場合、系全体がバルクのエネルギー最小の相で占められる方向に、界面が運動していく。これは、われわれの系がエネルギー汎関数の勾配系であることから、非常に自然な結論である。

さて、それでは、第3の場合、 $c_f = 0$ の時はどうなるのだろうか。このとき、(2.12) に依ると、界面は動かないことになる。

2.6. 平均曲率流. 進行波解の速さが $c_f = 0$ の場合、すなわち、バルクエネルギーが二つの極小点において同じ値を取るとき ($W(h^-) = W(h^+)$)、界面の運動運動方程式 (2.12) によると、界面は動かないことになる。これは、(A-S) における近似からも分かるように、(2.11) の時間スケールでは運動が遅すぎて見えなくなっていると考えられる。

そこで、(2.11) よりもさらに早い時間スケールを導入して、方程式を書きなおしてみよう。

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

この方程式の内部遷移層解の界面方程式は、

$$(2.14) \quad \mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x) = -\kappa(x; \Gamma(t)), \quad x \in \Gamma(t), t > 0$$

であることが、(2.12) を導いたときの (A-S) から分かる ($c = 0$ と時間スケールが変わっていることに注意)。これが、いわゆる、**平均曲率流方程式**である。この方程式は、最早、反応拡散方程式の非線形項には依存しないし、領域 Ω の存在も感知しない。ただ界面の形状 (主曲率の和、簡単のため平均曲率) にのみ依存して運動する。また、元の反応拡散方程式が、エネルギー汎関数に対する勾配系であったように、(2.14) も界面エネルギー (界面の表面積)

$$(2.15) \quad \hat{E}(\Gamma) := \int_{\Gamma} dS_x^{\Gamma} = |\Gamma|$$

に対する勾配系である。また、適当な初期界面 $\Gamma(0)$ から出発すると、(2.14) の時間局所解の存在が知られている。従って、解が $t \in [0, \infty)$ において存在すれば、平衡解 (極小曲面) に収束するはずである。我々は、界面が有界領域内に含まれている状況を考えているから、界面はコンパクトな極小曲面に収束するはずである。しかしながら、2次元と3次元 ($N = 2, 3$) においては、縮退して1点 (または複数個の点) になるもの以外に、コンパクトな極小曲面は存在しない。したがって、界面は (有限時間内に) 点消滅することになる。つまり、バルクエネルギーの値が等しい二つの相 $u = h^-$ と $u = h^+$ が占める領域 $\Omega^{\pm}(t)$ は、廻りを囲んだ方が生き残ると言うことが結論できる。実際、2次元の場合は、どのような初期界面から出発しても、界面はいずれは凸閉曲線になり、有限時間で点消滅することが証明されている (cf. [9, 10])。3次元の場合は、凸な初期解面から出発すれば、やはり、界面は有限時間で点消滅することが知られている ([13])。この場合、初期界面が凸でなければ、(2.14) の解は有限時間で千切れたりするが、結局は有限個の点において点消滅するであろう。

3. 非一様媒体における反応拡散方程式

前節では、空間一様な反応拡散方程式にたいする界面現象を説明した。応用の観点から言っても、反応・拡散過程が進行する媒体は現実的には非一様だから、非一様反応拡散方程式を考察対象とすることは自然である。空間非一様性が、拡散係数にある場合と、反応項にある場合の二通りが考えられるが、ここでは、後者のみに絞って議論を進める。

3.1. 空間非一様な反応項. 次のような、空間非一様反応拡散方程式を考える。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta u + f(u, x, \epsilon), & (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & (x \in \partial\Omega, \quad t > 0), \end{cases}$$

ここで、非線形項 $f(u, x, \epsilon)$ は、二重井戸型ポテンシャル $W(u, x, \epsilon)$ から決まっているとする。

$$(3.2) \quad f(u, x, \epsilon) = -\frac{\partial W(u, x, \epsilon)}{\partial u}$$

また、 $u = h^{(\pm)}(x, \epsilon)$ は井戸の位置をあらわし

$$(3.2-a) \quad h^{(-)}(x, \epsilon) < h^{(+)}(x, \epsilon) \quad (x \in \bar{\Omega})$$

を満たしているとする。

§2 における議論から、(3.1) の解挙動を調べる際、ポテンシャルの二つの井戸における値の差が重要な役割を果たすと期待される。この差を、各 $x \in \bar{\Omega}$ に対して $[W]_{-}^{+}(x)$ で表すことにする。

$$(3.3) \quad [W]_{-}^{+}(x) = -\int_{h^{(-)}(x)}^{h^{(+)}(x)} f(u, x, 0) du = W(h^{(+)}(x), x, 0) - W(h^{(-)}(x), x, 0)$$

ここで、 $h^{(\pm)}(x) = h^{(\pm)}(x, 0)$ (cf. (3.2-a)) とした。

方程式 (3.1) と共に、その時間をリスケールした方程式も併せて考えると便利である。

$$(3.1-s) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \Delta u + \frac{1}{\epsilon} f(u, x, \epsilon),$$

$$(3.1-ss) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} f(u, x, \epsilon).$$

次に、非線形項 f に関する条件をまとめて述べておこう。

(A1) 方程式 $f(u, x, 0) = 0$ は三つの解 $u = h^{(\pm)}(x)$, $h^{(0)}(x)$ を持ち、それらは、

$$h^{(-)}(x) < h^{(0)}(x) < h^{(+)}(x) \quad x \in \bar{\Omega}$$

を満たすとする。さらに、

$$f_u(h^{(\pm)}(x), x, 0) < 0 \quad x \in \bar{\Omega} \quad (\text{双安定性})$$

が成り立つとする。

条件 (A1) の下、非線形固有値問題

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \tilde{Q}_0}{dz^2} + c \frac{d\tilde{Q}_0}{dz} - f(\tilde{Q}_0, x, 0) = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \tilde{Q}_0(z) = h^{(\pm)}(x), \quad \tilde{Q}_0(0) = \frac{1}{2}(h^{(+)}(x) + h^{(-)}(x)) (\equiv 0) \end{cases}$$

は一意解 $(\tilde{Q}_0(z; x), c(x))$ を持つ。ここで、 $x \in \bar{\Omega}$ は単にパラメータとして扱っている。また、解 $(\tilde{Q}_0(z; x), c(x))$ は、次の条件を満足する。 x に依存しないある定数 $C > 0$ と $\delta > 0$ が存在し、

$$(3.4-a) \quad |\tilde{Q}_0(z; x) - h^{(\pm)}(x)| \leq Ce^{-\delta|z|} \quad \text{as } z \rightarrow \pm\infty,$$

$$(3.4-b) \quad \frac{\partial \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z} > 0, \quad \left| \frac{\partial \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2 \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z^2} \right| \leq Ce^{-\delta|z|},$$

となる。また、次の関係式がある。

$$(3.4-c) \quad c(x)m(x) = [W]_-^+(x) := W(h^{(+)}(x), x, 0) - W(h^{(-)}(x), x, 0)$$

ただし、

$$m(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z} \right)^2 dz$$

である。この (3.4-c) は、(3.4) の両辺に $\tilde{Q}_z$ を掛けて、 $\mathbb{R}$ 上で積分すれば得られる。

初期値 $u_0(x)$ から出発する (3.1) の解 $u(x, t)$ は、方程式 (2.6) の解と同様、界面

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega \mid u(t, x) = 0\}$$

の近傍で内部遷移層を持ち、界面 $\Gamma(t)$ は運動方程式

$$(3.5) \quad V_{\Gamma(t)}(x) = c(x) \quad (x \in \Gamma(t), \quad t > 0)$$

に従って変化する。ここで、(3.5) の時間スケールは (3.1-s) のそれと同じである。

界面方程式 (3.5) に対しても、§2.5 と同様に次のことが言える。

$$c(x) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \implies \Omega^-(t) \text{ が支配的 } (t \rightarrow \infty)$$

$$c(x) < 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \implies \Omega^+(t) \text{ が支配的 } (t \rightarrow \infty)$$

それでは、進行波の局所速度 $c(x)$ が符号を変える場合、(3.5) の解はどのように振舞うだろうか。(3.5) は、汎関数

$$E_v(\Gamma) := - \int_{\Omega_F} c(x) dx, \quad (\partial\Omega_F \setminus \partial\Omega = \Gamma)$$

に対する勾配系だから、その解は $t \rightarrow \infty$ のとき平衡解に収束すると考えられる。(3.5) の平衡解は、 $c(x)$ の零点集合、あるいは、零点集合の一つ（または複数個）の連結成分である。勿論、この零点集合は特異点を持ったり、余次元が 1 で無かったり、様々な様態を取り得るだろう。勝手な閉集合 K に対して、滑らかな $c(x)$ が存在して、 $K = \{x \in \Omega \mid c(x) = 0\}$ となることが知られているから、(3.5) の平衡解としては、一般に、相当に複雑なものがあり得る。

そこで、議論を簡単にする為、 $\Gamma = \{x \in \Omega \mid c(x) = 0\}$ が滑らかな余次元 1 の超曲面であるとしよう。元の反応拡散方程式 (3.1) も勾配系であったから、その解も $t \rightarrow \infty$ のとき平衡解に近づく。この両者の関係はどうなっているのだろうか？すなわち、

界面方程式 (3.5) が滑らかな平衡解 Γ を持つ、十分小さな $\epsilon > 0$ に対して、反応拡散方程式 (3.1) は平衡界面 Γ の近傍で内部遷移層をもつ平衡解を有するだろうか？

この問いに答えることは、実は、結構デリケートなことである。Fife と Greenlee は、文献 [7] において、もし条件

$$(F-G) \quad \nabla_\nu c(x)|_\Gamma < 0, \quad x \in \Gamma$$

が満たされているならば、上の問いに対する答えは肯定的であることを示した。この条件の意味を理解する上で、法ベクトル ν の向きが Ω_Γ^+ の内側を向いていることに注意する必要がある。いま、 Γ 上では $c(x) \equiv 0$ だから、上の条件 (F-G) の下、

$$x \in \Omega_\Gamma^- \implies c(x) > 0 \implies W(h^-(x), x, 0) \text{ がバルクポテンシャルの最小値}$$

$$x \in \Omega_\Gamma^+ \implies c(x) < 0 \implies W(h^+(x), x, 0) \text{ がバルクポテンシャルの最小値}$$

となっている。領域 $\Omega^\pm$ の定義によると、(3.1) の平衡解は $u(x)$ は、

$$u(x) \approx h^\pm(x), \quad x \in \Omega^\pm$$

であった。すなわち、バルク領域でバルクポテンシャルの最小値に近い値を取るような (3.1) の平衡解は存在するということである。また、この平衡解は、漸近安定であることも知られている (cf. [17])。

一方、上の Fife-Greenlee 条件の逆

$$(\text{Reverse F-G}) \quad \nabla_\nu c(x)|_\Gamma > 0 \quad x \in \Gamma$$

が成り立つ場合、(3.5) の滑らかな平衡解 Γ の近傍で内部遷移層を持つ (3.1) の平衡解は、非常に多く存在している可能性が [17] により指摘された。実は、[17] の結果は、(3.1) に対してではなく、もっと一般の反応拡散系に対するものだが、(3.1) の状況にも適用できる。すなわち、

Theorem 3.1. 界面 Γ は (3.5) の滑らかな平衡解とする。次の非退化条件が満たされていれば、十分小さい $\epsilon > 0$ に対して、(3.1) は Γ の近傍で内部遷移層を持つ平衡解を有する。

非退化条件：界面 Γ 上で定義された楕円型作用素

$$(3.6) \quad \epsilon \Delta^\Gamma + \nabla_\nu c(x)|_\Gamma$$

の固有値は、 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ に関して一様に 0 から離れている。

ここで、 Δ^Γ は、 Γ 上の Laplace-Beltrami 作用素である。

作用素 Δ^Γ の固有値はゼロまたは負だから、もし $\nabla_\nu c(x)|_\Gamma < 0$ ならば、(3.6) の作用素の固有値は 0 から一様に離れている。従って、定理 3.1 の結果は、Fife-Greenlee ([7]) の結果と整合している。もし、逆に、 $\nabla_\nu c(x)|_\Gamma > 0$ ならば、作用素 (3.6) の固有値は $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、無限回 0 にぶつかる。このことから、(Reverse F-G) が成り立つ場合、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、(3.1) に対して無限個の平衡解が次々と分岐する可能性が [17] において指摘され、実際、 Ω が球対称領域で $c(x)$ が球対称な場合には、(3.1) の無限個の平衡解が分岐することが示された ([18])。これらの平衡解の不安定度は、不安定指数 (Morse-指数) が $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $O(\epsilon^{-1/2})$ であるという意味で、非常に高い。

3.2. 均衡型反応項. それでは、進行波の局所速度が領域の各点で消えている場合 ($c(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$)、界面の運動はどのような法則に支配されているのか、を考えよう。

(4.3-c) によれば、 $c(x) \equiv 0$ と $[W]^+(x) \equiv 0$ は同値であるから、このような非線形項を均衡型非線形項と呼ぶことにしよう。以下の議論では、 f に次の条件を課す。

(A2) $\bar{\Omega}$ 上 $[W]^\pm(x) \equiv 0$ (すなわち、 $c(x) \equiv 0$) が成り立つ。

この条件 (A2) が成立している場合、少なくとも、二つの退化状況が出現する。

- 余次元 1 の任意の多様体 $\Gamma \subset \Omega$ は (3.5) の平衡解になり得る。
- この平衡解で線形化して得られる (3.6) の作用素は $\epsilon \Delta^\Gamma$ になるが、これは、0-固有値と共に、 $\epsilon \rightarrow 0$ の時 0 に収束する無限個の固有値を持つ。

したがって、Theorem 3.1 は無意味になってしまう。そこで、時間をリスケールして、条件 (A1) と (A2) の下、方程式 (3.1-ss) に対する界面方程式を、中村 et al. [16] に倣って導くと

$$(3.7) \quad \mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x) = -\kappa(x; \Gamma(t)) + \frac{J(x; \Gamma(t))}{m(x)}, \quad (x \in \Gamma(t), \quad t > 0),$$

である。ここで、

$$(3.7\text{-a}) \quad m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z} \right)^2 dz, \quad (x \in \bar{\Omega}),$$

$$(3.7\text{-b}) \quad J(x; \Gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[z \left(\nabla_x f(u, x, 0) \Big|_{u=\tilde{Q}_0(z; x)} \cdot \nu(x; \Gamma) \right) + f_\epsilon(\tilde{Q}_0(z; x), x, 0) \right] \frac{\partial \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z} dz, \quad (x \in \Gamma).$$

今後、この関数 $m(x)$ が非常に大切な役割を果たす。ここで、 $m(x)$ と $J(x; \Gamma)$ の間にある次の重要な関係

$$(3.7\text{-c}) \quad \begin{aligned} J(x; \Gamma) &= -\nabla_\nu m(x) \Big|_\Gamma + \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(\tilde{Q}_0(z; x), x, 0) \frac{\partial \tilde{Q}_0(z; x)}{\partial z} dz \\ &= -\nabla_\nu m(x) \Big|_\Gamma + \frac{\partial}{\partial \epsilon} [W(h^{(+)}(x), x, \epsilon) - W(h^{(-)}(x), x, \epsilon)] \Big|_{\epsilon=0} \\ &=: -\nabla_\nu m(x) \Big|_\Gamma + \mathcal{E}(x) \end{aligned}$$

に注意しよう。バルクポテンシャル W を用いると、 $m(x)$ は次のような表現が可能である。

$$(3.7\text{-d}) \quad m(x) = \int_{h^{(-)}(x)}^{h^{(+)}(x)} \sqrt{2W(u, x, 0)} du$$

(ただし、 $W(h^{(\pm)}(x), x, 0) \equiv 0$ と標準化した。) このことから、この $m(x)$ は、領域内の点 x において、系が $h^{(-)}(x)$ から $h^{(+)}(x)$ へと ν に沿って遷移する際に必要なエネルギー単位と考えられる。関係式 (3.7-c) を用いると、界面方程式 (3.7) は

$$\mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x) = -\kappa(x; \Gamma(t)) - \nabla_\nu (\log m(x)) + \frac{\mathcal{E}(x)}{m(x)}, \quad (x \in \Gamma(t), \quad t > 0)$$

と表現できる。また、この界面方程式は、汎関数

$$\mathcal{F}(\Gamma) := \int_\Gamma m(x) dS_x^\Gamma - \int_{\Omega_\Gamma^-} \mathcal{E}(x) dx$$

の勾配系になっている。すなわち、 $x \in \Gamma(t)$, $t > 0$ に対して、式 (3.7) は

$$m(x)\mathbf{V}_{\Gamma(t)}(x) = -\frac{\delta\mathcal{F}(\Gamma(t))}{\delta\Gamma(t)} \quad (\text{汎関数微分})$$

と同値である。

Theorem 3.2. (i) 滑らかな初期界面 $\Gamma(0) = \Gamma$ に対して、ある定数 $T_* > 0$ が存在し、区間 $[0, T_*]$ 上で方程式 (3.7) は滑らかな解 $\Gamma(t)$ を持つ。

(ii) 方程式 (3.1) の時間リスケール版

$$(3.1\text{-ss}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} f(u, x, \epsilon), & (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & (x \in \partial\Omega, \quad t > 0), \end{cases}$$

の解 $u^\epsilon(t, x)$ が存在し、任意の $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(t, x) = \begin{cases} h^{(-)}(x), & x \in \overline{\Omega_\Gamma^-} \setminus \Gamma(t)^\delta, \quad t \in [0, T_*] \\ h^{(+)}(x), & x \in \overline{\Omega_\Gamma^+} \setminus \Gamma(t)^\delta, \quad t \in [0, T_*] \end{cases} \quad (\text{一様収束})$$

を充たす。

Proof. 証明の方針は、次の通りである。

(i) 界面 $\Gamma(t)$ を初期界面からのずれとして

$$\Gamma(t) = \{x = \gamma(0, y) + R(t, y)\nu(0, y) \mid y \in \mathcal{M}\}$$

と表現すると、 R の充たすべき方程式は、参照多様体 $\mathcal{M}$ 上で定義された準線形放物型微分方程式になる。このような方程式にたいする解の存在定理を適用すれば良い。

(ii) まず、高い精度の近似解を構成する。任意の自然数 $k \geq 2$ に対して近似解 u_k^ϵ は

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_k^\epsilon - \Delta u_k^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2} f(u_k^\epsilon, x, \epsilon) \right\|_{L^\infty([0, T_*] \times \bar{\Omega})} = O(\epsilon^{k+1}) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

の精度で方程式 (3.1-ss) を充たす。この近似解の摂動として真の解を摂動法で求める。この際、楕円型作用素の小さい固有値の詳しい評価が必要となるが、このために文献 [1, 3, 6] で得られた重要な結果が大きな役割を果たす。□

3.3. 非退化条件. 定理 3.2 (ii) は、反応拡散系 (3.1-ss) の解が界面方程式 (3.7) の解へ有限時間内では収束する、ということを示している。しかしながら、この結果は次の問いに答えるほど強力ではない。

条件 (A1) と (A2) の下、もし界面方程式 (3.7) が無限区間 $[0, \infty)$ で滑らかな解 $\Gamma(t)$ を持つならば、反応拡散方程式 (3.1-ss) は十分小さな $\epsilon > 0$ に対して、界面近傍で内部遷移層を持つ解を有するだろうか？

この問いに答えるには、解 $\Gamma(t)$, $t \in [0, \infty)$ にある種の非退化条件を課す必要がある（退化している場合、解の分岐などを考慮する必要があり、問題はさらに難しくなる）。一方、有限時間区間における問題では、非退化条件は不必要であった。これは、微分方程式の解が有限時間内では、様々なデーターに連続に依存することに

依る。勾配系においては、 $t \rightarrow \infty$ のとき解は平衡解に漸近するから、このような非退化条件は平衡解に課すべきであろう。

まずその前に、(3.7) の平衡解が存在するかどうか、自明な問題ではない。次の条件を仮定しよう。

(A3) 平衡界面方程式

$$0 = -\kappa(x; \Gamma) - \nabla_\nu \log(m(x))|_\Gamma + \frac{\mathcal{E}(x)}{m(x)}, \quad x \in \Gamma$$

あるいは、これと同値な方程式

$$0 = -m(x)\kappa(x; \Gamma) - \nabla_\nu m(x)|_\Gamma + \mathcal{E}(x), \quad x \in \Gamma$$

の滑らかな解 Γ が存在する。

このような平衡界面 Γ の存在を問う問題を、**自由界面問題**と呼ぶことにしよう。この問題は、それ自身、独立に扱われるべきものである。

上の方程式を平衡界面 Γ で線形化して得られる、楕円型作用素 $\mathcal{A}^\Gamma$ を

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \mathcal{A}^\Gamma R(x) &:= m(x) \left(\Delta^\Gamma + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2 \right) R(x) + \nabla_\Gamma m(x) \cdot \nabla_\Gamma R(x) \\ &\quad + (-\kappa(x; \Gamma) \nabla_\nu m(x) - \nabla_\nu^2 m(x) + \nabla_\nu \mathcal{E}(x)) R(x) \quad x \in \Gamma, \\ &= \operatorname{div}_\Gamma (m(x) \nabla_\Gamma R(x)) + m(x) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2 \right) R(x) \\ &\quad + (-\kappa(x; \Gamma) \nabla_\nu m(x) - \nabla_\nu^2 m(x) + \nabla_\nu \mathcal{E}(x)) R(x) \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

と定義する。ここで、 Δ^Γ 、 $\operatorname{div}_\Gamma$ 、と ∇_Γ は、それぞれ、平衡界面上の Laplace-Beltrami-作用素、発散、勾配を表す。

作用素 $\mathcal{A}^\Gamma$ に対する次の固有値問題を考えよう。

$$(3.9) \quad \mathcal{A}^\Gamma \Theta(x) = \lambda m(x) \Theta(x), \quad x \in \Gamma.$$

この問題 (3.9) は自己共役な問題だから、その固有値は全て実数である。それらを

$$(3.9') \quad \sigma_\Gamma = \{ \lambda_j^\Gamma \}_{j=0}^\infty, \quad \lambda_0^\Gamma > \lambda_1^\Gamma > \dots > \lambda_j^\Gamma \rightarrow -\infty,$$

としよう。ただし、ここでは異なる固有値のみを挙げてある。固有値 λ_j^Γ の重複度を $m_j^\Gamma \geq 1$ で表す。

次の条件が満たされているとき、平衡界面 Γ は**非退化**であると言う。

(A4) 0 は固有値問題 (3.9) の固有値ではない。すなわち、 $0 \notin \sigma_\Gamma$

以上で、この講演の主結果を述べる準備が整った。

3.4. 平衡内部遷移層解の存在と安定性. 内部遷移層を持つ (3.1-ss) の解の存在と安定性を言おう。

Theorem 3.3. 条件 (A1)、(A2)、(A3)、および、(A4) が成り立っているとする。

(i) 方程式 (3.1-ss) の平衡解 u^ϵ で、任意の $d_0 > 0$ にたいして、

$$(3.10) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x) = \begin{cases} h^{(-)}(x), & x \in \Omega_\Gamma^{(-)} \setminus \Gamma^{(d_0)}, \\ h^{(+)}(x), & x \in \Omega_\Gamma^{(+)} \setminus \Gamma^{(d_0)}, \end{cases} \quad (\text{一様収束})$$

を満たすものが存在する。

(ii) もし、 $\lambda_0 < 0$ ならば、平衡解 u^ϵ は漸近安定である。もし、 $\lambda_k^\Gamma > 0 > \lambda_{k+1}^\Gamma$ を満たす整数 $k \geq 0$ が存在するとき、解 u^ϵ は不安定であり、その不安定指数は $\sum_{j=0}^k m_j^\Gamma$ である。

定理の証明は、概略を後で述べる。まず、この定理が適用できる例を幾つか挙げよう。

3.5. 非一様性に起因する幾何学的変分問題の例.

Example 3.4. 非線形項 f が

$$(3.11) \quad f(u, x, \epsilon) \equiv (u - \epsilon \alpha(x))(u^2 - 1).$$

の場合を考えよう。このとき、(3.4) の解 $\tilde{Q}_0$ は

$$(3.12) \quad \tilde{Q}_0(\tau; x) \equiv \hat{Q}_0(\tau) := \tanh\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right).$$

で与えられることが、簡単にわかる。今後、この双曲線関数 $\hat{Q}_0(\tau)$ は繰り返し出てくる。また、(1.7-a) と (1.7-c) で定義された関数 $m(x)$ と $\mathcal{E}$ は

$$(3.13) \quad m(x) \equiv \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (x \in \bar{\Omega}), \quad J(x; \Gamma) \equiv \frac{2\sqrt{2}}{3} \alpha(x) \quad (x \in \Gamma).$$

したがって、条件 **(A3)** が成り立つということは、

$$(3.14) \quad \kappa(x; \Gamma) = \alpha(x), \quad x \in \Gamma.$$

を満たす Γ が存在することを課している。これは、非常に幾何学的な問題であり、与えられた関数を平均曲率とするような超曲面を求めよという問題である。また、(3.14) は汎関数 $F_\alpha(\Gamma)$

$$(3.15) \quad F_\alpha(\Gamma) := \int_\Gamma dS_x^\Gamma - \int_{\Omega_\Gamma^{(-)}} \alpha(x) dx$$

の第一変分方程式である。

そこで、(3.14) は滑らかな解 Γ を持つ、あるいは、同じことだが、(3.15) が滑らかな臨界点 Γ をもつとする。(3.8) で定義された線形作用素 $\mathcal{A}^\Gamma$ は

$$(3.16) \quad \frac{3}{2\sqrt{2}} \mathcal{A}^\Gamma R(x) = \left(\Delta^\Gamma + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2 \right) R(x) + \nabla_\nu \alpha(x)|_\Gamma R(x) \quad x \in \Gamma.$$

となる。(3.16) 右辺の最初の2項 $\Delta^\Gamma + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2$ は、 Γ 上のヤコビ作用素と呼ばれ、 $-\kappa(x; \Gamma)$ の第一変分である。実際、(3.16) の右辺は、 $-F_\alpha$ の Γ における R 方向への第二変分である。

Example 3.5. この例では、非線形項 f が

$$(3.17) \quad f(u, x, \epsilon) \equiv h(x)^2(u^3 - u).$$

の場合を扱う。ここで、関数 $h(x)$ は $\bar{\Omega}$ 上滑らかな正値関数とする。このとき、 $\tilde{Q}_0(\tau; x)$ 、 $m(x)$ 、および、 $\mathcal{E}$ は、それぞれ、

$$(3.18) \quad \tilde{Q}_0(\tau; x) = \hat{Q}_0(h(x)\tau), \quad m(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}h(x), \quad \mathcal{E}(x) \equiv 0$$

で与えられる。従って、自由界面問題は

$$(3.19) \quad h(x)\kappa(x; \Gamma) + \nabla_\nu h(x) \Big|_\Gamma = 0, \quad x \in \Gamma$$

となる。これは、

$$(3.20) \quad E_h(\Gamma) := \int_\Gamma h(x) dS_x^\Gamma.$$

によって定義される汎関数 $E_h(\Gamma)$ の第一変分方程式である。

自由界面問題 (3.19) は (3.14) と同じように見えるが、この両者の間には大きな違いがある。実際、(3.19) においては、 $x \in \Gamma$ における界面の平均曲率が、あらかじめ与えられた関数の値 $h(x)$ のみでなく、界面の法ベクトル $\nu(x; \Gamma)$ の向きにも依存するからである。特別な場合を除いて、どのような条件を h に課せば問題 (3.19) は解を持つのか、一般的理論はまだないようだ。

問題 (3.19) の滑らかな解 Γ の存在を認めると、(3.8) の線形作用素は

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \frac{3}{2\sqrt{2}} \mathcal{A}^\Gamma R(x) \equiv & h(x) \left(\Delta^\Gamma + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2 \right) R(x) + \nabla_\Gamma h(x) \cdot \nabla_\Gamma R(x) \\ & - \nabla_\nu h(x) \Big|_\Gamma \kappa(x; \Gamma) R(x) - \nabla_\nu^2 h(x) \Big|_\Gamma R(x) \end{aligned}$$

となるが、これは、(3.20) の Γ における第二変分でもある。

Example 3.6. この例は、先の例とほぼ同様である。非線形項 f が

$$(3.22) \quad f(u, x, \epsilon) \equiv u(u^2 - h(x)^2),$$

の場合。ここで、 $h(x) > 0$ は $\bar{\Omega}$ の滑らかな関数とする。

$$(3.23) \quad \tilde{Q}_0(\tau; x) = h(x)\hat{Q}_0(h(x)\tau), \quad m(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}h(x)^3$$

だから、自由界面問題は

$$(3.24) \quad \kappa(x; \Gamma)h(x) + 3\nabla_\nu h(x) \Big|_\Gamma = 0 \quad x \in \Gamma.$$

となる。これは、(3.19) とほぼ同じである。また、(3.24) は汎関数 $\hat{E}_h(\Gamma)$

$$(3.25) \quad \hat{E}_h(\Gamma) \equiv \int_\Gamma h(x)^3 dS_x^\Gamma.$$

の第一変分方程式である。ここで、 h の 3 乗の積分であることに注意。

上に挙げた例では、自然に幾何学的変分問題が出てきた。汎関数 F_α 、 E_h 、や $\hat{E}_h$ 等の臨界点が、自由界面問題 (3.14)、(3.19)、(3.24) 等の解 Γ を与える。また、この解 Γ は、反応拡散方程式 (3.1-ss) の内部遷移層解 u^ϵ を与え、この内部遷移層解の安定性は、界面 Γ の臨界点としてのモース指数から読み取ることができる。

3.6. 球対称条件下における例の解析. ここでは、前小節の例を、空間非一様性が球対称の場合に、少し詳しく眺めてみよう。その為、領域 Ω は $\mathbb{R}^N$ の原点を含み、関数 α , h と h は $r = |x|$ のみに依存するとする。しかしながら、領域 Ω は球対称である必要はない。界面方程式 (3.7) の解 $\Gamma(t)$ として原点中心の球面のみを考えることにする。また、球面で囲まれた領域を $\Omega^{(-)}(t)$ と名づけることにする。逆の場合も以下と同様に議論できる。

界面の半径を $r(t)$ で表せば、界面方程式は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad & \text{(例 2.4):} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dr} \left(\log r^{N-1} - \int_0^r \alpha(s) ds \right), \\
 & \text{(例 2.5):} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dr} \log (r^{N-1} h(r)), \\
 & \text{(例 2.6):} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dr} \log (r^{N-1} h(r)^3).
 \end{aligned}$$

さて、 $r = r_0$ を (3.26) の平衡解する。これに対応する平衡界面 Γ の球対称な摂動に対する安定性は、ポテンシャルの $r = r_0$ における 2 階導関数の符号で決定される。一方、球対称でない摂動にたいする安定性は、界面上の作用素 $\mathcal{A}^\Gamma$ の固有値で決定される。この作用素の固有関数は、球面調和関数であることがすぐに分かる。 j -次の球面調和関数に対応する固有値 λ_j^Γ は

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad & \text{(例 2.4):} \quad \lambda_j^\Gamma = -\frac{j(j+N-2)}{r_0^2} - \frac{d^2}{dr^2} \left(\log r^{N-1} - \int_0^r \alpha(s) ds \right) \Big|_{r=r_0}, \\
 & \text{(例 2.5):} \quad \lambda_j^\Gamma = -\frac{j(j+N-2)}{r_0^2} - \frac{d^2}{dr^2} \log (r^{N-1} h(r)) \Big|_{r=r_0}, \\
 & \text{(例 2.6):} \quad \lambda_j^\Gamma = -\frac{j(j+N-2)}{r_0^2} - \frac{d^2}{dr^2} \log (r^{N-1} h(r)^3) \Big|_{r=r_0}.
 \end{aligned}$$

で与えられる。

(3.27) の $\mathcal{A}^\Gamma$ の固有値の表現から、定理 3.3 を適用して、(3.1-ss) の内部遷移層を持つ平衡の存在と安定性が読み取れる。

定理 3.3 は、1 次元の場合にも、勿論、適用できる。例えば、 $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ としよう。例 2.4 の界面方程式は、

$$\frac{dr}{dt} = \alpha(r)$$

となる。関数 $\alpha(r)$ の単純零点 $r_0 \in (0, 1)$ から (3.1-ss) の内部遷移層平衡解が十分小さな $\epsilon > 0$ に対して存在し、その解は、もし $\alpha'(r_0) < 0$ ならば漸近安定、もし $\alpha'(r_0) > 0$ ならば不安定である。例 2.5 の界面方程式は、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{h'(r)}{h(r)}$$

である。従って、関数 $h(r)$ の非退化な臨界点 $r_0 \in (0, 1)$ の存在から、 $r = r_0$ の近傍で内部遷移層を持つ (3.1-ss) の平衡解の存在がいえる。この解は、関数 $h(r)$ が r_0 で極小値を取るならば漸近安定、極大値をとるならば不安定である。

4. 証明の概略

この節では、Theorem 3.3 の証明の概略を述べる。

この定理で現れる解を $u^\epsilon(x)$ としよう。この解に付随する平衡界面 Γ_ϵ を

$$(4.1) \quad \Gamma_\epsilon = \{x \in \Omega \mid u^\epsilon(x) = 0\}$$

と定義する。勿論、この平衡界面 Γ_ϵ も平衡解 u^ϵ も未知である。今から、この両者を同時に構成する。そのための、一つの種が必要である。界面 Γ_ϵ の極限 ($\epsilon \rightarrow 0$ のとき) が条件 (A3) の平衡界面 Γ に収束するならば、この Γ が種の候補である。そこで、未知界面 Γ_ϵ は、この Γ 上の関数 $R^\epsilon(y)$ のグラフとして表現できると期待される。すなわち、(2.10) の局所座標系を用いて、

$$(4.2) \quad \Gamma_\epsilon = \{x \in \Omega \mid x = y + \epsilon R^\epsilon(y)\nu(y), y \in \Gamma\}.$$

としてみよう。

まず、精度の高い近似解の存在を言う。

Proposition 4.1. 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して、滑らかな関数 $R_k^\epsilon(y)$ ($y \in \Gamma$) と、問題

$$(4.3) \quad \begin{cases} \epsilon^2 \Delta u + f(u, x, \epsilon) = 0 & (x \in \Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & (x \in \partial\Omega), \end{cases}$$

の滑らかな近似解 $u_k^\epsilon(x)$ が存在し、

$$\{x \in \Omega \mid u_k^\epsilon(x) = 0\} = \{x \in \Omega \mid x = y + \epsilon R_k^\epsilon(y)\nu(y), y \in \Gamma\}$$

および、 $0 < \alpha < 1$ に対して

$$\frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \quad \|\epsilon^2 \Delta u_k^\epsilon + f(u_k^\epsilon, x, \epsilon)\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} = O(\epsilon^{k+1-\alpha})$$

を満たす。ここで、 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ は普通の Hölder-空間 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ に重み付きノルム

$$\|p\|_{C^\alpha_\epsilon(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |p(x)| + \epsilon^\alpha \sup_{x \neq x' \in \bar{\Omega}} \frac{|p(x) - p(x')|}{|x - x'|^\alpha}.$$

を入れた空間である。

この命題の証明は、非常に初等的だが、結構長い。

関数 $R_k^\epsilon(y)$ は、つぎのような有限和で表現できる。

$$R_k^\epsilon(y) = R_1(y) + \epsilon R_2(y) + \dots + \epsilon^{k-2} R_{k-1}(y)$$

ここで、各関数 $R_j(y)$ ($0 \leq j \leq k-1$) は Γ の上のつぎの線形方程式を解くことにより得られる。

$$(4.4) \quad \mathcal{A}^\Gamma R_1 = h_1(y) \quad (\text{既知関数}) \quad (j=1),$$

$$(4.5) \quad \mathcal{A}^\Gamma R_j = h_j(y, R_1, \dots, R_{j-1}) \quad (R_1, \dots, R_{j-1} \text{ の既知関数}) \quad (j \geq 2).$$

条件 (A4) の非退化性により、作用素 $\mathcal{A}^\Gamma$ は可逆である。従って、(4.4) と (4.5) は一意解を持つ。これらの楕円型方程式 (4.4) と (4.5) は、解 u^ϵ の漸近展開における C^1 -接合条件として自然に現れる。

次に、(4.3) を近似解 u_k^ϵ のまわりで線形化しよう。

$$L_k^\epsilon \varphi := \epsilon^2 \Delta \varphi + f_u(u_k^\epsilon, x, \epsilon) \varphi,$$

この作用素に関する固有値問題

$$(4.6) \quad \begin{cases} L_k^\epsilon \varphi = \lambda \varphi & (x \in \Omega), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 & (x \in \partial\Omega). \end{cases}$$

を考える。

Definition 4.2. (i) 固有値問題 (4.6) の固有値 λ^ϵ は、ある定数 $\delta > 0$, $\epsilon_* > 0$ が存在し、

$$|\lambda^\epsilon| \geq \delta \quad (\forall \epsilon \in (0, \epsilon_*]).$$

を満たすとき、**安全な固有値** (non-critical eigenvalue) と呼ばれる。

(ii) 固有値問題 (4.6) の固有値は、安全でないとき、**危険な固有値** (critical eigenvalue) と呼ばれる。

次の結果は、定理 3.3 の証明において、決定的役割を果たす。

Proposition 4.3. (i) 定数 $\delta_* > 0$ と $\epsilon_* > 0$ が存在し、(4.6) の安全な固有値 λ^ϵ は

$$\lambda^\epsilon \leq -\delta_*, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_*]$$

を満たす。

(ii) λ^ϵ を (4.6) の危険な固有値とし、 $k \geq 2$ とする。このとき、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda^\epsilon = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda^\epsilon}{\epsilon^2} = \lambda^* \in \sigma_\Gamma.$$

この命題の証明は、文献 [1, 3, 6] の結果を用いて行なわれる。

この命題と条件 (A4) から、線形作用素 L_k^ϵ は可逆であることが分かる。この可逆性から、さらに、つぎの結果が導かれる。

Proposition 4.4. 定数 $C > 0$ と $\epsilon_* > 0$ が存在し、つぎの評価が成り立つ。

$$\|(L_k^\epsilon)^{-1}\|_{C^{1/2}_\epsilon(\Omega) \rightarrow C^{1/2}_\epsilon(\Omega)} \leq \frac{C}{\epsilon^{2[\frac{N}{4}] + 4}} \quad \text{for } \epsilon \in (0, \epsilon_*],$$

ここで、 $[\frac{N}{4}]$ 空間次元 N の $1/4$ の整数部分を表す。

この証明は、ちょっとしたゲームである。

Proof. まず、**Proposition 4.3** と条件 (A4) から

$$L_k^\epsilon : W^{2,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

が可逆であることが分かる。従って、ある定数 $C > 0$ が存在し、十分小さな $\epsilon \in (0, \epsilon_*]$ にたいして、

$$(4.7) \quad \|u\|_{L^2} \leq \frac{C}{\epsilon^2} \|v\|_{L^2}, \quad \epsilon \in (0, \epsilon_*],$$

が成り立つ。ここで、 $v \in C^{1/2}(\overline{\Omega})$ 、 $u = (L_k^\epsilon)^{-1}v$ である。

以下では、 ϵ に依存しない様々な定数を、単に C で表す。

ラプラシアンに関する L^p -評価を

$$\Delta u = \frac{1}{\epsilon^2} \{-f_u(u^\epsilon, x, \epsilon)u + v\},$$

に適用して、

$$(4.8) \quad \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \frac{C}{\epsilon^2} (\|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}) \quad (1 < \forall p < \infty).$$

を得る。

この評価 (4.8) と Sobolev-埋め込み

$$(4.9) \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{2,p'}}, \quad 1 \leq p \leq \frac{p'N}{N-2p'}, \quad \text{if } N \geq 2p',$$

および

$$(4.10) \quad \|u\|_{C^\alpha} \leq C \|u\|_{W^{2,p}}, \quad \text{with } \alpha = \min \left\{ 1, 2 - \frac{N}{p} \right\}, \quad \text{if } 2p > N.$$

を繰り返し適用する。

1. 空間次元が $N = 1, 2, 3$ のとき、 $p = 2$ として (4.10) を適用する。また、 $\alpha = 1/2$ として、(4.8) において $p = 2$ としたもの (4.7) を用いると

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_\epsilon^{1/2}} &\leq \|u\|_{C^{1/2}} \leq_{(3.10)} C \|u\|_{W^{2,2}} \leq_{(3.8)} \frac{C}{\epsilon^2} (\|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\ &\leq_{(3.7)} \frac{C}{\epsilon^2} \left(\frac{C}{\epsilon^2} \|v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \right) \leq \frac{C}{\epsilon^4} \|v\|_{C_\epsilon^{1/2}}. \end{aligned}$$

を得る。これで、空間次元が $N = 1, 2, 3$ の場合の証明が終わる。

2. つぎに、空間次元が $N \geq 4$ の場合を考えよう。評価式

$$(4.11) \quad \|u\|_{W^{2,2}} \leq \frac{C}{\epsilon^4} \|v\|_{L^2}, \quad \forall N \geq 1$$

は、すでに (4.8) と (4.7) を用いて示された。つぎに、任意の整数 $j \geq 0$ に対して、

$$(4.12) \quad \|u\|_{W^{2, \frac{2N}{N-4j}}} \leq \frac{C}{\epsilon^{2j+4}} \|v\|_{L^{\frac{2N}{N-4j}}}, \quad \forall N \geq 4j.$$

が成立することを示そう。帰納法による。まず、(4.12) において $j = 0$ の場合は、(4.11) と同じである。そこで、(4.12) がある $j \geq 0$ に対して成り立っていると仮定する。式 (4.9) において $p' = \frac{2N}{N-4j}$ としたものを用いると、 $N \geq 4(j+1)$ に対して

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{2, \frac{2N}{N-4j}}}, \quad 1 \leq \forall p \leq \frac{2N}{N-4(j+1)}$$

を得る。また、 $p = \frac{2N}{N-4(j+1)}$ として (4.8) を用い、さらに仮定された (4.12) を用いると

$$\|u\|_{W^{2, \frac{2N}{N-4(j+1)}}} \leq \frac{C}{\epsilon^{2(j+1)+4}} \|v\|_{L^{\frac{2N}{N-4(j+1)}}}, \quad \forall N \geq 4(j+1)$$

となる。以上により、(4.12) は、全ての非負整数 j に対して成立することが示せた。

さて、空間次元が $N = 4j, 4j+1, 4j+2, 4j+3$ の場合、 $2 \times \frac{2N}{N-4j} > N$ だから、(4.10) が $\alpha = 1/2$ として適用できる。これより、

$$\|u\|_{C^{1/2}} \leq C \|u\|_{W^{2, \frac{2N}{N-4j}}}$$

が導かれるが、 $\|u\|_{C_\epsilon^{1/2}} \leq \|u\|_{C^{1/2}}$ と $\|v\|_{L^p} \leq C \|v\|_{C_\epsilon^{1/2}}$ が、全ての $p \geq 1$ に対して成り立つから、最後の行立て式と評価 (4.12) よって、

$$\|u\|_{C_\epsilon^{1/2}} \leq \frac{C}{\epsilon^{2j+4}} \|v\|_{C_\epsilon^{1/2}}, \quad \text{for } N = 4j, 4j+1, 4j+2, 4j+3$$

が全ての $j \geq 0$ に対して成り立つことが分かる。 $\square$

以上で、定理 3.3 を証明する準備が整った。

定理 3.3 の証明: 以下に述べる方法は、文献 [11] のアイデアを一般化したものである。

方程式 (4.3) の真の解 $u^\epsilon(x)$ を近似解 u_k^ϵ の近くで探そう。

$$u^\epsilon(x) = u_k^\epsilon(x) + \varphi(x)$$

問題 (4.3) は、 φ の方程式として

$$(4.13) \quad \begin{cases} L_k^\epsilon \varphi = \mathcal{N}^\epsilon(\varphi) + \mathcal{R}^\epsilon & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

と表現できる。ここで、

$$\begin{cases} -\mathcal{N}^\epsilon(\varphi) = f(u_k^\epsilon + \varphi, x, \epsilon) - f(u_k^\epsilon, x, \epsilon) - f_u(u_k^\epsilon, x, \epsilon)\varphi, \\ \mathcal{R}^\epsilon = -\epsilon^2 \Delta u_k^\epsilon - f(u_k^\epsilon, x, \epsilon). \end{cases}$$

とした。さらに、 φ を $\epsilon^l \tilde{\varphi}$ ($l = 2[\frac{N}{4}] + 4$) で置き換えて、(4.13) をつぎのように書きかえる。

$$(4.14) \quad \tilde{\varphi} = \mathcal{S}^\epsilon \tilde{\varphi} := \epsilon^{-l} (L_k^\epsilon)^{-1} \{ \mathcal{N}^\epsilon(\epsilon^l \tilde{\varphi}) + \mathcal{R}^\epsilon \}$$

ここで、**Proposition 4.1** を $k = 2l$ として適用すると

$$\|\mathcal{R}^\epsilon\|_{C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})} = O(\epsilon^{2l+1/2})$$

が得られる。非線形項は $|\mathcal{N}^\epsilon(\varphi)| = O(|\varphi|^2)$ だから、**Proposition 4.4** から

$$\|\epsilon^{-l} (L_k^\epsilon)^{-1} \mathcal{N}^\epsilon(\epsilon^l \tilde{\varphi})\|_{C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})} = O(\|\tilde{\varphi}\|_{C^0(\bar{\Omega})} \|\tilde{\varphi}\|_{C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})})$$

$$\|\epsilon^{-l} (L_k^\epsilon)^{-1} \mathcal{R}^\epsilon\|_{C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})} = O(\epsilon^{1/2})$$

が出てくる。これらのことから、作用素 $\mathcal{S}^\epsilon : C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})$ は、空間 $C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})$ の原点の $O(\epsilon^{1/2})$ -近傍における縮小写像であることが分かる。したがって、(4.14) はただ一つの不動点 $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^\epsilon$ を持ち、これは、 $\|\tilde{\varphi}^\epsilon\|_{C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})} = O(\epsilon^{1/2})$ を満たす。従って、求める解は、

$$u(x, \epsilon) = u_k^\epsilon(x) + \varphi^\epsilon(x) \quad \text{with} \quad \|\varphi^\epsilon\|_{C_\epsilon^{1/2}(\bar{\Omega})} = O(\epsilon^{l+1/2})$$

によって与えられる。以上で、定理 3.3 (i) が証明された。

安定性に関する結果を証明するため、線形化

$$L^\epsilon = \epsilon^2 \Delta + f_u(u^\epsilon(x), x, \epsilon)$$

に対する固有値問題を調べよう。次のことに留意しよう。

$$L^\epsilon = L_k^\epsilon + [f_u(u(x, \epsilon), x, \epsilon) - f_u(u_k^\epsilon(x), x, \epsilon)]$$

および

$$\|f_u(u(\cdot, \epsilon), \cdot, \epsilon) - f_u(u_k^\epsilon, \cdot, \epsilon)\|_{L^\infty} = O(\epsilon^{l+1/2})$$

である。このことから、作用素 L^ϵ の危険な固有値は、 L_k^ϵ の危険な固有値から、せいぜい、 $O(\epsilon^{l+1/2})$ ($l \geq 4$) 位しか離れていないことが分かる。言い換えれば、**Proposition 4.3** は作用素 L^ϵ の固有値に対しても成立するということである。

以上で、定理 3.3 の証明が終わる。

REFERENCES

- [1] N. D. Alikakos, G. Fusco and V. Stefanopoulos, Critical spectrum and stability of interfaces for a class of reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations* **126** (1996), no.1, 106-167.
- [2] X-F. Chen, Generation and propagation of interfaces in reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations* **96** (1992), 116-141.
- [3] X-F. Chen, Spectrum for the Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, and Phase-Field Equations for Generic Interfaces, *Comm. in Part. Diff. Equat.* **19** (1994), 1371-1395.
- [4] J.W. Cholewa and T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, London Mathematical Society Lecture Notes Series **278**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [5] E. Conway, D. Hoff and J. Smoller, Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.* **35**(1976), 1-16.
- [6] P. de Mottoni and M. Schatzman, Geometrical evolution of developed interfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347**(1995), 1533-1589.
- [7] P.C. Fife and W.M. Greenlee, Interior transition layers from elliptic boundary value problems with a small parameter, *Russian Math. Surveys* **29**(1974), No. 4, 103-131.
- [8] P. C. Fife and J. B. McLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65**(1977), 335-369.
- [9] M. Gage and R.S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Diff. Geom.* **23**(1986), 69-96.
- [10] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Diff. Geom.* **26**(1987), 285-314.
- [11] J. K. Hale and K. Sakamoto, Existence and stability of transition layers, *Japan J. Appl. Math.* **5** (1988), 367-405.
- [12] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin 1981.
- [13] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, *J. Differential Equations* **20** (1984), 237-266.
- [14] T. Iibun and K. Sakamoto, Internal Layers Intersecting the Boundary of Domain in the Allen-Cahn Equation, *Japan J. Ind. Appl. Math.* **18**(2001), 697-738.
- [15] H. Ikeda, On the asymptotic solutions for a weakly coupled elliptic boundary value problem with a small parameter, *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 227-250.
- [16] K.-I. Nakamura, H. Matano, D. Hilhorst, and R. Schätzle, Singular Limit of a Reaction-Diffusion Equation with a Spatially Inhomogeneous Reaction Term, *J. Stat. Phys.*, **95**(1999), 1165 - 1184.
- [17] K. Sakamoto, Internal layers in high-dimensional domains, *Proc. Royal Soc. of Edinburgh* **128A** (1998), 359-401.
- [18] K. Sakamoto, Infinitely many fine modes bifurcating from radially symmetric internal layers, Preprint (1999).

新しいタイプの二重非線形発展方程式について

阿曾 雅泰 (千葉大・自然科学)

aso@math.e.chiba-u.ac.jp

本稿では, 時間依存適正下半連続凸関数の劣微分を含む二重非線形発展方程式の解の存在について考察する. この発展方程式を考えるきっかけとなったのは, Czocharalski 法に見られる結晶成長をもとにモデリングされた固体・液体相転移問題である.(Fukao[10], Fukao, Kenmochi and Pawlow [11], [12] を参照.)

1. 導入

空間セッティングは, それぞれ H を実 Hilbert 空間, V を回帰的実 Banach 空間, H^* を H の共役空間, V^* を V の共役空間とし, 以下の関係

$$V \xhookrightarrow{\text{compact}} H \equiv H^* \xhookrightarrow{\text{compact}} V^*,$$

を満たすものとする. $0 < T < \infty$, $\{\psi^t; 0 \leq t \leq T\}$ を V^* における適正下半連続凸関数の族とする. このとき次の Cauchy 問題 (P) を考える:

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + K(t, \theta(t)) + G(t, u(t)) = f(t) & \text{in } V^* \text{ for a.e. } t \in [0, T], \\ \theta(t) = \partial\psi^t(u(t)) & \text{in } V \text{ for a.e. } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

ここで, $\partial\psi^t$ は ψ^t の劣微分で V^* から V への作用素である. また, 各 $t \in [0, T]$ に対し, $K(t, \cdot)$ と $G(t, \cdot)$ はそれぞれ V から V^* , H から V^* への一価作用素である.

さて, この発展方程式が理論的にどこが新しいのかを説明する. 第一に, 通例, 劣微分作用素は, ある空間からその共役空間への作用素であるが, 我々の場合その逆で, 共役空間から元の空間への作用素となっている点がまず一つ新しいところである. 第二に, 時間依存劣微分作用素の時間微分が出てくる点である. このことについて説明をする. ψ^t の共役 ψ_*^t の劣微分作用素 $\partial^*\psi_*^t$ は $(\partial\psi^t)^{-1}$ と同一視できるから, (P) の第二式より

$$u(t) \in (\partial\psi^t)^{-1}(\theta(t)) = \partial^*\psi_*^t(\theta(t)),$$

が言える. これを (P) の第一式の $u(t)$ の部分に代入すると

$$\frac{d}{dt}\partial^*\psi_*^t(\theta(t)) + K(t, \theta(t)) + G(t, \partial^*\psi_*^t(\theta(t))) \ni f(t), \quad (1.1)$$

となり, 時間依存劣微分作用素 $\partial^*\psi_*^t$ の時間微分が出てくる. これらの点が今までの理論結果には無い新しい部分である.

次に、我々の問題と関連した研究結果を紹介する。まず、次のようなタイプの発展方程式

$$A\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) + B(\theta(t)) \ni f(t), \quad (1.2)$$

については、Arai [1], Senba [19], Colli and Visintin [9], Colli [8] 等の研究結果がある。ここでは Colli の結果 (論文 [8]) を紹介する。\$A\$ を実回帰的狭義凸 Banach 空間 \$V\$ からその共役空間 \$V^*\$ への有界作用素、\$B\$ を \$V\$ から \$V^*\$ への非有界作用素として、ある条件の下で解の存在、一意性が述べられている。また、次のようなタイプの発展方程式

$$\frac{d}{dt}A(\theta(t)) + B(\theta(t)) \ni f(t), \quad (1.3)$$

については、例えば、Kenmochi[14], Kenmochi and Pawlow[15], 最近では Maitre and Witomski[17] 等の研究結果がある。ここでは Maitre and Witomski の結果 (論文 [17]) を紹介する。\$V, W\$ を可分な回帰的 Banach 空間とし、\$V\$ は \$W\$ に稠密かつコンパクトに埋め込まれているとして、\$A\$ を \$V\$ からその共役空間 \$V^*\$ への擬単調作用素、\$B\$ を \$W\$ からその共役空間 \$W^*\$ への連続な擬単調作用素とすると、ある条件の下での解の存在を示している。問題が我々のタイプと似ているが、(1.3) において \$A\$ は時間依存していないので、(1.1) とは異なることに注意しよう。

2. 主結果

まず、記号について説明する。\$(\cdot, \cdot)\$ は \$H\$ における内積、\$\langle \cdot, \cdot \rangle\$ は \$V^*\$ と \$V\$ の双対ペアを表し、\$\xrightarrow{s}\$ と \$\xrightarrow{w}\$ はそれぞれ強収束、弱収束を表す。以下の (1) から (3) の仮定の下で、問題 (P) を考える。

仮定 (1) \$\psi^t\$ は各 \$t \in [0, T]\$ について適正下半連続凸関数で以下の性質を持つ:

- 各 \$t \in [0, T]\$ に対して \$D(\psi^t) \subset H\$.
- ある正定数 \$C_0\$ が存在して

$$\psi^t(u) \geq C_0|u|_H^2 \quad (u \in D(\psi^t), t \in [0, T]).$$

- 各 \$t, s \in [0, T]\$ と \$u \in D(\psi^s)\$ に対して \$D(\psi^t)\$ の元 \$\tilde{u}\$ が存在して

$$\begin{aligned} |\tilde{u} - u|_{V^*} &\leq C_1|t - s|(\psi^s(u)^{1/2} + 1), \\ \psi^t(\tilde{u}) - \psi^s(u) &\leq C_1|t - s|(\psi^s(u) + 1), \end{aligned}$$

ここで \$C_1\$ は \$s, t, u, \tilde{u}\$ に依存しない正定数。

- \$\langle u_1 - u_2, \theta_1 - \theta_2 \rangle \geq C_2|\theta_1 - \theta_2|_H^2 \quad (u_i \in D(\psi^t), t \in [0, T], \theta_i = \partial\psi^t(u_i), i = 1, 2),\$

ここで C_2 は正定数. また, 上の不等式は次のように表されることに注意する:

$$(u_1 - u_2, \theta_1 - \theta_2) \geq C_2 |\theta_1 - \theta_2|_H^2.$$

(2) 各 $t \in [0, T]$ について $K(t, \cdot)$ は V から V^* への作用素で以下の性質を持つ:

- 連続性:
 - $\mathbf{R}_+$ から $\mathbf{R}_+$ への連続関数 ω が存在して, $w(0) = 0$ かつ

$$|K(t, \theta) - K(s, \theta)|_{V^*} \leq \omega(|t - s|)(|\theta|_V + 1) \quad (\theta \in V, t, s \in [0, T]).$$
 - 各 $t \in [0, T]$ について対応 $\theta \mapsto K(t, \theta): V \rightarrow V^*$ は弱連続.
 - $\theta_n \xrightarrow{w} \theta$ in $L^2(0, T; V)$ かつ $\theta_n \xrightarrow{s} \theta$ in $L^2(0, T; H)$ ならば

$$K(\cdot, \theta_n(\cdot)) \xrightarrow{w} K(\cdot, \theta(\cdot)) \text{ in } L^2(0, T; V^*).$$
- 強圧性: $\langle K(t, \theta), \theta \rangle \geq C_3 |\theta|_V^2 - C_4 \quad (\theta \in V, t \in [0, T]).$
- 有界性: $|K(t, \theta)|_{V^*} \leq C_5 |\theta|_V + C_6 \quad (\theta \in V, t \in [0, T]).$

ここで C_3, C_4, C_5, C_6 は正定数.

(3) 各 $t \in [0, T]$ について $G(t, \cdot)$ は H から V^* への作用素で以下の性質を持つ:

- 連続性: $t_n \rightarrow t, u_n \xrightarrow{w} u$ in H ならば $G(t_n, u_n) \xrightarrow{w} G(t, u)$ in V^* .
- 有界性: $|G(t, u)|_{V^*} \leq C_7 |u|_H + C_8 \quad (u \in H, t \in [0, T]).$

ここで C_7, C_8 は正定数.

定義 ((P) の解) 与えられた $u_0 \in D(\psi^0)$ と $f \in L^2(0, T; V^*)$ に対し, 関数の組 $\{u, \theta\}$ が (P) の解であるとは, 以下の (i) から (iv) までを満たすときを言う:

- (i) $u \in W^{1,2}(0, T; V^*) \cap L^\infty(0, T; H), \theta \in L^2(0, T; V),$
- (ii) $u'(t) + K(t, \theta(t)) + G(t, u(t)) = f(t) \text{ in } V^* \text{ for a.e. } t \in [0, T],$
- (iii) $\theta(t) = \partial \psi^t(u(t)) \text{ for a.e. } t \in [0, T],$
- (iv) $u(0) = u_0.$

定理 (解の存在) (1) から (3) を仮定する. このとき与えられた $f \in L^2(0, T; V^*)$ と $u_0 \in D(\psi^0)$ に対し, (P) は少なくとも一つ解を持つ.

3. (P) の近似問題

解の構成 時間離散スキームをもちいて (P) の近似解を構成する. 任意に自然数 N をとり, $h_N := T/N, t_k^N := kh_N, k = 0, 1, \dots, N, u_0^N := u_0$ とおく. このとき (P) に対して次のような近似問題 $(P)_N := \{(3.1), (3.2)\}$ を考える: 関数の組 $\{u_k^N, \theta_k^N\}$ で

$$\frac{u_k^N - u_{k-1}^N}{h_N} + K(t_k^N, \theta_k^N) = -G(t_{k-1}^N, u_{k-1}^N) + f_{k-1}^N \text{ in } V^*, \quad (3.1)$$

$$\theta_k^N = \partial\psi_k^{t_k^N}(u_k^N) \text{ in } V \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.2)$$

を満たすものを求める. ここで,

$$f_{k-1}^N := \frac{1}{h_N} \int_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} f(s) ds \quad (k = 1, \dots, N),$$

とする.

(P)_Nの可解性 $A(t, \cdot) := (\partial\psi^t)^{-1}$ とおくと (P)_N は次のように表される:

$$A(t_k^N, \theta_k^N) + h_N K(t_k^N, \theta_k^N) \ni u_{k-1}^N - h_N G(t_{k-1}^N, u_{k-1}^N) + h_N f_{k-1}^N, \quad (3.3)$$

よって t_k^N を固定するごとに, 与えられた $g^* \in V^*$ に対し, (3.3) を簡略化した式

$$A(t_k^N, \theta) + h_N K(t_k^N, \theta) \ni g^*, \quad (3.4)$$

が, 少なくとも一つ解を持つことが言えれば, (P)_N は各 t_k^N に対して解を持つので意味を持つ. よって t_k^N ごとに $A + h_N K$ が全射, つまり $R(A + h_N K) = V^*$ であることを示せばよい. しかし, $A + h_N K$ を一つの作用素と見たとき, K に単調性が無いため, 以下の定理 (Barbu[3] や Browder[6] など参照) が使えない. 以下, X を回帰的実 Banach 空間, X^* をその共役空間として話を進める.

定理 (cf.[3], Chapter II, Theorem 1.3) T が X から X^* への単調かつ半連続 (hemicontinuous) な作用素であれば, T は極大単調作用素である. さらに, T が強圧的であれば, $R(T) = X^*$ である.

したがって, 単調性が無くとも全射性が言えないかを考えなくてはならない. そこで登場するのがタイプ M 作用素と擬単調 (pseudo-monotone) 作用素である. タイプ M 作用素と擬単調作用素について説明する. (Brézis [4], Browder and Hess [7], Kenmochi [13], Lions [16], Pascali and Sbrlran [18] など参照) いま $A + h_N K$ は多価作用素であるから, 多価作用素の場合について, 定義や定理を紹介する. まずタイプ M 作用素と擬単調作用素の定義は, それぞれ次の通りである.

定義 (operator of type M, cf.[13], §1, Definition 1.1) T を X から X^* への作用素とする. このとき T がタイプ M であるとは, T が以下の (M_1) から (M_3) を満たすときを言う:

- (M₁) 各 $x \in X$ について Tx は X^* において空でない有界閉凸集合である.
- (M₂) もし $x_n^* \in Tx_n$, $x_n \xrightarrow{w} x$ in X , $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$ in X^* かつ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, x_n \rangle \leq \langle x^*, x \rangle$ であれば $x^* \in Tx$.
- (M₃) T を X の任意の有限次元部分空間 F へ制限するとき, その制限は F から X^* への弱上半連続作用素となる.

定義 (pseudo-monotone operator, cf.[13], §1, Definition 1.2) T を X から X^* への作用素とする. このとき T が擬単調 (pseudo-monotone) であるとは, T が以下の (PM_1) から (PM_3) を満たすときを言う:

(PM_1) 各 $x \in X$ について Tx は X^* において空でない閉凸集合である.

(PM_2) もし $x_n^* \in Tx_n$, $x_n \xrightarrow{w} x$ in X かつ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, x_n - x \rangle \leq 0$ ならば, 任意の $y \in X$ に対し, Tx の元 $x^*(y)$ が存在して $\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, x_n - y \rangle \geq \langle x^*(y), x - y \rangle$.

(PM_3) T を X の任意の有限次元部分空間 F へ制限するとき, その制限は F から X^* への弱上半連続作用素となる.

定義からわかるように X から X^* への作用素 T が擬単調であれば, T はタイプ M である. さらに, M_1 の性質を持つ弱点列上半連続作用素もタイプ M 作用素である. さて, タイプ M 作用素と擬単調作用素の全射性について知られている定理をいくつか述べる.

定理 (cf.[13], §2, Corollary 1,2,3 of Theorem 2.1) T を X から X^* への作用素とする. このとき次の (I), (II), (III) が成り立つ:

(I) T がタイプ M で準有界 (quasi-bounded) かつ強圧的であれば $R(T) = X^*$.

(II) T が擬単調で強圧的であれば $R(T) = X^*$.

(III) 各 $x \in X$ について Tx が X^* において空でない有界閉凸集合であり, T が強圧的な弱点列上半連続作用素であれば $R(T) = X^*$.

$R(A + h_N K) = V^*$ であることの検証 ここでは, 各 $t \in [0, T]$ について $R(A(t) + h_N K(t)) = V^*$ を言うのに, 上の定理の (III) を使うことにする. まず, ψ^t は V^* 上で下半連続凸関数なので, $\partial\psi^t$ は V^* から V への極大単調作用素となる. さらに ψ^t の強圧性より, $\partial\psi^t$ が強圧的であるから $R(\partial\psi^t) = V$. これより $D(A(t)) = D((\partial\psi^t)^{-1}) = R(\partial\psi^t) = V$ である. また $D(K(t)) = V$ であるから $D(A(t) + h_N K(t)) = V$ を得る. $A(t) = (\partial\psi^t)^{-1}$ であることと ψ^t の強圧性より $A(t)$ が V から V^* への有界作用素になることが言える. 仮定から $K(t)$ は V から V^* への有界作用素であるから, $A(t) + h_N K(t)$ は V から V^* への有界作用素となる. $A(t)$ が極大単調作用素であることより, 各 $\theta \in V$ に対し, $A(t, \theta) + h_N K(t, \theta)$ は V^* において空でない有界閉凸集合をなす. $A(t)$ の単調性と $K(t)$ の強圧性より $A(t) + h_N K(t)$ が強圧的であることがわかる. また $R(A(t)) = D(A^{-1}(t)) \subset D(\psi^t) \subset H$ であるから, 各空間にコンパクトな埋め込みを仮定したので, $A(t)$ のグラフ $G(A(t))$ は $V \times V^*$ において弱閉である. さらに, 仮定から $K(t)$ は V から V^* への一価の弱連続作用素である. したがって $G(A(t) + h_N K(t))$ は $V \times V^*$ において弱閉である. ゆえに $A(t) + h_N K(t)$ は V から V^* への弱上半連続作用素である. 以上により, $A(t) + h_N K(t)$ は (III) の仮定の条件を満たすので $R(A(t) + h_N K(t)) = V^*$ である.

上の議論により, 時間離散スキームが構成できることがわかった. 次に解の存在定理の証

明のためにいくつかの補題を用意する.

補題 1 $[0, T]$ の任意の分割数 N に無関係な正定数 M_1 が存在して以下を満たす:

$$\psi^{t_k^N}(u_k^N) \leq M_1 \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (3.5)$$

$$h_N \sum_{k=1}^N |\theta_k^N|_V^2 \leq M_1. \quad (3.6)$$

証明 $(P)_N$ の (3.1) の両辺に θ_k^N をかけると

$$\left(\frac{u_k^N - u_{k-1}^N}{h_N}, \theta_k^N \right)_H + \langle K(t_k^N, \theta_k^N), \theta_k^N \rangle = \langle -G(t_{k-1}^N, u_{k-1}^N), \theta_k^N \rangle + \langle f_{k-1}^N, \theta_k^N \rangle. \quad (3.7)$$

ψ^t の仮定より, $u_{k-1}^N \in D(\psi^{t_{k-1}^N})$ に対して, $D(\psi^{t_k^N})$ の元 $\tilde{u}_k^N$ を

$$|\tilde{u}_k^N - u_{k-1}^N|_{V^*} \leq C_1 h_N (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N)^{1/2} + 1), \quad (3.8)$$

$$\psi^{t_k^N}(\tilde{u}_k^N) - \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \leq C_1 h_N (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) + 1), \quad (3.9)$$

を満たすようにとることができる. $\partial\psi^{t_k^N}$ の定義と (3.8) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_k^N - u_{k-1}^N}{h_N}, \theta_k^N \right) &= \left(\frac{u_k^N - \tilde{u}_k^N}{h_N}, \theta_k^N \right) + \left(\frac{\tilde{u}_k^N - u_{k-1}^N}{h_N}, \theta_k^N \right) \\ &\geq \frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_k^N}(\tilde{u}_k^N) \} - C_1 (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N)^{1/2} + 1) |\theta_k^N|_V, \end{aligned}$$

を得る. さらに (3.9) と Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_k^N}(\tilde{u}_k^N) \} - C_1 (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N)^{1/2} + 1) |\theta_k^N|_V \\ &= \frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \} + \frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) - \psi^{t_k^N}(\tilde{u}_k^N) \} \\ &\quad - C_1 \psi^{t_k^N}(u_k^N)^{1/2} |\theta_k^N|_V - C_1 |\theta_k^N|_V \\ &\geq \frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \} - C_1 (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) + 1) \\ &\quad - \frac{\varepsilon_1}{2} |\theta_k^N|_V^2 - \frac{C_1^2}{2\varepsilon_1} \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) - \frac{\varepsilon_1}{2} |\theta_k^N|_V^2 - \frac{C_1^2}{2\varepsilon_1} \\ &= \frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \} - \left(\frac{C_1^2}{2\varepsilon_1} + C_1 \right) \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \\ &\quad - \varepsilon_1 |\theta_k^N|_V^2 - \frac{C_1^2}{2\varepsilon_1} - C_1 \quad (\varepsilon_1 > 0), \end{aligned}$$

が成り立つ. また K の仮定 (強圧性) より

$$\langle K(t_k^N, \theta_k^N), \theta_k^N \rangle \geq C_3 |\theta_k^N|_V^2 - C_4,$$

が成り立つ. 一方, G の仮定 (有界性) と Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} & \langle -G(t_{k-1}^N, u_{k-1}^N), \theta_k^N \rangle + \langle f_{k-1}^N, \theta_k^N \rangle \\ & \leq (C_7 |u_{k-1}^N|_H + C_8) |\theta_k^N|_V + |f_{k-1}^N|_{V^*} |\theta_k^N|_V \\ & \leq \varepsilon_2 |\theta_k^N|_V^2 + \frac{3C_7^2}{4\varepsilon_2} |u_{k-1}^N|_H^2 + \frac{3}{4\varepsilon_2} |f_{k-1}^N|_{V^*}^2 + \frac{3C_8^2}{4\varepsilon_2} \quad (\varepsilon_2 > 0), \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって (3.7) と 仮定 $\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \geq C_0 |u_{k-1}^N|_H^2$ から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \} + (C_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) |\theta_k^N|_V^2 \\ & \leq \left(C_1 + \frac{C_1^2}{2\varepsilon_1} + \frac{3C_7^2}{4C_0\varepsilon_2} \right) \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) + \frac{3}{4\varepsilon_2} |f_{k-1}^N|_{V^*}^2 + C_1 + C_4 + \frac{C_1^2}{2\varepsilon_1} + \frac{3C_8^2}{4\varepsilon_2}, \end{aligned}$$

を得る. ここで, ε_1 と ε_2 は任意なので, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = C_3/3$ とおくと

$$\frac{1}{h_N} \{ \psi^{t_k^N}(u_k^N) - \psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) \} + \frac{C_3}{3} |\theta_k^N|_V^2 \leq C (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) + |f_{k-1}^N|_{V^*}^2 + 1), \quad (3.10)$$

となる. ここで $C := \max\{C_1 + 3C_1^2/2C_3 + 9C_7^2/4C_0C_3, 9/4C_3, C_1 + C_4 + 3C_1^2/2C_3 + 9C_8^2/4C_3\}$ で N と k に無関係な定数である. したがって (3.10) から $k = 1, \dots, N$ に対して

$$\psi^{t_k^N}(u_k^N) + \tilde{C} \leq (1 + h_N C) (\psi^{t_{k-1}^N}(u_{k-1}^N) + \tilde{C}),$$

が成り立つ. ただし, $\tilde{C} := C(|f|_{L^2(0,T;V^*)}^2 + T)$ で N と k に無関係な定数である. よって

$$\begin{aligned} \psi^{t_k^N}(u_k^N) & \leq \left(1 + \frac{TC}{N} \right)^N (\psi^0(u_0) + \tilde{C}) \\ & \leq \exp(CT) (\psi^0(u_0) + \tilde{C}) =: M_0, \end{aligned}$$

が任意の $k = 1, \dots, N$ について成り立つ. したがって

$$\psi^{t_k^N}(u_k^N) \leq M_0 \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.11)$$

が言える. また, 不等式 (3.10) の両辺に h_N をかけて, k について 1 から N までの和をとると, (3.11) を使って

$$\psi^T(u_N^N) + \frac{C_3}{3} h_N \sum_{k=1}^N |\theta_k^N|_V^2 \leq CTM_0 + \tilde{C} + \psi^0(u_0),$$

を得る. したがって, 仮定の $\psi^T(u_N^N) \geq C_0 |u_N^N|_H^2 \geq 0$ に注意すれば

$$h_N \sum_{k=1}^N |\theta_k^N|_V^2 \leq \frac{3}{C_3} (CTM_0 + \tilde{C} + \psi^0(u_0)) =: M'_0,$$

となるから $M_1 := \max\{M_0, M'_0\}$ とすればよい. ■

表記 ここで, $\{u_k^N\}_{k=0}^N$ から成る $[0, T]$ 上の折れ線関数 $u^N(t)$ を

$$u^N(t) = \frac{t - t_{k-1}^N}{h_N} u_k^N + \frac{t_k^N - t}{h_N} u_{k-1}^N \quad (t \in [t_{k-1}^N, t_k^N], k = 1, \dots, N),$$

と定義する. このとき $u^N \in C([0, T]; V^*)$ である.

補題 2 $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ は $[0, T]$ 上一様有界で同程度連続な関数族である.

証明 補題 1 の (3.5) より, 任意の $k = 0, \dots, N$ について $|u_k^N|_H \leq (M_1/C_0)^{1/2}$ であるから, 任意の N について

$$|u^N(t)|_{V^*} \leq 2(M_1/C_0)^{1/2} \quad (t \in [0, T])$$

が言える. これにより $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ は V^* (実際は H) において $[0, T]$ 上一様有界な関数族であることがわかる. つぎに $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ が同程度連続であることを示す. 任意に $s, t \in [0, T]$ ($s \leq t$) をとる. $s \in [t_{j-1}^N, t_j^N]$, $t \in [t_{k-1}^N, t_k^N]$ ($1 \leq j \leq k \leq N$) としよう. このとき (3.1) と Cauchy-Schwarz の不等式より, 任意の N について

$$\begin{aligned} |u^N(t) - u^N(s)|_{V^*} &\leq 2 \sum_{\ell=j}^k |u_\ell^N - u_{\ell-1}^N|_{V^*} \\ &\leq 2 \left(h_N \sum_{\ell=j}^k |K(t_\ell^N, \theta_\ell^N)|_{V^*} + h_N \sum_{\ell=j}^k |G(t_{\ell-1}^N, u_{\ell-1}^N)|_{V^*} + h_N \sum_{\ell=j}^k |f_{\ell-1}^N|_{V^*} \right) \\ &\leq \sqrt{h_N(k-j+1)} \left\{ C_5 \left(h_N \sum_{k=1}^N |\theta_k^N|_V^2 \right)^{1/2} + \sqrt{T} C_6 + C_7 \left(h_N \sum_{k=1}^N \frac{\psi_k^{t_k^N}(u_k^N)}{C_0} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{T} C_8 + |f|_{L^2(0, T; V^*)} \right\} \\ &\leq 2\sqrt{|t-s| + 2h_N} \left(C_5 \sqrt{M_1} + \sqrt{\frac{TM_1}{C_0}} C_7 + \sqrt{T} C_6 + \sqrt{T} C_8 + |f|_{L^2(0, T; V^*)} \right). \end{aligned}$$

これより $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ は同程度連続であることがわかる. ■

補題 3 $\{N\}_{N=1}^\infty$ の部分列 $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ と $C([0, T]; V^*)$ の元 u が存在して

$$u^{N_n} \xrightarrow{s} u \text{ in } V^* \text{ uniformly on } [0, T] \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

証明 補題 2 により, Ascoli-Arzelà の定理を使えば求まる. ■

系 $[0, T]$ 上の単関数 $\bar{u}^N$ を以下で定義する.

$$\bar{u}^N(t) := u_k^N \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N], k = 1, \dots, N).$$

このとき、補題3で得られた $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ と $u \in C([0, T]; V^*)$ について、次のことが言える。

$$\bar{u}^{N_n} \xrightarrow{s} u \text{ in } V^* \text{ uniformly on } [0, T] \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

補題4 $\bar{\theta}^N$ を

$$\bar{\theta}^N(t) := \theta_k^N \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N], k = 1, \dots, N).$$

で定義される単関数とする。このとき、 $\{N\}_{N=1}^\infty$ の部分列 $\{N_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ と $L^2(0, T; V)$ の元 θ が存在して

$$\bar{\theta}^{N_\ell} \xrightarrow{w} \theta \text{ in } L^2(0, T; V) \text{ as } \ell \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

証明 補題1から $h_N \sum_{k=1}^N |\theta_k^N|_V^2 \leq M_1$ であるから、

$$\int_0^T |\bar{\theta}^N(t)|_V^2 dt \leq M_1.$$

である。したがって $\{\bar{\theta}^N\}_{N=1}^\infty$ は $L^2(0, T; V)$ において有界である。 $L^2(0, T; V)$ が回帰的であることから、(3.14)を満たすような $\{N\}_{N=1}^\infty$ の部分列 $\{N_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ と $L^2(0, T; V)$ の元 θ が存在する。■

補題5 補題3で得られた u と、補題4で得られた θ に対して、以下の関係が成り立つ。

$$\theta(t) = \partial \psi^t(u(t)) \quad (a.e. t \in [0, T]). \quad (3.15)$$

証明 まず、次のような単関数列が取れることに注意する：

任意の $v \in L^2(0, T; V^*)$ 、ただし $\int_0^T \psi^t(v(t)) dt < \infty$ を満たす v に対し、 $L^2(0, T; V^*)$ における単関数列 $\{\bar{v}^N\}_{N=1}^\infty$ が存在して

$$\begin{cases} \bar{v}^N \xrightarrow{s} v \text{ in } L^2(0, T; V^*) \text{ as } N \rightarrow \infty, \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^{N,t}(\bar{v}^N(t)) dt \leq \int_0^T \psi^t(v(t)) dt, \end{cases} \quad (3.16)$$

ただし、 $\psi^{N,t}(z) := \psi^{t_k^N}(z)$ ($t \in (t_{k-1}^N, t_k^N]$, $k = 1, \dots, N$) とする。このような単関数列は ψ^t の仮定である、時間に関する連続性などを用いて構成することができる。さて、任意に $v \in L^2(0, T; V^*)$ 、ただし $\int_0^T \psi^t(v(t)) dt < \infty$ を満たすようにとる。このとき (3.16) を満たす単関数列 $\{\bar{v}^N\}_{N=1}^\infty$ が存在する。また補題3の系と補題4から、 $\{N\}_{N=1}^\infty$ の部分列 $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して

$$\bar{u}^{N_n} \xrightarrow{s} u \text{ in } L^2(0, T; V^*) \text{ かつ } \bar{\theta}^{N_n} \xrightarrow{w} \theta \text{ in } L^2(0, T; V),$$

が言える。簡単のため N_n を N と表すことにする。このとき $\theta_k^N = \partial \psi^{t_k^N}(u_k^N)$ であることより、表記 $\psi^{N,t}(z) = \psi^{t_k^N}(z)$, ($t \in (t_{k-1}^N, t_k^N]$) を使えば、各 k に対し

$$\langle \bar{v}^N(t) - \bar{u}^N(t), \bar{\theta}^N(t) \rangle \leq \psi^{N,t}(\bar{v}^N(t)) - \psi^{N,t}(\bar{u}^N(t)) \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N]),$$

が成り立つ. よって上の両辺を $(t_{k-1}^N, t_k^N]$ で積分して, さらに $k = 1, \dots, N$ までの和をとれば

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} \langle \bar{v}^N(t) - \bar{u}^N(t), \bar{\theta}^N(t) \rangle dt \leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} \psi^{N,t}(\bar{v}^N(t)) dt - \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} \psi^{N,t}(\bar{u}^N(t)) dt,$$

を得る. 両辺 $\limsup_{N \rightarrow \infty}$ をとれば

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \bar{v}^N(t) - \bar{u}^N(t), \bar{\theta}^N(t) \rangle dt \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^{N,t}(\bar{v}^N(t)) dt - \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^{N,t}(\bar{u}^N(t)) dt.$$

Lebesgue の収束定理と, (3.16) から

$$\int_0^T \langle v(t) - u(t), \theta(t) \rangle dt \leq \int_0^T \psi^t(v(t)) dt - \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^{N,t}(\bar{u}^N(t)) dt,$$

である. (3.13) から $\bar{u}^N(t)$ が $u(t)$ に $[0, T]$ 上で一様に強収束し, ψ^t が V^* 上で下半連続あることと, Fatou の補題から

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^{N,t}(\bar{u}^N(t)) dt \geq \int_0^T \liminf_{N \rightarrow \infty} \psi^{N,t}(\bar{u}^N(t)) dt \geq \int_0^T \psi^t(u(t)) dt.$$

上の最後の不等式は ψ^t の時間に関する連続性を使うことにより示される. したがって

$$\int_0^T \langle v(t) - u(t), \theta(t) \rangle dt \leq \int_0^T \psi^t(v(t)) dt - \int_0^T \psi^t(u(t)) dt, \quad (3.17)$$

が成り立つ. $\Psi(w) := \int_0^T \psi^t(w(t)) dt$ とおくと (3.17) から $L^2(0, T; V)$ において $\theta \in \partial \Psi(u)$ である. これは V における $\theta(t) \in \partial \psi^t(u(t))$ (a.e.t) を意味している. $\partial \psi^t$ が一価であることに注意すれば, $\theta(t) = \partial \psi^t(u(t))$ (a.e.t). ■

補題 6 さらに次のことが言える:

$$\bar{\theta}^{N_n} \xrightarrow{s} \theta \text{ in } L^2(0, T; H) \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

証明 ここでは ψ^t への仮定:

$$\langle u_1 - u_2, \theta_1 - \theta_2 \rangle \geq C_2 |\theta_1 - \theta_2|_H^2 \quad (3.19)$$

が任意の $u_i \in D(\psi^t)$, $t \in [0, T]$, $\theta_i = \partial \psi^t(u_i)$, $i = 1, 2$ について成り立つ, を使って $\bar{\theta}^{N_n}$ の $L^2(0, T; H)$ での強収束を示す. 不等式 (3.19) を使うにあたって, $\theta_i(t) = \partial \psi^t(u_i(t))$, $i = 1, 2$ とあるから, 劣微分 $\partial \psi^t$ の時間が一致していなければ (3.19) は使えないことに注意しなければならない. したがって, θ と $\bar{\theta}^N$ を劣微分で表したとき, $[0, T]$ において時間の一致している部分とそうでない部分があるので一概には $\langle \bar{u}^N - u, \bar{\theta}^N - \theta \rangle \geq C_2 |\bar{\theta}^N - \theta|_H^2$ が言えない. それゆえ, 時間が一致している部分としていない部分に分けて考える必要がある. 以

下, その工夫を述べる. F を V から V^* への双対写像とする. 補題5より $\theta(t) = \partial\psi^t(u(t))$ であるから, V において

$$\theta(t) + F^{-1}u(t) = \partial\psi^t(u(t)) + F^{-1}u(t),$$

が成り立つ. $\theta \in L^2(0, T; V)$ であることから, $C([0, T]; V)$ における点列 $\{\theta_j\}_{j=1}^\infty$ が存在して

$$\theta_j \xrightarrow{s} \theta \text{ in } L^2(0, T; V) \text{ as } j \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

が言える. $\partial\psi^t + F^{-1}$ は $L^2(0, T; V^*)$ から $L^2(0, T; V)$ の極大単調作用素で, 強圧的であるから, $R(\partial\psi^t + F^{-1}) = L^2(0, T; V)$. したがって各 θ_j に対し, $L^2(0, T; V^*)$ の元 u_j^* が存在し

$$\begin{aligned} \theta_j(t) + F^{-1}u(t) &= (\partial\psi^t + F^{-1})(u_j^*(t)) \\ &= \partial\psi^t(u_j^*(t)) + F^{-1}u_j^*(t). \end{aligned}$$

実は, この u_j^* に対して次のことが言える:

$$u_j^* \in C([0, T]; V^*) \text{ かつ } u_j^* \xrightarrow{w} u \text{ in } L^2(0, T; V^*) \text{ as } j \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

これは次の命題から得ることができる:

(命題) $z_n \in V^*$, $\chi_n := \partial\psi^{t_n}(z_n) + F^{-1}z_n$ とする. もし $t_n \rightarrow t$ で $\chi_n \xrightarrow{w} \chi$ in V ならば, ある V^* の元 z が一意に存在して

$$z_n \xrightarrow{s} z \text{ in } V^* \text{ かつ } \chi = \partial\psi^t(z) + F^{-1}z \text{ in } V. \quad (3.22)$$

この命題は埋め込みがコンパクトであることを使って示される. 各 j に対して $z_n := u_j^*(t_n)$ において, この命題を用いれば (3.21) を得る. さて, 任意に $\varepsilon > 0$ を与える. このとき (3.20) より, ある自然数 j_ε が存在して

$$|\theta_j - \theta|_{L^2(0, T; V)} < \varepsilon \quad (j \geq j_\varepsilon). \quad (3.23)$$

さらに (3.21) より, ある正定数 R_1 が存在して

$$|u_j^* - u|_{L^2(0, T; V^*)} \leq R_1 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.24)$$

先ほどの j_ε を選び固定し, $\overline{u_{j_\varepsilon}^*}^N$ と $\overline{\theta_{j_\varepsilon}}^N$ をそれぞれ

$$\overline{u_{j_\varepsilon}^*}^N(t) = u_{j_\varepsilon}^*(t_k^N), \quad \overline{\theta_{j_\varepsilon}}^N(t) = \theta_{j_\varepsilon}(t_k^N), \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N], \quad k = 1, \dots, N),$$

を満たす単関数とする. また, 補題3の系と補題4より, $\{N\}_{N=1}^\infty$ の部分列 $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して

$$\overline{u}^{N_n} \xrightarrow{s} u \text{ in } L^2(0, T; V^*) \text{ かつ } \overline{\theta}^{N_n} \xrightarrow{w} \theta \text{ in } L^2(0, T; V) \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

が成り立つ. 簡単のため N_n を N と書くことにする. このとき次の積分値を考える.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \bar{u}^N - u, \bar{\theta}^N - \theta \rangle dt &= \int_0^T \langle \bar{u}^N - \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N}, \bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N \rangle dt \\
&\quad + \int_0^T \langle \bar{u}^N - u_{j_\varepsilon}^*, \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N - \theta_{j_\varepsilon} \rangle dt + \int_0^T \langle \bar{u}^N - u_{j_\varepsilon}^*, \theta_{j_\varepsilon} - \theta \rangle dt \\
&\quad + \int_0^T \langle \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N} - u_{j_\varepsilon}^*, \bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N \rangle dt + \int_0^T \langle u_{j_\varepsilon}^* - u, \bar{\theta}^N - \theta \rangle dt \\
&=: \int_0^T \langle \bar{u}^N - \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N}, \bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N \rangle dt + I.
\end{aligned}$$

上の等式は (3.19) の使える部分 (この補題を示すために重要) とそうでない部分 (上の式における I) に分けてあることに注意しよう. 後で述べるが, I に見られるどの双対ペアも, 収束することが言える. さて, $\theta_{j_\varepsilon} \in C([0, T]; V)$, $u_{j_\varepsilon}^* \in C([0, T]; V^*)$ であるので, ある自然数 N'_ε が存在して

$$|\bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N - \theta_{j_\varepsilon}|_{L^2(0, T; V)} < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad |\bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N} - u_{j_\varepsilon}^*|_{L^2(0, T; V^*)} < \varepsilon \quad (N \geq N'_\varepsilon). \quad (3.26)$$

さらに (3.25) より, ある自然数 N''_ε が存在して

$$|\bar{u}^N - u|_{L^2(0, T; V^*)} < \varepsilon \quad (N \geq N''_\varepsilon), \quad (3.27)$$

と, ある正定数 R_2 が存在して

$$|\bar{\theta}^N - \theta|_{L^2(0, T; V)} \leq R_2 \quad (N = 1, 2, \dots), \quad (3.28)$$

が言える. したがって $N_\varepsilon := \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, $R := \max\{R_1, R_2\}$ とおけば (3.24) と (3.27) より, $N \geq N_\varepsilon$ のとき

$$|\bar{u}^N - u_{j_\varepsilon}^*|_{L^2(0, T; V^*)} \leq |\bar{u}^N - u|_{L^2(0, T; V^*)} + |u - u_{j_\varepsilon}^*|_{L^2(0, T; V^*)} < R + \varepsilon, \quad (3.29)$$

が成り立つ. さらに (3.23), (3.26), (3.28) により $N \geq N_\varepsilon$ に対して

$$|\bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N|_{L^2(0, T; V)} \leq |\bar{\theta}^N - \theta|_{L^2(0, T; V)} + |\theta - \theta_{j_\varepsilon}|_{L^2(0, T; V)} + |\theta_{j_\varepsilon} - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N|_{L^2(0, T; V)} < R + 2\varepsilon, \quad (3.30)$$

である. ここで不等式 (3.19) を用いれば, (3.24) と (3.26) から

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \bar{u}^N - \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N}, \bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N \rangle dt \\
&\geq C_2 \int_0^T |\bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N|_H^2 dt + \int_0^T \langle \bar{u}^N - \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N}, F^{-1}u - F^{-1}\bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N} \rangle dt \\
&\geq C_2 \int_0^T |\bar{\theta}^N - \theta - (\theta_{j_\varepsilon} - \theta) - (\bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N - \theta_{j_\varepsilon})|_H^2 dt \\
&\geq \frac{C_2}{4} \int_0^T |\bar{\theta}^N - \theta|_H^2 dt - \frac{C_2}{2} \int_0^T |\theta_{j_\varepsilon} - \theta|_H^2 dt - C_2 \int_0^T |\bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N - \theta_{j_\varepsilon}|_H^2 dt \\
&\geq \frac{C_2}{4} \int_0^T |\bar{\theta}^N - \theta|_H^2 dt - \frac{C_2}{2} \varepsilon^2 - C_2 \varepsilon^2 \quad (N \geq N_\varepsilon),
\end{aligned}$$

が成り立つ. また, (3.23), (3.26), (3.28), (3.29), (3.30) より

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \langle \bar{u}^N - u_{j_\varepsilon}^*, \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N - \theta_{j_\varepsilon} \rangle dt + \int_0^T \langle \bar{u}^N - u_{j_\varepsilon}^*, \theta_{j_\varepsilon} - \theta \rangle dt \\ &\quad + \int_0^T \langle \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N} - u_{j_\varepsilon}^*, \bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N \rangle dt + \int_0^T \langle u_{j_\varepsilon}^* - u, \bar{\theta}^N - \theta \rangle dt \\ &\geq -\{\varepsilon(R + \varepsilon) + \varepsilon(R + \varepsilon) + \varepsilon(R + 2\varepsilon) + \varepsilon R\} \quad (N \geq N_\varepsilon), \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, (3.27) と (3.28) より

$$\int_0^T \langle \bar{u}^N - u, \bar{\theta}^N - \theta \rangle dt \leq R\varepsilon \quad (N \geq N_\varepsilon),$$

が成り立つ. したがって, $N \geq N_\varepsilon$ に対し

$$\begin{aligned} R\varepsilon &\geq \int_0^T \langle \bar{u}^N - u, \bar{\theta}^N - \theta \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \bar{u}^N - \bar{u}_{j_\varepsilon}^{*N}, \bar{\theta}^N - \bar{\theta}_{j_\varepsilon}^N \rangle dt + I \\ &\geq \frac{C_2}{4} \int_0^T |\bar{\theta}^N - \theta|_H^2 dt - \frac{C_2}{2} \varepsilon^2 - C_2 \varepsilon^2 - \{\varepsilon(R + \varepsilon) + \varepsilon(R + \varepsilon) + \varepsilon(R + 2\varepsilon) + \varepsilon R\}, \end{aligned}$$

を得る. これより $\bar{\theta}^N \xrightarrow{s} \theta$ in $L^2(0, T; H)$. ■

解の存在定理の証明 補題3から補題6により, 次のことが言える: 任意の自然数 (分割数) N に対し, $L^2(0, T; V)$ の元 θ と $C([0, T]; V^*)$ の元 u と $\{N\}_{N=1}^\infty$ の部分列 $\{N_m\}_{m=1}^\infty$ が存在して

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^{N_m} &\xrightarrow{s} \theta \text{ in } L^2(0, T; H) \text{ as } m \rightarrow \infty, \\ \bar{\theta}^{N_m} &\xrightarrow{w} \theta \text{ in } L^2(0, T; V) \text{ as } m \rightarrow \infty, \\ u^{N_m} &\xrightarrow{s} u \text{ in } C([0, T]; V^*) \text{ as } m \rightarrow \infty, \\ \theta(t) &= \partial \psi^t(u(t)) \text{ for a.e. } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

上の u, θ は $u \in W^{1,2}(0, T; V^*) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\theta \in L^2(0, T; V)$ を満たすことがわかる. ここで近似問題 $(P)_N$ は

$$\frac{u_k^N - u_{k-1}^N}{h_N} + K(t_k^N, \theta_k^N) + G(t_{k-1}^N, u_{k-1}^N) = f_{k-1}^N \quad \text{in } V^*.$$

であった. $\bar{K}^N, \bar{G}^N, \bar{f}^N$ を単関数とし, 以下で定義する:

$$\begin{aligned} \bar{K}^N(t) &= K(t_k^N, \theta_k^N) \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N], \quad k = 1, \dots, N), \\ \bar{G}^N(t) &= G(t_k^N, u_k^N) \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N], \quad k = 1, \dots, N), \\ \bar{f}^N(t) &= f_k^N \quad (t \in (t_{k-1}^N, t_k^N], \quad k = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

これらの単関数を用いると $(P)_N$ は

$$\frac{d}{dt}u^{N_m}(t) + \bar{K}^{N_m}(t) + \bar{G}^{N_m}(t) = \bar{f}^{N_m}(t) \quad \text{in } V^* \quad \text{for a.e. } t \in [0, T]. \quad (3.31)$$

と表される. (3.31) が $m \rightarrow \infty$ としたとき

$$\frac{d}{dt}u(t) + K(t, \theta(t)) + G(t, u(t)) = f(t) \quad \text{in } V^* \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad (3.32)$$

に収束することを示せばよい. K と G の仮定 (連続性) から

$$\bar{K}^{N_m}(\cdot) \xrightarrow{w} K(\cdot, \theta(\cdot)) \quad \text{in } L^2(0, T; V^*) \quad \text{as } m \rightarrow \infty, \quad (3.33)$$

と

$$\bar{G}^{N_m}(\cdot) \xrightarrow{w} G(\cdot, u(\cdot)) \quad \text{in } L^2(0, T; V^*) \quad \text{as } m \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

が言える. また, $\bar{f}^{N_m}$ の定義から

$$\bar{f}^{N_m} \xrightarrow{s} f \quad \text{in } L^2(0, T; V^*) \quad \text{as } m \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

を得る. (3.31), (3.33), (3.34), (3.35) により $\{(d/dt)u^{N_m}\}_{m=1}^\infty$ が $L^2(0, T; V^*)$ で有界であることと, u^{N_m} が u に $C([0, T]; V^*)$ で強収束していることから

$$\frac{d}{dt}u^{N_m} \xrightarrow{w} \frac{d}{dt}u \quad \text{in } L^2(0, T; V^*) \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

よって (3.31) において $m \rightarrow \infty$ とすれば (3.32) になる. ■

4. 応用

この節では, 先に述べた発展方程式の解の存在定理の応用例を挙げる. Ω を $\mathbf{R}^3$ におけるなめらかな境界 Γ をもつ有界領域とする. $0 < T < +\infty$, $0 \leq t \leq T$ とし, Ω は $\Gamma_{12}(t)$ を共通境界として $\Omega_1(t)$ と $\Omega_2(t)$ の時間によって変化する2つの領域に分かれているとする. $\Gamma_1(t)$ と $\Gamma_2(t)$ をそれぞれ共通境界以外の $\Omega_1(t)$ と $\Omega_2(t)$ の境界とする. 領域 $\Omega_1(t)$ と $\Omega_2(t)$ は時間に関してなめらかに変化するものとする. したがって, 境界 $\Gamma_{12}(t)$, $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ も時間に関してなめらかに変化する. 次に, この節において使用されている表記について説明する.

- $Q := (0, T) \times \Omega$,
- $\Sigma := (0, T) \times \Gamma$,
- $\Sigma_{12} := \bigcup_{0 < t < T} \Gamma_{12}(t) \times \{t\}$,
- $Q_i := \bigcup_{0 < t < T} \Omega_i(t) \times \{t\}, \quad i = 1, 2$,

- $\Sigma_i := \bigcup_{0 < t < T} \Gamma_i(t) \times \{t\}$, $i = 1, 2$,
- $n : \Gamma(t)$ 上の $\Omega_1(t)$ から $\Omega_2(t)$ 向きの 3 次元単位法線ベクトル,
- $\nu : \Gamma$ 上の単位外法線ベクトル,
- $\vec{n} : \Sigma_{12}$ 上の Q_1 から Q_2 向きの 4 次元単位法線ベクトル,
- $(\vec{n})_t : \vec{n}$ の時間成分.

関数 $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2$) を Q_i において与えられた関数とし, 以下を満たすものとする.

- $\mathbf{v}_i \in C^1(\overline{Q_i})^3$, $i = 1, 2$,
- $\Omega_i(t)$ において $\operatorname{div} \mathbf{v}_i(t, \cdot) = 0$ ($t \in (0, T)$), $i = 1, 2$,
- Σ_{12} において $\mathbf{v}_1 \cdot n = \mathbf{v}_2 \cdot n$ であり, この値は $\Gamma(t)$ のノーマルスピードに等しい,
- Σ において $\mathbf{v}_1 \cdot \nu = \mathbf{v}_2 \cdot \nu = 0$.

このとき $\{u, \theta\}$ を未知関数の組として以下の偏微分方程式系を考える:

$$\begin{cases} u_{1,t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1 - \Delta \alpha_1(\theta_1) = h(t, x) & \text{in } Q_1, \\ u_{2,t} + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_2 - \Delta \alpha_2(\theta_2) = h(t, x) & \text{in } Q_2, \\ u_1 \in A_1(\theta_1), \quad u_2 \in A_2(\theta_2). \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで, A_i ($i = 1, 2$) は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への極大単調作用素で一価の Lipschitz 連続な逆作用素をもつものとし, α_i ($i = 1, 2$) は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への狭義単調増加 bi-Lipschitz 連続関数, h は与えられた $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 関数である. 境界条件は以下で与える:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial n} = \frac{\partial \alpha_2(\theta_2)}{\partial n} & \text{on } \Sigma_{12}, \\ \frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial \nu} + n_0 \theta_1 = p(t, x) & \text{on } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \alpha_2(\theta_2)}{\partial \nu} + n_0 \theta_2 = p(t, x) & \text{on } \Sigma_2, \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで, n_0 は正定数, $p \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ である. 共通境界上では接合条件 (transmission condition) を仮定していることに注目されたい (境界条件の第一式). 初期条件は以下の通り:

$$\begin{cases} u_1(\cdot, 0) = u_{1,0} & \text{on } \Omega_1(0), \\ u_2(\cdot, 0) = u_{2,0} & \text{on } \Omega_2(0). \end{cases} \quad (4.3)$$

この偏微分方程式系は, u_i をエンタルピー, θ_i を温度, $\mathbf{v}_i$ を対流項, α_i を熱伝導率とみれば, Czochralski プロセスに見られる結晶成長を記述した相転移問題として捉えることができる. (論文 [10], [11], [12] を参照). 次にこの偏微分方程式系を弱形式化して, 1 本の方程式にすることを考える.

弱形式 テスト関数として, Ω において $\eta(T, \cdot) = 0$ となる $W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ のクラスの関数 η をとる. これを (4.1) の第 1 式の両辺にかけて

$$\int_{Q_1} (u_{1,t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) \eta \, dxdt - \int_{Q_1} \Delta \alpha_1(\theta_1) \eta \, dxdt = \int_{Q_1} h \eta \, dxdt.$$

ここで, $\mathbf{v}_1$ の仮定から, $\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0$ であるので

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1} (u_{1,t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) \eta \, dxdt \\ &= \int_{Q_1} u_{1,t} \eta \, dxdt + \int_{Q_1} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) \eta \, dxdt \\ &= \int_{Q_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 \eta) - u_1 \eta_t \right) dxdt + \int_{Q_1} \operatorname{div}(u_1 \mathbf{v}_1) \eta \, dxdt \\ &= \int_{Q_1} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \eta) \, dxdt - \int_{Q_1} u_1 \eta_t \, dxdt + \int_{Q_1} (\operatorname{div}(u_1 \eta \mathbf{v}_1) - u_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \eta) \, dxdt \\ &= \int_{Q_1} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \eta) \, dxdt - \int_{Q_1} u_1 \eta_t \, dxdt + \int_{Q_1} \operatorname{div}(u_1 \eta \mathbf{v}_1) \, dxdt - \int_{Q_1} u_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \eta \, dxdt, \end{aligned}$$

が成り立つ. Stokes の定理より

$$\int_{Q_1} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \eta) \, dxdt = \int_{\Sigma_{12}} u_1 \eta (\vec{\pi})_t \, d\Sigma_{12} + \int_{\Omega_1(T)} u_1(T, \cdot) \eta(T, \cdot) \, dx - \int_{\Omega_1(0)} u_1(0, \cdot) \eta(0, \cdot) \, dx.$$

また, Gauss の発散定理と, $\mathbf{v}_1 \cdot \nu = 0$ であることから

$$\int_{Q_1} \operatorname{div}(u_1 \eta \mathbf{v}_1) \, dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma(t)} u_1 \eta \mathbf{v}_1 \cdot n \, d\Gamma(t) \, dt,$$

を得る. ここで $\mathbf{v}_1 \cdot n$ は $\Gamma(t)$ のノーマルスピードに等しいので

$$\int_0^T \int_{\Gamma(t)} u_1 \eta \mathbf{v}_1 \cdot n \, d\Gamma(t) \, dt = - \int_{\Sigma_{12}} u_1 \eta (\vec{\pi})_t \, d\Sigma_{12}.$$

したがって, $\eta(T, \cdot) = 0$ on Ω より

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \eta) \, dxdt + \int_{Q_1} \operatorname{div}(u_1 \eta \mathbf{v}_1) \, dxdt \\ &= \int_{\Omega_1(T)} u_1(T, \cdot) \eta(T, \cdot) \, dx - \int_{\Omega_1(0)} u_1(0, \cdot) \eta(0, \cdot) \, dx, \\ &= - \int_{\Omega_1(0)} u_1(0, \cdot) \eta(0, \cdot) \, dx, \end{aligned}$$

が成り立つ. また

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1} \Delta \alpha_1(\theta_1) \eta \, dxdt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega_1(t)} \nabla \alpha_1(\theta_1) \cdot \nabla \eta \, dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1(t)} \frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial \nu} \eta \, dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial n} \eta \, dxdt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega_1(t)} \nabla \alpha_1(\theta_1) \cdot \nabla \eta \, dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1(t)} (p - n_0 \theta_1) \eta \, dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial n} \eta \, dxdt, \end{aligned}$$

である. よって以下の等式

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_1} u_1 \eta_t \, dx dt - \int_{Q_1} u_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \eta \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_1(t)} \nabla \alpha_1(\theta_1) \cdot \nabla \eta \, dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1(t)} (n_0 \theta_1 - p) \eta \, dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial n} \, dx dt = \int_{Q_1} h \eta \, dx dt + \int_{\Omega_1(0)} u_1(0, \cdot) \eta(0, \cdot) \, dx, \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様に, (4.5) の第 2 式に η をかけて等式

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_2} u_2 \eta_t \, dx dt - \int_{Q_2} u_2 \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \eta \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_2(t)} \nabla \alpha_2(\theta_2) \cdot \nabla \eta \, dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_2(t)} (n_0 \theta_2 - p) \eta \, dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial \alpha_2(\theta_2)}{\partial n} \, dx dt = \int_{Q_2} h \eta \, dx dt + \int_{\Omega_2(0)} u_2(0, \cdot) \eta(0, \cdot) \, dx, \end{aligned}$$

を得る. ここで接合条件

$$\frac{\partial \alpha_1(\theta_1)}{\partial n} = \frac{\partial \alpha_2(\theta_2)}{\partial n},$$

に注意して, 上の 2 つの等式を足し合わせると

$$\begin{aligned} & - \int_Q u \eta_t \, dx dt - \int_Q u \mathbf{v} \cdot \nabla \eta \, dx dt + \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_1(t)} \nabla \alpha_1(\theta) \cdot \nabla \eta \, dx + \int_{\Omega_2(t)} \nabla \alpha_2(\theta) \cdot \nabla \eta \, dx \right\} dt \\ & + \int_{\Sigma} (n_0 \theta - p) \eta \, dx dt = \int_Q h \eta \, dx dt + \int_{\Omega} u_0 \eta(0, \cdot) \, dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

がすべてのテスト関数 η について成り立つ. ここで $\mathbf{v}$, u , θ とあるが, 以下の意味で用いている:

$$\mathbf{v} := \begin{cases} \mathbf{v}_1 & \text{on } Q_1 \\ \mathbf{v}_2 & \text{on } Q_2 \end{cases}, \quad u := \begin{cases} u_1 & \text{on } Q_1 \\ u_2 & \text{on } Q_2 \end{cases}, \quad \theta := \begin{cases} \theta_1 & \text{on } Q_1 \\ \theta_2 & \text{on } Q_2 \end{cases}.$$

したがって, 考えている偏微分方程式系は弱形式化することにより, 1 本の方程式にすることができ, 扱い易くなったと言えよう.

定理の応用の仕方 抽象論における空間セッティングにおいて $V := H^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ とそれぞれおくことにする. このとき $\psi^t(\cdot)$, $K(\cdot, \cdot)$, $G(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot)$ を次のように定義する:

- $\psi^t : V^* \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\psi^t(u) := \begin{cases} \int_{\Omega_1(t)} \widehat{A_1^{-1}}(u(x)) \, dx + \int_{\Omega_2(t)} \widehat{A_2^{-1}}(u(x)) \, dx & (u \in H) \\ +\infty & (u \in V^* \setminus H) \end{cases},$$

で定義する. ここで, $\widehat{A_i^{-1}}(u)$ は $A_i^{-1}(u)$ の原始関数を表す ($i = 1, 2$). このとき ψ^t は V^* 上適正下半連続凸関数で抽象論における仮定 (1) を満たす. 次に

- $K(\cdot, \cdot) : [0, T] \times V \rightarrow V^*$ を任意の $\theta \in V$ と $\eta \in V$ に対して

$$\langle K(t, \theta), \eta \rangle := \int_{\Omega_1(t)} \nabla \alpha_1(\theta) \cdot \nabla \eta \, dx + \int_{\Omega_2(t)} \nabla \alpha_2(\theta) \cdot \nabla \eta \, dx + n_0 \int_{\Gamma} \theta \eta \, d\Gamma,$$

と定義する. このとき K は抽象論における仮定 (2) を満たしていることがわかる.

- $G(\cdot, \cdot) : [0, T] \times H \rightarrow V^*$ を任意の $\eta \in V$ に対して

$$\langle G(t, u), \eta \rangle := - \int_{\Omega} u v(t, \cdot) \cdot \nabla \eta \, dx,$$

と定義する. このとき G は抽象論における仮定 (3) を満たしていることがわかる.

- f を任意の $\eta \in V$ に対して

$$\langle f(t), \eta \rangle := \int_{\Omega} h(t) \eta \, dx + \int_{\Gamma} p(t) \eta \, d\Gamma,$$

と定義する. このとき $f \in L^2(0, T; V^*)$ である. よって弱形式 (4.4) は上で定義した ψ^t, K, G, f を使って次のように書きかえることができる:

$$\begin{cases} u'(t) + K(t, \theta(t)) + G(t, u(t)) = f(t) & \text{in } V^* \text{ for a.e. } t \in [0, T], \, 0 < T < \infty, \\ \theta(t) = \partial \psi^t(u(t)) & \text{in } V \text{ for a.e. } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

したがって, 我々の解の存在定理を用いて, 考えている偏微分方程式系の解の存在が言える.

References

1. T. Arai, On the existence of solution for $\partial \varphi(u'(t)) + \partial \psi(u(t)) \ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **26** (1979), 75-96.
2. M. Aso, T. Fukao and N. Kenmochi, A new class of doubly nonlinear evolution equations, to appear.
3. V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.
4. H. Brézis, Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **18**, 1 (1968), 115-175.
5. H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam (1973)
6. F.E. Browder, Nonlinear maximal monotone operators in Banach space, Math. Ann. **175** (1968), 89-113.
7. F.E. Browder and P. Hess, Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces, J. Functional Analysis **11** (1972), 251-294.
8. P. Colli, On some doubly nonlinear evolution equations in Banach spaces, Japan J. Indust. Appl. Math. **9** (1992), 181-203.

9. P. Colli and A. Visintin, On a class of doubly nonlinear evolution equations, Comm. in P.D.E.s **15** (1990) 737-756.
10. T. Fukao, Transmission problems for degenerate parabolic equations, pp.103-112 in *Elliptic and Parabolic Problems*, World Scientific, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong, 2002
11. T. Fukao, N. Kenmochi and I. Pawlow, Transmission problems arising in Czochralski process of crystal growth, pp. 228-243 in *Mathematical Aspects of Modeling Structure Formation Phenomena*, GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. Appl. **Vol. 17**, Gakkōtoshō, Tokyo, 2002.
12. T. Fukao, N. Kenmochi and I. Pawlow, Mathematical modeling for Czochralski process of crystal growth, Preprint. Istituto di Analisi Numerica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Pavia, **1279** (2002), 1-16.
13. N. Kenmochi, Nonlinear operators of monotone type in reflexive Banach spaces and nonlinear perturbations, Hiroshima Math. J. **4** (1974), 229-263.
14. N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ. **30** (1981), 1-87.
15. N. Kenmochi and I. Pawlow, A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints, Nonlinear Analysis, **10** (1986), 1181-1202.
16. J.L.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).
17. E. Maitre and P. Witomski, A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic-parabolic equations, Nonlinear Analysis **50** (2002) 223-250.
18. D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear mappings of monotone type*, Sijthoff and Noordhoff Intern. Publ., 1978.
19. T. Senba, On some nonlinear evolution equation, Funk. Ekvac., **29** (1986), 243-257.
20. R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer Verlag, Berlin, 1988.

Masayasu ASO

Department of Mathematics

Graduate School of Science and Technology, Chiba University

1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba, 263-8522, Japan

全変動汎関数に支配される 放物型方程式に対する局所安定性

白川 健 (東京電機大・情報環境学部)

木村 正人 (九大・理学)

導入

ある温度 (相転移温度) を境にして物質の状態 (相) がドラマチックに変化する現象を相転移現象と呼びますが, 水が凍ったり氷が融解したりというような固体の相 (固相) と液体の相 (液相) の間の相転移を特に固体・液体相転移現象と呼びます.

Ω を $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 内の有界領域で, $n \geq 2$ の時はリプシッツ連続な ($C^{0,1}$ -級の) 境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つとします. この領域 Ω の中には固体・液体相転移を起こすようなある物質が満たされているとして, 簡単のために相転移温度は 0 ($^{\circ}\text{C}$) とします. $c = c(t, x)$ を時刻 $t \geq 0$, 場所 $x \in \Omega$ における液相の局所密度 (local concentration) とします. この時, $u = u(t, x) := 2c(t, x) - 1$ によって与えられる変数 u は

$$\begin{cases} \bullet & \text{液相の領域上では } u(t, x) = 1, \\ \bullet & \text{固相の領域上では } u(t, x) = -1, \\ \bullet & \text{液相と固相の境目または2相の混合状態の領域上では } -1 < u(t, x) < 1, \end{cases}$$

という具合に物質の状態を表すパラメータになりますが, このパラメータを相関数 (order parameter) と呼ぶことにします.

本論文の大きな目的は, 固体・液体相転移現象を数学的に考察することによって相の分布 u がどのように変化し将来的にどういった状態に落ち着くのか (漸近挙動) を明らかにすることです. 固体・液体相転移現象において, この変化のプロセス (力学系) を記述するとして広く知られている数式の1つに Allen-Cahn 方程式というものがあります. Allen-Cahn 方程式とは, 自由エネルギーと呼ばれる (u についての) 汎関数 $\mathcal{F}(u)$ を仮想的に与えて, 物質の状態 u の力学系が $\mathcal{F}$ の u に関する勾配流:

$$-u_t(t, x) = \nabla \mathcal{F}(u(t, x)), \quad (t, x) \in Q := (0, +\infty) \times \Omega; \quad (0.1)$$

に従うとして導かれる方程式のことです. ここに u_t は u の時間 (偏) 微分で, $\nabla \mathcal{F}$ は汎関数 $\mathcal{F}$ の勾配 (一般には弱い意味での Fréchet 微分) とします.

もう1つ, 固体・液体相転移現象を考察する上で無視できないパラメータは温度ですが, 本論文では簡単のため温度 θ_* は時間と空間に関して一定 (等温系) であると仮定し, 次の汎関数 $\mathcal{F}_{\theta_*}$ を自由エネルギーとして与えます:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_*}(u) &:= F(\nabla u) + G_{\theta_*}(u), \quad \text{with} \\ F(\nabla u) &:= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \text{and} \quad G_{\theta_*}(u) := \int_{\Omega} \left(I_{[-1,1]}(u) - \frac{1}{2} |u + \theta_*|^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (0.2)$$

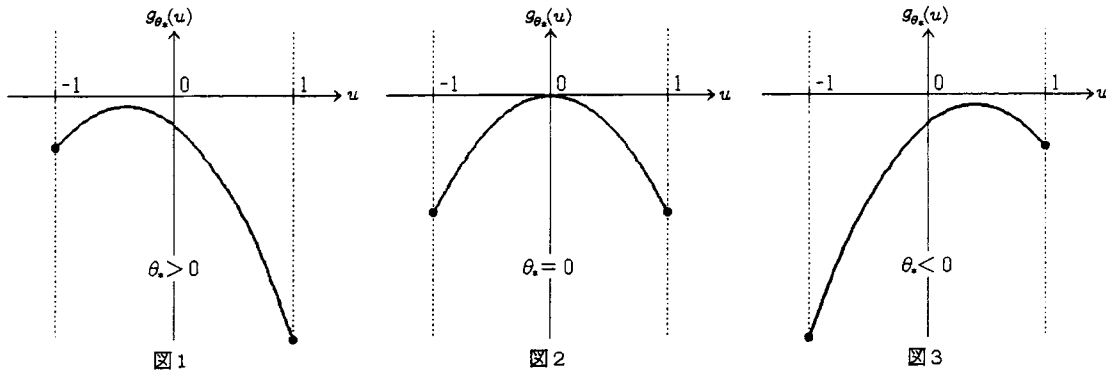
ここに, σ は十分小さな正の定数, $\int_{\Omega} |\nabla u|$ は u の全変動, $I_{[-1,1]}$ は

$$I_{[-1,1]}(\tau) := \begin{cases} 0, & \text{if } \tau \in [-1, 1], \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

によって定義される $\mathbb{R}$ 上の適正下半連続凸関数とします. 関数 $I_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上の指示関数と呼ばれます. 自由エネルギー $\mathcal{F}_{\theta_*}$ に指示関数 $I_{[-1,1]}(u)$ の積分を入れることによって, u の値域を閉区間 $[-1, 1]$ へ制限出来ますが, その他にも $G_{\theta_*}(u)$ の密度関数

$$g_{\theta_*}(u) := I_{[-1,1]}(u) - \frac{1}{2}|u + \theta_*|^2$$

に次のような性質を持たせることが出来ます. 密度関数 $g_{\theta_*}(u)$ のグラフは, $\theta_* = 0$ ならば図2の様な二重井戸型の関数 (double-well potential) で, $\theta_* > 0$ ($\theta_* < 0$) ならば図1 (図3) の様な右肩下がり (左肩下がり) のグラフに変化します. これは温度が正ならば液相の方が物理的に安定な状態で, 逆に温度が負ならば固相の方が安定になることを表しており, 固体・液体相転移現象の力学系を特徴付ける重要な性質です. 更に $|\theta_*| \geq 1$ であるときは, 密度関数 g_{θ_*} は極小値 (最小値) を1つしか持たなくなります. これは温度が十分に高ければ (低ければ) 最終的には液相 (固相) しか観測されないことを示唆しています. 数学的な考察においてもこのケースの漸近挙動の解析は非常に単純であるため, 本論文では温度 θ_* が相転移温度に十分近い場合 ($-1 < \theta_* < 1$) のみを考えることにします.



今, (0.2) で与えた自由エネルギー $\mathcal{F}_{\theta_*}$ に対する勾配流 (0.1) を形式的に計算すると次のような放物型境界値問題が導かれます.

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \sigma \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) (t, x) + \partial I_{[-1,1]}(u(t, x)) \ni u(t, x) + \theta_*, & (t, x) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0, & (t, x) \in \Sigma := (0, +\infty) \times \Gamma. \end{cases} \quad (0.3)$$

ただし, $\partial I_{[-1,1]}$ は指示関数 $I_{[-1,1]}$ の劣微分作用素とします.

自由エネルギーの定義式 (0.2) 中の $F(\nabla u)$ という項は, 界面上の表面張力による効果を考察する上での1つの適切なエネルギーとして Visintin (文献 [15] 参照) によって導入された汎関数です. 実際, 関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が滑らかで $x_0 \in \Omega$ において $\nabla f(x_0) \neq 0$ な

らば, $-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) (x_0)$ は等高線 $f(x) = f(x_0)$ の $x = x_0$ における (平均) 曲率になります. 従って 物理的な見方をすれば $-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ という項は界面上の表面張力による効果を再現しており, σ はいわゆる表面張力係数に対応していると解釈出来ます.

Allen-Cahn 方程式 (0.3) の解の漸近挙動を解析する手段はいくつかありますが, その 1 つに定常解の安定性を調べるという方法があります. 定常解とは時間的に変化しない解のことで, 方程式 (0.3) の場合では次の方程式の解になります:

$$\begin{cases} -\sigma \operatorname{div} \left(\frac{\nabla w}{|\nabla w|} \right) (x) + \partial I_{[-1,1]}(w(x)) \ni w(x) + \theta_*, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n}(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (0.4)$$

方程式 (0.4) は方程式 (0.3) の時間微分の項を形式的に 0 とした方程式で, (0.3) に対する定常問題と呼ばれます. 一般に (0.3) の解 $u(t)$ の $t \rightarrow +\infty$ としたときの集積点 (ω -limit point) はすべて (0.4) の解になるということが証明出来ますので (論文 [9] 参照), (0.3) の解の漸近挙動に関しては定常解の構造を調べることによって具体的な情報が得られることになります.

最近, 空間次元が 1 次元 ($\Omega := (0, 1)$) である場合の定常解の構造が論文 [11] で研究され, すべての 1 次元定常解 w_1 は図 4 のような高々有限個の不連続点を持つ様な階段関数であることがわかりました. 更に定常解の安定性についても論文 [12, 14] において「局所安定性」(local stability) という概念を用いて詳しく議論されています.

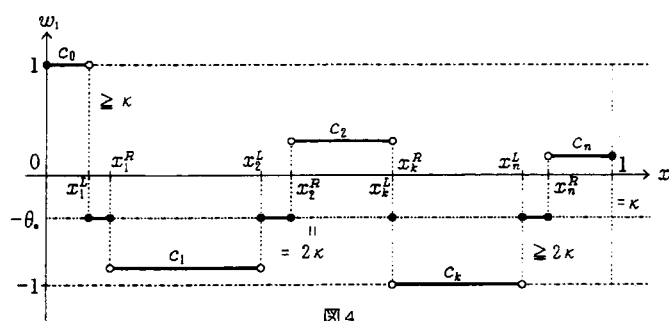


図 4

局所安定性の基本的なアイデアは, 定常解の各定数部分に関する安定性を別々に議論しておいて, 不安定な定数部分を持たない定常解を安定とするというもので, 従来の漸近安定性の概念と比較すると一種独特のスタイルを取っています. 更に論文 [12, 14] では解の収束のスピードも議論され, 定常解の不連続点 (物理的には界面) の近傍以外では収束は有限時間で実現するということがわかっています. 本論文の最大の見所は, 1 次元の場合で構築された局所安定性理論を一般多次元の場合に拡張した所です. 結果として, 界面の曲率に関係した幾何学的な条件が定常解の構造や局所安定性の条件に現れ, 1 次元の場合に比べより多彩な状況が考察できることが示されます.

1 全変動汎関数から生成される Allen-Cahn 方程式

本論文を通してヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ のノルムと内積をそれぞれ $|\cdot|_{L^2(\Omega)}$ と $(\cdot, \cdot)$ によって表記します. 任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $|B|$ を適切な次元における B のハウスドルフ測度とします. また特に断りのない場合, 測度はすべて $\mathbb{R}^n$ 上でのルベーグ測

度を指すことにします.

任意の2つの関数 $f, g \in L^2(\Omega)$ に対し, 2つの関数 $f \vee g$ と $f \wedge g$ をそれぞれ

$$(f \vee g)(x) := \max \{f(x), g(x)\}, (f \wedge g)(x) := \min \{f(x), g(x)\}, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

と定め, 特に $f^+ := f \vee 0$, $f^- := -(f \wedge 0)$ と表記することにします.

任意の関数 $f \in L^1(\Omega)$ に対し

$$\int_{\Omega} |\nabla f| := \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \psi \, dx \mid \psi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), |\psi| \leq 1 \text{ in } \Omega, \right\},$$

を f の全変動 (total variation) といいます. ここに, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $C_0^m(\Omega)$ は Ω 内でコンパクトな台を持つような C^m -級関数全体の空間とし, 更に $C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=1}^{\infty} C_0^m(\Omega)$ とします. 全変動が有限確定であるような可積分関数を有界変動関数 (bounded variation function) といい, 有界変動関数全体の空間を $BV(\Omega)$ で表記します. このとき, $BV(\Omega)$ は次で定められるノルム:

$$|z|_{BV(\Omega)} := |z|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla z|, \quad z \in BV(\Omega);$$

によって $L^1(\Omega)$ へコンパクトに埋め込まれるようなバナッハ空間となります.

任意の可測集合 $D \subset \Omega$ と D 上の特性関数 χ_D に対し,

$$\mathcal{P}(D) := \int_{\Omega} |\nabla \chi_D|$$

を D のペリメータ (perimeter) と呼びます. 全変動の定義から直ちに $\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(\Omega \setminus D)$ となります ($\chi_D = 1 - \chi_{\Omega \setminus D}$ に注意).

本節の前半ではバナッハ空間 $BV(\Omega)$ が持ついくつかの便利な性質を注意や補題の形で紹介します.

注意 1.1 (文献 [7] 参照)

(I) (リースの表現定理) $\forall f \in BV(\Omega)$, $\exists |\nabla f|$: Ω 上のラドン測度, $\exists \nu_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$: ベクトル値の $|\nabla f|$ -可測関数, s.t.:

(i) $|\nu_f| = 1$, $|\nabla f|$ -a.e. on Ω ;

(ii) $\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \cdot \nu_f |\nabla f|$ for all $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$;
ここで特に $f \in W^{1,1}(\Omega)$ ならば

$$\int_{\Omega} |\nabla f| = \int_{\Omega} |\nabla f(x)| \, dx \quad \text{and} \quad \nu_f(x) = \begin{cases} \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}, & \text{if } \nabla f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{if } \nabla f(x) = 0, \end{cases} \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

となります. また, 特に D の境界 ∂D が十分滑らかならばペリメータ $\mathcal{P}(D)$ は丁度 $\partial D \cap \Omega$ の $(n-1)$ 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^{n-1}(\partial D \cap \Omega)$ と一致し, $|\nabla \chi_D|$ -可測関数 ν_{χ_D} は D 上の内向き単位法線ベクトルと一致します.

(II) (余面積公式) $f \in BV(\Omega)$, $-\infty \leq a < f(x) < b \leq +\infty$, a.e. $x \in \Omega$

$$\implies \int_{\Omega} |\nabla f| = \int_a^b \mathcal{P}(\{x \in \Omega \mid f(x) \geq s\}) ds.$$

(III) (下半連続性) $\{f_j\} \subset BV(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$, $f_j \rightarrow f$ in $L^1(\Omega)$

$$\implies \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla f_j| \geq \int_{\Omega} |\nabla f|, \text{ 従って } f \in BV(\Omega).$$

(IV) (トレース) $\exists T_{\Gamma} : BV(\Omega) \longrightarrow L^1(\Gamma)$ 有界線形, s.t. $T_{\Gamma}\psi = \psi|_{\Gamma}$, $\forall \psi \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \psi \, dx = - \int_{\Omega} \psi \cdot \nabla f + \int_{\Gamma} \psi \cdot \nu_{\Gamma} T_{\Gamma} f \, d\mathcal{H}^{n-1}, \forall f \in BV(\Omega), \forall \psi \in C^{0,1}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n).$$

ただし, ν_{Γ} は Ω の境界 Γ 上の外向き単位法線ベクトルとします.

注意 1.2 (Anzellotti [3] 参照) 有界変動関数 $f \in BV(\Omega)$ と Ω 内のベクトル場 $\mu \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ が $f \in L^2(\Omega)$ かつ $\operatorname{div} \mu \in L^2(\Omega)$ を満たすとします.

(i) (ラドン測度 $\mu \cdot \nabla f$) Ω 上の超関数 $\mu \cdot \nabla f$ を

$$\langle \mu \cdot \nabla f, \varphi \rangle := - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mu \, f \varphi \, dx - \int_{\Omega} f \mu \cdot \nabla \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

によって定義するとき, $\mu \cdot \nabla f$ は1つのラドン測度 (Radon measure) になり, 更に次の関係式が成立します:

$$\left| \int_{\Omega} \mu \cdot \nabla f \right| \leq |\mu|_{L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)} \int_{\Omega} |\nabla f|;$$

特に, $\mu \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ ならば,

$$\int_B \mu \cdot \nabla f = \int_B \mu \cdot \nu_f |\nabla f|, \forall B \subset \Omega: \text{ ボレル集合.}$$

(ii) (滑らかな関数による近似) $\exists \{f_j\} \subset C^{\infty}(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ s.t.

$$f_j \rightarrow f \text{ in } L^2(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla f_j| \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla f| \text{ and } \int_{\Omega} \mu \cdot \nabla f_j \rightarrow \int_{\Omega} \mu \cdot \nabla f \text{ as } j \rightarrow +\infty.$$

次で定義される $L^2(\Omega)$ 上の汎関数:

$$V_0(z) := \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla z|, & \text{if } z \in BV(\Omega), \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

を ($L^2(\Omega)$ 上の) 全変動汎関数と呼びます. この時, 注意 1.1 の (III) から V_0 は $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数になるので, 次で定められる汎関数:

$$V(z) := V_0(z) + \int_{\Omega} I_{[-1,1]}(z) \, dx, \forall z \in L^2(\Omega); \quad (1.1)$$

も $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数になります. いま, $\sigma > 0$, $\theta \in L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega))$ に対し, 汎関数 $\mathcal{F}_\theta$ を

$$\mathcal{F}_\theta(z) := \sigma V(z) - \int_{\Omega} |z + \theta(t)|^2 dx, \quad z \in L^2(\Omega)$$

と定義します. 特に θ が定数 θ_* ならば $\mathcal{F}_\theta$ は丁度 (0.2) で与えられる自由エネルギー $\mathcal{F}_{\theta_*}$ と一致します. 従って, 汎関数 V は (一般化された) 自由エネルギー $\mathcal{F}_\theta$ の凸部分ということになります.

本論文において主題となる方程式は自由エネルギーの勾配流として導かれますが, $\mathcal{F}_\theta$ の凸部分である V はフレッシュ微分が計算できるほど滑らかではないため, 勾配 $\nabla \mathcal{F}_\theta$ を厳密に計算するには劣微分という概念を導入する必要があります.

定義 1.1 H を内積 $(\cdot, \cdot)_H$ が導入された抽象ヒルベルト空間とし, $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ を H 上の適正下半連続凸関数とします. このとき:

- (i) (有効領域) 集合 $D(\varphi) := \{ z \in H \mid \varphi(z) < +\infty \}$ を φ の有効領域 (effective domain) と呼びます;
- (ii) (劣微分) 各 $z_0 \in H$ に対し, 集合

$$\partial\varphi(z_0) := \left\{ z_0^* \in H \mid (z_0^*, z - z_0)_H \leq \varphi(z) - \varphi(z_0), \forall z \in H \right\}$$

を対応させる多価作用素 $\partial\varphi : H \rightarrow 2^H$ を φ の劣微分作用素または単に劣微分といいます. また, 集合 $D(\partial\varphi) := \{ z \in H \mid \partial\varphi(z) \neq \emptyset \}$ を劣微分 $\partial\varphi$ のドメイン (domain) と呼びます.

この劣微分概念を用いて汎関数 $\mathcal{F}_\theta$ の勾配流を計算すると, 次のような全変動汎関数 V の劣微分 ∂V を含むような発展方程式が導かれます:

$$(P)_\theta \quad u_t(t) + \sigma \partial V(u(t)) \ni u(t) + \theta(t) \text{ in } L^2(\Omega), \quad t > 0.$$

ここで, 劣微分の定義から $(P)_\theta$ は次の変分不等式:

$$(u_t(t) - u(t) - \theta(t), u(t) - z) + \sigma V(u(t)) - \sigma V(z) \leq 0, \quad \forall z \in L^2(\Omega);$$

と同値になりますが, この変分不等式は u に対するノイマン境界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{a.e. on } \Sigma;$$

を (弱い意味で) 含んでいます. 従って特に $\theta \equiv \theta_*$ としたときの方程式は, 形式的に書かれた方程式 (0.3) の正確な表現ということになります.

定義 1.2 (解の定義) 任意の区間 $J \subset \mathbb{R}$ に対し, $u : J \rightarrow L^2(\Omega)$ が次の条件を満足するとき, u を方程式 $(P)_\theta$ の区間 J 上の解といいます:

$$(s1) \quad u \in C(J; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}(\overset{\circ}{J}; L^2(\Omega)), \quad V(u) \in L^1_{loc}(J);$$

(s2) $\exists u^* \in L^2_{loc}(\overset{\circ}{J}; L^2(\Omega))$ s.t.

$$u^*(t) \in \partial V(u(t)), \quad u_t(t) + u^*(t) = u(t) + \theta(t) \text{ in } L^2(\Omega), \text{ a.e. } t \in J.$$

方程式 $(P)_\theta$ の解に関しては次の性質が良く知られています.

命題 1.1 (I) (Brézis [5]) 初期値 $u_0 \in \overline{D(V)}$ に対する $(P)_\theta$ のコーシー問題は解 u を一意的に持つ.

(II) (Kenmochi [9]) $\theta_\infty \in L^2(\Omega)$, $\theta - \theta_\infty \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$, $\theta(t) \rightarrow \theta_\infty$ in $L^2(\Omega)$ as $t \rightarrow +\infty \implies$ 任意の $(P)_\theta$ の解 u に対し, 集合

$$\omega(u) := \left\{ z \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} u(t_n) \rightarrow z \text{ in } L^2(\Omega) \text{ for some } \{t_n\} \\ \text{with } t_n \nearrow +\infty \text{ as } n \rightarrow +\infty \end{array} \right. \right\}$$

は次の2つの性質を持つ:

- (i) $\omega(u) \neq \emptyset$, $\omega(u)$ は $L^2(\Omega)$ 内で連結かつコンパクト;
- (ii) $\sigma \partial V(u_\infty) \ni u_\infty + \theta_\infty$ in $L^2(\Omega)$, $\forall u_\infty \in \omega(u)$.

次の命題は比較定理とも呼ばれ, $(P)_\theta$ の解の挙動を調べる上で非常に重要な役割を果たします.

命題 1.2 (比較定理) $0 \leq s < +\infty$, $0 < T < +\infty$ とし, 任意の2つの関数 $\theta_i \in L^2(s, s+T; L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$ に対し, u_i を $(P)_{\theta_i}$ の区間 $[s, s+T]$ 上の解とします. このとき:

$$\left(\begin{array}{l} \theta_1(t, x) \leq \theta_2(t, x), \\ \text{a.e. } (t, x) \in Q_{s,T} := (s, s+T) \times \Omega, \\ w_1(s, x) \leq w_2(s, x), \text{ a.e. } x \in \Omega, \end{array} \right) \implies w_1(t, x) \leq w_2(t, x), \text{ a.e. } (t, x) \in Q_{s,T}.$$

命題 1.2 の証明には, 劣微分作用素 ∂V に対する特殊な単調性 (T-monotonicity) をチェックする必要があります. T-monotonicity は論文 Kenmochi-Mizuta-Nagai [10] の中で提唱された制限付き単調性とでもいうべき概念で, 本論文においては比較定理の証明だけでなく, 次節で議論される劣微分作用素 ∂V の表現定理の証明にも強力な威力を発揮します. T-monotonicity の話は大変長いため残念ながらそのすべてを紹介することは出来ませんが, ここでは本論文に関係のある部分のみを補題として紹介します.

補題 1.1 (T-monotonicity) H を内積 $(\cdot, \cdot)_H$ が導入された抽象ヒルベルト空間とし, $\mathcal{C}$ を H 内の閉凸部分集合, $\pi_{\mathcal{C}} : H \rightarrow \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ への射影とします. $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ を H 上の適正下半連続凸関数とします. このとき, 次の2つの不等式は互いに同値になります.

$$(z_1^* - z_2^*, (z_1 - z_2) - \pi_{\mathcal{C}}(z_1 - z_2))_H \geq 0, \quad \forall z_i \in D(\partial\varphi), \quad \forall z_i^* \in \partial\varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$\varphi(z_1 - \pi_{\mathcal{C}}(z_1 - z_2)) + \varphi(z_2 + \pi_{\mathcal{C}}(z_1 - z_2)) \leq \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \quad \forall z_i \in D(\varphi), \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

本論文では, 不等式 (1.2) のことを $\partial\varphi$ に対する T-monotonicity の不等式と呼ぶことにします.

注意 1.3 特に, $H = L^2(\Omega)$, $\mathcal{C} := \{ z \in L^2(\Omega) \mid z \leq 0, \text{ a.e. in } \Omega \}$, $\varphi = V$ である場合, 不等式 (1.2) と (1.3) はそれぞれ比較的簡単な不等式:

$$(z_1^* - z_2^*, (z_1 - z_2)^+) \geq 0, \quad \forall z_i \in D(\partial V), \quad \forall z_i^* \in \partial V(z_i), \quad i = 1, 2, \quad (1.4)$$

$$V(z_1 \vee z_2) + V(z_1 \wedge z_2) \leq V(z_1) + V(z_2), \quad \forall z_i \in D(V), \quad i = 1, 2; \quad (1.5)$$

で書き換えることが出来ます.

補題 1.2 (∂V に対する T-monotonicity) V の劣微分 ∂V に対し, T-monotonicity の不等式 (1.4) が成立する.

(証明) 補題 1.1 と注意 1.3 から不等式 (1.5) を示せば十分であることがわかります. $z_i \in D(V)$, $i = 1, 2$ とするとき, 注意 1.2 の (ii) から次の性質を満たすような 2 つの関数列 $\{z_i^{(j)}\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$ を容易に見つけることが出来ます:

$$z_i^{(j)} \rightarrow z_i \text{ in } L^2(\Omega) \text{ and } \int_{\Omega} |\nabla z_i^{(j)}| \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla z_i| \text{ as } j \rightarrow +\infty. \quad (1.6)$$

ここで, 必要に応じて部分列を取ることによって $z_i^{(j)}$ は z_i に Ω 内の殆ど至る所で各点収束するとしてよいので,

$$z_1^{(j)} \vee z_2^{(j)} \rightarrow z_1 \vee z_2 \text{ and } z_1^{(j)} \wedge z_2^{(j)} \rightarrow z_1 \wedge z_2 \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } j \rightarrow +\infty.$$

一方, 各 $i = 1, 2$ と $j \in \mathbb{N}$ において $z_i^{(j)}$ は滑らかなので,

$$\int_{\Omega} |\nabla(z_1^{(j)} \vee z_2^{(j)})| dx + \int_{\Omega} |\nabla(z_1^{(j)} \wedge z_2^{(j)})| dx = \int_{\Omega} |\nabla z_1^{(j)}| dx + \int_{\Omega} |\nabla z_2^{(j)}| dx.$$

従って, $j \rightarrow +\infty$ とすれば, 注意 1.1 の (III) より不等式 (1.5) を得ます. ■

(命題 1.2 の証明) 各 $i = 1, 2$ に対し, u_i は $(P)_{\theta_i}$ の解ですから,

$$\begin{cases} (u_1)_t(t) + u_1^*(t) = u_1(t) + \theta_1(t), \\ (u_2)_t(t) + u_2^*(t) = u_2(t) + \theta_2(t), \end{cases} \quad \text{in } L^2(\Omega), \text{ a.e. } s \leq t \leq s + T.$$

を満足するような 2 つの関数 $u_1^*, u_2^* \in L^2_{loc}(s, s + T; L^2(\Omega))$ を見つけることが出来ます. 2 つの等式を引き算し, 両辺に $(u_1(t) - u_2(t))^+$ との L^2 -内積を施すと, 次の不等式を得ます:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |(u_1(t) - u_2(t))^+|^2_{L^2(\Omega)} + \sigma(u_1^*(t) - u_2^*(t), (u_1(t) - u_2(t))^+) \\ &= |(u_1(t) - u_2(t))^+|^2_{L^2(\Omega)} + (\theta_1(t) - \theta_2(t), (u_1(t) - u_2(t))^+), \text{ a.e. } t \in (s, s + T). \end{aligned}$$

補題 1.2 から $(u_1^*(t) - u_2^*(t), (u_1(t) - u_2(t))^+) \geq 0$, a.e. $t \in (s, s + T)$ ですから, シュワルツの不等式を用いると

$$|(u_1(t) - u_2(t))^+|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{2(t-s)} |(u_1(s) - u_2(s))^+|^2_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ a.e. } t \in [s, s + T],$$

となります. これは $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$, a.e. $(t, x) \in Q_{s,T}$ であることを意味しています. ■

2 劣微分作用素の表現定理

本節では全変動汎関数 V の劣微分 ∂V の表現を詳しく調べます. V の定義式 (1.1) から V は2つの適正下半連続凸関数の和で書かれます. 従って, 凸解析の一般論 (例えば [8] などを参照) から直ちに次の包含関係が成立します:

$$\partial V(z) \supset \partial V_0(z) + \partial I_{[-1,1]}(z) \text{ in } L^2(\Omega), \forall z \in L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

この節における最初の定理は主に上の逆の包含関係に関するものです.

定理 2.1 (劣微分の分解定理) $\partial V(z) = \partial V_0(z) + \partial I_{[-1,1]}(z) \text{ in } L^2(\Omega), \forall z \in L^2(\Omega).$

定理の証明の鍵を握るのは次の補題にあるような全変動汎関数 V_0 の劣微分 ∂V_0 に対する T-monotonicity です.

補題 2.1 (∂V_0 に対する T-monotonicity) ヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ 内の閉凸集合 $\mathcal{C}_1 := \{z \in L^2(\Omega) \mid |z| \leq 1, \text{ a.e. in } \Omega\}$ に対し, $\pi_{\mathcal{C}_1} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_1$ を $L^2(\Omega)$ から $\mathcal{C}_1$ 上への射影とします. このとき, ∂V_0 に対して次の T-monotonicity の不等式が成立します:

$$(z_1^* - z_2^*, (z_1 - z_2) - \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1 - z_2)) \geq 0, \forall z_i \in D(\partial V_0), \forall z_i^* \in \partial V_0(z_i), i = 1, 2.$$

(証明) 補題 1.2 から, T-monotonicity の不等式を証明するには次の同値な不等式:

$$\begin{aligned} V_0(z_1 - \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1 - z_2)) + V_0(z_2 + \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1 - z_2)) &\leq V_0(z_1) + V_0(z_2), \\ \forall z_i &\in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega), i = 1, 2; \end{aligned} \quad (2.2)$$

を示せば十分であることがわかります. 任意の $z_i \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega), i = 1, 2$, に対し, 関数列 $\{z_i^{(j)}\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ を (1.6) を満たす2つの関数列とします. このとき (必要ならば部分列を取ることで) $z_1^{(j)}, z_2^{(j)}$ はそれぞれ z_1, z_2 に Ω 内の殆ど至る所で各点収束するので,

$$\begin{aligned} z_1^{(j)} - \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1^{(j)} - z_2^{(j)}) &\rightarrow z_1 - \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1 - z_2) \text{ in } L^2(\Omega), \text{ and} \\ z_2^{(j)} + \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1^{(j)} - z_2^{(j)}) &\rightarrow z_2 + \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1 - z_2) \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } j \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

一方, 各 $i = 1, 2, j \in \mathbb{N}$ において $z_i^{(j)}$ は滑らかなので,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(z_1^{(j)} - \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1^{(j)} - z_2^{(j)}))| dx &+ \int_{\Omega} |\nabla(z_2^{(j)} + \pi_{\mathcal{C}_1}(z_1^{(j)} - z_2^{(j)}))| dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla z_1^{(j)}| dx + \int_{\Omega} |\nabla z_2^{(j)}| dx. \end{aligned}$$

従って, $j \rightarrow +\infty$ とすれば, 注意 1.1 の (III) より不等式 (2.2) を得ます. ■

(定理 2.1 の証明) 既に片側の包含関係 (2.1) が得られているので, その逆の包含関係を示します. $w^* \in \partial V(w)$ ($\iff \partial V(w) + w \ni w^* + w$) と仮定すると, w は次の強圧的な適正下半連続凸関数:

$$\Phi(z) := V_0(z) + \int_{\Omega} I_{[-1,1]}(z) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z|^2 dx - \int_{\Omega} (w^* + w)z dx, \forall z \in L^2(\Omega);$$

の最小元となることがわかります. ここで, Φ が狭義凸であることから最小元は一意的であることに注意しておきます.

任意の $0 < \lambda < 1$ に対し, β_λ を $\partial I_{[-1,1]}$ の吉田近似, 即ち:

$$\beta_\lambda(\tau) := \frac{(\tau - 1)^+ - (\tau + 1)^-}{\lambda}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R};$$

とし, $\hat{\beta}_\lambda$ を β_λ の原始関数とします. $w_\lambda \in L^2(\Omega)$ は

$$w_\lambda^* + \beta_\lambda(w_\lambda) + w_\lambda = w^* + w, \quad w_\lambda^* \in \partial V_0(w_\lambda) \text{ in } L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

を満足するような関数とします. 実際, 関係式 (2.3) は次の適正下半連続凸関数:

$$z \mapsto V_0(z) + \int_{\Omega} \hat{\beta}_\lambda(z) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z|^2 \, dx - \int_{\Omega} (w^* + w)z \, dx;$$

の最小値問題と同値であり, 更にこの凸関数は強圧的で狭義凸ですから最小元 w_λ をただ1つ見つけることが出来ます.

(2.3) の両辺に w_λ との内積を取って得られる等式と, $\beta_\lambda(w_\lambda)$ との内積を取って得られる等式と, w_λ^* との内積を取って得られる等式をそれぞれ計算し, 得られた3つの等式の両辺を足し算すると次の等式を得ます:

$$\begin{aligned} & |w_\lambda|_{L^2(\Omega)}^2 + |w_\lambda^*|_{L^2(\Omega)}^2 + |\beta_\lambda(w_\lambda)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + 2(w_\lambda^*, w_\lambda) + 2(\beta_\lambda(w_\lambda), w_\lambda) + 2(\beta_\lambda(w_\lambda), w_\lambda^*) \\ & \leq (w^* + w, w_\lambda + \beta_\lambda(w_\lambda) + w_\lambda^*), \quad 0 < \forall \lambda < 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで, $0 \in \partial V_0(0)$, $\tau \beta_\lambda(\tau) \geq 0$ ($\tau \in \mathbb{R}$) より, 直ちに $(w_\lambda^*, w_\lambda) \geq 0$, $(\beta_\lambda(w_\lambda), w_\lambda) \geq 0$ を得ます. 更に, $\beta_\lambda(w_\lambda) = w_\lambda - \pi_{C_1} w_\lambda$ in $L^2(\Omega)$ に注意すると, 補題 2.1 と $0 \in \partial V_0(0)$ から

$$(w_\lambda^*, \beta_\lambda(w_\lambda)) = (w_\lambda^* - 0, (w_\lambda - 0) - \pi_{C_1}(w_\lambda - 0)) \geq 0.$$

従って (2.4) においてシュワルツの不等式を用いると, 次の考察を得ます:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \{w_\lambda\} \text{ は空間 } L^2(\Omega) \text{ および空間 } BV(\Omega) \text{ で有界;} \\ \bullet \quad \{\beta_\lambda(w_\lambda)\} \text{ と } \{w_\lambda^*\} \text{ は空間 } L^2(\Omega) \text{ で有界.} \end{array} \right.$$

これより:

$$\exists \{\lambda_j\} \subset (0, 1), \exists \tilde{w} \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega), \exists w_0^* \in L^2(\Omega), \exists \xi \in L^2(\Omega) \text{ s.t.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j \searrow 0, \quad w_{\lambda_j}(x) \rightarrow \tilde{w}(x), \text{ a.e. } x \in \Omega; \\ w_{\lambda_j} \rightarrow \tilde{w} \text{ in } L^1(\Omega), \text{ weakly in } L^2(\Omega); \\ \beta_{\lambda_j}(w_{\lambda_j}) \rightarrow \xi \text{ and } w_{\lambda_j}^* \rightarrow w_0^* \text{ weakly in } L^2(\Omega) \text{ as } j \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

また, β_λ の定義と $\{\beta_\lambda(w_\lambda)\}$ の有界性から

$$(w_{\lambda_j} - 1)^+ + (w_{\lambda_j} + 1)^- = \lambda_j |\beta_{\lambda_j}(w_{\lambda_j})|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } j \rightarrow +\infty.$$

よってルベーグの有界収束定理と極限の一意性から

$$w_{\lambda_j} = (w_{\lambda_j} - 1)^+ + \pi_{\mathcal{E}_1} w_{\lambda_j} - (w_{\lambda_j} + 1)^- \rightarrow \pi_{\mathcal{E}_1} \tilde{w} = \tilde{w} \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } j \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

(2.5) と (2.6) を併せると,

$$\xi \in \partial I_{[-1,1]}(\tilde{w}), \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and}$$

$$w_0^* \in \partial V_0(\tilde{w}), \quad w_0^* + \xi + \tilde{w} = w^* + w \text{ in } L^2(\Omega).$$

これは $\tilde{w}$ が w と同じく汎関数 Φ の最小元であることを示していますが, 汎関数 Φ の最小元は一意ですから $\tilde{w} = w$ in $L^2(\Omega)$ となり, 最終的に

$$w^* = w_0^* + \xi \in \partial V_0(w) + \partial I_{[-1,1]}(w) \text{ in } L^2(\Omega)$$

を得ます. ■

次に, 汎関数 V の主要部分である V_0 の劣微分 ∂V_0 の表現に目を向けましょう. 最近, 論文 Andreu-Ballester-Caselles-Mazón[1, 2] の中で V_0 の劣微分 ∂V_0 の表現定理が得られました. 以下にその定理の内容を引用します.

命題 2.1 (論文 [1, 2] 参照) $w^* \in \partial V_0(w) \iff \exists \nu \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ s.t.}$

$$|\nu| \leq 1, \text{ a.e. in } \Omega, \quad w^* = -\operatorname{div} \nu \text{ in } L^2(\Omega), \text{ and}$$

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \nu_0(z - w) \leq \int_{\Omega} \nu \cdot \nabla z - \int_{\Omega} |\nabla w|, \quad \forall z \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega). \quad (2.7)$$

定理 2.1 と命題 2.1 を併せると, 最終的に次の ∂V に対する表現定理を得ます.

定理 2.2 $w^* \in \partial V(w) \iff \exists \nu \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n), \exists \xi \in L^2(\Omega) \text{ s.t. } |\nu| \leq 1, \text{ a.e. in } \Omega,$

$$\xi \in \partial I_{[-1,1]}(w), \text{ a.e. in } \Omega, \quad w^* = -\operatorname{div} \nu + \xi \text{ in } L^2(\Omega), \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla w| = \int_{\Omega} \nu \cdot \nabla w \text{ and } \int_{\Omega} w^* z \, dx = \int_{\Omega} \nu \cdot \nabla z, \quad \forall z \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega). \quad (2.9)$$

注意 2.1 定理 2.2 において次の 2 つに注意しておきます.

(i) 指示関数の劣微分 $\partial I_{[-1,1]}$ を詳しく計算すると,

$$\partial I_{[-1,1]}(\tau) = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{if } \tau = 1, \\ 0, & \text{if } -1 < \tau < 1, \\ (-\infty, 0], & \text{if } \tau = -1, \\ \emptyset, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となることは良く知られていますが, この事実を用いると関係式 (2.8) は次の不等式と同値であることがわかります:

$$\operatorname{div} \nu \in L^2(\Omega), \text{ and } -\operatorname{div} \nu \begin{cases} \leq w^*(x), & \text{if } w(x) = 1, \\ = w^*(x), & \text{if } -1 < w(x) < 1, \\ \geq w^*(x), & \text{if } w(x) = -1, \end{cases} \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

(ii) 変分不等式 (2.7) と関係式 (2.9) は互いに同値になります. 実際, (2.7) において $z = w$ とすれば 注意 1.2 の (i) から

$$\int_{\Omega} |\nabla w| \leq \int_{\Omega} \nu \cdot \nabla w \leq |\nu|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla w| \leq \int_{\Omega} |\nabla w|.$$

この不等式 (等式) とラドン測度 $\nu \cdot \nabla z$ の z に関する線形性を用いれば (2.9) を導くことが出来ます. 逆に (2.9) を仮定したときは, 各等式の両辺を足し算することによって (2.7) を導くことが出来ます.

3 定常解の例

本節では, 方程式 $(P)_\theta$ に対する定常問題を考察し, 定常解となる関数の代表的な例をいくつか紹介します.

以下, $\text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{1, -1\}$ を 0 でない実数の符号を対応させるような写像 (関数) とします.

θ_* を $-1 < \theta_* < 1$ であるような定数とし, θ を $\theta - \theta_* \in L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega))$, $\theta(t) \rightarrow \theta_*$ in $L^2(\Omega)$ as $t \rightarrow +\infty$ となるような関数とします. このとき, 命題 1.1 の (II) から $t \rightarrow +\infty$ としたときの $(P)_\theta$ の解 $u(t)$ の集積点 (ω -limit point) はすべて次の方程式を満たします:

$$(P_\infty)_{\theta_*} \quad \sigma \partial V(w) \ni w + \theta_* \text{ in } L^2(\Omega).$$

方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ は $(P)_\theta$ の時間微分の項を形式的に取り除いた方程式で, 形式的に書かれた方程式 (0.4) の厳密な表現です. また, 方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ は V の劣微分 ∂V を含んでいるので, 劣微分の定義から方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ は次の変分不等式と同値であることもわかります:

$$\sigma V(w) - (w + \theta_*, w) \leq \sigma V(z) - (w + \theta_*, z), \quad \forall z \in D(V). \quad (3.1)$$

最も単純なケースは定常解が定数値関数である場合ですが, この場合に関しては比較的簡単に解の構造を割り出すことが出来ます.

命題 3.1 $-1 < \theta_* < 1$ ならば方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ の定数値解は $1, -\theta_*, -1$ の3つしかない.

(証明) w が $1, -\theta_*, -1$ のいずれかの定数値関数であれば, 任意の関数 $z \in D(V)$ に対して次の関係が成り立ちます:

$$0 = \sigma V(w) \leq \sigma V(z) \text{ and } (w + \theta_*, z - w) \begin{cases} \leq 0, & \text{if } w \equiv 1 \text{ or } w \equiv -1 \text{ in } \Omega, \\ = 0, & \text{if } w \equiv -\theta_* \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

2つの不等式の両辺を足し算すれば変分不等式 (3.1) になるので, 3つの定数値関数 $1, -\theta_*, -1$ はすべて方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ の解になります. 更に, w_c が定数値関数 $1, -\theta_*, -1$ 以外の定数値解とします. このとき, 定数値関数の全変動はすべて 0 であることに注意すれば

$$\begin{cases} -\theta_* < w_c < 1 \implies \sigma V(w_c) - (w_c + \theta_*, w_c) > \sigma V(1) - (w_c + \theta_*, 1), \\ -1 < w_c < -\theta_* \implies \sigma V(w_c) - (w_c + \theta_*, w_c) > \sigma V(-1) - (w_c + \theta_*, -1), \end{cases}$$

となることが確認出来ます. これは w_c が変分不等式 (3.1) を満たさないことを意味しており, w_c が方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ の解であることと矛盾します. ■

本節での主な目的は定数でない定常解の例を見つけることですが, 1次元定常解の構造定理 (図 1 参照) から類推すると, 一般多次元においても定常解の大多数は階段関数であると予想されます. 従って, ここでは解の候補となる関数 w を階段関数のクラスに限定して考え, 階段関数 w が定常解になるための (十分) 条件を調べます.

定理 3.1 (階段関数の定常解) $n_* \in \mathbb{N}$ とし, n_* 個の定数 c_k と n_* 個の領域 D_k ($k = 1, \dots, n_*$) を:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D_k) &< +\infty, k = 1, \dots, n_*; \\ (c_{k_1} + \theta_*)(c_{k_2} + \theta_*) &> 0 \text{ and } D_{k_1} \cap D_{k_2} = \emptyset, 1 \leq \forall k_1 < \forall k_2 \leq n_*; \end{aligned}$$

となるように選び, $c_0 = -\text{sgn}(c_1 + \theta_*)$, $D_0 := \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n_*} D_k$ と定めます. このとき, 次の 4 つの条件を満足するようなベクトル場 $\bar{\nu} \in C^{0,1}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ が構成できれば, 階段関数 $\bar{w} := \sum_{k=1}^{n_*} c_k \chi_{D_k}$ は方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ の解になります.

(a) $|\bar{\nu}| \leq 1$ on $\bar{\Omega}$;

$$(b) -\sigma \text{div } \bar{\nu}(x) \begin{cases} \leq c_k + \theta_*, & \text{if } x \in D_k, c_k = 1, \\ = c_k + \theta_*, & \text{if } x \in D_k, -1 < c_k < 1, \text{ a.e. } x \in \Omega; \\ \geq c_k + \theta_*, & \text{if } x \in D_k, c_k = -1, \end{cases}$$

(c) $\bar{\nu} = \text{sign}(c_k + \theta_*) \nu_{\chi_{D_k}}$, $|\nabla \chi_{D_k}|$ -a.e. in Ω , $k = 0, \dots, n_*$;

(d) $\bar{\nu} \cdot \nu_\Gamma = 0$, $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. on Γ .

また更に, 次の関係式が成立します:

$$|c_k + \theta_*| |D_k| \begin{cases} \geq \sigma \mathcal{P}(D_k), & \text{if } |c_k| = 1, \\ = \sigma \mathcal{P}(D_k), & \text{if } |c_k| < 1, \end{cases} \quad k = 0, \dots, n_*. \quad (3.2)$$

(証明) 条件 (b) と注意 2.1 の (i) から直ちに

$$\bar{\xi} \in \partial I_{[-1,1]}(\bar{w}) \text{ and } -\sigma \text{div } \bar{\nu} + \bar{\xi} = \bar{w} + \theta_*, \text{ a.e. in } \Omega, \quad (3.3)$$

となるような関数 $\bar{\xi} \in L^2(\Omega)$ を見つけることが出来ます. また, 条件 (c) と注意 1.2 の (i) から, 任意の $k = 0, \dots, n_*$ に対して次の等式が成り立ちます:

$$\mathcal{P}(D_k) = \text{sign}(c_k + \theta_*) \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nu_{\chi_{D_k}} |\nabla \chi_{D_k}| = \text{sign}(c_k + \theta_*) \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nabla \chi_{D_k}. \quad (3.4)$$

従って, 余面積公式 (注意 1.1 (II)) と条件 (c) から

$$\begin{aligned} V(\bar{w}) &= \sum_{k=0}^{n_*} |c_k + \theta_*| \mathcal{P}(D_k) = -c_0 \left(\sum_{k=1}^{n_*} c_k \mathcal{P}(D_k) - c_0 \mathcal{P}(D_0) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n_*} c_k \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nabla \chi_{D_k} = \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nabla \left(\sum_{k=0}^{n_*} c_k \chi_{D_k} \right) = \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nabla \bar{w}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

更に, 条件 (d) と注意 1.1 の (IV) から

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\nu} z \, dx = \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nabla z - \int_{\Gamma} \bar{\nu} \cdot \nu_{\Gamma} T_{\Gamma} z \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega} \bar{\nu} \cdot \nabla z, \quad \forall z \in BV(\Omega), \quad (3.6)$$

ただし, T_{Γ} は $BV(\Omega)$ 上のトレース作用素とします. こうして得られた関係式 (3.3), (3.5), (3.6) および条件 (a) を踏まえて定理 2.2 を適用すると, 階段関数 $\bar{w}$ は方程式 $(P_{\infty})_{\theta_*}$ の解になることがわかります.

最後に関係式 (3.2) は, (3.6) において $z = \chi_{D_k}$ ($k = 0, \dots, n_*$) として等式 (3.4) と条件 (b) を用いれば得られます. ■

注意 3.1 (幾何学的な意味) 定理 3.1 において, 領域 D_k ($k = 1, \dots, n_*$) の境界が滑らかである場合を考えると, 条件 (c), (d) はいくつかの幾何学的な意味を持つようになります. 例えば, 注意 1.1 の (I) から条件 (c) はベクトル場 $\bar{\nu}$ が D_k の境界上ではその法線方向を向いていることを示しています. また, 条件 (d) と併せて考えると D_k の境界と Ω の境界 Γ とは直角に接触する (接触角の条件) ということもわかります.

注意 3.2 (1次元定常解との対応) 定理 3.1 において, 関係式 (3.2) はいわば領域 D_k の n 次元ルベグ測度とその境界 $\partial D_k \cap \Omega$ の $(n-1)$ 次元ハウスドルフ測度との関係式です. ここで $n = 1$ の場合を考えてみると, 領域 Ω および D_k ($k = 0, \dots, n_*$) は开区間であり, その境界の 0 次元ハウスドルフ測度とは即ち区間の端点の個数ということになります. これを踏まえると, 関係式 (3.2) の $n = 1$ のケースは次の表のように整理されます:

$D_k \cap \partial\Omega = \emptyset$ であるとき	$D_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ であるとき
$ c_k + \theta_* D_k \begin{cases} \geq \sigma, & \text{if } c_k = 1, \\ = \sigma, & \text{if } c_k < 1, \end{cases}$	$ c_k + \theta_* D_k \begin{cases} \geq 2\sigma, & \text{if } c_k = 1, \\ = 2\sigma, & \text{if } c_k < 1, \end{cases}$

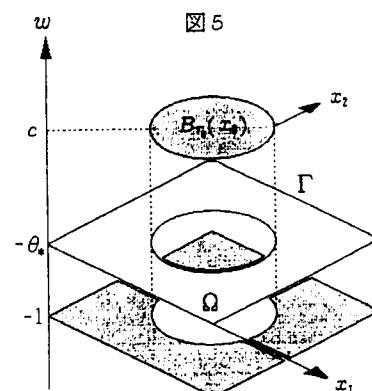
表にある条件はまさに 1次元定常解の構造に現れた条件そのものであり (論文 [11] 参照), この意味で定理 3.1 は 1次元の結果を一般多次元のケースへ拡張していると言えます.

定理 3.1 を用いると, 多くの階段関数の定常解を見つけることが出来ます. 以下にその代表的な紹介します.

例 3.1 $c \in [-1, 1] \setminus \{-\theta_*\}$ を定数, $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ に対し, $B_r(x_0)$ は中心 x_0 , 半径 r の開球とします. このとき c, x_0, r が条件:

$$\inf_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ y \in \Gamma}} |x - y| \geq \frac{n\sigma}{|\operatorname{sign}(c + \theta_*) + \theta_*|}; \quad (3.7)$$

$$r \begin{cases} \geq \frac{n\sigma}{|c + \theta_*|}, & \text{if } |c| = 1, \\ = \frac{n\sigma}{|c + \theta_*|}, & \text{if } |c| < 1; \end{cases} \quad (3.8)$$



を満たすならば, 階段関数 $\bar{w} := c\chi_{B_r(x_0)} - \operatorname{sign}(c + \theta_*)\chi_{\Omega \setminus B_r(x_0)}$ は定常問題 $(P_{\infty})_{\theta_*}$ の解になります (図 5 参照).

注意 3.3 (半径の条件について) 上の例において, 開球の半径 r に関する条件 (3.8) を用いて開球 $B_r(x_0)$ の測度と開球の境界 $\partial B_r(x_0)$ の $(n-1)$ 次元ハウスドルフ測度を計算すると

$$|c + \theta_*| |B_r(x_0)| \begin{cases} \geq \sigma |\partial B_r(x_0)|, & \text{if } |c| = 1, \\ = \sigma |\partial B_r(x_0)|, & \text{if } |c| < 1; \end{cases}$$

という不等式が得られますが, この不等式は定理 3.1 における関係式 (3.2) そのものです.

更に一般的な例として, 次のような例を挙げることが出来ます.

例 3.2 2つの正数 r_0, r_1 と C^2 -級の境界を持つような領域 E_0 が次の条件を満たすとし

$$\left\{ \begin{array}{l} r_\ell \geq \frac{n\sigma}{1 + (-1)^\ell \theta_*}, \ell = 0, 1, \\ \inf_{\substack{x \in E_0 \\ y \in \Gamma}} |x - y| \geq \frac{n\sigma}{1 - \theta_*}, \\ E_0 = \bigcup_{\substack{x \in E_0 \\ B_{r_0}(x) \subset E_0}} B_{r_0}(x), \\ \overline{E_0}^c = \mathbb{R}^n \setminus \overline{E_0} = \bigcup_{\substack{x \in \overline{E_0}^c \\ B_{r_1}(x) \subset \overline{E_0}^c}} B_{r_1}(x) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

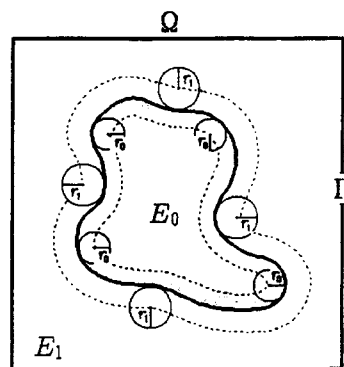


図 6

$E_1 := (\mathbb{R}^n \setminus E_0) \cap \Omega$ とするとき, 階段関数 $\bar{w} := \chi_{E_0} - \chi_{E_1}$ は方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ の解になります (図 6 参照).

上の 2つの例はいずれも, Ω 上のベクトル場 $\bar{\nu}$ を具体的に構成することによって定常解であることが証明出来ます. 例えば, 例 3.1 の場合, $\bar{c} := -\text{sign}(c + \theta_*)$ と置いてベクトル場 $\bar{\nu} \in C^{0,1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ を

$$\bar{\nu}(x) := \begin{cases} \frac{\bar{c}}{r}(x - x_0), & \text{if } 0 \leq |x - x_0| < r, \\ -\left(\frac{\bar{c} + \theta_*}{n\sigma}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\bar{c} + \theta_*}{n\sigma}\right)\left(r + \frac{n\sigma}{|\bar{c} + \theta_*|}\right)\frac{x - x_0}{|x - x_0|}, & \text{if } r \leq |x - x_0| < r + \frac{n\sigma}{|\bar{c} + \theta_*|}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.10)$$

とすれば, 定理 3.1 内の条件 (a)~(d) はすべて基本的な計算によってチェックすることが出来ます.

注意 3.4 (論文 Bellettini-Caselles-Novaga [6] 参照) 例 3.2 の条件 (3.9) は次の 2つの幾何学的な条件を含んでいます:

(a) D_ℓ ($\ell = 0, 1$) の任意の境界上の点から向こう岸までの距離は r_ℓ 以上ある;

(b) $D_\ell \cap \Omega$ ($\ell = 0, 1$) の境界上の曲率の関数を κ_ℓ とするとき

$$|\kappa_\ell(x)| \leq \frac{1}{r_\ell} \leq \frac{1 + (-1)^\ell \theta_*}{n\sigma}, \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. } x \in \partial D_\ell, \quad \ell = 0, 1.$$

注意 3.5 上記の2つの例ではいずれも界面が Γ に触れていませんが、 Ω が正方領域のような特別な領域ならば、界面が Γ に接触する場合も同様に議論することが出来ます。更に、このとき得られる例において界面は Γ と直交します。

4 局所安定性

本節では、前節で紹介した定常解の構造に関する結果を元にして、1次元の場合で構築した局所安定性理論を一般多次元の場合に拡張します。定数 $-1 < \theta_* < 1$ に対し、 $\theta \equiv \theta_*$ としたときの発展方程式 $(P)_\theta$ を $(P)_{\theta_*}$ で表記します、即ち:

$$(P)_{\theta_*} \quad u_t(t) + \sigma \partial V(u(t)) \ni u(t) + \theta_* \text{ in } L^2(\Omega), \quad t > 0.$$

とします。方程式 $(P)_{\theta_*}$ は次の変分不等式と同値です:

$$(u_t(t) - u(t) - \theta_*, u(t) - z) + \sigma V(u(t)) - \sigma V(z) \leq 0, \quad \forall z \in D(V). \quad (4.1)$$

このとき前節で登場した方程式 $(P_\infty)_{\theta_*}$ は方程式 $(P)_{\theta_*}$ の定常問題になります。

導入でも述べたとおり、局所安定性は定常解の各定数部分に対する安定性です。そこで、議論を始めるにあたり、開集合 $D \subset \Omega$ と定数 $-1 \leq c \leq 1$ の組 (D, c) を先ず考え、 (D, c) に対する安定性を定義します。

定義 4.1 (局所安定性) 開集合 $D \subset \Omega$ と定数 c の組 (D, c) が次の条件 $(*)$ を満足するとき、 (D, c) は局所安定性の意味で安定または単に安定であるといいます:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } |u(t) - c|_{L^\infty(D)} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_\varepsilon,$$

$\forall u$: 初期条件 $|u(0) - c|_{L^\infty(D)} < \delta_\varepsilon$ を満たす方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解。

また、 (D, c) が $(*)$ を満たさないとき、 (D, c) は局所安定性の意味で不安定または単に不安定であるといいます。

直感的には液相と固相が混ざり合っている状態というのは不安定であると思われますが、次の定理は方程式 $(P)_{\theta_*}$ によって生成される力学系がこの予測を再現していることを意味します。

定理 4.1 開集合 $D \subset \Omega$ と定数 $-1 \leq c \leq 1$ の組 (D, c) が安定ならば $|c| = 1$ 。

(証明) 対偶を証明します。即ち、 $|c| < 1$ を仮定して (D, c) が不安定であることを示すような方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解を構成します。証明は $-\theta_* \leq c < 1$ の場合と $-1 < c < -\theta_*$ の場合に分ける必要がありますが、どちらの場合でも証明はほとんど同じですので、話を簡潔にするために $-\theta_* \leq c < 1$ の場合に限って証明します。

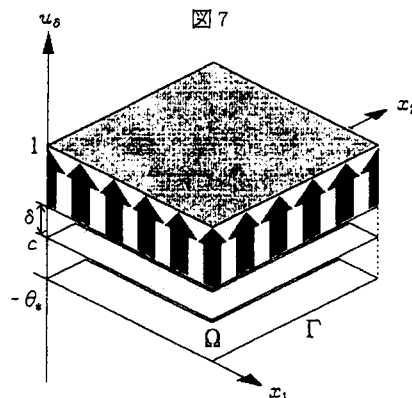
任意の $0 < \delta < 1 - c$ に対し, T_δ を $(c + \delta + \theta_*)e^{T_\delta} - \theta_* = 1$ を満たすような正数とし, 関数 $u_\delta : [0, +\infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ を

$$u_\delta(t) := \begin{cases} (c + \delta + \theta_*)e^t - \theta_*, & \text{if } 0 \leq t < T_\delta, \\ 1, & \text{if } t \geq T_\delta, \end{cases}$$

によって与えます (図7 参照). このとき, 関数 u_δ は方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解になります. 実際, u_δ は空間に関して定数ですから, (4.1) の左辺を $u(t) = u_\delta(t)$ として計算することによって変分不等式 (4.1) が成立することをチェック出来ます. 更に, u_δ の定義から

$$\begin{cases} |u_\delta(0) - c|_{L^\infty(D)} = \delta, \\ |u_\delta(t) - c|_{L^\infty(D)} = 1 - c, \end{cases} \quad \forall \delta > 0, \quad \forall t \geq T_\delta,$$

となりますが, これは (D, c) が不安定であることを意味します. ■



次の定理は一般多次元での局所安定性理論において最も重要な結果です.

定理 4.2 (円板領域上の局所安定性) $c \in [-1, 1]$, $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ が条件 (3.7), (3.8) を満たすとき,

$$(B_r(x_0), c): \text{安定} \iff |c| = 1 \text{ and } r > \frac{n\sigma}{|c + \theta_*|}.$$

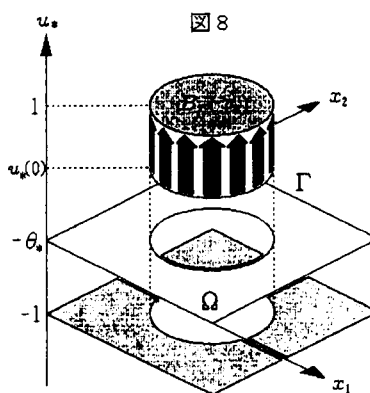
(証明) ($\Leftarrow$) $c = 1$ でも $c = -1$ でも証明はほとんど変わらないため,

$$c = 1 \text{ and } r > \frac{n\sigma}{1 + \theta_*} \quad (4.2)$$

と仮定します. 正数 δ_* を $\delta_* := \frac{1}{2} \left((1 + \theta_*) - \frac{n\sigma}{r} \right)$

と置き, T_* を $(1 - 2\delta_*) + \delta_* e^{T_*} = 1$ を満たすような正数とします. ここで, 関数 $u_* : [0, +\infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ を

$$u_*(t) := \begin{cases} ((1 - 2\delta_*) + \delta_* e^t) \chi_{B_r(x_0)} - \chi_{\Omega \setminus B_r(x_0)}, & \text{if } 0 \leq t < T_*, \\ \chi_{B_r(x_0)} - \chi_{\Omega \setminus B_r(x_0)}, & \text{if } t \geq T_*, \end{cases}$$



と定義します (図8 参照). このとき, u_* は方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解になります. 実際, $t \geq T_*$ ならば条件 (4.2) と例 3.1 より $u_*(t) = \chi_{B_r(x_0)} - \chi_{\Omega \setminus B_r(x_0)}$ は定常解であることはすぐにわかります. 次に, $0 \leq t < T_*$ の場合を考えます. 正数 δ_* の定義と例 3.1 より $w_* := u_*(t) - (u_*)_t(t)$ は定常解ですから, 次のような計算が成立します:

$$\begin{aligned}
& \sigma V(u_*(t)) - (u_*(t) - (u_*)_t(t) + \theta_*, u_*(t)) \\
&= \{ \sigma V(w_*) + \sigma \delta_* e^t \mathcal{P}(B_r(x_*)) \} - \{ (w_* + \theta_*, w_*) + \delta_* e^t ((1 - 2\delta_*) + \theta_*) |B_r(x_*)| \} \\
&= \sigma V(w_*) - (w_* + \theta_*, w_*) + \delta_* e^t |B_r(x_*)| \left(\frac{n\sigma}{r} - (1 + \theta_*) + 2\delta_* \right) \\
&= \sigma V(w_*) - (w_* + \theta_*, w_*) \leq \sigma V(z) - (w_* + \theta_*, z) \\
&= \sigma V(z) - (u_*(t) - (u_*)_t(t) + \theta_*, z), \quad 0 \leq \forall t < T_*, \quad \forall z \in D(V).
\end{aligned}$$

劣微分の定義から上記の変分不等式は方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解であることと同値です。

今, u を初期条件 $|u(0) - 1|_{L^\infty(B_r(x_0))} < \delta_*$ を満たすような方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解とします. このとき, $u_*(0) \leq u(0)$, a.e. $x \in \Omega$ ですから, 命題 1.2 を $s = 0, \forall T > 0, \theta_1 = \theta_2 \equiv \theta_*$, $u_1 = u_*, u_2 = u$ として適用すれば $u_* \leq u$, a.e. in Q となります. 特に:

$$u(t, x) = u_*(t, x) \equiv 1, \quad \forall t \geq T_*, \quad \text{a.e. } x \in B_r(x_0);$$

ですから, $(B_r(x_*), 1)$ は安定であることがわかります.

($\Rightarrow$) 対偶を示します. 定理 4.1 から $|c| < 1$ ならば $(B_r(x_0), c)$ は不安定になります. 従って,

$$|c| = 1 \text{ and } r \leq \frac{n\sigma}{|c + \theta_*|}$$

として $(B_r(x_0), c)$ が不安定であることを示せば十分であることがわかります. 更に $c = 1$ でも $c = -1$ でも証明の筋道は同じですので, ここでは $c = 1$ であるときの証明のみを与えます. $\tilde{\delta}_* := \frac{n\sigma}{r} - (1 + \theta_*) \geq 0$ とするとき, 階段関数 $\tilde{w}_* := 2\chi_{B_r(x_0)} - 1$ は次の関係式を満たします:

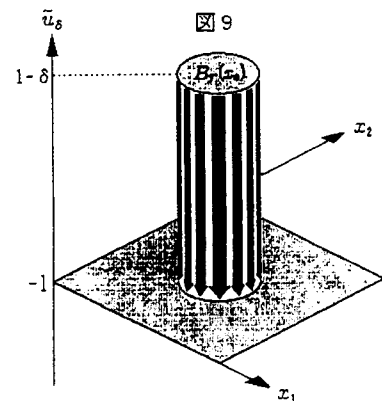
$$\sigma \partial V(\tilde{w}_*) \ni \tilde{w}_* + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_0)} \text{ in } L^2(\Omega). \quad (4.3)$$

(4.3) を導く手法は定理 3.1 の証明と同様で, 定理 2.2 を適用できるようなベクトル場を構成することですが, この場合そのベクトル場とは (3.10) で構成した $\tilde{v}$ の $c = 1$ のケースになります.

任意の $0 < \delta < 1 + \theta_*$ に対し, $\tilde{T}_\delta$ を $1 - \delta e^{\tilde{T}_\delta} = -1$ を満たすような正数とし, 関数 $\tilde{u}_\delta : [0, +\infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ を

$$\tilde{u}_\delta(t) := \begin{cases} (1 - \delta e^t) \chi_{B_r(x_0)} - \chi_{\Omega \setminus B_r(x_0)}, & \text{if } 0 \leq t < \tilde{T}_\delta, \\ -1, & \text{if } t \geq \tilde{T}_\delta \end{cases}$$

によって定義します (図 9 参照). このとき, 関数 $\tilde{u}_\delta$ は次の関係式を満たします:



$$(\tilde{u}_\delta)_t(t) + \sigma \partial V(\tilde{u}_\delta(t)) \ni \tilde{u}_\delta(t) + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{[0, \tilde{T}_\delta)}(t) \chi_{B_r(x_0)} \text{ in } L^2(\Omega), \quad t \geq 0. \quad (4.4)$$

実際, $t \geq \tilde{T}_\delta$ ならば (4.4) は方程式 $(P)_{\theta_*}$ と一致しますが, このとき $\tilde{u}_\delta(t) \equiv -1$ は方程式 $(P)_{\theta_*}$ の定常解です. また, $0 \leq t < \tilde{T}_\delta$ ならば $\tilde{w}_* = \tilde{u}_\delta(t) - (\tilde{u}_\delta)_t(t)$ となるので, (4.3) と $\tilde{\delta}_*$ の定義から次のような計算が成立します:

$$\begin{aligned}
& \sigma V(\tilde{u}_\delta(t)) - (\tilde{u}_\delta(t) - (\tilde{u}_\delta)_t(t) + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_*)}, \tilde{u}_\delta(t)) \\
&= \{ \sigma V(\tilde{w}_*) - \sigma \delta e^t \mathcal{P}(B_r(x_0)) \} \\
&\quad - \{ (\tilde{w}_* + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_0)}, \tilde{w}_*) - \delta e^t (1 + \theta_* + \tilde{\delta}_*) |B_r(x_0)| \} \\
&\leq \sigma V(\tilde{w}_*) - (\tilde{w}_* + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_0)}, \tilde{w}_*) + \delta e^t |B_r(x_0)| \left(-\frac{n\sigma}{r} + (1 + \theta_*) + \tilde{\delta}_* \right) \\
&= \sigma V(\tilde{w}_*) - (\tilde{w}_* + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_0)}, \tilde{w}_*) \leq \sigma V(z) - (\tilde{w}_* + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_0)}, z) \\
&= \sigma V(z) - (\tilde{u}_\delta(t) - (\tilde{u}_\delta)_t(t) + \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{B_r(x_0)}, z), \quad 0 \leq \forall t < \tilde{T}_\delta, \quad \forall z \in D(V).
\end{aligned}$$

劣微分の定義から, この変分不等式は関係式 (4.4) と同値です.

今, 関数 $u : [0, +\infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ を初期条件 $u(0) = \tilde{u}_\delta(0)$ を満たすような方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解とします. このとき, 命題 1.2 を $s = 0, \forall T > 0, \theta_1 = \theta_*, \theta_2 = \theta_* + \tilde{\delta}_* \chi_{[0, \tilde{T}_\delta)}(\cdot) \chi_{B_r(x_*)}$, $u_1 = u, u_2 = \tilde{u}_\delta$ として適用すれば, $u \leq \tilde{u}_\delta$, a.e. in Q を得ます. ここで特に,

$$|u(0) - 1|_{L^\infty(B_r(x_0))} = \delta \text{ and } |u(t) - 1|_{L^\infty(B_r(x_0))} = 2, \quad \forall \delta > 0 \text{ (small)}, \quad \forall t \geq \tilde{T}_\delta$$

ですから, $(B_r(x_0), 1)$ は不安定であることがわかります. ■

注意 4.1 開球 $B_r(x_0)$ と定数 c の組 $(B_r(x_0), c)$ が安定であるとしします. このとき, 定理 4.2 の証明から次の条件を導くことが出来ます:

$$(\star\star) \quad \forall \delta > 0 \text{ (十分小)}, \exists t_\delta^* \geq 0 \text{ (}\delta \text{ のみに依存)} \text{ s.t. } u(t) \equiv c \text{ in } B_r(x_0), \forall t \geq t_\delta^*,$$

$\forall u$: 初期条件 $|u(0) - c|_{L^\infty(B_r(x_0))} < \delta$ を満たすような方程式 $(P)_{\theta_*}$ の解.

これは, 開球 $B_r(x_0)$ 上で定数 c の十分近くから出発した解は c に有限時間で収束し, 更にそのスピードは中心 x_0 に関係なく一様であることを意味しています. この意味で条件 $(\star\star)$ は収束のオーダーを評価することの出来る興味深い条件です.

定理 4.2 および注意 4.1 を組み合わせれば, 次の系を得ます.

系 4.1 開集合 D と定数 c が次の条件を満たすとしします:

$$|c| = 1, \quad \inf_{\substack{x \in D \\ y \in \Gamma}} \geq \frac{n\sigma}{|-c + \theta_*|}, \text{ and } \exists r_* > \frac{n\sigma}{|c + \theta_*|} \text{ s.t. } D = \bigcup_{\substack{x \in D \\ B_{r_*}(x) \subset D}} B_{r_*}(x).$$

このとき, D と c の組 (D, c) は安定な組で, 更に次の条件が成立します:

$$\forall \delta > 0 \text{ (small)}, \exists T_\delta^* \text{ s.t. } u(t, x) = c, \quad \forall t \geq T_\delta^*, \text{ a.e. } x \in D.$$

参考文献

- [1] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, Minimizing total variation flow, *Differential Integral Equations*, Vol. 14, No. 3 (2001), pp. 321-360.
- [2] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, The Dirichlet Problem for the Total Variation Flow, *J. Funct. Anal.*, Vol. 180 (2001), pp. 347-403.
- [3] G. Anzellotti, Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), Vol. 135 (1983), pp. 293-318.
- [4] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, *J. Math. pures appl.*, Vol. 51 (1972), pp. 1-168.
- [5] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espace de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [6] G. Bellettini, V. Caselles and M. Novaga, The total variation flow in $\mathbb{R}^N$, to appear in *J. Differential Equations* (<http://cvgmt.sns.it/papers/belcasnov01/>).
- [7] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton (1992).
- [8] I. Ekeland and R. Témam, *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics Vol. 28, SIAM, Philadelphia (1999).
- [9] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, *Lecture Notes Math.*, Springer, Vol. 1584, Berlin (1994), pp. 37-86.
- [10] N. Kenmochi, Y. Mizuta and T. Nagai, Projections onto convex sets, convex functions and their subdifferentials, *Bull. Fac. Edu.*, Chiba Univ., Vol. 29 (1980), pp. 11-22.
- [11] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation functional with constraint, *Nonlinear Anal.*, Vol. 46 (2001), pp. 435-455.
- [12] N. Kenmochi and K. Shirakawa, Stability for a parabolic variational inequality associated with total variation functional, *Funkcial. Ekvac.*, Vol. 44, No. 1 (2001), pp. 119-137.
- [13] N. Kenmochi and K. Shirakawa, Stability for a phase field model with the total variation functional as the interfacial energy, to appear in *Nonlinear Anal.*.
- [14] K. Shirakawa, Parabolic variational inequality associated with the total variation functional, *Nonlinear Anal.*, Vol. 47 (2001), pp. 3195-3206.
- [15] A. Visintin, *Models of Phase Transitions*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 28, Birkhäuser, Boston (1996).

Stability of Steady-State Solutions to a Prey-Predator System with Cross-Diffusion

久藤 衡介 (早稲田大学大学院理工学研究科)

kuto@toki.waseda.jp

1 問題

次の準線型放物型方程式系に対する初期値境界値問題：

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(d_1 + \rho_{12}v)u] + u(a_1 - b_1u - c_1v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \Delta[(d_2 + \rho_{21}u)v] + v(a_2 + b_2u - c_2v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

を取り上げる。但し、 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域； a_1, b_1, c_1, d_1 ($i = 1, 2$) は正定数； a_2 は実定数； ρ_{12}, ρ_{21} は非負定数である。(1.1) は、領域 Ω 内に棲息する被食生物 (prey) と捕食生物 (predator) の個体数密度の時空間的なダイナミクスを記述するモデルである。未知関数 u と v はそれぞれ prey および predator の個体数密度を意味する。なお、非線形拡散項 $\rho_{12}\Delta(vu)$ および $\rho_{21}\Delta(uv)$ で相互拡散効果を加味し、これらの項は **cross-diffusion** と呼ばれる。(1.1) のような cross-diffusion を伴う反応拡散方程式系は、Shigesada-Teramoto-Kawasaki [17] の提唱以来、競合系や他の境界条件下などでも、様々な見地から研究がされ続けているが、そのメカニズムの解明には至っていない。数理生物学からの詳しい背景については、Okubo-Levin の本 [15] を参照されたい。

問題 (1.1) に対してスケーリング：

$$(a, b, c, d, \alpha, \beta) = \left(\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_2}, \frac{c_1 d_2}{c_2 d_1}, \frac{b_2 d_1}{b_1 d_2}, \frac{d_2 \rho_{12}}{c_2 d_1}, \frac{d_1 \rho_{21}}{b_1 d_2} \right), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\frac{b_1}{d_1} u, \frac{c_2}{d_2} v \right)$$

を施すと、

$$(P) \begin{cases} d_1^{-1} u_t = \Delta[(1 + \alpha v)u] + u(a - u - cv) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ d_2^{-1} v_t = \Delta[(1 + \beta u)v] + v(b + du - v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

に帰着される。但し、簡単のために記号 $\cdot$ は省略した。以下では、(P) の非負解のダイナミクスを考える。本稿の主目的は、[9] で既得の (P) の正值定常解に対して安定性解析を試みることにある。

なお、(P) の局所解の一意存在性は、Amann の一連の論文 [1, 2] において、 $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($p > N$) の枠組みで示されている。一方で「すべての初期値に対して (P) は時間的大域解を持

つか？」という問いは難解であり、空間 2 次元以上では一般には未解決である ([13] 等を参照されたい)。

最初に、(P) に関連する定常問題：

$$(SP) \begin{cases} \Delta[(1+\alpha v)u] + u(a-u-cv) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta[(1+\beta u)v] + v(b+du-v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

について既知の結果を紹介しよう。問題 (SP) を考える際、とかく正値解集合の構造を決定することが重要である。(ここで (u, v) が (SP) の正値解であるとは、 $u > 0$ かつ $v > 0$ が Ω 上で成り立つ解のことをさす。) 具体的には、次の 2 つの問題に興味を持たれる：

問題 1 (SP) の正値解が存在するための、係数パラメーター $(a, b, c, d, \alpha, \beta)$ に対する必要十分条件 (coexistence region) を求めよ。

問題 2 $(a, b, c, d, \alpha, \beta)$ が coexistence region にあるとき、正値解の個数を求めよ。

後述するが [9] では、上記の問題に対する部分的解答として、特に (SP) の正値解が複数個存在するケースがあることが判明した。

相互拡散効果のない $\alpha = \beta = 0$ のケースでは (SP) の正値解の構造に関する多くの研究がある。特に López-Gómez & Pardo [11] では、上記の問題 1 に対する解答が与えられている。さらに [12] では、問題 2 に関して、特に空間 1 次元 ($N = 1$) のケースで正値解の一意性が示されている。

次に $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ のケースを論じる。準備として線形の固有値問題：

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (\text{ただし } q \in C(\overline{\Omega}))$$

の最小固有値を $\lambda_1(q)$ と書く。特に $q \equiv 0$ のときは $\lambda_1 = \lambda_1(0)$ と略記し、対応する $L^2(\Omega)$ で正規化された正値固有関数を ϕ と書く。また $a > \lambda_1$ のとき、境界値問題：

$$\Delta u + u(a - u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

は一意正値解をもつことが知られており、この解を θ_a と書く。(SP) は $a > \lambda_1$ のとき、半自明解 $(u, v) = (\theta_a, 0)$ をもち、一方 $b > \lambda_1$ のとき、半自明解 $(u, v) = (0, \theta_b)$ をもつことが容易に確かめられる。

上記の問題 1 に関して、Nakashima-Yamada [14] は (SP) の正値解が存在するための係数 $(a, b, c, d, \alpha, \beta)$ に対する十分条件を写像度の理論を用いて得ている：

定理 1 (Nakashima-Yamada [14]). $a > \lambda_1$ のとき、次の (1.2) か (1.3) のいずれかが成り立てば、(SP) の正値解は少なくとも 1 個存在する。

$$\lambda_1 \left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b} \right) < 0 \quad \text{かつ} \quad \lambda_1 \left(\frac{-b - d\theta_a}{1 + \beta\theta_a} \right) < 0, \quad (1.2)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b} \right) > 0 \quad \text{かつ} \quad \lambda_1 \left(\frac{-b - d\theta_a}{1 + \beta\theta_a} \right) > 0. \quad (1.3)$$

一方 $a \leq \lambda_1$ のとき、(SP) の正値解は存在しない。

定理 1 の意味を説明しよう. 係数 a と b をパラメーターとみなして (a, b) 平面内に次の 2 曲線 S_1 および S_2 を導入する.

$$S_1 := \left\{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 : \lambda_1 \left(\frac{-b - d\theta_a}{1 + \beta\theta_a} \right) = 0 \text{ for } a \geq \lambda_1 \right\},$$

$$S_2 := \left\{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 : \lambda_1 \left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b} \right) = 0 \text{ for } b \geq \lambda_1 \right\}.$$

ここで S_1 は $\beta\lambda_1 < d$ (resp. $\beta\lambda_1 > d$) のとき, (λ_1, λ_1) を端点とする a に関して単調減少 (resp. 単調増加) な曲線となることが示される. 一方 S_2 は常に (λ_1, λ_1) を端点とする a に関して単調増加な曲線となることが示される. 定理 1 は (a, b) が S_1 と S_2 に囲まれた領域 R にあるとき, (SP) の正值解が存在することを述べている ([9, Fig.1] もしくは [8, 図 1] 参照). この事実は, $d/\beta = \lambda_1$ を境にして, (SP) の正值解集合の構造が変化することを示唆している. なお, S_1 および S_2 は, それぞれ半自明解 $(u, v) = (\theta_a, 0)$ および $(u, v) = (0, \theta_b)$ から正值解への分岐が発生する (a, b) をプロットした曲線となっている.

ところで, 定理 1 は「領域 R において (SP) の正值解は何個存在するか?」という新たな問題を提起する. この問題に対して, 次で述べる定理 2 および 3 では, $\alpha = 0$ のとき, d/β が閾値 λ_1 に十分近ければ, (SP) の正值解が複数個存在しうることを主張する.

以下では, (P) および (SP) で $\alpha = 0$ とした問題をそれぞれ $(P)_0$ および $(SP)_0$ と名づける. 次の結果は, いずれも a を分岐パラメーターとみなした $(SP)_0$ の正值解の集合:

$$S := \{(u, v, a) : (u, v) \text{ は } (SP)_0 \text{ の正值解, } a > \lambda_1\} \quad (1.4)$$

の構造について述べるものである.

定理 2 (Kuto-Yamada [9]). $\beta b > \beta\lambda_1 > d$ とせよ. このとき, 任意の $c > 0$ に対して, 十分大きい正数 M と開集合

$$O_1 \subset \{(\beta, b, d) : \beta \geq M, 0 < \lambda_1 - d/\beta, b - \lambda_1 \leq M^{-1}\}$$

が存在して, $(\beta, b, d) \in O_1$ のとき S は以下の性質を満たすような滑らかな有界曲線

$$\Gamma^1 = \{(u(s), v(s), a(s)) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) \times (\lambda_1, \infty) : s \in (0, C)\}$$

を含む:

(i) $(u(0), v(0)) = (0, \theta_b)$, $a^* := a(0) > \lambda_1$, $a'(0) > 0$, ただし a^* は $(a^*, b) \in S_2$ を満たす一意的な正数.

(ii) $(u(C), v(C)) = (\theta_{a(C)}, 0)$, $a_* := a(C) > \lambda_1$, ただし a_* は $(a_*, b) \in S_1$ を満たす一意的な正数.

(iii) $a(s)$ は $(0, C)$ 上で少なくとも 1 回狭義極大を達する. さらに, $O'_1 \subset O_1$ なる開集合 O'_1 が存在して, $(\beta, b, d) \in O'_1$ のとき, $a(s)$ は $(0, C)$ 上で少なくとも 1 回狭義極小を達する.

定理 3 (Kuto-Yamada [9]). $d/\beta > \lambda_1$ かつ $b > \lambda_1$ とせよ. このとき, 任意の $c > 0$ に対して, 十分大きい正数 M と開集合

$$O_2 \subset \{(\beta, b, d) : \beta \geq M, 0 < d/\beta - \lambda_1, b - \lambda_1 \leq M^{-1}\}$$

が存在して, $(\beta, b, d) \in O_2$ のとき $\mathcal{S}$ は以下の性質を満たすような滑らかな非有界曲線

$$\Gamma^2 = \{(u(s), v(s), a(s)) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega}) \times (\lambda_1, \infty) : s \in (0, \infty)\}$$

を含む:

- (i) $(u(0), v(0)) = (0, \theta_b)$, $a^* := a(0) > \lambda_1$, $a'(0) > 0$;
- (ii) $a(s) > a^*$ ($s \in (0, \infty)$) かつ $\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = \infty$;
- (iii) $a(s)$ は, ある $0 < \bar{s} < \underline{s}$ において $a(\bar{s}) > a(\underline{s})$ を満たす狭義極大 $a(\bar{s})$ および狭義極小 $a(\underline{s})$ を達する.

定理 2 および 3 は, $(\text{SP})_0$ の正值解集合のなすブランチ Γ^i ($i = 1, 2$) が「S字型」や「冚型」になりうることを主張する. 例えば, 定理 3 のケースでは, $a(\underline{s}) < a < a(\bar{s})$ ならば, $(\text{SP})_0$ は 3 個の正值解をもつことがわかる.

このように $(\text{SP})_0$ の正值解が複数個存在するケースが判明すると, おのずとそれぞれの解に対して $(\text{P})_0$ の意味での安定性を判定することに興味をもたれる. 次節で述べる主定理では, 拡散比 d_1/d_2 が十分に小さいとき, Γ^1 上の正值定常解の安定性は $a(s)$ の狭義極点 (turning point) においてのみ交代することが示される. 一方で, 拡散比 d_1/d_2 が十分に大きいケースでは, Γ^1 上のある点において **Hopf 分岐**が起こることが判明した. Γ^2 上の定常解の安定性解析については, 分岐パラメーター a に関してある有界な区間で類似の結果が得られる.

本稿においては, Banach 空間 $L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) および $C(\overline{\Omega})$ のノルムをそれぞれ

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|u\|_{\infty} := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

と記す. 特に $p = 2$ のときは $\|u\|_2$ を $\|u\|$ と略記する.

2 主結果

主結果を述べる準備として, 定理 2 で得られたブランチ Γ^1 を turning point で切断しておこう. $(\beta, b, d) \in O_1$ のときの $a(s)$ の全ての狭義極点を

$$0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{k-1} < C \tag{2.1}$$

とおく. さらに $1 \leq i \leq k$ に対して,

$$\Gamma_i^1 := \{(u(s), v(s), a(s)) \in \Gamma^1 : s \in (s_{i-1}, s_i)\} \quad (\text{但し } s_0 := 0, s_k := C)$$

と定義する. すなわち,

$$\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^1 = \Gamma^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \{(u(s_i), v(s_i), a(s_i))\}$$

である. なお, 以下では Banach 空間 X および Y を,

$$X := [W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)] \times [W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)], \quad Y := L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \quad (p > N) \quad (2.2)$$

と定義する. Sobolev の埋蔵定理より $X \subset C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ であることを付記しておこう. 次の定理 4-6 が, Γ^i ($i = 1, 2$) 上の正值定常解の安定性を述べる本稿の主結果である:

定理 4. ほとんどいたるところの $(\beta, b, d) \in O_1$ に対して, d_1/d_2 が十分小さければ, Γ_{2j-1}^1 ($j = 1, 2, \dots, [(k+1)/2]$) 上の正值定常解は X の位相で漸近安定である. 一方, Γ_{2j}^1 ($j = 1, 2, \dots, [k/2]$) 上の正值定常解は X の位相で不安定である.

定理 2 より, $(\beta, b, d) \in O_1$ のとき $(u(0), u(0)) = (0, \theta_b)$ および $(u(C), v(C)) = (\theta_{a(C)}, 0)$ であったことを思い出そう. 定理 4 は, 安定な正值解が半自明解 $(0, \theta_b)$ から分岐し, 各 turning point において安定性を交代させた後, 半自明解 $(\theta_{a(C)}, 0)$ に結合することを主張している. d_1/d_2 が十分大きくなると, 定理 4 の状況は一変する:

定理 5. 任意の $(\beta, b, d) \in O_1$ に対し, d_1/d_2 が十分大きければ, ある $(u(s^*), v(s^*), a(s^*)) \in \Gamma_1^1$ において Hopf 分岐が発生する. このとき, a が $a(s^*)$ のある右近傍にあれば, $(P)_0$ の時間周期解が存在する.

定理 3 で得られた非有界の S 字型ブランチ Γ^2 上の正值定常解の安定性解析については, s に対してある有界なレンジであれば, 定理 4 と 5 と同様の結果が成り立つ:

定理 6. ほとんどいたるところの $(\beta, b, d) \in O_2$ に対して, $C > \underline{s}$ を満たすある C に対して, $(0, C)$ 上の $a(s)$ の狭義極点を (2.1) のように定めよ. さらに, さらに $1 \leq i \leq k$ に対して,

$$\Gamma_i^2 := \{(u(s), v(s), a(s)) \in \Gamma^2 : s \in (s_{i-1}, s_i)\} \quad (\text{但し } s_0 := 0, s_k := C)$$

とせよ. このとき Γ_i^2 に対して, 定理 4 と 5 と同様の結果が成り立つ:

3 正值定常解の大域分岐構造

特に $\alpha = 0$ のケースでは, 非定常問題 (P) は

$$(P)_0 \begin{cases} d_1^{-1} u_t = \Delta u + u(a - u - cv) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ d_2^{-1} v_t = \Delta[(1 + \beta u)v] + v(b + du - v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

となる. この $(P)_0$ において, 次の変数変換:

$$a = \lambda_1 + \varepsilon a_1, \quad b = \lambda_1 + \varepsilon b_1, \quad d/\beta = \lambda_1 + \varepsilon \tau, \quad \beta = \gamma/\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad (1 + \beta u)v = \varepsilon z, \quad (3.1)$$

を施す. ここで, a_1, b_1 は正定数, τ は実定数である. さらに, ε は小さい正定数である. 従って以下では, $b(>\lambda_1)$ と d/β が λ_1 に近く, β が十分大きいケースで精密な解析を試みる. なお a_1 は分岐パラメータの役割を担うと考えて頂きたい. 変数変換 (3.1) を通じて, 新たな未知関数 (w, z) は次の摂動問題:

$$(PP) \quad \begin{cases} d_1^{-1} w_t = \Delta w + \lambda_1 w + \varepsilon f(w, z, a_1) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ d_2^{-1} \left[-\frac{\gamma z}{(1 + \gamma w)^2} w_t + \frac{z_t}{1 + \gamma w} \right] = \Delta z + \lambda_1 z + \varepsilon g(w, z) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ w = z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(\cdot, 0) = u_0/\varepsilon, \quad z(\cdot, 0) = (1 + \beta u_0)v_0/\varepsilon & \text{in } \Omega \end{cases}$$

を満たすことが確かめられる. 但し,

$$\begin{cases} f(w, z, a_1) := w \left(a_1 - w - \frac{cz}{1 + \gamma w} \right), \\ g(w, z) := \frac{z}{1 + \gamma w} \left(b_1 + \tau \gamma w - \frac{z}{1 + \gamma w} \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

である. 変数変換 (3.1) を施す主要因は, (PP) に関連する定常問題が

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda_1 w + \varepsilon f(w, z, a_1) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta z + \lambda_1 z + \varepsilon g(w, z) = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

と半線型の楕円型方程式系に対する境界値問題に帰着される点にある. (3.1) に注意すると, 定常問題 (3.3) は $w = z = 0$ なる自明解に加えて,

$$(w, z) = (\varepsilon^{-1} \theta_{\lambda_1 + \varepsilon a_1}, 0), \quad (w, z) = (0, \varepsilon^{-1} \theta_{\lambda_1 + \varepsilon b_1})$$

の2つの半自明解をもつことがわかる. 定理 2 および 3 は, $\varepsilon > 0$ が十分小さいときの (3.3) の解構造を詳細に従えた後に, 変数変換 (3.1) を通じて $(SP)_0$ の解構造に焼き直すことによって得られる. 安定性解析でも必要となるので, 証明の概要を述べておこう. 詳細については [9] を参照されたい.

(2.2) で定義した Banach 空間 X および Y に対して, 線型作用素 $H: X \rightarrow Y$ および非線型作用素 $B: X \times \mathbf{R} \rightarrow Y$ をそれぞれ

$$\begin{cases} H(w, z) := (\Delta w + \lambda_1 w, \Delta z + \lambda_1 z), \\ B(w, z, a_1) := (f(w, z, a_1), g(w, z)) \end{cases} \quad (3.4)$$

と定義する. このとき (3.3) は方程式

$$H(w, z) + \varepsilon B(w, z, a_1) = 0 \quad (3.5)$$

と同値である. [9] においては, 「十分小さい各 $\varepsilon > 0$ に対して, a_1 を分岐パラメーターと見た (3.3) の正値解構造」を分岐理論や Lyapunov-Schmidt reduction を用いて得ている. まず,

$$\text{Ker } H = \{(s\Phi, t\Phi) : (s, t) \in \mathbf{R}^2\} (= M)$$

に注意しよう. 当然 M は $\mathbf{R}^2$ と同型である. そこで, X および Y を,

$$X = M \oplus X_1, \quad Y = M \oplus Y_1$$

と $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ の意味で直交分解する. ここで, X_1 は X における余次元 2 の直交補空間, Y_1 は Y における余次元 2 の直交補空間である. さらに, $P : X \rightarrow X_1$ および $Q : Y \rightarrow Y_1$ を直交射影子とする. このとき (3.5) の未知関数 $(w, z) \in X$ は

$$(w, z) = (s, t)\Phi + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = P(w, z)$$

と直交分解される. さらに $H((s, t)\Phi) = 0$ と $(I - Q)H(X_1) = 0$ に注意すると, 結局 (3.5) は,

$$QH(\mathbf{u}) + \varepsilon QB((s, t)\Phi + \mathbf{u}, a_1) = 0 \quad (3.6)$$

および

$$(I - Q)B((s, t)\Phi + \mathbf{u}, a_1) = 0$$

と同値となる. この連立方程式の解法のポイントは, 陰関数定理を用いて, まず (3.6) の解を $\varepsilon = 0$ の近傍で構成する点にある:

補題 3.1 ([9]). 任意の $C > 0$ に対して, 十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ が存在して,

$$\{(w, z, a_1, \varepsilon) = (s\Phi, t\Phi, a_1, 0) \in X \times \mathbf{R}^2 : |s|, |t|, |a_1| \leq C\}$$

のある近傍 N における (3.6) の全ての解は

$$\{((s, t)\Phi + \varepsilon \mathbf{U}(s, t, a_1, \varepsilon), a_1, \varepsilon) : |s|, |t|, |a_1| \leq C + \varepsilon_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\} \quad (3.7)$$

と表示される. ここで, $\mathbf{U}(s, t, a_1, \varepsilon)$ とは, 陰関数定理で構成される $|s|, |t|, |a_1| \leq C + \varepsilon_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 上の滑らかな X_1 値関数である. 従って, (3.7) の元 $(w, z, a_1, \varepsilon) = ((s, t)\Phi + \varepsilon \mathbf{U}(s, t, a_1, \varepsilon), a_1, \varepsilon)$ が (3.5) の解となることと

$$F^\varepsilon(s, t, a_1)\Phi := (I - Q)B((s, t)\Phi + \varepsilon \mathbf{U}(s, t, a_1, \varepsilon), a_1) = 0$$

が成り立つことは必要十分である.

上の補題は、各 $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ に対して (3.5) すなわち (3.3) の N 内の解集合は $\text{Ker } F^\varepsilon$ に一致することを述べている。ここで $(I-Q)(u, v) = (\int_\Omega u \Phi dx, \int_\Omega u \Phi dx) \Phi$ に注意すると、特に $\varepsilon = 0$ のときは、

$$\begin{aligned} F^0(s, t, a_1) &= \left(\int_\Omega f(s\Phi, t\Phi, a_1) \Phi, \int_\Omega g(s\Phi, t\Phi) \Phi \right) \\ &= {}^t \left[\begin{array}{c} s \left(a_1 - s \|\Phi\|_3^3 - ct \int_\Omega \frac{\Phi^3}{1 + \gamma s \Phi} \right) \\ t \left\{ b_1 - (b_1 - \tau) \gamma s \int_\Omega \frac{\Phi^3}{1 + \gamma s \Phi} - t \int_\Omega \frac{\Phi^3}{(1 + \gamma s \Phi)^2} \right\} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られる。従って $\text{Ker } F^0$ は、次の $\mathbf{R}^3$ における 4 つの集合

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \{(0, 0, a_1) : a_1 \in \mathbf{R}\}, & \mathcal{L}_1 &= \{(a_1/\|\Phi\|_3^3, 0, a_1) : a_1 \in \mathbf{R}\}, \\ \mathcal{L}_2 &= \{(0, b_1/\|\Phi\|_3^3, a_1) : a_1 \in \mathbf{R}\}, & \mathcal{L}_p &= \{(s, \varphi(\gamma s), \psi(s)) : s \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

の和集合となる。但し

$$\begin{cases} \varphi(s) = \left[b_1 - (b_1 - \tau) s \int_\Omega \frac{\Phi^3}{1 + s \Phi} \right] / \int_\Omega \frac{\Phi^3}{(1 + s \Phi)^2}, \\ \psi(s) = s \|\Phi\|_3^3 + c \varphi(\gamma s) \int_\Omega \frac{\Phi^3}{1 + \gamma s \Phi} \end{cases} \quad (3.9)$$

である。ここで $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ は、同一視 $(s, t) \leftrightarrow (s, t) \Phi$ を通じて、それぞれ (3.3) の自明解、半自明解集合 $\{(\varepsilon^{-1} \theta_{\lambda_1 + \varepsilon a_1}, 0, a_1) : a_1 > 0\}$ および $\{(0, \varepsilon^{-1} \theta_{\lambda_1 + \varepsilon b_1}, a_1) : a_1 > 0\}$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限集合を意味している。さらに、 $\mathcal{L}_p$ は (3.3) の正值解集合の $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限集合を意味している。実際、次の命題が成り立つ：

命題 1 ([9]). 十分大きい正数 A_1 に対して、ある正数 ε_0 および

$$(s(\xi, 0), t(\xi, 0), a_1(\xi, 0)) = (\xi, \varphi(\gamma \xi), \psi(\xi)), \quad s(0, \varepsilon) = 0$$

を満たす滑らかな曲線族

$$\{(s(\xi, \varepsilon), t(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \in \mathbf{R}_+^3 : (\xi, \varepsilon) \in (0, C_\varepsilon) \times (0, \varepsilon_0)\}$$

が存在して、各 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して、 $a_1 \in (0, A_1]$ を満たす (3.3) の全て正值解は

$$\begin{aligned} \Gamma^\varepsilon &= \{(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) = ((s, t) \Phi + \varepsilon \mathbf{U}(s, t, a_1, \varepsilon), a_1) : \\ &\quad (s, t, a_1) = (s(\xi, \varepsilon), t(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)), \xi \in (0, C_\varepsilon)\} \end{aligned}$$

とパラメーター ξ で表示される。ここで C_ε は $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ に関する正值連続関数である。さらに $\tau < 0$ ならば、

$$w(C_\varepsilon, \varepsilon) > 0 \text{ in } \Omega \text{ かつ } z(C_\varepsilon, \varepsilon) \equiv 0$$

が成り立つ。一方で $\tau \geq 0$ ならば、

$$w(C_\varepsilon, \varepsilon), z(C_\varepsilon, \varepsilon) > 0 \text{ in } \Omega \text{ かつ } a_1(C_\varepsilon, \varepsilon) = A_1$$

であり、 Γ^ε は a_1 に関して $[A_1, \infty)$ 上に (3.3) の正值解曲線として滑らかに延長される。

命題 1 により $\varepsilon > 0$ が小さければ, Γ^ε は $\{(s, \varphi(\gamma s)\Phi, \psi(s)\Phi) : 0 < s \leq C_0\}$ の近くに滑らかな曲線をなすことが分かる. 従って, 曲線 $\mathcal{L}_p$ の形状解析が重要となる. (3.9) により, $\tau \geq 0$ ならば $\varphi(s) > 0$ ($s > 0$) である. 一方で $\tau < 0$ ならば, ある正数 $s_0 = s_0(b_1/\tau)$ が存在して,

$$\begin{cases} \varphi(s) > 0 & \text{for } s \in [0, s_0), \\ \varphi(s) < 0 & \text{for } s \in (s_0, \infty) \end{cases}$$

であることが確かめられる. 従って,

$$(s_0/\gamma, \varphi(s_0), \psi(s_0/\gamma)) = (s_0/\gamma, 0, s_0\|\Phi\|_3^3/\gamma) \in \mathcal{L}_1$$

となる. さらに詳しく, 次の補題は $|\tau|$ が十分に小さく, γ が大きいとき, $\psi(s)$ が区間 $\{s > 0 : \varphi(s) > 0\}$ 上で極値を有する曲線をなすことを主張する:

補題 3.2 ([9]). 曲線 $\psi(s)$ に関して, 次の (a) および (b) が成り立つ:

- (a) $\tau \geq 0$ ならば, $\psi(s) > \psi(0) = cb_1$ ($s > 0$) かつ $\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(s) = \infty$ である.
- (b) ある 2 つの正定数 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(c, b_1)$ と $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(c, b_1)$ に対して, 次の (i) と (ii) が成立する:
 - (i) $(\tau, \gamma) \in [0, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ ならば, $\psi(s)$ はある $0 < \bar{s} < \underline{s}$ で, 狭義極大 $\psi(\bar{s})$ および狭義極小 $\psi(\underline{s})$ を達成して, さらに $\psi(\bar{s}) > \psi(\underline{s})$ が成り立つ:
 - (ii) $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, 0) \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ ならば, $\psi(s)$ は $(0, s_0/\gamma)$ 上に狭義極大点をもつ. さらに,

$$\tilde{\gamma} < \hat{\gamma}(\tau) \quad (\tau \in [-\tilde{\tau}, 0)) \quad \text{かつ} \quad \lim_{\tau \uparrow 0} \hat{\gamma}(\tau) = \infty$$

を満たす $[-\tilde{\tau}, 0)$ 上のある連続関数 $\hat{\gamma}(\tau)$ が存在して, $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, 0) \times [\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}(\tau))$ ならば, $\psi(s)$ は $(0, s_0/\gamma)$ 上に狭義極小点をもつ. $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, 0) \times [\hat{\gamma}(\tau), \infty)$ ならば, ある $\hat{s} \in (0, s_0/\gamma)$ に対して $\max_{s \in [0, s_0/\gamma]} g(s) = g(\hat{s})$ が成り立つ.

命題 1 および 補題 3.2 より, (3.3) の a_1 を分岐パラメーターとみなした正值解集合

$$\mathcal{S}^\varepsilon = \{(w, z, a_1) : (w, z) \text{ は (3.3) の正值解, } a_1 > 0\}$$

の大域的構造について次が得られる:

命題 2 ([9]). $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, 0) \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ のとき, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば, $\mathcal{S}^\varepsilon$ は以下の条件を全て満たすような滑らかな有界曲線

$$\Gamma^\varepsilon = \{(w(\xi), z(\xi), a_1(\xi)) \in X \times \mathbf{R}_+ : \xi \in (0, C_\varepsilon)\}$$

を含む:

- (i) $(w(0), z(0)) = (0, \varepsilon^{-1}\theta_{\lambda_1+eb_1})$, $a_1(0) > 0$, $a_1'(0) > 0$;
- (ii) $(w(C_\varepsilon), z(C_\varepsilon)) = (\varepsilon^{-1}\theta_{\lambda_1+\varepsilon a_{1*}}, 0)$, $a_{1*} := a_1(C_\varepsilon) > 0$;
- (iii) Γ^ε は a_1 に関する turning point を少なくとも 1 個もつ. 特に, $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, 0) \times [\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}(\tau))$ ならば, Γ^ε は a_1 に関する turning point を少なくとも 2 個もつ.

命題 3 ([9]). $(\tau, \gamma) \in [0, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ のとき, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば, $\mathcal{S}^\varepsilon$ は以下の条件を全て満たすような滑らかな非有界曲線

$$\Gamma^\varepsilon = \{(w(\xi), z(\xi), a_1(\xi)) \in X \times \mathbf{R}_+ : \xi \in (0, C_\varepsilon)\}$$

を含む:

- (i) $(w(0), z(0)) = (0, \varepsilon^{-1}\theta_{\lambda_1+\varepsilon b_1})$, $a_1(0) > 0$, $a_1'(0) > 0$;
- (ii) $a_1(\xi) > a_1(0)$ ($\xi > 0$) かつ $\lim_{\xi \rightarrow \infty} a_1(\xi) = \infty$;
- (iii) Γ^ε は a_1 に関する turning point を少なくとも 2 個もつ.

定理 2 および 3 は, それぞれ, 命題 2 および 3 から変数変換 (3.1) を通じて得られる. 実際, 定理中の開集合 O_1, O_1' および O_2 は, 十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ に対し次のように取ればよい.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{(\beta, b, d) = (\gamma/\varepsilon, \lambda_1 + \varepsilon b_1, (\lambda_1 + \varepsilon \tau)\gamma/\varepsilon) : (\tau, \gamma, \varepsilon) \in [-\tilde{\tau}, 0] \times [\tilde{\gamma}, \infty), \times (0, \varepsilon_0]\}, \\ O_1' &= \{(\beta, b, d) = (\gamma/\varepsilon, \lambda_1 + \varepsilon b_1, (\lambda_1 + \varepsilon \tau)\gamma/\varepsilon) : (\tau, \gamma, \varepsilon) \in [-\tilde{\tau}, 0] \times [\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}(\tau)) \times (0, \varepsilon_0]\}, \\ O_2 &= \{(\beta, b, d) = (\gamma/\varepsilon, \lambda_1 + \varepsilon b_1, (\lambda_1 + \varepsilon \tau)\gamma/\varepsilon) : (\tau, \gamma, \varepsilon) \in [0, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty) \times (0, \varepsilon_0]\}. \end{aligned}$$

4 主結果の証明

今節では, 安定性解析に関する主結果である定理 4-6 の証明を解説する. 定理 2 および 3 で既得の Γ^i ($i = 1, 2$) 上の正值定常解 (u, z) の安定性は, 変数変換 (3.1) の正則性を考慮すると, (3.1) で移った (PP) の正值定常解 (w, z) の安定性と一致する. そこで, 命題 2 および 3 で述べた Γ^ε 上の正值解 (w, z) の (PP) の意味での安定性を判定しよう.

命題 1 により, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $a_1 \in (0, A_1)$ 上の (3.3) の正值解は

$$\Gamma^\varepsilon = \{(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) : \xi \in (0, C_\varepsilon)\}$$

と表示された. そこで, 各 $(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \in \Gamma^\varepsilon$ に対して, 線型作用素 $L(\xi, \varepsilon) : X \rightarrow Y$ を

$$L(\xi, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} := -H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \varepsilon B_{(w,z)}(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

と定義する. さらに, 2×2 行列 $J(\xi, \varepsilon)$ を

$$J(\xi, \varepsilon) := \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ \frac{\gamma z(\xi, \varepsilon)}{d_2(1 + \gamma w(\xi, \varepsilon))^2} & \frac{1}{d_2(1 + \gamma w(\xi, \varepsilon))} \end{bmatrix}$$

と定義する. このとき, (PP) の定常解 $(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon))$ における線型化固有値問題は

$$L(\xi, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \mu J(\xi, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

である. 形式的には, (PP) に

$$(w, z) = (w(\xi, \varepsilon) + h(x)e^{-\mu t}, z(\xi, \varepsilon) + k(x)e^{-\mu t})$$

を代入することにより, (4.2) は得られる. (4.2) に対するスペクトル解析を通じて, まずは定常解 $(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon))$ の線型化安定性を判定する. 基本的な補題からはじめよう.

補題 4.1. $\varepsilon > 0$ は十分に小さいとせよ. このとき, (ξ, ε) に依存しない 2 正数 δ, ω が存在して, (4.2) のレゾルベント集合 $\rho(\xi, \varepsilon) := \{\mu \in \mathbb{C} : (4.2) \text{ の解は } h = k = 0 \text{ のみ}\}$ は,

$$-\rho(\xi, \varepsilon) \supset \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \delta \text{ and } |\arg z| \leq \pi/2 + \omega\}$$

を満たす. また (4.2) の固有値は複素平面上で上下対称の離散集合をなし, 実部の小さい 2 個の固有値 $\mu_1(\xi, \varepsilon)$ および $\mu_2(\xi, \varepsilon)$ は,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_1(\xi, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_2(\xi, \varepsilon) = 0$$

を満たし, 上記以外の全ての固有値 $\{\mu_i(\xi, \varepsilon)\}_{i=3}^{\infty}$ はある正数 κ に対して

$$\operatorname{Re} \mu_i(\xi, \varepsilon) \geq \kappa \quad (i \geq 3, \xi \in (0, C_\varepsilon))$$

を満たす.

Proof. 命題 1 より, 任意に固定した $\xi \in (0, C_\varepsilon)$ に対して,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) = (\xi \Phi, \varphi(\gamma \xi) \Phi, \psi(\xi)) \text{ in } C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$$

が成り立つ. 従って $\varepsilon = 0$ のとき, 固有値問題 (4.2) は

$$\begin{cases} -\Delta h - \lambda_1 h = \frac{\mu}{d_1} h & \text{in } \Omega, \\ -\Delta k - \lambda_1 k = \frac{\mu}{d_2} \left[-\frac{\gamma \varphi(\gamma \xi) \Phi}{(1 + \gamma \xi \Phi)^2} h + \frac{k}{1 + \gamma \xi \Phi} \right] & \text{in } \Omega, \\ h = k = 0 & \text{on } \partial \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

となる. 明らかに (4.3) は $\mu = 0$ を 2 重固有値としてもつ. ここで, $h \neq 0$ ならば, 第 1 式より μ は 0 以上の実数. 一方 $h \equiv 0$ ならば, 第 2 式より固有値 μ は 0 以上の実数. いずれにせよ, (4.3) の全ての固有値は 0 以上の実数からなる離散集合をなすことがわかる. この事実に注意すると, (4.3) 固有値集合の ε に関する摂動から, 補題 4.1 が示される. この辺りの厳密な正当化は, 加藤敏夫先生の本 [7, Chapter 3] に詳しい. $\square$

補題 4.1 から, (4.2) の実部の小さい固有値 $\mu_1(\xi, \varepsilon)$ および $\mu_2(\xi, \varepsilon)$ は, ともに実数であるか, 複素共役の関係にあることがわかる. 以下の議論では, 常に

$$\operatorname{Re} \mu_1(\xi, \varepsilon) \leq \operatorname{Re} \mu_2(\xi, \varepsilon), \quad \operatorname{Im} \mu_1(\xi, \varepsilon) \geq \operatorname{Im} \mu_2(\xi, \varepsilon)$$

とする.

定義 4.1 (線型化安定性・不安定性). (3.3) の正值定常解 $(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \in \Gamma^\varepsilon$ は $\operatorname{Re} \mu_1(\xi, \varepsilon) > 0$ ならば, 線型化安定であるという. 一方, $\operatorname{Re} \mu_1(\xi, \varepsilon) < 0$ ならば, 線型化不安定であるという.

$\operatorname{Re} \mu_1(\xi, \varepsilon)$ の符号判定のため, 2×2 行列 $M(s)$ を

$$M(s) := - \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ -\frac{\gamma\varphi(\gamma s)}{d_2} \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma s\Phi)^2} & \frac{1}{d_2} \int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1+\gamma s\Phi} \end{bmatrix}^{-1} F_{(s,t)}^0(s, \varphi(\gamma s), \psi(s)) \quad (4.4)$$

と定義する. ここで $F_{(s,t)}^0(s, \varphi(\gamma s), \psi(s))$ とは (3.8) で定義した作用素 F^0 の Jacobi 行列を意味し, (3.9) に注意すると初等計算により

$$\begin{aligned} & F_{(s,t)}^0(s, \varphi(\gamma s), \psi(s)) \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma s\varphi(\gamma s) \int_{\Omega} \frac{\Phi^4}{(1+\gamma s\Phi)^2} - s\|\Phi\|_3^3 & -cs \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{1+\gamma s\Phi} \\ \gamma\varphi(\gamma s) \left[2\varphi(\gamma s) \int_{\Omega} \frac{\Phi^4}{(1+\gamma s\Phi)^3} - (b_1 - \tau) \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma s\Phi)^2} \right] & -\varphi(\gamma s) \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma s\Phi)^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となることが確かめられる. ここで, $\nu_1(s)$ および $\nu_2(s)$ を

$$\operatorname{Re} \nu_1(s) \leq \operatorname{Re} \nu_2(s), \quad \operatorname{Im} \nu_1(s) \geq \operatorname{Im} \nu_2(s)$$

を満たす $M(s)$ の固有値とする. $\operatorname{Re} \mu_1(\xi, \varepsilon)$ の符号判定に際して, 次の補題は重要なキーステップを担う:

補題 4.2. 任意の $s \in (0, C)$ に対して,

$$\lim_{(\xi, \varepsilon) \rightarrow (s, 0)} \frac{\mu_i(\xi, \varepsilon)}{\varepsilon} = \nu_i(s) \quad (i = 1, 2) \quad (4.6)$$

が成り立つ.

Proof. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n, \varepsilon_n) = (s, 0)$ を満たすような任意点列 $\{(\xi_n, \varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ に対して,

$$(w_n, z_n, a_1^n) := (w(\xi_n, \varepsilon_n), z(\xi_n, \varepsilon_n), a_1(\xi_n, \varepsilon_n)) \in \Gamma^{\varepsilon_n},$$

$$\mu_i^n := \mu_i(\xi_n, \varepsilon_n) \quad (i = 1, 2)$$

とおく. さらに, (4.2) の固有値 μ_i^n に対応する固有関数を (h_i^n, k_i^n) ($\|h_i^n\| + \|k_i^n\| = 1$) とする. このとき (3.2) および (3.4) に注意すると, 固有値問題 (4.2) は

$$\begin{cases} -\Delta h_i^n - \lambda_1 h_i^n - \varepsilon_n [f_w(w_n, z_n, a_1^n) h_i^n + f_z(w_n, z_n, a_1^n) k_i^n] = \frac{\mu_i^n}{d_1} h_i^n & \text{in } \Omega, \\ -\Delta k_i^n - \lambda_1 k_i^n - \varepsilon_n [g_w(w_n, z_n) h_i^n + g_z(w_n, z_n) k_i^n] \\ \quad = \frac{\mu_i^n}{d_2} \left[-\frac{\gamma z_n}{(1+\gamma w_n)^2} h_i^n + \frac{k_i^n}{1+\gamma w_n} \right] & \text{in } \Omega, \\ h_i^n = k_i^n = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

と書き下される. (4.7) の第 1 式, 第 2 式にそれぞれ Φ をかけて, Ω で積分すると,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} f_w(w_n, z_n, a_1^n) h_i^n \Phi + \int_{\Omega} f_z(w_n, z_n, a_1^n) k_i^n \Phi = -\frac{\mu_i^n}{\varepsilon_n} \frac{1}{d_1} \int_{\Omega} h_i^n \Phi, \\ \int_{\Omega} g_w(w_n, z_n) h_i^n \Phi + \int_{\Omega} g_z(w_n, z_n) k_i^n \Phi \\ = -\frac{\mu_i^n}{\varepsilon_n} \frac{1}{d_2} \left[-\gamma \int_{\Omega} \frac{z_n}{(1+\gamma w_n)^2} h_i^n \Phi + \int_{\Omega} \frac{k_i^n}{1+\gamma w_n} \Phi \right] \end{cases} \quad (4.8)$$

となる. ここで, 補題 4.1 の証明中の議論より, 必要ならば適当な部分列を経由して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_i^n, k_i^n) = (p_i \Phi, q_i \Phi) \text{ in } C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$$

が $|p_i| + |q_i| = 1$ を満たすある (p_i, q_i) に対して成り立つとしてよい. さらに, 命題 1 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n, z_n, a_1^n) = (s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi, \psi(s)) \text{ in } C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \times \mathbf{R}$$

である. 従って, 各 $i = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_w(w_n, z_n, a_1^n) h_i^n \Phi & \int_{\Omega} f_z(w_n, z_n, a_1^n) k_i^n \Phi \\ \int_{\Omega} g_w(w_n, z_n) h_i^n \Phi & \int_{\Omega} g_z(w_n, z_n) k_i^n \Phi \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} p_i \int_{\Omega} f_w(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi, \psi(s)) \Phi^2 & q_i \int_{\Omega} f_z(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi, \psi(s)) \Phi^2 \\ p_i \int_{\Omega} g_w(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi) \Phi^2 & q_i \int_{\Omega} g_z(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi) \Phi^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

が成り立つ. さらに (3.2) および (3.9) を参照の上, 直接計算を施すと,

$$F_{(s,t)}^0(s, \varphi(\gamma s), \psi(s)) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_w(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi, \psi(s)) \Phi^2 & \int_{\Omega} f_z(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi, \psi(s)) \Phi^2 \\ \int_{\Omega} g_w(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi) \Phi^2 & \int_{\Omega} g_z(s\Phi, \varphi(\gamma s)\Phi) \Phi^2 \end{bmatrix}$$

が示される. 結局 (4.9) で $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$F_{(s,t)}^0(s, \varphi(\gamma s), \psi(s)) \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} = - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_i^n}{\varepsilon_n} \right) J(s) \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

が成り立つ. 但し,

$$J(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ -\frac{\gamma \varphi(\gamma s)}{d_2} \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma s\Phi)^2} & \frac{1}{d_2} \int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1+\gamma s\Phi} \end{bmatrix}$$

とおいた. $|p_i| + |q_i| = 1$ ($i = 1, 2$) であるから, (4.10) はとりもなおさず (4.6) を意味している. (4.10) が部分列をとらなくても成立することを見るのは容易である. $\square$

補題 4.3. 正数 ε が十分に小さいとせよ. このとき,

$$(w^*, z^*, a_1^*) = (w(\xi^*, \varepsilon), z(\xi^*, \varepsilon), a_1(\xi^*, \varepsilon)) \in \Gamma^\varepsilon \quad (0 < \xi^* < C_\varepsilon)$$

が退化解であること, すなわち $\mu_1(\xi^*, \varepsilon) = 0$ であることと $\partial_\xi a_1(\xi^*, \varepsilon) = 0$ が成り立つことは同値である.

補題 4.3 の証明は, Du-Lou [5] により開発された, Fredholm 作用素に関する摂動理論を用いて示される. 詳しくは [5, Theorem 3.13, Appendix] を参照されたい.

(3.9) より, 解析性に注意すると $\psi'(s)$ の零点は有界区間 I 上では高々有限個である. さらに, I 上の任意の ψ' の零点 s^* は, ほとんどいたるところの $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ に対して $\psi''(s^*) \neq 0$ を満たす. 次に, 補題 4.3 で得られた ε が十分小さいときの $\partial_\xi a_1(\xi, \varepsilon)$ の全ての零点を

$$0 < \xi_1(\varepsilon) < \xi_2(\varepsilon) < \cdots < \xi_{k-1}(\varepsilon) < C_\varepsilon$$

とおく. このとき 命題 1 より, ほとんどいたるところの $(\tau, \gamma) \in [-\tilde{\tau}, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ に対して,

$$(w_i, z_i, a_1^i) := (w(\xi_i(\varepsilon), \varepsilon), z(\xi_i(\varepsilon), \varepsilon), a_1(\xi_i(\varepsilon), \varepsilon)) \in \Gamma^\varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

は必ず a_1 に関する turning point となる. さらに $1 \leq i \leq k$ に対して,

$$\Gamma_i^\varepsilon := \{((w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) : \xi \in (\xi_{i-1}(\varepsilon), \xi_i(\varepsilon)))\} \quad (\text{但し, } \xi_0(\varepsilon) := 0, \xi_k(\varepsilon) = C_\varepsilon)$$

とおく. すなわち

$$\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^\varepsilon = \Gamma^\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \{(w_i, z_i, a_1^i)\}$$

である.

補題 4.4. ほとんどいたるところの $(\tau, \beta) \in [-\tilde{\tau}, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ に対して, ある正数 δ と ε_0 が存在し, $d_1/d_2 \leq \delta$ かつ $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば, $\Gamma_{2j-1}^\varepsilon$ ($j = 1, 2, \dots, [(k+1)/2]$) 上の正値定常解は線型化安定である. 一方でこのとき, Γ_{2j}^ε ($j = 1, 2, \dots, [k/2]$) 上の正値定常解は線型化不安定である.

Proof. (4.4) で定義した行列 $M(s)$ の固有値 $\nu_1(s), \nu_2(s)$ に対して, $M(s)$ のトレースをとることにより,

$$\begin{aligned} & \nu_1(s) + \nu_2(s) \\ &= d_2 \varphi(\gamma s) \left[\int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1 + \gamma s \Phi)^2} \left(\int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1 + \gamma s \Phi} \right)^{-1} - \frac{d_1 c \gamma s}{d_2} \int_{\Omega} \frac{\Phi^4}{(1 + \gamma s \Phi)^2} \right] \\ & \quad + d_1 s \|\Phi\|_3^3 + d_1 c \gamma s \varphi(\gamma s) \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{1 + \gamma s \Phi} \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1 + \gamma s \Phi)^2} \left(\int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1 + \gamma s \Phi} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

がわかる. ここで $h(s) := \int_{\Omega} s\Phi^4 / (1+s\Phi)^2$ とおくと, $h(0) = 0$ かつ $h(s) = O(s^{-1})$ ($s \rightarrow \infty$) であるから, $h(s)$ はある $s = \hat{s} > 0$ で $h(\hat{s}) = \sup_{s>0} h(s)$ を満たす. この事実注意到 (4.11) から,

$$\begin{aligned} \nu_1(s) + \nu_2(s) &\geq d_2\varphi(\gamma s) \left[\int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma s\Phi)^2} \left(\int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1+\gamma s\Phi} \right)^{-1} - \frac{d_1 c}{d_2} h(\gamma s) \right] + d_1 s \|\Phi\|_3^3 \\ &> d_2\varphi(\gamma s) \left[\int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma C_0\Phi)^2} - \frac{d_1 c}{d_2} h(\hat{s}) \right] + d_1 s \|\Phi\|_3^3 \end{aligned}$$

が各 $s \in [0, C_0]$ に対して成り立つ. ここで $\varphi(s) > 0$ ($s \in [0, C_0]$) であることから,

$$\frac{d_1}{d_2} < \frac{1}{2ch(\hat{s})} \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma C_0\Phi)^2}$$

ならば, $\nu_1(s) + \nu_2(s) > 0$ ($s \in [0, C_0]$) が成り立つ. 従って, 補題 4.2 より, $\varepsilon > 0$ が十分に小さければ,

$$\mu_1(\xi, \varepsilon) + \mu_2(\xi, \varepsilon) > 0 \quad (\xi \in [0, C_\varepsilon]) \quad (4.12)$$

が得られる. 一方において, 直接計算により,

$$\nu_1(s)\nu_2(s) = \text{Det } M(s) = d_1 d_2 s \varphi(\gamma s) \psi'(s) \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1+\gamma s\Phi)^2} \left(\int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1+\gamma s\Phi} \right)^{-1} \quad (4.13)$$

が確かめられる (この計算は, 紙面の都合上割愛するが若干骨が折れる). (4.13) より,

$$\text{sign } \nu_1(s)\nu_2(s) = \text{sign } \psi'(s) \quad (s \in (0, C_0))$$

がわかる. ここで, $s_0 \in (0, C_0)$ を任意にとり固定する. $\psi'(s_0) > 0$ のとき, 補題 4.2 より (ξ, ε) が $(s_0, 0)$ に十分に近ければ, $\mu_1(\xi, \varepsilon)\mu_2(\xi, \varepsilon) > 0$ である. このとき (4.12) に注意すると $\text{Re } \mu_1(\xi, \varepsilon) > 0$ が成り立つ. 同様にして, $\psi'(s_0) < 0$ のとき, (ξ, ε) が $(s_0, 0)$ に十分に近ければ, $\text{Re } \mu_1(\xi, \varepsilon) < 0$ が成り立つ.

さらに, 命題 1, 補題 4.3 および (4.12) より, $\varepsilon > 0$ が十分小さければ, $\mu_1(\xi, \varepsilon) = 0$ と $\xi = \xi_i(\varepsilon)$ がある $1 \leq i \leq k-1$ に対して成り立つことは同値である. 結局 $\psi'(0) > 0$ より,

$$\begin{cases} \text{Re } \mu_1(\xi, \varepsilon) > 0 & \text{if } (w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \in \Gamma_{2j-1}^\varepsilon, \\ \text{Re } \mu_1(\xi, \varepsilon) < 0 & \text{if } (w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \in \Gamma_{2j}^\varepsilon \end{cases}$$

が得られる. □

ここで得られた (PP) の正值定常解の線型化安定性が X の位相での漸近安定性を導くことを示すには, 以下に述べる Potier-Ferry [16] の準線型放物型方程式に対する線型化原理が有効である. 準備として, (2.2) で定義した Banach 空間 X および Y に対して, Lions-Peetre [10] の意味での補間空間 $[X, Y]_{\theta, p}$ ($\theta \in [0, 1]$) が必要となる. ここでは, $\theta \in (0, 1/2)$ ならば, $[X, Y]_{\theta, p} = [W^{2(1-\theta), p}(\Omega) \cap W_0^{1, p}(\Omega)] \times [W^{2(1-\theta), p}(\Omega) \cap W_0^{1, p}(\Omega)]$, 一方で $\theta \in (1/2, 1)$ ならば, $[X, Y]_{\theta, p} = W^{2(1-\theta), p}(\Omega) \times W^{2(1-\theta), p}(\Omega)$ となることを述べておく (Grisvard [6]).

補題 4.5 (Potier-Ferry [16]). $\theta \in (0, 1]$ および $\theta' \in [0, 1)$ とする. さらに, $T(u) : X \rightarrow Y$ は $u = 0$ の $[X, Y]_{\theta, p}$ におけるある近傍 $B_{\theta, p}$ 内の各 u に対して定義される線型閉作用素, f は $u = 0$ の X におけるある近傍から $[X, Y]_{\theta', p}$ への非線型作用素とする. これらの仮定の下で, 次の条件 (i) – (iv) が満たされるとせよ:

(i) ある正数 ω, κ および C_1 が存在して, $-T(0)$ のレゾルベント集合 $\rho(-T(0))$ は $\rho(-T(0)) \supset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq -\kappa \text{ or } |\arg z| < \pi/2 + \omega\} (= \Sigma(\omega, \kappa))$ を満たし,

$$\|(T(0) + \mu)^{-1}\| \leq \frac{C_1}{1 + |\mu|} \quad (4.14)$$

が任意の $\mu \in \Sigma(\omega, \kappa)$ に対して成り立つ;

(ii) 任意の $x \in X$ に対して, 写像 $u \mapsto T(u)x : B_{\theta, p} \rightarrow Y$ は微分可能であって, さらにある正数 η, C_2 が存在して,

$$\|[T'(u_1)v - T'(u_2)v]x\|_Y \leq C_2(\|u_2 - u_1\|_{\theta, p})^\eta \|v\|_{\theta, p} \|x\|_X$$

が成り立つ;

(iii) ある正数 C_3 に対して, $\|f(u_1) - f(u_2)\|_{\theta', p} \leq C_3\|u_1 - u_2\|_X$ が成り立つ;

(iv) ある正数 C_4 に対して, $\|f(u)\|_{\theta', p} \leq C_4\|u\|_X^2$ が成り立つ.

このとき, 初期値問題

$$\frac{du}{dt} + T(u)u = f(u), \quad u(0) = u_0 \in X$$

は $\|u_0\|_X$ が小さければ一意的な大域解 $u \in C([0, \infty), X) \cap C^1([0, \infty), Y)$ をもち, ある正数 C_5 に対して

$$\|u(t)\|_X \leq C_5\|u_0\|_X \exp(-\kappa t)$$

を満たす.

命題 4. ほとんどいたるところの $(\tau, \beta) \in [-\tilde{\tau}, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ に対して, ある正数 δ と ε_0 が存在し, $d_1/d_2 \leq \delta$ かつ $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば, $\Gamma_{2j-1}^\varepsilon$ ($j = 1, 2, \dots, [(k+1)/2]$) 上の正值定常解は X の位相で漸近安定である. 一方でこのとき, Γ_{2j}^ε ($j = 1, 2, \dots, [k/2]$) 上の正值定常解は不安定である.

Proof. 補題 4.5 を適用するために, 任意に固定された

$$(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)) \in \Gamma_{2j-1}^\varepsilon$$

に対して, $(w, z, a_1) = (W + w(\xi, \varepsilon), Z + z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon))$ を (PP) に代入する. このとき $\mathbf{W} := (W, Z)$ および

$$(w^{\xi, \varepsilon}, z^{\xi, \varepsilon}, a_1^{\xi, \varepsilon}) := (w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon)), \quad \mathbf{w}^{\xi, \varepsilon} = (w^{\xi, \varepsilon}, z^{\xi, \varepsilon})$$

とおくと, $\mathbf{W}$ は初期値問題

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} + T(\mathbf{W})\mathbf{W} = \mathbf{f}(\mathbf{W}), \quad \mathbf{W}(0) = (w_0 - w^{\xi, \varepsilon}, z_0 - z^{\xi, \varepsilon})$$

を満たすことが分かる。ここで,

$$T(\mathbf{W})\mathbf{W} = -J(\mathbf{W})^{-1}(H\mathbf{W} + \varepsilon B_{(w,z)}(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}, a_1^{\xi,\varepsilon})\mathbf{W}),$$

$$J(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ -\frac{\gamma(z^{\xi,\varepsilon} + Z)}{d_2\{1 + \gamma(w^{\xi,\varepsilon} + W)\}^2} & \frac{1}{d_2\{1 + \gamma(w^{\xi,\varepsilon} + W)\}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{W}) = \varepsilon J(\mathbf{W})^{-1} \left(\begin{pmatrix} f(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon} + \mathbf{W}, a_1^{\xi,\varepsilon}) - f(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}, a_1^{\xi,\varepsilon}) \\ g(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon} + \mathbf{W}) - g(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}) \end{pmatrix} - B_{(w,z)}(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}, a_1^{\xi,\varepsilon})\mathbf{W} \right)$$

である。従って, 正值定常解 $\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}$ の X の位相での漸近安定性を示すには, 補題 4.5 の条件 (i)-(iv) が成り立つことを確かめればよい。 $\theta \in (0, 1/2)$ に対して, Sobolev の埋蔵定理より

$$W^{2(1-\theta),p}(\Omega) \subset C^\nu(\overline{\Omega}) \quad \text{if } \nu = 2(1-\theta) - \frac{N}{p}$$

が成り立つ点に注意する。特に $\theta = 1/4$ とすると,

$$X \subset [X, Y]_{1/4, \theta} = [W^{3/2,p}(\Omega) \cup W_0^{1,p}(\Omega)]^2 \subset C^{1/2}(\overline{\Omega})^2$$

であることより (ii) が確かめられる。また,

$$X \subset C^{1/2}(\overline{\Omega})^2 \subset W^{1/2,p}(\Omega)^2 = [X, Y]_{3/4, p}$$

ゆえ $\theta' = 3/4$ とすれば, (iii) と (iv) が成り立つ。さらに,

$$T(0) = -J(\xi, \varepsilon)^{-1}(H + \varepsilon B_{(w,z)}(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}, a_1^{\xi,\varepsilon}))$$

であるから, 補題 4.4 により $(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}, a_1^{\xi,\varepsilon}) \in \Gamma_{2j-1}^\varepsilon$ ならばある正数 ω, κ に対して $\rho(-T(0)) \cap \Sigma(\omega, \kappa)$ が成り立つ。また, 任意の $\mu \in \Sigma(\omega, \kappa)$ に対して, レゾルベント評価 (4.14) も成り立つ。従って, 補題 4.5 の全ての条件が確かめられ, $\|\mathbf{W}(0)\|_X$ が小さければ,

$$\|\mathbf{W}(t)\|_X \leq C_1 \|\mathbf{W}(0)\|_X \exp(-\kappa t) \quad (t > 0)$$

がある正定数 C_1 に対して成り立つ。この評価は, $\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}$ の X における漸近安定性を意味している。さらに, 線型化不安定な正值定常解 $(\mathbf{w}^{\xi,\varepsilon}, a_1^{\xi,\varepsilon}) \in \Gamma_{2j}^\varepsilon$ が X の位相で不安定であることも示される (Drangeid [4, Theorem 4.1] を参照)。 $\square$

変数変換 (3.1) の正則性より, 命題 4 から 定理 4 および定理 6 の前半部が直ちに示される。

命題 5. 任意の $(\tau, \beta) \in [-\tilde{\tau}, \tilde{\tau}] \times [\tilde{\gamma}, \infty)$ に対して, ある正数 D と ε_0 が存在し, $d_1/d_2 \geq D$ かつ $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば, ある $(w(\xi_H, \varepsilon), z(\xi_H, \varepsilon), a_1(\xi_H, \varepsilon)) \in \Gamma_1^\varepsilon$ において Hopf 分岐がおこる。

Proof. $\nu_1(s), \nu_2(s)$ を (4.4) で定義した行列 $M(s)$ の固有値とせよ. このとき (4.11) より,

$$k(s) := \int_{\Omega} \frac{\Phi^4}{(1 + \gamma s \Phi)^2} - \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{1 + \gamma s \Phi} \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1 + \gamma s \Phi)^2} \left(\int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1 + \gamma s \Phi} \right)^{-1} - \frac{\|\Phi\|_3^3}{c\gamma\varphi(\gamma s)}$$

とおくと,

$$\nu_1(s) + \nu_2(s) = d_2\varphi(\gamma s) \left[\int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1 + \gamma s \Phi)^2} \left(\int_{\Omega} \frac{\Phi^2}{1 + \gamma s \Phi} \right)^{-1} - \frac{d_1}{d_2} c\gamma s k(s) \right] \quad (4.15)$$

である. ここで $k(0) = \|\Phi\|_4^4 - \|\Phi\|_3^6 - \|\Phi\|_3^3 (cb_1\gamma)^{-1}$ であるが, $\|\Phi\|_2 = 1$ および Schwarz の不等式より $\|\Phi\|_4^4 > \|\Phi\|_3^6$ ゆえ, γ を十分大きくとると $k(0) > 0$ である. ところで, (4.13) および $\psi'(0) > 0$ より $s > 0$ が小さければ $\nu_1(s)\nu_2(s) > 0$ である. 一方で (4.15) で $k(0) > 0$ より, d_1/d_2 を十分大きくとると,

$$\begin{cases} \nu_1(s) + \nu_2(s) > 0 & \text{in } (0, s_0), \quad \nu_1(s_0) + \nu_2(s_0) = 0, \\ \nu_1'(s_0) + \nu_2'(s_0) < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

が, 十分小さい $s_0 > 0$ に対して成り立つ. このとき $(s_0, 0)$ に十分近いある (ξ^*, ε) に対して, 固有値 $\mu_1(\xi^*, \varepsilon)$ および $\mu_2(\xi^*, \varepsilon)$ が, 複素共役の関係にある純虚数であつて, $\partial_{\xi} \operatorname{Re} \mu_i(\xi^*, \varepsilon) < 0$ ($i = 1, 2$) であることを示そう. そのために, 陰関数定理を用いて $(s_0, 0)$ の近傍で (4.2) の固有値 μ および 固有関数 (h, k) を

$$\mu = \varepsilon\nu, \quad (h, k) = (1, \eta)\Phi + \varepsilon V \quad (V \in X_1)$$

の形で構成する. そこで (4.2) に対応して, 写像 $G: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2 \times X_1 \rightarrow Y$ を

$$G(\xi, \varepsilon, \nu, \eta, V) := H((1, \eta)\Phi + \varepsilon V) + \varepsilon \hat{B}(\xi, \varepsilon)((1, \eta)\Phi + \varepsilon V) + \varepsilon \nu J(\xi, \varepsilon)((1, \eta)\Phi + \varepsilon V)$$

と定義する. 但し $\hat{B}(\xi, \varepsilon) := B_{(w, z)}(w(\xi, \varepsilon), z(\xi, \varepsilon), a_1(\xi, \varepsilon))$ とした. このとき, 固有値問題 (4.2) は方程式 $G(\xi, \varepsilon, \nu, \eta, V) = 0$ と同値である. このまま $\varepsilon = 0$ としても, 何の情報も得られない. そこで $\operatorname{span}\{(\Phi, 0), (0, \Phi)\}$ と Y_1 の成分に分解しよう:

$$\begin{cases} (I - Q)\hat{B}(\xi, \varepsilon)((1, \eta)\Phi + \varepsilon V) + \nu(I - Q)J(\xi, \varepsilon)((1, \eta)\Phi + \varepsilon V) = 0, \\ QH(V) + Q\hat{B}(\xi, \varepsilon)((1, \eta)\Phi + \varepsilon V) + \varepsilon \nu QJ(\xi, \varepsilon)((1, \eta)\Phi + \varepsilon V) = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

写像 $G^1: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2 \times X_1 \rightarrow \operatorname{span}\{(\Phi, 0), (0, \Phi)\}$ を (4.17) の第 1 方程式の左辺, $G^2: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2 \times X_1 \rightarrow Y_1$ を (4.17) の第 2 方程式の左辺として定義する. このとき, $(I - Q)\hat{B}(s_0, 0) = F_{(s, t)}(s_0, \varphi(\gamma s_0), \psi(s_0))\Phi$ および $(I - Q)J(s_0, 0) = J(s_0)$ であつたことを思い出すと, 行列 $M(s_0)$ の固有値 ν_i^0 ($i = 1, 2$) に対応する固有ベクトル $(1, \eta_i^0)$ に対して,

$$G(s_0, 0, \nu_i^0, \eta_i^0, V_i^0) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

が $V_i^0 = -(QH)^{-1}(Q\hat{B}(s_0, 0)[(1, \eta_i^0)\Phi] + \nu_i QJ(s_0, 0)[(1, \eta_i^0)\Phi])$ に対して成り立つ. 陰関数定理を使うために, $G_{(\nu, \eta, V)}(s_0, 0, \nu_i^0, \eta_i^0, V_i^0) : C^2 \times X_1 \rightarrow Y$ は可逆であることを示す. Fréchet 微分を計算すると,

$$\begin{aligned} & G_{(\nu, \eta, V)}^1(s_0, 0, \nu_i^0, \eta_i^0, V_i^0)[\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{V}] \\ &= F_{(s, t)}(s_0, \varphi(\gamma s_0), \psi(s_0))[(0, \bar{\eta})\Phi] + \bar{\nu}J(s_0)[(1, \eta_i)\Phi] + \nu_i^0 J(s_0)[(0, \bar{\eta})\Phi], \\ & G_{(\nu, \eta, V)}^2(s_0, 0, \nu_i^0, \eta_i^0, V_i^0)[\bar{\nu}, \bar{\eta}, \bar{V}] \\ &= \bar{\nu} QJ(s_0, 0)[(1, \eta_i)\Phi] + Q\hat{B}(s_0, 0)[(0, \bar{\eta})\Phi] + \nu_i^0 QJ(s_0, 0)[(0, 1)\Phi] + QH(\bar{V}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

である. ここで $s_0 > 0$ が十分小さいことより $\psi'(s_0) > 0$ である. 従って,

$$\text{Det } F_{(s, t)}(s_0, \varphi(\gamma s_0), \psi(s_0)) = s_0 \varphi(\gamma s_0) \psi'(s_0) \int_{\Omega} \frac{\Phi^3}{(1 + \gamma s_0 \Phi)^2}$$

より $F_{(s, t)}(s_0, \varphi(\gamma s_0), \psi(s_0))$ は可逆である. この事実注意到 $G_{(\nu, \eta, V)}(s_0, 0, \nu_i^0, \eta_i^0, V_i^0)$ が可逆であることが示される. 従って, 陰関数定理より (4.2) の固有値 $\mu_i(\xi, \varepsilon)$ ($i = 1, 2$) は $(s_0, 0)$ の近傍である滑らかな関数 $\nu_i(\xi, \varepsilon)$ を用いて

$$\mu_i(\xi, \varepsilon) = \varepsilon \nu_i(\xi, \varepsilon) \quad (i = 1, 2)$$

と表示される. さらに $\nu_i(s_0, 0) = \nu_i(s_0)$ である. 従って (4.15) より, $(s_0, 0)$ に十分近いある (ξ^*, ε) に対して,

$$\begin{cases} \mu_1(\xi, \varepsilon) + \mu_2(\xi, \varepsilon) > 0 \text{ for } \xi \in (0, \xi^*), & \mu_1(\xi^*, \varepsilon) + \mu_2(\xi^*, \varepsilon) = 0, \\ \partial_{\xi} \mu_1(\xi^*, \varepsilon) + \partial_{\xi} \mu_2(\xi^*, \varepsilon) < 0, \\ \mu_1(\xi, \varepsilon) \mu_2(\xi, \varepsilon) > 0 \text{ for } \xi \in (0, \xi^*) \end{cases}$$

が成り立つ. これは, $\mu_1(\xi^*, \varepsilon)$ および $\mu_2(\xi^*, \varepsilon)$ が, 複素共役の関係にある純虚数であって, $\partial_{\xi} \text{Re } \mu_i(\xi^*, \varepsilon) < 0$ ($i = 1, 2$) であることを述べている. つまり, $(w(\xi^*, \varepsilon), z(\xi^*, \varepsilon), a_1(\xi^*, \varepsilon))$ において, Hopf 分岐が起こる (Amann [3] 参照). $\square$

変数変換 (3.1) の正則性より, 命題 5 から 定理 5 および定理 6 の後半部が示される.

参考文献

- [1] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic equations-I. Abstract evolution equations, *Nonlinear Anal. T.M.A.*, **12** (1988), 895–919.
- [2] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic equations-II. Reaction-diffusion systems, *Differential Integral Equations*, **3** (1990), 13–75.
- [3] H. Amann, Hopf bifurcation in quasilinear reaction-diffusion systems, in “Delay differential equations and dynamical systems (Claremont, CA, 1990)”, 53–63, Lecture Notes in Math., 1475, Springer, Berlin, 1991.

- [4] A.-K. Drangeid, The principle of linearized stability for quasilinear parabolic evolution equations, *Nonlinear Anal. T.M.A.*, **13** (1989), 1091–1113.
- [5] Y. Du and Y. Lou, S-shaped global bifurcation curve and Hopf bifurcation of positive solutions to a predator-prey model, *J. Differential Equations*, **144** (1998), 390–440.
- [6] P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **25** (1967), 40–63.
- [7] T. Kato, “Perturbation theory for linear operators”, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1966.
- [8] 久藤 衡介, 相互拡散項をもつ Lotka-Volterra 系の正值定常解に関する多重性, “第 23 回発展方程式若手セミナー報告集” (2002), 131–137.
- [9] K. Kuto and Y. Yamada, Multiple coexistence states for a prey-predator system with cross-diffusion, preprint.
- [10] J. L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.* **19** (1964).
- [11] J. López-Gómez and R. Pardo, Coexistence regions in Lotka-Volterra models with diffusion, *Nonlinear Anal. TMA.*, **19** (1992), 11–28.
- [12] J. López-Gómez and R. Pardo, Existence and uniqueness of coexistence states for the predator-prey model with diffusion, *Differential Integral Equations*, **6** (1993), 1025–1031.
- [13] Y. Lou, W.-M. Ni and Y. Wu, On the global existence of a cross-diffusion system, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **4** (1998), 193–203.
- [14] K. Nakashima and Y. Yamada, Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion, *Adv. Differential Equations*, **6** (1996), 1099–1122.
- [15] A. Okubo and L. A. Levin, “Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspective”, Second edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, **14**, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [16] M. Potier-Ferry, The linearization principle for the stability of solutions of quasilinear parabolic equations-I, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **77** (1981), 301–320.
- [17] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, Spatial segregation of interacting species, *J. Theor. Biol.*, **79** (1979), 83–99.

Gray-Scott モデルにおける定常解と安定性について

早稲田大学大学院理工学研究科M2 佐藤典弘

1 Gray-Scott モデル

次の一般化された空間 1 次元 Gray-Scott モデルを考える:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - uv^\alpha + \lambda(1 - u), & (x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ \gamma v_t = \gamma v_{xx} + uv^\alpha - v, & (x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1)$$

ここで λ, γ, d は正定数であり、 $\alpha > 1$ である。(1) の定常解は、以下の常微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} u'' = uv^\alpha - \lambda(1 - u), & x \in \mathbf{R}, \\ \gamma v'' = v - uv^\alpha, & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2)$$

ここでは常に

$$\lambda\gamma = 1 \quad (3)$$

の場合を考える。そのとき、 γ をパラメータとして次の定理が Hale-Peletier-Troy[2] によって得られている。

Theorem HPT1([2]) λ, γ が (3) を満たすとき、

$$\gamma_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}}, \quad \gamma_2 = \frac{2^{1/(\alpha-1)}(\alpha + 2)\gamma_1}{(\alpha + 1)^{\alpha/(\alpha-1)}}$$

とおく。

(a) $0 < \gamma < \gamma_2$ ならば、定常問題 (2) は以下の性質を満たす解 $(u(x), v(x))$ をただ一つ持つ。(ただし平行移動による自由度は除く。)

- (i) $u(-x) = u(x), \quad v(-x) = v(x), \quad u(x) = 1 - \gamma v(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R},$
- (ii) $u'(x) > 0, v'(x) < 0 \quad \text{for } x > 0,$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (u(x), u'(x), v(x), v'(x)) = (1, 0, 0, 0).$

(b) $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$ ならば、定常問題 (2) は以下の性質を満たす解 $(u(x), v(x))$ をただ一つ持つ。(ただし平行移動による自由度は除く。)

- (i) $u(-x) = u(x), \quad v(-x) = v(x), \quad u(x) = 1 - \gamma v(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R},$
- (ii) $u'(x) < 0, v'(x) > 0 \quad \text{for } x > 0,$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (u(x), u'(x), v(x), v'(x)) = (1 - \gamma v_+, 0, v_+, 0).$

ここで v_+ は方程式 $f(v, \gamma) := v(1 - v^{\alpha-1} + \gamma v^\alpha) = 0$ を満たす最大の解である。

(c) $\gamma = \gamma_2$ ならば、定常問題 (2) は以下の性質を満たす解 $(u(x), v(x))$ をただ一つ持つ。(ただし平行移動による自由度は除く。)

(i)

$$u'(x) < 0, \quad v'(x) > 0 \quad \text{for } x \in \mathbf{R},$$

(ii)

$$(u(x), v(x)) \rightarrow \begin{cases} (1, 0) & \text{as } x \rightarrow -\infty, \\ (1 - \gamma_2 v_+, v_+) & \text{as } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

ただし、

$$v_+ = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \right)^{1/\alpha-1}$$

Theorem HPT1 で得られた定常解の安定性に関しては、Hale-Peletier-Troy[1] において $d = 1, \alpha = 2$ という特別な場合に以下の結果が得られている。

Notation. C_B を $\mathbf{R}$ 上有界連続な関数の集合とし、 $u \in C_B$ のノルムは $\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x)|$ で定める。

Theorem HPT2([1]) $d = 1, \alpha = 2$ ならば、Theorem HPT1 によって与えられたホモクリニック解は C_B -不安定である。

$\zeta = (\varphi, \psi)$ を $\gamma = \gamma_2$ に対する Theorem HPT1 によって与えられた、(2) のヘテロクリニック解とする。(1) に対する初期値を $z_0 = (u_0(x), v_0(x)) \in C_B \times C_B$ とおくと以下の定理が成り立つ。

Theorem HPT3([1]) $d = 1, \alpha > 1$ ならば、 ζ は以下の意味で漸近安定である。すなわち、ある定数 $\delta, M, \kappa > 0$ と $\xi \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$\|z_0 - \zeta(\cdot)\|_\infty < \delta$$

ならば、初期値 z_0 に対応する (1) の解 $z(\cdot, t) = (u, v)$ は以下の不等式を満たす：

$$\|z(\cdot, t) - \zeta(\cdot + \xi)\|_\infty \leq M \|z(\cdot, 0) - \zeta(\cdot)\|_\infty e^{-\kappa t}.$$

本講演では以下の問題に対して興味を持たれる。

Problem. $d = 1, \alpha > 1$ のとき Theorem HPT1 によって得られた定常解の安定性はどうなるか？

2 Problem に対する結果

我々は Problem に対して以下の結果を得た。

Theorem I([4]) $d = 1, \alpha > 1$ ならば、Theorem HPT1 によって与えられたホモクリニック解は C_B -不安定である。

Proof. 証明は Theorem HPT2 と同様なので省略する。

$\zeta = (\varphi, \psi)$ を $\gamma = \gamma_2$ に対する Theorem HPT1 によって与えられた (2) のヘテロクリニック解とする。(1) に対する初期値を $z_0 = (u_0(x), v_0(x)) \in C_B \times C_B$ とおくと以下の定理が成り立つ。

Theorem II([4]) $d = 1, \alpha > 1$ ならば、 ζ は以下の意味で漸近安定である。すなわち、ある定数 $\delta, M, \kappa > 0$ と $\xi \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$\|z_0 - \zeta(\cdot)\|_\infty < \delta$$

ならば、初期値 z_0 に対応する (1) の解 $z(\cdot, t) = (u, v)$ は以下の不等式を満たす：

$$\|z(\cdot, t) - \zeta(\cdot + \xi)\|_\infty \leq M \|z(\cdot, 0) - \zeta(\cdot)\|_\infty e^{-\kappa t}.$$

Theorem II の証明を述べる。以後、

$$\gamma = \gamma_2 = \frac{2^{1/(\alpha-1)}(\alpha-1)(\alpha+2)}{\{\alpha(\alpha+1)\}^{\alpha/(\alpha-1)}}$$

とおく。 L を ζ に関する線形化作用素とし、そのスペクトルを $\sigma(L)$ と記述する。すなわち、 $\eta = (u, v)^t$ に対して

$$L\eta = - \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi^\alpha + \frac{1}{\gamma} & \alpha\varphi\psi^{\alpha-1} \\ -\frac{1}{\gamma}\psi^\alpha & -\frac{\alpha}{\gamma}\varphi\psi^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と定義する。証明のために次のよく知られた安定性に関する結果を用いる。

Theorem H ([3]) L を ζ に対する線形化作用素とし、スペクトル $\sigma(L) = \{0\} \cup \sigma^*$ について、 0 は単純固有値で $\operatorname{Re} \sigma^* \leq \nu < 0$ とする。そのとき、 ζ は次の意味で安定である。すなわち、 ζ の任意の小さな近傍 $U \subset X$ に対して、定数 $\kappa > 0, M > 0$ が存在して、 U 内の任意の初期値に対応する解 $z(x, t)$ は以下を満たす：

$$\|z(\cdot, t) - \zeta(\cdot + \xi)\|_\infty \leq M \|z(\cdot, 0) - \zeta(\cdot)\|_\infty e^{-\kappa t}.$$

まず、 L のエッセンシャルスペクトル $\sigma_e(L)$ を調べる。

Lemma 1 ([4]) $\sigma_e(L)$ について

$$\sigma_e(L) \subset \{\mu \in \mathbf{R} \mid \mu \geq c\}$$

が成立する。ここで

$$c = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} & \alpha \geq 2, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\gamma} & 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

である。

Proof. Lemma 1 を証明するために、Henry の結果 ([3, p140] の Theorem A.2) を用いると、

$$\sigma_e(L) \subset S_+ \cup S_- \quad \text{for } L\eta = -\eta_{xx} + N(x)\eta$$

が成り立つ。ただし、 $N(x) \rightarrow N_\pm$ as $x \rightarrow \pm\infty$ とおくと、 $S_\pm = \{\mu \mid \det(\tau^2 I + N_\pm - \mu I) = 0 \text{ for some real } \tau, -\infty < \tau < \infty\}$ である。

最初に S_+ を計算する。 L を

$$L\eta = -\eta_{xx} + \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \eta$$

と記述すると、

$$a(x) \rightarrow a_+, \quad b(x) \rightarrow b_+, \quad c(x) \rightarrow c_+, \quad d(x) \rightarrow d_+ \quad \text{as } x \rightarrow +\infty$$

が成り立つことがわかる。ここで、

$$a_+ = v_+^\alpha + \frac{1}{\gamma}, \quad b_+ = \alpha u_+ v_+^{\alpha-1}, \quad c_+ = -\frac{1}{\gamma} v_+^\alpha, \quad d_+ = -\frac{\alpha}{\gamma} u_+ v_+ + \frac{1}{\gamma}.$$

$\mu \in S_+$ が

$$\det \left\{ \tau^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_+ & b_+ \\ c_+ & d_+ \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

を満たすことに注意すると、

$$\mu = \tau^2 + \frac{A \pm B}{2}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} A &= a_+ + d_+ = \frac{2}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} u_+ v_+^{\alpha-1} + v_+^\alpha, \\ B &= \sqrt{(a_+ - d_+)^2 + 4b_+ c_+} = \left| v_+^\alpha - \frac{\alpha}{\gamma} u_+ v_+^{\alpha-1} \right|, \\ u_+ &= 1 - \gamma v_+ = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}, \\ v_+ &= \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \right)^{1/\alpha-1} \end{aligned}$$

である。多少の計算により

$$S_+ = \begin{cases} \{\mu \in \mathbf{R} \mid \mu \geq \frac{1}{\gamma}\}, & \alpha \geq 2, \\ \{\mu \in \mathbf{R} \mid \mu \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\gamma}\}, & 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

となることが示される。

同様にして、

$$S_- = \left\{ \mu \in \mathbf{R} \mid \mu \geq \frac{1}{\gamma} \right\}$$

が成り立つ。ゆえに Lemma 1 が成り立つ。

(証明終)

次に、有限重複度の孤立固有値問題について考える。 $p = u + \gamma v$ とおくと、 $L\eta = \mu\eta$ は

$$\begin{cases} -p'' + \frac{1}{\gamma}p = \mu p, \\ -v'' - \frac{\alpha}{\gamma}p + \{(1+\alpha)\varphi^\alpha - \frac{\alpha}{\gamma}\varphi^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma}\}v = \mu v \end{cases} \quad (4)$$

と同値な式となる。

(4) を $\theta = (p, v)^t$ に対して $\hat{L}\theta = \mu\theta$ と記述する。明らかに μ が L の固有値であることと、 μ が $\hat{L}$ の固有値であることは同値である。作用素 $\hat{L}$ の性質により、固有値 μ は実数でなければならない。さらに次の補題が成り立つ。

Lemma 2 ([4]) $\mu = 0$ は単純固有値である。

証明は [1] とほとんど同様である。

Lemma 3 ([4]) L の負の固有値は存在しない。

Proof. μ が L の負の固有値であるとする。(4) より、 $-p'' + (\frac{1}{\gamma} - \mu)p = 0$ となる。 p が一様有界なので p は恒等的に 0 でなければならない。それゆえに、 $v \neq 0$ が存在して、

$$Tv \stackrel{\text{def}}{=} -v'' + f'(\psi)v = \mu v \quad (5)$$

となる。ここで

$$f'(\psi) = (1+\alpha)\psi^\alpha - \frac{\alpha}{\gamma}\psi^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma}$$

である。 ψ' が固有値 0 に対応する固有関数であることに注意すると、

$$T\psi' = 0 \quad (6)$$

となる。(5) と (6) を用いて部分積分すると、

$$\mu \int_{-r}^r v\psi' dx = g(r)$$

となることがわかる。ただし、

$$g(r) = -v'(r)\psi'(r) + v'(-r)\psi'(-r) + v(r)\psi''(r) - v(-r)\psi''(-r)$$

である。

$r \rightarrow \infty$ のとき $f'(\psi(r)) \rightarrow \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\gamma}$ であり、 $r \rightarrow -\infty$ のとき $f'(\psi(r)) \rightarrow \frac{1}{\gamma}$ なので、 v と ψ' は $r \rightarrow \pm\infty$ のとき指数的に 0 に漸近する。それゆえに、

$$g(r) \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow +\infty$$

が成り立つ。 μ は負であるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} v\psi' dx = 0$$

となることがわかる。 ψ' は正定値関数なので v は少なくとも一つの零点を持つ。 v が $r \rightarrow +\infty$ のとき 0 に指数的に漸近することに注意すれば、ある $x_* \in \mathbf{R}$ が存在して

$$v(x_*) = 0 \quad \text{and} \quad v > 0 \quad \text{in } (x_*, \infty)$$

となることを仮定してもよい。

さて、 v と ψ' は以下の方程式をそれぞれ満たす：

$$-v'' + f'(\psi)v = \mu v, \tag{7}$$

$$-(\psi')'' + f'(\psi)\psi' = 0. \tag{8}$$

(7)(resp. (8)) に ψ' (resp. v) をかけると、

$$-v''\psi' + (\psi')''v = \mu v\psi' \tag{9}$$

を得る。(9) を x_* から $+\infty$ まで積分する。部分積分して $v(x_*) = 0$ を利用すると

$$v'(x_*)\psi'(x_*) = \mu \int_{x_*}^{+\infty} v\psi' dx$$

となることがわかる。

$v'(x_*) > 0, \psi'(x_*) > 0$ そして $\int_{x_*}^{+\infty} v\psi' dx > 0$ であるので、 $\mu > 0$ となる。これは矛盾である。
(証明終)

Theorem II の証明を完成するためには Theorem H の仮定が成り立つことを確かめれば十分である。Lemma 2 と Lemma 3 より、最小の正の有限重複度の孤立固有値 β が存在することがわかる。 L のスペクトルはエッセンシャルスペクトルと有限重複度の孤立固有値から成り立つ。したがって Lemma 1 を組み合わせると

$$\sigma(L) = \{0\} \cup \sigma^* \quad \text{with} \quad \operatorname{Re} \sigma^* \geq \nu$$

となることがわかる。ここで、

$$\nu = \min\{c, \beta\} > 0$$

である。こうして Theorem II は証明された。

References

- [1] J. K. Hale, L. A. Peletier and W. C. Troy, *Stability and instability in the Gray-Scott model: the case of equal diffusivities*, Appl. Math. Lett. **12**(1999), 59-65.
- [2] J. K. Hale, L. A. Peletier and W. C. Troy, *Exact homoclinic and heteroclinic solutions of the Gray-Scott model for autocatalysis*, SIAM J. Appl. Math. **61**(2000), 102-130.
- [3] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math. Vol. 840, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981.
- [4] N. Sato, *A note on the stability for the Gray-Scott model*, to appear in Adv. Math. Sci. Appl, Vol. **12**, No.2, 2002

A stability of the steady flow of compressible viscous fluid with respect to initial disturbance and its convergence rate

$$(v_\infty \neq 0)$$

早大・理工 田中 孝明 (KOUMEI TANAKA)*

Department of Mathematical Sciences, Waseda University

ABSTRACT. We consider a compressible viscous fluid with the velocity at infinity equal to a strictly nonzero constant vector in $\mathbb{R}^3$. Under some conditions on asymptotic behavior of the steady flow which derive from smallness of the external force and velocity at infinity, we prove existence of non-stationary flow in H^3 -framework, which converges to the steady flow in L_q -norms for any $q \geq 2$. Another purpose of the paper is to investigate rate of this convergence. What we proved is: if we additionally assume that $L_{6/5-a}$ -norm of the initial disturbance is bounded with small $a > 0$, then the non-stationary flow converges to the steady flow at the rate of $t^{-1/2}$ in L_6 -norm.

1 Introduction

The motion of a compressible viscous isotropic Newtonian fluid with a constant state at infinity is formulated by the following initial value problem of the Navier-Stokes equation for compressible viscous fluid:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla)v = \frac{\mu}{\rho} \Delta v + \frac{\mu + \mu'}{\rho} \nabla(\nabla \cdot v) - \frac{\nabla(P(\rho))}{\rho} + F(x), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} (\rho, v) = (\rho_\infty, v_\infty), \\ (\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0)(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

where $t \geq 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $\rho = \rho(t, x) (> 0)$ and $v = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$ denote the density and velocity respectively, which are unknown; $P(\cdot)$ (C^∞ in a neighborhood of ρ_∞ , $P' > 0$) denotes the pressure; μ and μ' are the viscosity coefficients which satisfy the condition: $\mu > 0$ and $\mu' + 2\mu/3 \geq 0$; $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ is a given external force; ρ_∞ and v_∞ are a given positive constant scalar and a given constant three-dimensional vector respectively. We consider the case where $v_\infty \neq 0$ only. The stationary problem corresponding to the initial value problem (1.1) is

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho^* v^*) = 0, \\ (v^* \cdot \nabla)v^* = \frac{\mu}{\rho} \Delta v^* + \frac{\mu + \mu'}{\rho} \nabla(\nabla \cdot v^*) - \frac{\nabla(P(\rho^*))}{\rho^*} + F(x), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} (\rho^*, v^*) = (\rho_\infty, v_\infty), \end{cases} \quad (1.2)$$

*E-mail: koumei@asagi.waseda.jp

where $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $\rho^* = \rho^*(x) (> 0)$ and $v^* = (v_1^*(x), v_2^*(x), v_3^*(x))$ denote the density and velocity respectively, which are unknown; $F(x)$, v_∞ and the other symbols are the same as in (1.1). Here and hereafter, we use the standard notation in the vector analysis. For example, we put for scalar u , vectors $v = (v_1, v_2, v_3)$ and $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3), \quad \nabla \cdot v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \\ (v \cdot \nabla)w &= ((v \cdot \nabla)w_1, (v \cdot \nabla)w_2, (v \cdot \nabla)w_3), \quad (v \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \\ \nabla^k u &= (\partial_x^\alpha u \mid |\alpha| = k), \quad \nabla^k v = (\partial_x^\alpha v_i \mid |\alpha| = k, i = 1, 2, 3),\end{aligned}$$

where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ is multi-index, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ and $\partial_x^\alpha = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}$.

Before stating our results, we introduce some function spaces. Let L_p (respectively W_p^k) denote the usual L_p (respectively W_p^k) space on $\mathbb{R}^3$ and we put $H^k = W_2^k$. We use the following notation: For scalars u_1, u_2 and vectors $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{L_p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_1(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|v\|_{L_p} = \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|u_1\|_{L_\infty} &= \sup_{\mathbb{R}^3} |u_1(x)|, \quad \|v\|_{L_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \|v_i\|_{L_\infty}, \quad \|v\|_{W_p^k} = \left(\sum_{\nu=0}^k \|\nabla^\nu v\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ (u_1, u_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} u_1 u_2 dx, \quad (v, w) = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i).\end{aligned}$$

Moreover, for short we put $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{W_2^k}$ and

$$\begin{aligned}H^{k,\ell} &= \{ (u, v) \mid u \in H^k, v \in H^\ell \}, \\ H^{j,k,\ell} &= \{ (u, v, w) \mid u \in H^j, v \in H^k, w \in H^\ell \}, \\ \|(u, v)\|_{k,\ell} &= \|u\|_k + \|v\|_\ell, \\ \|(u, v, w)\|_{j,k,\ell} &= \|u\|_j + \|v\|_k + \|w\|_\ell.\end{aligned}$$

Since the first and the second equations of (1.1) (and also (1.2)) are invariant through an orthogonal transform, we may assume without loss of generality that $\rho_\infty = 1$ and $v_\infty = (\eta, 0, 0)$ ($0 < \eta \leq 1$). Novotny-Padula [12] proved the following existence theorem concerning the stationary problem: Let γ, γ', p be constants with $1/2 < \gamma \leq \gamma' < 1$, $p > 3$ and let r be a constant with $r > 6/(1 - \gamma')$. Then, there exists small number $\bar{d} = \bar{d}_{\mu, \mu', \gamma, \gamma', p, r} > 0$ such that if

$$\|F\|_{\mathcal{L}_p} + \eta \equiv \|F\|_{L_6} + \|F\|_3 + \|F\|_{W_p^3} + \eta \leq \bar{d}, \quad (1.3)$$

then (1.2) admits a unique solution of the form: $\rho^* = 1 + \bar{\rho}(x)$, $v^* = v_\infty + \bar{v}(x)$, where $(\bar{\rho}, \bar{v})(x)$ satisfies the estimate:

$$\begin{aligned}\|(\bar{\rho}, \bar{v})\|_{\mathcal{L}_{\gamma, \gamma', p, r}} &\leq C(\|F\|_{\mathcal{L}_p} + \eta), \\ \|(\bar{\rho}, \bar{v})\|_{\mathcal{L}_{\gamma, \gamma', p, r}} &\equiv \|\nabla(\bar{\rho}, \bar{v})\|_4 + \|\nabla(\bar{\rho}, \bar{v})\|_{W_p^4} + \|(1 + |x|)^2 \bar{\rho}\|_{L_\infty} \\ &\quad + \|(1 + |x|)^{2+\frac{\gamma'}{2}} (1 + \eta^{\frac{3\gamma}{2}} s(x))^{\frac{\gamma}{2}} \nabla \bar{\rho}\|_{L_r} \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^1 \|(1 + |x|)^{1+\frac{\nu}{2}} (1 + \eta^{\gamma(1+\frac{\nu}{2})} s(x)^{\gamma(1+\frac{\nu}{2})}) \nabla^\nu \bar{v}\|_{L_\infty},\end{aligned} \quad (1.4)$$

where $s(x) = |x| - x_1$ and $C > 0$ is a constant depending only on $\mu, \mu', \gamma, \gamma', p$ and r .

We first discuss the stability of the stationary solution of (1.2) with respect to initial disturbance. The stability of (ρ^*, v^*) means that if (ρ_0, v_0) is close to (ρ^*, v^*) , then the non-stationary problem (1.1) admits a unique solution in a neighborhood of (ρ^*, v^*) . To state the stability theorem precisely, let us introduce the class of functions which solutions of (1.1) belong to.

Definition 1.1

$$\mathcal{C}(0, T; H^k) = \{ (\sigma, v) \mid \sigma(t, x) \in C^0(0, T; H^k) \cap C^1(0, T; H^{k-1}), \\ w(t, x) \in C^0(0, T; H^k) \cap C^1(0, T; H^{k-2}) \}.$$

Then, we have

Theorem 1.1 *Let $p > 3$ and let us assume (1.3) with small $\bar{d} > 0$. Then, there exists a $\epsilon > 0$ such that if $\|(\rho_0 - \rho^*, v_0 - v^*)\|_3 \leq \epsilon$ then (1.1) admits a unique solution: $(\rho, v) = (\rho^* + \sigma, v^* + w)$ globally in time, where $(\sigma, w) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$, $\nabla \sigma, w_t \in L_2(0, \infty; H^2)$, $\nabla w \in L_2(0, \infty; H^3)$. Moreover the (σ, w) satisfies the estimate:*

$$\|(\sigma, w)(t)\|_3^2 + \int_0^t \|(\nabla \sigma, \nabla w, w_t)(s)\|_{2,3,2}^2 ds \leq C \|(\rho_0 - \rho^*, v_0 - v^*)\|_3^2 \quad (1.5)$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ, μ' and p .

Combining the estimate (1.5) and the Gagliard-Nirenberg inequality, we obtain the following convergence property.

Corollary 1.1 *Let (σ, w) be as in Theorem 1.1. Then, we have*

$$\|(\sigma, w)(t)\|_{L_q} \longrightarrow 0$$

as $t \rightarrow \infty$, for any q with $q \geq 2$.

The second step of this study is to investigate the rate of this convergence. Namely, the following theorem is another main result in this note.

Theorem 1.2 *Put $(\sigma_0, w_0) = (\rho_0 - \rho^*, v_0 - v^*)$ and let a be positive constant with $a \leq 1/5$. In addition to the assumptions in Theorem 1.1, let us assume that $\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{6/5-a}} < \infty$. Then, the (σ, w) obtained in Theorem 1.1 satisfies the following estimate:*

$$t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_1^2 + \int_0^t s \|\nabla(\sigma, w, w_t)(s)\|_{1,2,0}^2 ds \\ \leq C \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{6}{5-a}}} + \|(\sigma_0, w_0)\|_3 \right)^2 \quad (1.6)$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ, μ', p and a .

In the case where $v_\infty = 0$, several results are already known. In fact, Matsumura and Nishida [8, 9] first proved the stability of a constant state $(1, 0)$ in H^3 -framework with respect to initial disturbance, namely they proved Theorem 1.1 in the case where $(\rho^*, v^*) = (1, 0)$. If the external force is given by the potential: $F = -\nabla \Phi$, where $\Phi = \Phi(x)$ is a scalar function, the stationary solution $(\rho^*, v^*)(x)$ of (1.2) in a neighborhood of $(1, 0)$ in H^2 has the form:

$$\Phi(x) + \int_1^{\rho^*(x)} \frac{P'(\xi)}{\xi} d\xi = 0, \quad v^*(x) = 0.$$

In this case, Matsumura and Nishida [10] proved the stability of $(\rho^*(x), 0)$ in H^3 -framework with respect to initial disturbance in an exterior domain. Recently, even in the large potential force case, the stability theorem was studied by Feireisl and Petzeltová [3]; Matsumura and Yamagata [11] within a class of weak solutions. When $F = F(x)$ is of general form, the stationary solution $(\rho^*, v^*)(x)$ is non-trivial, especially $v^* \neq 0$. In this case, Shibata and Tanaka [14] proved the unique existence of the stationary solutions and its stability in H^3 -framework with respect to initial disturbance under the assumptions on the smallness of F in a certain norm. However, in the case where $v_\infty \neq 0$, the stability result have never studied yet.

Concerning the rate of convergence of non-stationary solutions to stationary solutions when time goes to infinity, only the case where $F = 0$ or $F = -\nabla\Phi$ has been studied by Ponce [13]; Deckelnick [1, 2]; Hoff and Zumbrun [4]; Wang [18]; Kobayashi and Shibata [7]; Kobayashi [5, 6]. These works has been done in the small strong solution case. On the the other hand, when $v^* \neq 0$, the terms $(\nabla \cdot v^*)\sigma(t)$ and $(w(t) \cdot \nabla)v^*$ appear, which create new difficulties as compared with the case $v^* = 0$. To overcome such difficulties, the techniques developed in the papers [1, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 18] do not seem to work. We need a new consideration in order to estimate $\nabla\sigma(t)$ and $\nabla w(t)$. Especially, in our case, say $v_\infty \neq 0$, we need the $L_{6/5-\epsilon}$ - L_2 type estimate for the linearized operator with constant coefficients and $L_{6/5-\epsilon}$ initial data to control the $\nabla\sigma(t)$ and $\nabla w(t)$. Moreover, by the appearance of $(\nabla \cdot v^*)\sigma(t)$ and $(w(t) \cdot \nabla)v^*$, the rate of convergence of all the derivatives is the same as that of $\nabla\sigma(t)$ and $\nabla w(t)$, which is the character of the case where $v^* \neq 0$. Concerning the rate of convergence in the case where $v^* \neq 0$ and $v_\infty = 0$, we will discuss in the forthcoming paper [15].

2 Proof of Theorems

Let (ρ^*, v^*) denote a stationary solution to (1.2). By substituting

$$\rho(t, x) = \rho^*(x) + \sigma(t, x), \quad v(t, x) = v^*(x) + w(t, x)$$

into (1.1), we have the following system of equations for (σ, w) :

$$\sigma_t(t) + \nabla \cdot \{(\rho^* + \sigma(t))w(t)\} = -\nabla \cdot (v^*\sigma(t)), \quad (2.1)$$

$$w_t(t) - \frac{1}{\rho^*} [\mu \Delta w(t) + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot w(t))] + A(t) \nabla \sigma(t) = f(t). \quad (2.2)$$

The corresponding initial data is

$$(\sigma, w)|_{t=0} = (\sigma_0, w_0)(x) \equiv (\rho_0 - \rho^*, v_0 - v^*)(x) \quad (2.3)$$

and $f(t)$, $A(t)$ are defined by the formulas:

$$\begin{aligned} f(t) = & - (v^* \cdot \nabla)w(t) - (w(t) \cdot \nabla)(v^* + w(t)) \\ & - \frac{1}{\rho^*} \{P'(\rho^* + \sigma(t)) - P'(\rho^*)\} \nabla \rho^* - \frac{\sigma(t)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(t))} \left[\mu \Delta (v^* + w(t)) \right. \\ & \quad \left. + (\mu + \mu') \nabla \{ \nabla \cdot (v^* + w(t)) \} - P'(\rho^* + \sigma(t)) \nabla \rho^* \right], \\ A(t) = & \frac{P'(\rho^* + \sigma(t))}{\rho^* + \sigma(t)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Throughout the following sections, we assume that γ, γ', p, r are constants with $1/2 < \gamma \leq \gamma' < 1, p > 3, r > 6/(1 - \gamma')$ and (ρ^*, v^*) is of the form:

$$\rho^* = 1 + \tilde{\rho}(x), \quad v^* = v_\infty + \tilde{v}(x).$$

The proof of Theorem 1.1 consists of the following two steps. The first step is local existence:

Proposition 2.1 *Suppose that $\|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_0$ with a small positive number ϵ_0 depending only on μ and μ' . Then, for any positive constant E_0 , there exists $t_0 = t_0(\mu, \mu', E_0) > 0$ such that if $(\sigma, w)(0) \in H^3$ satisfies*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^3} \sigma(0, x) > -1/4 \quad \text{and} \quad \|(\sigma, w)(0)\|_3 \leq E_0,$$

then the initial value problem (2.1)–(2.2) with initial data $(\sigma, w)(0)$ admits a unique solution $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, t_0; H^3)$, which satisfies the estimate:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^3} \sigma(t, x) > -1/2 \quad \text{and} \quad \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq 2\|(\sigma, w)(0)\|_3$$

for any $t \in [0, t_0]$.

The second step is a priori estimate:

Proposition 2.2 *There exists a small constant $\epsilon_1 > 0$ depending only on μ, μ', p such that if $\|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_1$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, t_1; H^3)$ with $\sup_{0 \leq t \leq t_1} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_1$ is a solution to (2.1)–(2.2), then the $(\sigma, w)(t)$ satisfies the estimate:*

$$\|(\sigma, w)(t)\|_3^2 + \int_0^t \|(\nabla \sigma, \nabla w, w_t)(s)\|_{2,3,2}^2 ds \leq C \|(\sigma, w)(0)\|_3^2 \quad (2.5)$$

for any $t \in [0, t_1]$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ, μ' and p .

The proof of Theorem 1.2 consists of the following two steps. Estimate for higher derivatives which follows from energy method:

Proposition 2.3 *There exists a small constant $\epsilon_0 > 0$ depending only on μ, μ' such that if $\|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_0$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ with $\sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_0$ is a solution to (2.1)–(2.2), then the $(\sigma, w)(t)$ satisfies the estimate:*

$$\begin{aligned} t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_1^2 + \int_0^t s \|(\nabla^2 \sigma, \nabla^2 w, \nabla w_t)(s)\|_{0,1,0}^2 ds \\ \leq C \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_3^2 + \int_0^t s \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

for any $t \geq 0$, where C is a constant depending only on μ, μ' and p .

Estimate for lower derivatives which derives from the L_p – L_q type estimates for the solutions to linearized equation of (2.1)–(2.2):

Proposition 2.4 *Suppose that $\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{6/5-a}} < \infty$ for some $0 < a \leq 1/5$. Then, there exists a small constant $\epsilon_1 > 0$ depending only on μ, μ' such that if $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}}, \eta^{-2/3} d \leq \epsilon_1$*

and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ with $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_1$ is a solution to (2.1)–(2.2), then the $(\sigma, w)(t)$ satisfies the estimate:

$$\begin{aligned} \int_0^t s \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds &\leq C \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{8}{3}}-\alpha} + \|(\sigma_0, w_0)\|_3 \right)^2 \\ &\quad + C(d^{\frac{2}{3}} + \eta^{-\frac{2}{3}}d + \epsilon)^2 \int_0^t s \|\nabla^2(\sigma, w)(s)\|_{0,1}^2 ds \end{aligned} \quad (2.7)$$

for any $t \geq 0$, where C is a constant depending only on μ, μ', p and a .

Concerning the proof of Theorem 1.1 (the proof of Propositions 2.1 and 2.2), we can apply the argument similar to that of Shibata-Tanaka [14], which we reported in this seminar last year. So, here we concentrate our attention on the proof of Theorem 1.2. We shall give a proof of Proposition 2.3 in §3 and of Proposition 2.4 in §4 respectively.

3 Estimate for higher derivatives

Before starting to estimate the solution, let us introduce the absolute constant $\bar{\epsilon} > 0$ such that $C\bar{\epsilon} = 1/4$, where C is the constant which appears in the embedding: $\|\cdot\|_{L_\infty} \leq C\|\cdot\|_2$. Then, we can easily check

Lemma 3.1 *Let $(\tilde{\rho}, \tilde{v})$ and $(\sigma, w)(t)$ satisfy $\|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq 1/4$ and $\sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \bar{\epsilon}$. Then, if we write $\partial_x^\alpha f(t)$ of the form:*

$$\partial_x^\alpha f(t) = -(v^* \cdot \nabla) \partial_x^\alpha w(t) - \frac{\sigma(t)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(t))} \left[\mu \Delta \partial_x^\alpha w(t) + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t)) \right] + F_\alpha(t)$$

for $1 \leq |\alpha| \leq 2$, where $f(t)$ is the function defined by (2.4), then the $F_\alpha(t)$ satisfies the estimate:

$$\begin{aligned} |F_\alpha(t)| &\leq C \left[\sum_{\nu=0}^{|\alpha|-1} |\nabla^{|\alpha|+1-\nu} v^*| |\nabla^\nu w(t)| + |\nabla(v^*, w(t))| |\nabla^{|\alpha|} w(t)| \right. \\ &\quad \left. + |w(t)| |\nabla^{|\alpha|+1} w(t)| + \left\{ \sum_{\kappa=1}^{|\alpha|+1} |\nabla^\kappa(\rho^*, \nabla v^*)| + \sum_{\kappa=2}^{|\alpha|+1} |\nabla^\kappa w(t)| \right\} |\sigma(t)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{|\alpha|} \sum_{\kappa=1}^{|\alpha|+1-\nu} |\nabla^\kappa(\rho^*, \nabla v^*, \nabla w(t))| |\nabla^\nu \sigma(t)| \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ and μ' .

3.1 Estimates for $\nabla^2 w(t)$ and $\nabla^3 w(t)$

Lemma 3.2 *There exist small constants $\epsilon_0, \alpha_k > 0$ depending only on μ, μ' such that if $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_0$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ with $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_0$ is a solution to (2.1)–(2.2), then the $(\sigma, w)(t)$ satisfies the estimate:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[t \|\nabla^k \sigma(t)\|^2 + t(B(t) \nabla^k w(t), \nabla^k w(t)) \right] + \alpha_k t \|\nabla^{k+1} w(t)\|^2 \\ \leq C(d + \epsilon) t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_{k-1}^2 + C \|\nabla^k(\sigma, w)(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

for any $t \geq 0$ and $k = 1, 2$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ, μ' and $B(t)$ is the function defined by the formula:

$$B(t) = \frac{(\rho^* + \sigma(t))^2}{P'(\rho^* + \sigma(t))}.$$

Proof. For any multi-index α with $1 \leq |\alpha| \leq 2$, applying ∂_x^α to (2.1) and (2.2); multiplying the resultant equation by $t\partial_x^\alpha\sigma(t)$ and $t(\rho^* + \sigma(t))A(t)^{-1}\partial_x^\alpha w(t)$ respectively, we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{t\|\partial_x^\alpha\sigma(t)\|^2\} - \frac{1}{2} \|\partial_x^\alpha\sigma(t)\|^2 \\ & - t((\rho^* + \sigma(t))\partial_x^\alpha w(t), \nabla\partial_x^\alpha\sigma(t)) = t(\partial_x^\alpha(v^*\sigma(t)) + I_\alpha(t), \nabla\partial_x^\alpha\sigma(t)), \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{t(B(t)\partial_x^\alpha w_t(t), \partial_x^\alpha w(t))\} - \frac{1}{2} (B(t)\partial_x^\alpha w_t(t), \partial_x^\alpha w(t)) \\ & - \frac{1}{2} t(B_t(t)\partial_x^\alpha w_t(t), \partial_x^\alpha w(t)) \\ & - t\left(\frac{B(t)}{\rho^*} \partial_x^\alpha \{\mu\Delta w(t) + (\mu + \mu')\nabla(\nabla \cdot w(t))\}, \partial_x^\alpha w(t)\right) \\ & + t((\rho^* + \sigma(t))\nabla\partial_x^\alpha\sigma(t), \partial_x^\alpha w(t)) = t(\partial_x^\alpha f(t) + J_\alpha(t), B(t)\partial_x^\alpha w(t)) \end{aligned}$$

by integration with respect to x , where $I_\alpha(t)$ and $J_\alpha(t)$ are defined by

$$\begin{aligned} I_\alpha(t) &= \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_x^{\alpha-\beta}(\rho^* + \sigma(t))) \partial_x^\beta w(t), \\ J_\alpha(t) &= \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\left(\partial_x^{\alpha-\beta} \frac{1}{\rho^*} \right) \partial_x^\beta \{\mu\Delta w(t) + (\mu + \mu')\nabla(\nabla \cdot w(t))\} \right. \\ & \quad \left. + (\partial_x^{\alpha-\beta} A(t)) \nabla \partial_x^\beta \sigma(t) \right]. \end{aligned}$$

Canceling the term of $t((\rho^* + \sigma(t))\partial_x^\alpha w(t), \nabla\partial_x^\alpha\sigma(t))$ by the two formulas above, we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{t\|\partial_x^\alpha\sigma(t)\|^2 + t(B(t)\partial_x^\alpha w(t), \partial_x^\alpha w(t))\} + \frac{4B_0\mu}{5} t\|\nabla\partial_x^\alpha w(t)\|^2 \\ & \leq t|(\partial_x^\alpha(v^*\sigma(t)), \nabla\partial_x^\alpha\sigma(t))| + t|(\partial_x^\alpha f(t), B(t)\partial_x^\alpha w(t))| \\ & \quad + t\left[|(I_\alpha(t), \nabla\partial_x^\alpha\sigma(t))| + |(J_\alpha(t), B(t)\partial_x^\alpha w(t))| \right] + \frac{1}{2} t|(B_t(t)\partial_x^\alpha w(t), \partial_x^\alpha w(t))| \\ & \quad + t\left[\mu \left| \left(\nabla\partial_x^\alpha w(t), \left(\nabla \frac{B(t)}{\rho^*} \right) \partial_x^\alpha w(t) \right) \right| \right. \\ & \quad \left. + (\mu + \mu') \left| \left(\left(\nabla \frac{B(t)}{\rho^*} \right) \nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t), \partial_x^\alpha w(t) \right) \right| \right] + \frac{1}{2} \{ \|\partial_x^\alpha\sigma(t)\|^2 + B_1 \|\partial_x^\alpha w(t)\|^2 \} \\ & \equiv K_1 + \cdots + K_5 + \frac{1}{2} \{ \|\partial_x^\alpha\sigma(t)\|^2 + B_1 \|\partial_x^\alpha w(t)\|^2 \}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

where $B_0 = \min_{1/2 \leq s \leq 3/2} s^2/P'(s)$ and $B_1 = \max_{1/2 \leq s \leq 3/2} s^2/P'(s)$, if we take $d, \epsilon > 0$ small enough such that $d \leq 1/4$ and $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$. We estimate the terms on the right hand side of (3.3) in the following way. The tools we use mainly here are the Sobolev inequality and the Gagliard-Nirenberg inequality. First, let us put

$$K_1 \leq t|(v_\infty \partial_x^\alpha \sigma(t), \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t))| + t|(\partial_x^\alpha(\tilde{v}\sigma(t)), \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t))| \equiv K_{11} + K_{12}.$$

Then, it immediately follows that

$$K_{11} = \frac{1}{2} t|(v_\infty, \nabla(\partial_x^\alpha \sigma(t))^2)| = 0.$$

Moreover, by integration by parts, we can show that

$$K_{12} \leq Cdt \|\nabla \sigma(t)\|_{|\alpha|-1}^2.$$

To estimate K_2 , we divide K_2 into the following three parts:

$$\begin{aligned} K_2 &\leq t |((v^* \cdot \nabla) \partial_x^\alpha w(t), B(t) \partial_x^\alpha w(t))| \\ &+ t \left| \left(\frac{\sigma(t)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(t))} \left[\mu \Delta \partial_x^\alpha w(t) + (\mu + \mu') \nabla (\nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t)) \right], B(t) \partial_x^\alpha w(t) \right) \right| \\ &+ t |(F_\alpha(t), B(t) \partial_x^\alpha w(t))| \equiv K_{21} + K_{22} + K_{23}. \end{aligned}$$

Then, using integration by parts, we have

$$\begin{aligned} K_{21} &= t |(\nabla \cdot (B(t) v^*), \partial_x^\alpha w(t) \cdot \partial_x^\alpha w(t))| \leq C(d + \epsilon) t \|\nabla^{|\alpha|} w(t)\|^2, \\ K_{22} &\leq \mu t \left| \left(\nabla \left\{ \frac{B(t) \sigma(t)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(t))} \partial_x^\alpha w(t) \right\}, \nabla \partial_x^\alpha w(t) \right) \right| \\ &\quad + (\mu + \mu') t \left| \left(\nabla \cdot \left\{ \frac{B(t) \sigma(t)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(t))} \partial_x^\alpha w(t) \right\}, \nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t) \right) \right| \\ &\leq Ct (|\sigma(t)| \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\| + |(\sigma, \nabla \sigma)(t)| \|\partial_x^\alpha w(t)\|, \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\|) \\ &\leq Ct \{ \|\sigma(t)\|_{L_\infty} \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\| + \|(\sigma, \nabla \sigma)(t)\|_{L_3} \|\partial_x^\alpha w(t)\|_{L_6} \} \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\| \\ &\leq C\epsilon t \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\|^2. \end{aligned}$$

In accordance with Lemma 3.1, we also have

$$\begin{aligned} K_{23} &\leq Ct \left\{ \sum_{\nu=0}^{|\alpha|-1} \|\nabla^{|\alpha|+1-\nu} \tilde{v}\| \|\nabla^\nu w(t)\|_{L_6} + \|\nabla(\tilde{v}, w(t))\|_{L_6} \|\nabla^{|\alpha|} w(t)\| \right. \\ &\quad + \|w(t)\|_{L_6} \|\nabla^{|\alpha|+1} w(t)\| + \|(\nabla \tilde{\rho}, \nabla^2 \tilde{v}, \nabla^2 w(t))\|_{|\alpha|, |\alpha|, |\alpha|-1} \|\sigma(t)\|_{L_6} \\ &\quad + \|\nabla(\tilde{\rho}, \nabla \tilde{v}, \nabla w(t))\|_{|\alpha|-1} \|\nabla \sigma(t)\|_{L_6} \\ &\quad \left. + \|\nabla(\tilde{\rho}, \nabla \tilde{v}, \nabla w(t))\|_{L_6} \|\nabla^{|\alpha|} \sigma(t)\| \right\} \|\partial_x^\alpha w(t)\|_{L_3} \\ &\leq C(d + \epsilon) t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_{1, |\alpha|}. \end{aligned}$$

Moreover, we can easily check that

$$K_3 \leq C(d + \epsilon) t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_{|\alpha|-1, |\alpha|}^2$$

and in order to estimate K_4 , we use (2.1). Then

$$\begin{aligned} 2K_4 &= t |(\tilde{B}(t) \sigma_t(t) \partial_x^\alpha w(t), \partial_x^\alpha w(t))| \\ &= t |(\nabla \cdot \{(\rho^* + \sigma(t)) w(t) + v^* \sigma(t)\}, \tilde{B}(t) \partial_x^\alpha w(t) \cdot \partial_x^\alpha w(t))| \\ &\leq Ct (|(\sigma, w)(t)|, |\nabla \{ \partial_x^\alpha w(t) \cdot \partial_x^\alpha w(t) \}| + |\nabla \tilde{B}(t) \partial_x^\alpha w(t) \cdot \partial_x^\alpha w(t)|) \\ &\leq Ct \{ \|(\sigma, w)(t)\|_{L_3} \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\| \|\partial_x^\alpha w(t)\|_{L_6} \\ &\quad + \|(\sigma, w)(t)\|_{L_6} \|\nabla(\tilde{\rho}, \sigma(t))\| \|\partial_x^\alpha w(t)\|_{L_6}^2 \} \\ &\leq C\epsilon t \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\|^2, \end{aligned}$$

where $\tilde{B}(t)$ is defined by

$$\tilde{B}(t) = \frac{\rho^* + \sigma(t)}{P'(\rho^* + \sigma(t))} \left[2 - \frac{P''(\rho^* + \sigma(t))}{P'(\rho^* + \sigma(t))} (\rho^* + \sigma(t)) \right].$$

We also have

$$K_5 \leq C t \|\nabla(\tilde{\rho}, \sigma(t))\|_{L_3} \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\| \|\partial_x^\alpha w(t)\|_{L_6} \leq C(d + \epsilon) t \|\nabla \partial_x^\alpha w(t)\|^2.$$

Combining (3.3) and the estimates for $K_1, \dots, K_5$ above, we obtain (3.2), if we choose $d > 0$ and $\epsilon > 0$ small enough. $\blacksquare$

3.2 Estimates for $\nabla^2 \sigma(t)$ and $\nabla w_t(t)$

Lemma 3.3 *There exists a small constant $\epsilon_0 > 0$ depending only on μ, μ' such that if $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_0$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ with $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_0$ is a solution to (2.1)–(2.2), then the $(\sigma, w)(t)$ satisfies the estimate:*

$$t \|\nabla^2 \sigma(t)\|^2 \leq C t \|\nabla(\sigma, w, w_t)(t)\|_{0,2,0}^2 \quad (3.4)$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ and μ' .

Proof. For any multi-index α with $|\alpha| = 1$, applying ∂_x^α to (2.2) and multiplying the resultant equation by $\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t)$, we have

$$\begin{aligned} A_0 t \|\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t)\|^2 &\leq t |(\partial_x^\alpha w_t(t), \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t))| \\ &+ t \left| \left(\partial_x^\alpha \left\{ \frac{1}{\rho^*} [\mu \Delta w(t) + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot w(t))] \right\}, \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t) \right) \right| + t |(\partial_x^\alpha f(t), \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t))| \\ &+ t |((\partial_x^\alpha A(t)) \nabla \sigma(t), \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t))| \equiv K_1 + \dots + K_4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

by integration with respect to x , where $A_0 = \min_{1/2 \leq s \leq 3/2} P'(s)/s$, if we take $d, \epsilon > 0$ small enough such that $d \leq 1/4$ and $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$. Then, it immediately follows from the Sobolev inequality that

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \lambda t \|\nabla^2 \sigma(t)\|^2 + C \lambda^{-1} t \|\nabla w_t(t)\|^2, \\ K_2 &\leq \lambda t \|\nabla^2 \sigma(t)\|^2 + C \lambda^{-1} t \|\nabla^2 w(t)\|_1^2, \\ K_4 &\leq C(d + \epsilon) t \|\nabla \sigma(t)\|_1^2. \end{aligned}$$

We employ Lemma 3.1 to estimate K_3 . Using the Sobolev inequality and the Gagliard-Nirenberg inequality, we have

$$\begin{aligned} K_3 &\leq C t \{ \|(\nabla \partial_x^\alpha w, \sigma \Delta \partial_x^\alpha w)(t)\| + \|F_\alpha(t)\| \} \|\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t)\| \\ &\leq C t \left[\|\nabla^2 w(t)\|_1 + \|\nabla^2 \tilde{v}\|_{L_3} \|w(t)\|_{L_6} + \|\nabla(\tilde{v}, w(t))\|_{L_3} \|\nabla w(t)\|_{L_6} \right. \\ &\quad + \|w(t)\|_{L_\infty} \|\nabla^2 w(t)\| + \{ \|\nabla(\tilde{\rho}, \nabla \tilde{v})\|_{W_3^1} + \|\nabla^2 w(t)\|_{L_3} \} \|\sigma(t)\|_{L_6} \\ &\quad \left. + \|\nabla(\tilde{\rho}, \nabla \tilde{v}, \nabla w(t))\|_{L_3} \|\nabla \sigma(t)\|_{L_6} \right] \|\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t)\| \\ &\leq (d + \epsilon + \lambda) t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_{1,0}^2 + C \lambda^{-1} t \|\nabla^2 w(t)\|_1^2. \end{aligned}$$

Combining (3.5) and the estimates for $K_1, \dots, K_4$ above, we obtain (3.4) if we take $d, \epsilon > 0$ and $\lambda > 0$ small enough. $\blacksquare$

Lemma 3.4 *There exist small constants $\epsilon_0, \beta > 0$ depending only on μ, μ' such that if $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_0$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ with $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_0$ is a solution to (2.1)–(2.2), then the $(\sigma, w)(t)$ satisfies the estimate:*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [t(\nabla w(t), \nabla^2 \sigma(t))] + \beta t \|\nabla w_t(t)\|^2 \\ & \leq C t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_{0,2}^2 + C \|(\nabla w, \nabla^2 \sigma)(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ and μ' .

Proof. Multiplying (2.2) by $A(t)^{-1}$, we have

$$\frac{1}{A(t)} w_t(t) + \nabla \sigma(t) = \frac{1}{\rho^* A(t)} [\mu \Delta w(t) + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot w(t))] + \frac{1}{A(t)} f(t).$$

For any multi-index α with $|\alpha| = 1$, applying ∂_x^α to this formula and multiplying the resultant equation by $\partial_x^\alpha w_t(t)$, we have

$$\begin{aligned} & t(\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t), \partial_x^\alpha w_t(t)) + t \left(\frac{1}{A(t)} \partial_x^\alpha w_t(t), \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \\ & = t \left(\partial_x^\alpha \left\{ \frac{1}{\rho^* A(t)} [\mu \Delta w(t) + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot w(t))] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{A(t)} f(t) \right\} - \left(\partial_x^\alpha \frac{1}{A(t)} \right) w_t(t), \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \end{aligned}$$

by integration with respect to x . The first term can be written in following form:

$$\begin{aligned} & (\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t), \partial_x^\alpha w_t(t)) \\ & = \frac{d}{dt} [t(\partial_x^\alpha w(t), \nabla \partial_x^\alpha \sigma(t))] - t(\partial_x^\alpha \sigma_t(t), \nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t)) - (\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t), \partial_x^\alpha w(t)). \end{aligned}$$

Therefore, if we take $d, \epsilon > 0$ small enough such that $d \leq 1/4$ and $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$, then putting $A_1 = \max_{1/2 \leq s \leq 3/2} P'(s)/s$, we have

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [t(\nabla w(t), \nabla^2 \sigma(t))] + \frac{1}{A_1} t \|\partial_x^\alpha w_t(t)\|^2 \\ & \leq t \left| \left(\partial_x^\alpha \left\{ \frac{1}{\rho^* A(t)} [\mu \Delta w(t) + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot w(t))] \right\}, \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \right| \\ & \quad + t \left| \left(\left(\partial_x^\alpha \frac{1}{A(t)} \right) w_t(t), \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \right| + t \left| \left(\partial_x^\alpha \left\{ \frac{1}{A(t)} f(t) \right\}, \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \right| \\ & \quad + t |(\partial_x^\alpha \sigma_t(t), \nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t))| + \frac{1}{2} \|\nabla(w, \partial_x^\alpha \sigma)(t)\|^2 \\ & \equiv K_1 + \cdots + K_4 + \frac{1}{2} \|\nabla(w, \partial_x^\alpha \sigma)(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

We estimate the right hand side of (3.7), using the Sobolev inequality and the Gagliardi-Nirenberg inequality. We can easily check that

$$K_1 \leq \lambda t \|\nabla w_t(t)\|^2 + C \lambda^{-1} t \|\nabla^2 w(t)\|_1^2, \quad K_2 \leq C(d + \epsilon) t \|\nabla w_t(t)\|^2.$$

We estimate K_3 , using Lemma 3.1. We divide K_3 as

$$K_3 \leq t \left| \left(\frac{1}{A(t)} \partial_x^\alpha f(t), \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \right| + t \left| \left(\left\{ \partial_x^\alpha \frac{1}{A(t)} \right\} f(t), \partial_x^\alpha w_t(t) \right) \right| \\ \equiv K_{31} + K_{32}.$$

By applying the same argument to estimate K_4 of the proof of Lemma 3.2 (replace $\nabla \partial_x^\alpha \sigma(t)$ with $\partial_x^\alpha w_t(t)$ in the previous argument) we obtain

$$K_{31} \leq C(d + \epsilon + \lambda) t \|\nabla(\sigma, w, w_t)(t)\|_{1,0,0}^2 + C\lambda^{-1} t \|\nabla^2 w(t)\|_1^2.$$

Concerning to K_{32} , noting that

$$|f(t)| \leq C\{|\nabla w(t)| + |\nabla v^*| |w(t)| + |\nabla(\rho^*, \nabla v^*, \nabla w(t))| |\sigma(t)|\},$$

we have

$$K_{32} \leq Ct\{\|\nabla w(t)\| + \|\nabla \tilde{v}\|_{L_3} \|w(t)\|_{L_6} \\ + \|\nabla(\tilde{\rho}, \nabla \tilde{v}, \nabla w(t))\|_{L_3} \|\sigma(t)\|_{L_6}\} \|\nabla w_t(t)\| \\ \leq C(d + \epsilon + \lambda) t \|\nabla(\sigma, w_t)(t)\|^2 + C\lambda^{-1} t \|\nabla w(t)\|^2.$$

At last, in order to estimate K_4 , we substitute (2.1) into $\sigma_t(t)$. Indeed,

$$K_4 \leq t \left| \left(\partial_x^\alpha \{(\rho^* + \sigma(t))w(t) + v^* \sigma(t)\}, \nabla(\nabla \cdot \partial_x^\alpha w(t)) \right) \right| \\ \leq Ct\{\|\partial_x^\alpha w(t)\| + \|\partial_x^\alpha(\tilde{\rho}, \sigma(t))\|_{L_3} \|w(t)\|_{L_6} \\ + \|\partial_x^\alpha \sigma(t)\| + \|\partial_x^\alpha \tilde{v}\|_{L_3} \|\sigma(t)\|_{L_6}\} \|\nabla^2 \partial_x^\alpha w(t)\| \\ \leq Ct \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_{0,2}^2.$$

Insert the estimates for $K_1, \dots, K_4$ above into (3.7). Then, we have (3.6), if we take $d, \epsilon > 0$ and $\lambda > 0$ small enough. $\blacksquare$

3.3 Proof of Proposition 2.3

Let us assume that $\|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{J}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq \epsilon_0$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ be a solution to (2.1)–(2.2) with $\sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \epsilon_0$, where $\epsilon_0 > 0$ are small enough such that at least we can use Lemmas 3.1 through 3.4. Here, we use the notation:

$$[\sigma, w](t) \equiv \|\sigma(t)\|^2 + (B(t)w(t), w(t)), \quad B(t) = \frac{(\rho^* + \sigma(t))^2}{P'(\rho^* + \sigma(t))}.$$

Summing up (3.2) with $k = 1, 2$, (3.4) and (3.6) (after multiplying (3.2) with $k = 2$, (3.4), (3.6) with small numbers respectively), we have

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\nu=0}^1 \alpha_\nu t [\nabla^\nu \sigma, \nabla^\nu w](t) + \beta t (w(t), \nabla \sigma(t)) \right\} + t \|(\nabla^2 \sigma, \nabla^2 w, \nabla w_t)(t)\|_{0,1,0}^2 \\ \leq C \left(t \|\nabla(\sigma, w)(t)\|^2 + \|\nabla(\sigma, w)(t)\|_1^2 \right) \quad (3.8)$$

for any $t \geq 0$, if we take $\epsilon_0 > 0$ sufficiently small. Then, integration of (3.8) on $[0, t]$ implies

$$\begin{aligned} tN[\sigma, w](t) + \int_0^t s \|(\nabla^2 \sigma, \nabla^2 w, \nabla w_t)(s)\|_{0,1,0}^2 ds \\ \leq C \int_0^t t \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 + \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_1^2 ds, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where $N[\sigma, w](t)$ is defined by

$$N[\sigma, w](t) \equiv \sum_{\nu=0}^1 \alpha_\nu [\nabla^\nu \sigma, \nabla^\nu w](t) + \beta (\nabla w(t), \nabla \sigma(t))$$

for each t . Let us denote $B_0 = \min_{1/2 \leq s \leq 3/2} \{s^2/P'(s), 1\}$ and $B_1 = \max_{1/2 \leq s \leq 3/2} \{s^2/P'(s), 1\}$. Since we may assume without loss of generality that $\alpha_1 \leq \alpha_0$ and $\beta \leq \alpha_1 \min\{B_0, 1\}/4$, it follows from a simple calculation that

$$\frac{\alpha_1}{4} B_0 \|(\sigma, w)(t)\|_1^2 \leq N[\sigma, w](t) \leq 2B_1 \|(\sigma, w)(t)\|_1^2 \quad (3.10)$$

for each $t \geq 0$. Combining (3.9), (3.10) and (1.5), we obtain (2.6), which completes the proof of Proposition 2.3.

4 Estimate for lower derivatives

In this section, we shall prove Proposition 2.4 by employing L_p - L_q estimates for the solution to the linearized equation of (2.1)–(2.2). Taking the main terms of (2.1)–(2.2) to the left hand side and other terms to the right hand side, we have

$$\sigma_t(t) + \nabla \cdot w(t) + (v_\infty \cdot \nabla) \sigma(t) = g(t),$$

$$w_t(t) - \mu \Delta w(t) - (\mu + \mu') \nabla (\nabla \cdot w(t)) + P'(1) \nabla \sigma(t) + (v_\infty \cdot \nabla) w(t) = h(t),$$

where

$$\begin{aligned} g(t) &= -\nabla \cdot \{(\tilde{\rho} + \sigma(t))w(t) + \tilde{v}\sigma(t)\}, \\ h(t) &= -(\tilde{v} \cdot \nabla)w(t) - (w(t) \cdot \nabla)(\tilde{v} + w(t)) \\ &\quad - \frac{\tilde{\rho}}{1 + \tilde{\rho}} [\mu \Delta w(t) + (\mu + \mu') \nabla (\nabla \cdot w(t))] \\ &\quad + \frac{1}{\rho^*} \{P'(\rho^* + \sigma(t)) - P'(\rho^*)\} \nabla \rho^* - \frac{\sigma(t)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(t))} [\mu \Delta (v^* + w(t)) \\ &\quad + (\mu + \mu') \nabla \{ \nabla \cdot (v^* + w(t)) \} - P'(\rho^* + \sigma(t)) \nabla \rho^*] \\ &\quad - \left\{ \frac{P'(1 + \tilde{\rho} + \sigma(t))}{1 + \tilde{\rho} + \sigma(t)} - P'(1) \right\} \nabla \sigma(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.1 Estimates for the linearized equation

For a moment, we consider the linearized equation of (2.1)–(2.2):

$$\begin{cases} \rho_t(t) + \nabla \cdot u(t) + (v_\infty \cdot \nabla) \rho(t) = 0, \\ u_t(t) - \mu \Delta u(t) - (\mu + \mu') \nabla (\nabla \cdot u(t)) + P'(1) \nabla \rho(t) + (v_\infty \cdot \nabla) u(t) = 0, \\ (\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0)(x), \end{cases} \quad (4.2)$$

where $t \geq 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ and $(\rho_0, u_0)(x)$ is given initial data.

Taking the Fourier transform of (4.2) with respect to x and solving the ordinary differential equation with respect to t , we have

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}(t, x) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\widehat{E}(t, \xi) \begin{bmatrix} \widehat{\rho}_0 \\ \widehat{u}_0 \end{bmatrix}(\xi) \right](x),$$

where $\widehat{\cdot}$ stands for the Fourier transform with respect to x , $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ denotes the Fourier inverse transform and $\widehat{E}(t, \xi)$ is 4×4 matrix of the form:

$$\widehat{E}(t, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{\widetilde{\lambda}_+ e^{\lambda_- t} - \widetilde{\lambda}_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} & -i^t \xi \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \\ -i P'(1) \xi \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} & \frac{\widetilde{\lambda}_+ e^{\lambda_+ t} - \widetilde{\lambda}_- e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} + e^{-\mu|\xi|^2 - i(u_\infty \cdot \xi)} Q(\xi) \end{bmatrix},$$

where

$$\lambda_\pm(\xi) = -\frac{2\mu + \mu'}{2} |\xi|^2 \pm \frac{\sqrt{(2\mu + \mu')^2 |\xi|^4 - 4P'(1)|\xi|^2}}{2}, \quad \widetilde{\lambda}_\pm = \lambda_\pm - i(u_\infty \cdot \xi).$$

Here, we use the notations in the following sense:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \quad \xi \otimes \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \xi_1 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2 \xi_2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3 \xi_3 \end{bmatrix}, \quad Q(\xi) = I - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}$$

with the 3×3 identity matrix I . Now, let $\varphi(\xi)$ be a cut-off function in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ such that $\varphi(\xi) = 1$ for $|\xi| \leq \sqrt{P'(1)}/2(2\mu + \mu')$, $\varphi(\xi) = 0$ for $|\xi| \geq \sqrt{P'(1)}/(2\mu + \mu')$ and let us put

$$\begin{aligned} E_0(t) \begin{bmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{bmatrix}(x) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\varphi(\xi) \widehat{E}(t, \xi) \begin{bmatrix} \widehat{\rho}_0 \\ \widehat{u}_0 \end{bmatrix}(\xi) \right](x), \\ E_\infty(t) \begin{bmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{bmatrix}(x) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[(1 - \varphi(\xi)) \widehat{E}(t, \xi) \begin{bmatrix} \widehat{\rho}_0 \\ \widehat{u}_0 \end{bmatrix}(\xi) \right](x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Then, using the argument similar to get L_p - L_q type estimates for the solution to (4.2) in the case where $v_\infty = 0$ which was given by Kobayashi-Shibata [7, §3], we can also obtain the L_p - L_q estimates for $E_0(t)$ and $E_\infty(t)$ here quite analogously except for the time derivatives. In particular, we have

Lemma 4.1 *Let $E_0(t)$ and $E_\infty(t)$ be the operators defined by (4.3). Then, for each integer $k \geq 0$ and constant $1 \leq q \leq 2$, we have the estimates:*

$$\begin{cases} \left\| \nabla^k E_0(t) \begin{bmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \right\| \leq C(\mu, \mu', k, q) (1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}) - \frac{k}{2}} \|(\rho_0, u_0)\|_{L_q}, \\ \left\| \nabla^k E_\infty(t) \begin{bmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \right\| \leq C(\mu, \mu', k) e^{-Ct} \|(\rho_0, u_0)\|_k \end{cases}$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ and μ' .

4.2 Some essential lemmas

Now, we return to the original nonlinear problem (2.1)–(2.2). The first lemma is concerning some special summability of $(\tilde{\rho}, \tilde{v})$ which is guaranteed by the condition $v_\infty \neq 0$.

Lemma 4.2 *Let γ, γ', p, r be constants with $1/2 < \gamma \leq \gamma' < 1$, $p \geq 1$, $r > 6/(1 - \gamma')$ and let $(\tilde{\rho}, \tilde{v})(x)$ satisfy $\|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{J}_{\gamma, \gamma', p, r}} < \infty$. Then, we have the following estimates:*

(i) *If $0 < \delta < 3/2$, then*

$$\|\tilde{\rho}\|_{L_{3-\delta}} \leq C(\delta) \|(1 + |x|)^2 \tilde{\rho}\|_{L_\infty}.$$

(ii) *If $0 < \delta < 3/5$, then*

$$\| |x| \nabla \tilde{\rho} \|_{L_{3-\delta}} \leq C(\delta) \|(1 + |x|)^{2+\frac{\gamma'}{2}} (1 + \eta^{\frac{3\gamma}{2}} s(x))^{\frac{\gamma}{2}} \nabla \tilde{\rho}\|_{L_r}^{\frac{1}{3-\delta}}.$$

(iii) *If $0 < \delta < 1$ and $\delta/(3 - \delta) < \alpha < 1/(3 - \delta)$, then*

$$\|\tilde{v}\|_{L_{3-\delta}} \leq \frac{C(\alpha, \delta)}{\eta^\alpha} \|(1 + |x|)(1 + \eta^\gamma s(x)^\gamma) \tilde{v}\|_{L_\infty}.$$

(iv) *If $0 < \delta < 1/6$ and $3(1 + 2\delta)/2(3 - 2\delta) < \beta < 2/(3 - 2\delta)$, then*

$$\|\nabla \tilde{v}\|_{L_{\frac{3}{2}-\delta}} \leq \frac{C(\beta, \delta)}{\eta^\beta} \|(1 + |x|)^{\frac{3}{2}} (1 + \eta^{\frac{3}{2}\gamma} s(x)^{\frac{3}{2}\gamma}) \nabla \tilde{v}\|_{L_\infty}.$$

Here, each $C(\cdot)$ denotes a constant depending only on $\cdot$.

Proof. (i) It seems clear and so we may omit the proof.

(ii) By using the Hölder inequality, we have

$$\| |x| \nabla \tilde{\rho} \|_{L_{3-\delta}}^{3-\delta} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-(1+\frac{\gamma'}{2})(3-\delta)r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \|(1 + |x|)^{2+\frac{\gamma'}{2}} \nabla \tilde{\rho}\|_{L_r},$$

where r' is a number satisfying $1/r' = 1 - 1/r$. Under the assumptions on γ' and r , we have $(1 + \gamma'/2)r' > 5/4$. Therefore, if $\delta < 3/5$, then $5(3 - \delta)/4 > 3$ and so

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-(1+\frac{\gamma'}{2})(3-\delta)r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} < \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-\frac{5}{4}(3-\delta)} dx < \infty.$$

This completes the proof of (ii).

(iii) Let us put $K \equiv \|(1 + |x|)(1 + \eta^\gamma s(x)^\gamma) \tilde{v}\|_{L_\infty}$ here. It follows from the assumptions on the constants δ, α and γ that $\alpha < 1/(3 - \delta) < 1/2 < \gamma$. Thus, we have

$$(1 + |x|)(1 + \eta^\alpha s(x)^\alpha) |\tilde{v}(x)| \leq C_\alpha K$$

for any $x \in \mathbb{R}^3$ and then we can calculate as

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L_{3-\delta}}^{3-\delta} &\leq C_{\alpha, \delta} K^{3-\delta} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{(1 + |x|)^{3-\delta} (1 + \eta^\alpha s(x)^\alpha)^{3-\delta}} \\ &\leq \frac{C_{\alpha, \delta}}{\eta^{(3-\delta)\alpha}} K^{3-\delta} \left(1 + \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^{3-\delta} s(x)^{(3-\delta)\alpha}} \right) \\ &= \frac{C_{\alpha, \delta}}{\eta^{(3-\delta)\alpha}} K^{3-\delta} \left(1 + 2\pi \int_1^\infty \frac{s^2}{s^{(3-\delta)(1+\alpha)}} ds \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \cos \theta)^{(3-\delta)\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Since the conditions $0 < \delta < 1$ and $\delta/(3 - \delta) < \alpha < 1/(3 - \delta)$ implies that $(3 - \delta)(1 + \alpha) > 3$ and $2\alpha(3 - \delta) < 2$, it follows that

$$\int_1^\infty \frac{s^2}{s^{(3-\delta)(1+\alpha)}} ds \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \cos \theta)^{(3-\delta)\alpha}} < \infty.$$

This completes the proof of (iii).

(iv) Here, we put $K \equiv \|(1 + |x|)^{\frac{3}{2}}(1 + \eta^{\frac{3}{2}\gamma} s(x)^{\frac{3}{2}\gamma}) \nabla \tilde{v}\|_{L^\infty}$ and $\alpha = 2\beta/3$. This time, $\delta < 1/6$ and we have $\alpha < 4/3(3 - 2\delta) < 1/2 < \gamma$, too. So,

$$(1 + |x|)^{\frac{3}{2}}(1 + \eta^{\frac{3}{2}\gamma} s(x)^{\frac{3}{2}\gamma}) |\nabla \tilde{v}(x)| \leq C_\alpha K.$$

In the same way as in the proof of (iii), we can show that

$$\|\nabla \tilde{v}\|_{L^{\frac{3}{2}-\delta}}^{\frac{3}{2}-\delta} \leq \frac{C_{\alpha,\delta}}{\eta^{(\frac{3}{2}-\delta)\frac{3}{2}\alpha}} K^{\frac{3}{2}-\delta} \left(1 + 2\pi \int_1^\infty \frac{s^2}{s^{(\frac{3}{2}-\delta)\frac{3}{2}(1+\alpha)}} ds \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \cos \theta)^{(\frac{3}{2}-\delta)\frac{3}{2}\alpha}} \right)$$

and moreover, we also have $3(3/2 - \delta)(1 + \alpha)/2 > 3$ and $3\alpha(3/2 - \delta) < 2$. Thus,

$$\int_1^\infty \frac{s^2}{s^{(\frac{3}{2}-\delta)\frac{3}{2}(1+\alpha)}} ds \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \cos \theta)^{(\frac{3}{2}-\delta)\frac{3}{2}\alpha}} < \infty,$$

which completes the proof of (iv). ■

The next lemma plays an important role when we estimate the terms of $g(t)$ and $h(t)$.

Lemma 4.3 *Let $E_0(t)$, $E_\infty(t)$ be the operators defined by (4.3) and let $U(t, x)$ be any four-dimensional column vector. Then, we have the following estimates:*

$$\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla^k E_0(s - \tau) U(\tau) d\tau \right\|^2 ds \leq C_{k,\lambda} \int_0^t (1 + s) \|U(s)\|_{L_{\frac{8}{5}-\lambda}}^2 ds, \quad (4.4)$$

$$\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla^k E_\infty(s - \tau) U(\tau) d\tau \right\|^2 ds \leq C_k \int_0^t (1 + s) \|U(s)\|_k^2 ds \quad (4.5)$$

for any $t \geq 0$, integer $k \geq 1$ and $0 < \lambda \leq 1/5$, where $C_{k,\lambda} > 0$ is a constant depending only on μ, μ', k, λ and $C_k > 0$ is a constant depending only on μ, μ', k .

Proof. We start from proof of (4.4). By Lemma 4.1, we have

$$\|\nabla^k E_0(s - \tau) U(\tau)\| \leq C(1 + s - \tau)^{-1-\lambda_k} \|U(\tau)\|_{L_{\frac{8}{5}-\lambda}},$$

where $\lambda_k = 25\lambda/4(6 - 5\lambda) + (k - 1)/2 (> 0)$. Using this inequality, we can calculate the left hand side of (4.4) as follows:

$$\begin{aligned} \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla^k E_0(s - \tau) U(\tau) d\tau \right\|^2 ds &\leq \int_0^t s \left(\int_0^s \|\nabla^k E_0(s - \tau) U(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \\ &\leq C \int_0^t s \left(\int_0^s (1 + s - \tau)^{-1-\lambda_k} \|U(\tau)\|_{L_{\frac{8}{5}-\lambda}} d\tau \right)^2 ds \\ &\leq C \int_0^t s \left(\int_0^{\frac{s}{2}} (1 + s - \tau)^{-1-\lambda_k} \|U(\tau)\|_{L_{\frac{8}{5}-\lambda}} d\tau \right)^2 ds \\ &\quad + C \int_0^t s \left(\int_{\frac{s}{2}}^s (1 + s - \tau)^{-1-\lambda_k} \|U(\tau)\|_{L_{\frac{8}{5}-\lambda}} d\tau \right)^2 ds \equiv K_1 + K_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Then, K_1 can be estimated as

$$\begin{aligned}
K_1 &\leq C \int_0^t s(1+s)^{-2-2\lambda_k} \left(\int_0^{\frac{s}{2}} \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}} d\tau \right)^2 ds \\
&\leq C \int_0^t (1+s)^{-1-2\lambda_k} \left\{ \int_0^{\frac{s}{2}} (1+\tau)^{-1} d\tau \int_0^{\frac{s}{2}} (1+\tau) \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 d\tau \right\} ds \\
&\leq C \int_0^t (1+s)^{-1-2\lambda_k} \log(1+s) ds \int_0^t (1+\tau) \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 d\tau \\
&\leq C \int_0^t (1+\tau) \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

To estimate K_2 , we use the Fubini theorem. Indeed,

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq C \int_0^t s \left\{ \int_{\frac{s}{2}}^s (1+s-\tau)^{-1-\lambda_k} d\tau \int_{\frac{s}{2}}^s (1+s-\tau)^{-1-\lambda_k} \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 d\tau \right\} ds \\
&\leq C \int_0^t \left(\int_{\frac{s}{2}}^s (1+s-\tau)^{-1-\lambda_k} \tau \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 d\tau \right) ds \\
&\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} \tau \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 \left(\int_{\tau}^{2\tau} (1+s-\tau)^{-1-\lambda_k} ds \right) d\tau \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \tau \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 \left(\int_{\tau}^t (1+s-\tau)^{-1-\lambda_k} ds \right) d\tau \\
&\leq C \int_0^t \tau \|U(\tau)\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Combining (4.6) and estimates for K_1 , K_2 above, we obtain (4.4). Concerning (4.5), since Lemma 4.1 implies that

$$\|\nabla^k E_{\infty}(s-\tau) U(\tau)\| \leq C e^{-Ct} \|U(\tau)\|_k,$$

we can apply the same discussion to obtain (4.4) by replacing $(1+s-\tau)^{-1-\lambda_k}$ with e^{-Ct} and $\|\cdot\|_{L_{\frac{6}{5}-\lambda}}$ with $\|\cdot\|_k$ in the estimates above. $\blacksquare$

4.3 Proof of Proposition 2.4

Let us assume that $\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{6/5-a}} < \infty$ for some $0 < a \leq 1/5$ and $(\sigma, w)(t) \in \mathcal{C}(0, \infty; H^3)$ is the solution to (2.1)–(2.2). The $\bar{\epsilon}$ in this section means the same absolute constant as in §3.

By the Duhamel principle, we can write the solution to (2.1)–(2.2) with (2.3) as

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix}(t) = E(t) \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \int_0^t E(t-\tau) \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\tau) d\tau,$$

where $E(t) = E_0(t) + E_{\infty}$ and $E_0(t)$, $E_{\infty}(t)$ are operators defined by (4.3). Thus, we have

$$\begin{aligned}
\int_0^t s \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds &\leq 2 \left\{ \int_0^t s \left\| \nabla E(s) \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ w_0 \end{bmatrix} \right\|^2 ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E(s-\tau) \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\tau) d\tau \right\|^2 ds \right\} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

It immediately follows from Lemma 4.1 that

$$\begin{aligned}
\int_0^t s \left\| \nabla E(s) \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ w_0 \end{bmatrix} \right\|^2 ds &\leq C \int_0^t s (1+s)^{-3\left(\frac{1}{5-a}-\frac{1}{2}\right)-1} \|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{6}{5-a}}}^2 ds \\
&\quad + C \int_0^t s e^{-2Cs} \|(\sigma_0, w_0)\|_1^2 ds \\
&\leq C \int_0^\infty s (1+s)^{-2(1+a')} + s e^{-2Cs} ds \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{6}{5-a}}} + \|(\sigma_0, w_0)\|_1 \right)^2 \\
&= C \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{6}{5-a}}} + \|(\sigma_0, w_0)\|_1 \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

where $a' = 25a/2(6-5a)$ and $C > 0$ is a constant depending only on μ, μ' and a .

We estimate the second term of (4.7) — the E_0 part and E_∞ part respectively.

Lemma 4.4 *Let $E_0(t)$ be the operator defined by (4.3) and let $(\tilde{\rho}, \tilde{v}), (\sigma, w)(t)$ be functions satisfying $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{S}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq 1/4$, $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \bar{\epsilon}$. Then, we have the following estimate for $g(t)$ and $h(t)$ defined by (4.1):*

$$\begin{aligned}
\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\tau) d\tau \right\|^2 ds \\
\leq C(d^{\frac{2}{5}} + \eta^{-\frac{2}{3}}d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{0,1}^2 ds
\end{aligned} \tag{4.9}$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ and μ' .

Proof. First, we divide $g(s)$ as

$$g(\tau) = -(\nabla \cdot \tilde{v})\sigma(\tau) + \left[-\nabla \cdot \{(\tilde{\rho} + \sigma(\tau))w(\tau)\} + \tilde{v} \cdot \nabla \sigma(\tau) \right] \equiv -(\nabla \cdot \tilde{v})\sigma(\tau) + G(\tau).$$

Applying (4.4) with $k = 1$ and $\lambda = 4/5(15 - 1/6)$ and then using Lemma 4.2 (iv) with $\delta = 1/12$, $\beta = 2/3$, we have

$$\begin{aligned}
\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} -(\nabla \cdot \tilde{v})\sigma(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds \\
\leq C \int_0^t (1+s) \|(\nabla \cdot \tilde{v})\sigma(s)\|_{L_{\frac{6}{5}-\frac{4}{5(15-\frac{1}{6})}}}^2 ds \leq C \int_0^t (1+s) \|\nabla \tilde{v}\|_{L_{\frac{3}{2}-\frac{1}{12}}}^2 \|\sigma(s)\|_{L_6}^2 ds \\
\leq C(\eta^{-\frac{2}{3}}d)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla \sigma(s)\|^2 ds
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Moreover, noting that

$$|G(\tau)| \leq |\nabla \tilde{\rho}| |w(\tau)| + |(\tilde{\rho}, \sigma(\tau), \tilde{v}, w(\tau))| |\nabla(\sigma, w)(\tau)|,$$

and applying (4.4) with $k = 1$ and $\lambda = 2/5(5 - 1/2)$, we also have

$$\begin{aligned}
\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} G(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds &\leq C \int_0^t (1+s) \|G(s)\|_{L_{\frac{6}{5}-\frac{2}{5(5-\frac{1}{2})}}}^2 ds \\
&\leq C \int_0^t (1+s) \left\{ \| |x| \nabla \tilde{\rho} \|_{L_{\frac{5}{2}}}^2 \left\| \frac{w(s)}{|x|} \right\|^2 + \|(\tilde{\rho}, \sigma(\tau), \tilde{v}, w(\tau))\|_{L_{\frac{5}{2}}}^2 \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 \right\} ds \\
&\leq C(d^{\frac{2}{5}} + \eta^{-\frac{1}{4}}d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

where we use Lemma 4.2 (i)–(ii) with $\delta = 1/2$ and (iii) with $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/4$. Thus,

$$\begin{aligned} & \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}(\tau) d\tau \right\|^2 ds \\ & \leq C(d^{\frac{2}{3}} + \eta^{-\frac{2}{3}}d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

As for $h(\tau)$, we divided it following three terms:

$$\begin{aligned} h(\tau) &= -(w(\tau) \cdot \nabla) \tilde{v} - \frac{\sigma(\tau)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(\tau))} [\mu \Delta v^* + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot v^*)] + (\text{other terms}) \\ &\equiv -(w(\tau) \cdot \nabla) \tilde{v} + H_1(\tau) + H_2(\tau). \end{aligned}$$

The same calculations as in (4.10) implies that

$$\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ -(w(\tau) \cdot \nabla) \tilde{v} \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds \leq C(\eta^{-\frac{2}{3}}d)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla w(s)\|^2 ds.$$

We can easily check that

$$|H_2(\tau)| \leq |\nabla \tilde{\rho}| |\sigma(\tau)| + |(\tilde{v}, \sigma(\tau), \tilde{\rho}, w(\tau))| |\nabla(\sigma, w, \nabla w)(\tau)|.$$

So, it also follows from the same calculations as in (4.11) that

$$\begin{aligned} & \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ H_2(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds \\ & \leq C(d^{\frac{2}{3}} + \eta^{-\frac{1}{4}}d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{0,1}^2 ds. \end{aligned}$$

In order to estimate $H_1(\tau)$ part, we rewrite $H_1(\tau)$ as

$$\begin{aligned} H_1(\tau) &= - \left[\mu \nabla \cdot \frac{\sigma(\tau) \nabla v^*}{\rho^*(\rho^* + \sigma(\tau))} + (\mu + \mu') \nabla \frac{\sigma(\tau) \nabla \cdot v^*}{\rho^*(\rho^* + \sigma(\tau))} \right] \\ &\quad + \left[\mu \left\{ \nabla \frac{\sigma(\tau)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(\tau))} \right\} \cdot \nabla v^* + (\mu + \mu') \left\{ \nabla \frac{\sigma(\tau)}{\rho^*(\rho^* + \sigma(\tau))} \right\} \nabla \cdot v^* \right] \\ &\equiv \nabla \cdot H_{11}(\tau) + H_{12}(\tau). \end{aligned}$$

Since we have the identity

$$\begin{aligned} & \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla \cdot H_{11}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds \\ &= \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla \cdot \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ H_{11}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds, \end{aligned}$$

applying (4.4) with $k = 2$, $\lambda = 4/5(15 - 1/6)$ and using the same calculations as in (4.10), we can get the estimate

$$\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla \cdot H_{11}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds \leq C(\eta^{-\frac{2}{3}}d)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla \sigma(s)\|^2 ds.$$

At last, using the inequality

$$|H_{12}(\tau)| \leq |\nabla \tilde{\rho}| |\sigma(\tau)| + |\nabla \tilde{v}| |\nabla \sigma(\tau)|$$

and employing the same calculations as in (4.11), we have

$$\int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ H_{12}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\|^2 ds \leq C(d^{\frac{2}{5}} + d)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla \sigma(s)\|^2 ds.$$

Therefore, it follows that

$$\begin{aligned} & \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_0(s-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}(\tau) d\tau \right\|^2 ds \\ & \leq C(d^{\frac{2}{5}} + \eta^{-\frac{2}{3}}d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{0,1}^2 ds \end{aligned}$$

Combining the estimates for terms from g and h above, we obtain desired estimate. $\blacksquare$

Lemma 4.5 *Let $E_\infty(t)$ be the operator defined by (4.3) and let $(\tilde{\rho}, \tilde{v}), (\sigma, w)(t)$ be functions satisfying $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{J}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq 1/4$, $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \bar{\epsilon}$. Then, we have the following estimate for $g(t)$ and $h(t)$ defined by (4.1):*

$$\begin{aligned} & \int_0^t s \left\| \int_0^s \nabla E_\infty(s-\tau) \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\tau) d\tau \right\|^2 ds \\ & \leq C(d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{1,2}^2 ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

for any $t \geq 0$, where $C > 0$ is a constant depending only on μ and μ' .

Proof. In view of the estimate (4.5) with $k = 1$, what remains to show is only that

$$\|(g, h)(s)\|_1 \leq C(d + \epsilon) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{1,2}$$

for any $s \geq 0$. Using the Sobolev inequality and the Gagliard-Nirenberg inequality, we can easily check this estimate, which completes the proof of Lemma 4.5. $\blacksquare$

Now, we combine the estimates above. In addition to the assumptions in the beginning of this section, we assume that $d \equiv \|(\tilde{\rho}, \tilde{v})\|_{\mathcal{J}_{\gamma, \gamma', p, r}} \leq 1/4$, $\epsilon \equiv \sup_{t \geq 0} \|(\sigma, w)(t)\|_3 \leq \bar{\epsilon}$. Combining (4.7)–(4.9) and (4.12), we have

$$\begin{aligned} \int_0^t s \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds & \leq C_{\mu, \mu', a} \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{6}{5}-a}} + \|(\sigma_0, w_0)\|_1 \right)^2 \\ & + C_{\mu, \mu'} (d^{\frac{2}{5}} + \eta^{-\frac{2}{3}}d + \epsilon)^2 \int_0^t (1+s) \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{1,2}^2 ds, \end{aligned} \quad (4.13)$$

where $C_{\mu, \mu', a} > 0$ is a constant depending only on μ, μ', a and $C_{\mu, \mu'} > 0$ is a constant depending only on μ, μ' . Let us take $\epsilon_1 > 0$ such that $9C_{\mu, \mu'} \epsilon_1^2 \leq 1/2$. Then, if $d^{\frac{2}{5}}, \eta^{-\frac{2}{3}}d, \epsilon \leq \epsilon_1$, it immediately follows from (4.13) that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t s \|\nabla(\sigma, w)(s)\|^2 ds & \leq C_{\mu, \mu', a} \left(\|(\sigma_0, w_0)\|_{L_{\frac{6}{5}-a}} + \|(\sigma_0, w_0)\|_1 \right)^2 \\ & + C_{\mu, \mu'} (d^{\frac{2}{5}} + \eta^{-\frac{2}{3}}d + \epsilon)^2 \int_0^t s \|\nabla^2(\sigma, w)(s)\|_{0,1}^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla(\sigma, w)(s)\|_{1,2}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Combining (4.14) and (1.5), we obtain the desired estimate (2.7). This completes the proof of Proposition 2.4.

References

- [1] K. DECKELNICK, Decay estimates for the compressible Navier-Stokes equations in unbounded domains, *Math. Z.* **209** (1992), 115–130
- [2] K. DECKELNICK, L_2 decay for the compressible Navier-Stokes equations in unbounded domains, *Commun. in Partial Differential Equations* **18** (1993), 1445–1476
- [3] E. FEIREISL AND H. PETZELTOVÁ, Large-time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow, *Arch. Rational Mech. Anal.* **150** (1999), 77–96
- [4] D. HOFF AND K. ZUMBRUN, Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow, *Indiana Univ. Math. J.* **44** (1995), 603–676
- [5] T. KOBAYASHI, Some estimates of solutions for the equations of motion of compressible viscous fluid in an 3D exterior domain, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **42** (2000), 151–158
- [6] T. KOBAYASHI, L_2 and L_∞ estimates of the solutions for the compressible Navier-Stokes equations in a 3D exterior domain, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **38** (2002), 211–225
- [7] T. KOBAYASHI AND Y. SHIBATA, Decay estimates of solutions for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive gases in an exterior domain in $\mathbb{R}^3$, *Commun. Math. Phys.* **200** (1999), 621–659
- [8] A. MATSUMURA AND T. NISHIDA, The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Proc. Jpn. Acad. Seri. A* **55** (1979), 337–342
- [9] A. MATSUMURA AND T. NISHIDA, The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), 67–104
- [10] A. MATSUMURA AND T. NISHIDA, Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Commun. Math. Phys.* **89** (1983), 445–464
- [11] A. MATSUMURA AND N. YAMAGATA, Global weak solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow subject to large external potential forces, *Osaka J. Math.* **38** (2001), 399–418
- [12] A. NOVOTNY AND M. PADULA, Physically reasonable solutions to steady compressible Navier-Stokes equations in 3D-exterior domains ($v_\infty \neq 0$), *Math. Ann.* **308** (1997), 439–489
- [13] G. PONCE, Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations, *Nonlinear Anal.* **9** (1985), 399–418
- [14] Y. SHIBATA AND K. TANAKA, On the steady flow of compressible viscous fluid and its stability with respect to initial disturbance, *J. Math. Soc. Japan*, to appear

- [15] Y. SHIBATA AND K. TANAKA, Rate of convergence of non-stationary flow to the steady flow of compressible viscous fluid ($v_\infty = 0$), preprint
- [16] K. TANAKA, A stability of steady flow of compressible viscous fluid with respect initial disturbance ($v_\infty \neq 0$), preprint
- [17] K. TANAKA, Rate of convergence of non-stationary flow to the steady flow of compressible viscous fluid ($v_\infty \neq 0$), preprint
- [18] W. WANG, Large time behavior of solutions for general Navier-Stokes systems in multi-dimension, *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* **2** (1997), 385-393

Existence and Nonexistence of Global Solutions for a Semilinear Heat Equation

Takefumi Igarashi ¹

Department of Mathematics College of Science and Technology,
Nihon University

1-8-14 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8308, Japan

igarashi@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

Abstract

Let T be a positive constant. We consider the initial value problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = k(t, x)u + u^{1+p} & \text{in } (0, T) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = a(x) & \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

where $k \in C([0, \infty) \times \mathbf{R}^n)$, $p > 0$ is a constant. At $t=0$, the initial data $a(x)$ is assumed to be nonnegative and of $C^2(\mathbf{R}^n) \cap W^{2,\infty}(\mathbf{R}^n)$ -functions. In this paper we shall study the existence and nonexistence of global solutions. Our results have been proved by applying the technique originated by H.Fujita.

1 Introduction

Let T be a positive constant. We consider the initial value problem

$$(IVP) \begin{cases} u_t - \Delta u = k(t, x)u + u^{1+p} & \text{in } (0, T) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = a(x) \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

where $k \in C([0, \infty) \times \mathbf{R}^n)$, and $p > 0$ is a constant. Suppose that initial data $a \in BC^2(\mathbf{R}^n)$, where $BC^2(\mathbf{R}^n) = C^2(\mathbf{R}^n) \cap W^{2,\infty}(\mathbf{R}^n)$. From [4, Lemma 2.3], there exists a unique solution $u \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbf{R}^n) \cap C([0, T) \times \mathbf{R}^n)$ of (IVP) with the property that $u(t, x) \geq 0$ in $[0, T) \times \mathbf{R}^n$ for some T . If $u \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbf{R}^n) \cap C([0, T) \times \mathbf{R}^n)$ and $u(t, x)$ satisfies (IVP), then $u(t, x)$ is called a classical solution of (IVP).

In the case $k(t, x) \equiv 0$, (IVP) is reduced to the so-called Fujita type, then the results of Fujita[1], Hayakawa[2] and Kobayashi-Sirao-Tanaka[3] are well-known, but they are as follows,

- In case of $0 < np \leq 2$, there is no global solution of (IVP) for any nontrivial initial data $a(x)$.

¹ This is a joint work with Prof. H. Uesaka, Department of Mathematics College of Science and Technology, Nihon University

- In case of $np > 2$, there exists a global solution of (IVP) for sufficiently small initial data $a(x)$.

In this paper, we study the existence and nonexistence of global solutions for (IVP) in the case $k(t, x) \not\equiv 0$. Then our main results are the following theorems,

Theorem 1

Suppose that $\inf_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} k(t, x) > 0$. Then there is no global solution of (IVP) for any nontrivial initial data $a(x)$.

Theorem 2

Suppose that $k(t, x) > k_0$ for some constant $k_0 \leq 0$. Then there is no global solution of (IVP) for sufficiently large initial data $a(x)$.

Theorem 3

Suppose that $\sup_{t>0} k(t) < 0$, k depending only on t . Then there exists a global solution of (IVP) for sufficiently small initial data $a(x)$.

Theorem 4

Let a_1 be any fixed positive number and $\mu_1 > 1$ be any fixed number. Suppose that $k(t) \leq -\frac{\mu_1}{p}(t + a_1)^{-1}$, k depending only on t . Then there exists a global solution of (IVP) for sufficiently small initial data $a(x)$.

Theorem 5

Let $np > 2$. Let C and a_2 be any fixed positive number and $\mu_2 > 1$ be any fixed number. Suppose that $k(t) \leq C(t + a_2)^{-\mu_2}$, k depending only on t . Then there exists a global solution of (IVP) for sufficiently small initial data $a(x)$.

Theorem 6

Let C be any fixed number such that $0 < C < \frac{n}{2} - \frac{1}{p}$. Let a_2 be any fixed positive number. Suppose that $k(t) \leq C(t + a_2)^{-1}$, k depending only on t . Then there exists a global solution of (IVP) for sufficiently small initial data $a(x)$.

Theorems 1 and 2 is proved in §2, Theorems 3, 4, 5 and 6 are done in §3.

2 Proof of Theorems 1 and 2

Let $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ and $|x| = \sqrt{\sum x_k^2}$. We put $\psi(x) = (1 + |x|^2)^{-\rho}$ for any $\rho > \frac{n}{2}$. Then there exists $M > 0$ such that $|\Delta\psi| \leq M\psi$. Furthermore if $\phi(x) = \psi((\sqrt{\varepsilon}/M)x)$ for any $\varepsilon > 0$, then $|\Delta\phi| \leq \varepsilon\phi$.

Proof of Theorem 1.

We put $l = \inf_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} k(t, x)$ and

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x)\phi(x)dx.$$

Applying the Jensen inequality, we have

$$\begin{aligned} U'(t) &= \int_{\mathbf{R}^n} u_t(t, x) \phi(x) dx \\ &\geq -\varepsilon U(t) + lU(t) + \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x)^{1+p} \phi(x) dx \\ &\geq (l - \varepsilon)U(t) + CU(t)^{1+p}, \end{aligned}$$

where C is some fixed positive number. Take a ε such that $l - \varepsilon \geq 0$, and we have

$$U'(t) \geq CU(t)^{1+p}. \quad (1)$$

Solving (1), we have

$$U(t)^p \geq \frac{1}{U(0)^{-p} - Cpt}, \quad (2)$$

where $U(0) = \int_{\mathbf{R}^n} a(x) \phi(x) dx$. Let $T = \frac{U(0)^{-p}}{Cp}$. Thus we have

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{1}{U(0)^{-p} - Cpt} = \infty;$$

that is,

$$\lim_{t \rightarrow T} U(t) = \lim_{t \rightarrow T} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \phi(x) dx = \infty.$$

Noting that $\int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \phi(x) dx \leq \|u\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)} \|\phi\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}$, where $q_1, q_2 \geq 1$, $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$,

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}(t) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow T).$$

■

Proof of Theorem 2.

We take a constant number $\alpha > 0$ such that $\alpha + k_0 > 0$ for any $k_0 \leq 0$. We put

$$U(t) = e^{\alpha t} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \phi(x) dx.$$

Applying Jensen inequality, we have

$$\begin{aligned} U'(t) &= \alpha e^{\alpha t} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \phi(x) dx + e^{\alpha t} \int_{\mathbf{R}^n} u_t(t, x) \phi(x) dx \\ &\geq \alpha U(t) - \varepsilon U(t) + k_0 U(t) + e^{\alpha t} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x)^{1+p} \phi(x) dx \\ &\geq (\alpha + k_0 - \varepsilon)U(t) + Ce^{-\alpha pt} U(t)^{1+p}, \end{aligned}$$

where C is some fixed positive number. Take a ε such that $\alpha + k_0 - \varepsilon \geq 0$, and we have

$$U'(t) \geq Ce^{-\alpha pt} U(t)^{1+p}. \quad (3)$$

Solving (3), we have

$$U(0)^{-p} - \frac{C}{\alpha}(1 - e^{-\alpha pt}) \geq U(t)^{-p}, \quad (4)$$

where $U(0) = \int_{\mathbf{R}^n} a(x)\phi(x)dx$. If $U(0)$ is sufficiently large, the left side of (4) vanishes in finite time; that is, $U(t)^{-p}$ vanishes in finite time. Thus there exists $T > 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow T} U(t) = \lim_{t \rightarrow T} e^{\alpha t} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x)\phi(x)dx = \infty.$$

Hence

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x)\phi(x)dx = \infty.$$

Noting that $\int_{\mathbf{R}^n} u(t, x)\phi(x)dx \leq \|u\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\|\phi\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}$, where $q_1, q_2 \geq 1$, $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$,

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}(t) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow T).$$

■

3 Proof of Theorems 3, 4, 5 and 6

In this section we suppose that k depends only on t . We put

$$v(t, x) = e^{-\int_0^t k(s)ds} u(t, x).$$

Then (IVP) is reduced to the initial value problem

$$(IVP)' \begin{cases} v_t - \Delta v = e^p \int_0^t k(s)ds v^{1+p}, & \text{in } (0, T) \times \mathbf{R}^n, \\ v(0, x) = a(x), & \text{in } \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Therefore we shall consider (IVP)' in this section.

Here we state the following definitions.

Definition 1

T being a positive number, $\Sigma[0, T)$ is the set of all $C([0, T) \times \mathbf{R}^n)$ -functions $v = v(t, x)$ satisfying

$$|v(t, x)| \leq M \exp(|x|^\beta), \quad (0 \leq t < T, x \in \mathbf{R}^n)$$

with some constants $M > 0$ and $0 < \beta < 2$. M and β may depend on v . Furthermore, $\Sigma[0, \infty)$ is set of all v which belongs to $\Sigma[0, T)$ for any $T > 0$.

We note that $e^p \int_0^t k(s)ds v^{1+p} \in \Sigma[0, T)$ if $v \in \Sigma[0, T)$ and $v \geq 0$.

Definition 2

If v is a classical solution of (IVP)' and $v \in \Sigma[0, T)$, then v is called a classical solution of (IVP)' in $\Sigma[0, T)$. A classical solution v of (IVP)' in $\Sigma[0, \infty)$ is also called a global solution of (IVP)' in $\Sigma[0, \infty)$.

Definition 3

$\Pi[0, \infty)$ is the set of all $C([0, \infty) \times \mathbf{R}^n)$ -functions $v = v(t, x)$ such that the inequality

$$0 \leq v(t, x) \leq MH(t + \gamma, x) \quad (t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n)$$

is satisfied for some constants $M > 0$ and $\gamma > 0$. M may depend on v . We put here and hereafter

$$H(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad (t > 0, x \in \mathbf{R}^n). \quad (5)$$

As a preparation, we state some propositions.

Proposition 1

Let v be a classical solution of (IVP)' in $\Sigma[0, T)$ for $T > 0$. Then v satisfies the integral equation $v = v_0 + \Phi v$ in $0 \leq t < T$, where

$$v_0(t, x) = \int_{\mathbf{R}^n} H(t, x - y) a(y) dy, \quad (6)$$

$$(\Phi v)(t, x) = \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t - s, x - y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} v(s, y)^{1+p} dy. \quad (7)$$

Proof. See [1, Proposition A.1]. ■

Proposition 2

Let $v \in C(Q_T)$ be a nonnegative solution of $v = v_0 + \Phi v$, where $Q_T = [0, T) \times \mathbf{R}^n$. Suppose that v is bounded in Q_T . Then we have the following.

1. $\nabla_x v, \nabla_x \nabla_x v$ and v_t are continuous and bounded in Q_T .
2. v is a classical solution of (IVP)'.

Proof. See [1, Proposition A.4]. ■

As a preparation for the proof of Theorems 3, 4, 5 and 6, we state the following Lemma.

Lemma 1

Let a_1 be any fixed positive number and $\mu_1 > 1$ be any fixed number. Suppose that $\sup_{t>0} k(t) < 0$ or that $k(t) \leq -\frac{\mu_1}{p}(t + a_1)^{-1}$. Then $\Phi \rho \in \Pi[0, \infty)$ and there exists $C_0 > 0$ such that

$$\|\Phi \rho\| \leq C_0, \quad (8)$$

where $\rho(t, x) = H(t + \gamma, x)$ and we put

$$\|v\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^n, t \geq 0} \frac{|v(t, x)|}{\rho(t, x)} \quad (9)$$

for any function $v \in \Pi[0, \infty)$.

Proof. The continuity of $\Phi\rho$ is clear. $\Phi\rho \geq 0$ is obvious. From $\exp\left(-\frac{p|y|^2}{4(s+\gamma)}\right) \leq 1$,

$$\rho^p(s, y) = H^p(s + \gamma, y) \leq (4\pi(s + \gamma))^{-np/2} \quad (10)$$

is obvious. At first let $k(t) \leq -\frac{\mu_1}{p}(t + a_1)^{-1}$, then we have

$$\begin{aligned} 0 \leq (\Phi\rho)(t, x) &= \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t - s, x - y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} \rho^{1+p}(s, y) dy \\ &\leq \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t - s, x - y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} (4\pi(s + \gamma))^{-np/2} H(s + \gamma, y) dy \\ &= (4\pi)^{-np/2} \int_0^t (s + \gamma)^{-np/2} e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} H(t + \gamma, x) ds \\ &\leq \left((4\pi)^{-np/2} \int_0^\infty (s + \gamma)^{-np/2} e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} ds \right) H(t + \gamma, x) \\ &\leq \left((4\pi\gamma)^{-np/2} \int_0^\infty e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} ds \right) H(t + \gamma, x) \\ &\leq \left((4\pi\gamma)^{-np/2} \int_0^\infty e^{-\mu_1 \int_0^s (\tau + a_1)^{-1} d\tau} ds \right) H(t + \gamma, x) \\ &= \left((4\pi\gamma)^{-np/2} \int_0^\infty \left(\frac{a_1}{s + a_1} \right)^{\mu_1} ds \right) H(t + \gamma, x) \\ &= \left((4\pi\gamma)^{-np/2} a_1^{\mu_1} \left[\frac{1}{-\mu_1 + 1} (s + a_1)^{-\mu_1 + 1} \right]_0^\infty \right) H(t + \gamma, x) \\ &= \left((4\pi\gamma)^{-np/2} \frac{a_1}{\mu_1 - 1} \right) H(t + \gamma, x) \\ &\leq C_0 \rho(t, x). \end{aligned}$$

Next we consider the case that $\sup_{t>0} k(t) < 0$, but by the similar and easy calculus we have

$$0 \leq (\Phi\rho)(t, x) \leq C_0 \rho(t, x).$$

Thus (8) is clear and we have established the Lemma 1. ■

Lemma 2

Let $np > 2$. Let C and a_2 be any fixed positive number and $\mu_2 > 1$ be any fixed number. Suppose that $k(t) \leq C(t + a_2)^{-\mu_2}$. Then $\Phi\rho \in \Pi[0, \infty)$ and there exists $C_0 > 0$ such that

$$\|\Phi\rho\| \leq C_0. \quad (11)$$

Proof. According to a similar computation to the previous Lemma, we have

$$\begin{aligned} 0 \leq (\Phi\rho)(t, x) &= \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t - s, x - y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} \rho^{1+p}(s, y) dy \\ &\leq \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t - s, x - y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} (4\pi(s + \gamma))^{-np/2} H(s + \gamma, y) dy \\ &= (4\pi)^{-np/2} \int_0^t (s + \gamma)^{-np/2} e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} H(t + \gamma, x) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left((4\pi)^{-np/2} \int_0^\infty (s+\gamma)^{-np/2} e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&\leq \left((4\pi)^{-np/2} \int_0^\infty (s+\gamma)^{-np/2} e^{pC \int_0^s (\tau+a_2)^{-\mu_2} d\tau} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&\leq \left((4\pi)^{-np/2} \exp \left(\frac{pC a_2^{-\mu_2+1}}{\mu_2-1} \right) \int_0^\infty (s+\gamma)^{-np/2} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&\leq C_0 \rho(t, x).
\end{aligned}$$

We note that existence of the integral is based on the assumption $np > 2$. Thus (11) is clear and we have established the Lemma 2. $\blacksquare$

Lemma 3

Let C be any fixed number such that $0 < C < \frac{n}{2} - \frac{1}{p}$. Let a_2 be any fixed positive number. Suppose that $k(t) \leq C(t+a_2)^{-1}$. Then $\Phi\rho \in \Pi[0, \infty)$ and there exists $C_0 > 0$ such that

$$\|\Phi\rho\| \leq C_0. \quad (12)$$

Proof. Let $\gamma' = \max(\gamma, a_2)$. According to a similar computation to the previous Lemma, we have

$$\begin{aligned}
0 \leq (\Phi\rho)(t, x) &= \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t-s, x-y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} \rho^{1+p}(s, y) dy \\
&\leq \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t-s, x-y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} (4\pi(s+\gamma))^{-np/2} H(s+\gamma, y) dy \\
&= (4\pi)^{-np/2} \int_0^t (s+\gamma)^{-np/2} e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} H(t+\gamma, x) ds \\
&\leq \left((4\pi)^{-np/2} \int_0^\infty (s+\gamma)^{-np/2} e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&\leq \left((4\pi)^{-np/2} \int_0^\infty (s+\gamma)^{-np/2} e^{pC \int_0^s (\tau+a_2)^{-1} d\tau} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&= \left((4\pi)^{-np/2} \int_0^\infty (s+\gamma)^{-np/2} \left(\frac{s+a_2}{a_2} \right)^{pC} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&\leq \left((4\pi)^{-np/2} a_2^{-pC} \int_0^\infty (s+\gamma')^{p(C-n/2)} ds \right) H(t+\gamma, x) \\
&\leq C_0 \rho(t, x).
\end{aligned}$$

We note that existence of the integral is based on the assumption $p(C-n/2) < -1$. Thus (12) is clear and we have established the Lemma 3. $\blacksquare$

As corollaries of Lemmas 1, 2 and 3, we have the following Lemmas, where C_0 means the same as in Lemmas 1, 2 and 3.

Lemma 4

Let $k(t)$ be as in Lemmas 1, 2 or 3, and let $v \in \Pi[0, \infty)$. Then $\Phi v \in \Pi[0, \infty)$ and we have

$$\|\Phi v\| \leq C_0 \|v\|^{1+p}. \quad (13)$$

Proof. According to the preceding Lemma, we have

$$\begin{aligned} 0 \leq (\Phi v)(t, x) &\leq \|v\|^{1+p} \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t-s, x-y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} \rho^{1+p}(s, y) dy \\ &= \|v\|^{1+p} (\Phi \rho)(t, x) \leq C_0 \|v\|^{1+p} \rho(t, x). \end{aligned}$$

Thus we have

$$\frac{(\Phi v)(t, x)}{\rho(t, x)} \leq C_0 \|v\|^{1+p}.$$

Therefore it follows (13). ■

Lemma 5

Let $k(t)$ be as in Lemmas 1, 2 or 3. Suppose that v_1 and v_2 are in $\Pi[0, \infty)$ and they satisfy

$$\|v_1\| \leq M \quad \text{and} \quad \|v_2\| \leq M \quad (14)$$

for a number $M > 0$. Then we have

$$\|\Phi v_1 - \Phi v_2\| \leq C_0(1+p)M^p \|v_1 - v_2\|. \quad (15)$$

Proof. Making use of the inequality

$$|q_1^{1+p} - q_2^{1+p}| \leq (1+p)|q_1 - q_2| \max\{q_1^p, q_2^p\}, \quad (q_1 \geq 0, q_2 \geq 0),$$

we have

$$\begin{aligned} |v_1^{1+p}(s, y) - v_2^{1+p}(s, y)| &\leq (1+p)M^p \rho^p(s, y) |v_1(s, y) - v_2(s, y)| \\ &\leq (1+p)M^p \|v_1 - v_2\| \rho^{1+p}(s, y). \end{aligned}$$

Hence it follows that

$$\begin{aligned} &|(\Phi v_1)(t, x) - (\Phi v_2)(t, x)| \\ &\leq \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t-s, x-y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} |v_1^{1+p}(s, y) - v_2^{1+p}(s, y)| dy \\ &\leq (1+p)M^p \|v_1 - v_2\| \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}^n} H(t-s, x-y) e^{p \int_0^s k(\tau) d\tau} \rho^{1+p}(s, y) dy \\ &= (1+p)M^p \|v_1 - v_2\| (\Phi \rho)(t, x) \\ &\leq C_0(1+p)M^p \|v_1 - v_2\| \rho(t, x). \end{aligned}$$

Thus we have (15). ■

Proof of Theorems 3, 4, 5 and 6.

By the assumption, suppose that we are given a function $a \in BC^2(\mathbf{R}^n)$ subject to

$$0 \leq a(x) \leq \delta H(\gamma, x) \quad (16)$$

for some positive constants γ and δ . We shall solve the integral equation associated with (IVP)'

$$v(t, x) = v_0(t, x) + (\Phi v)(t, x) \quad (17)$$

by iteration in $\Pi[0, \infty)$. We proceed to the iteration, setting

$$v_{n+1} = v_0 + \Phi v_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

with v_0 . According to Lemma 4, we can continue the iteration indefinitely within $\Pi[0, \infty)$. For instance, (16) implies

$$\begin{aligned} 0 \leq v_0(t, x) &\leq \delta \int_{\mathbf{R}^n} H(t, x - y) H(\gamma, y) dy \\ &= \delta H(t + \gamma, x) = \delta \rho(t, x) \end{aligned}$$

and thus $\|v_0\| \leq \delta$. Thus we have the inequalities

$$\|v_{n+1}\| \leq \delta + C_0 \|v_n\|^{1+p}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Then we have

$$\|v_n\| \leq M, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

with a constant $M = M(\delta)$ for sufficiently small $\delta > 0$, where $M(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$. We choose a δ such that

$$r \equiv C_0(1 + p)M^p < 1. \quad (21)$$

Since $v_{n+2} - v_{n+1} = \Phi v_{n+1} - \Phi v_n$ by (18),

$$\|v_{n+2} - v_{n+1}\| \leq r \|v_{n+1} - v_n\|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

by means of Lemma 5. (22) implies in virtue of $r < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_{n+1} - v_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n \|v_1 - v_0\| = \|v_1 - v_0\| \frac{1}{1-r} < \infty$$

and the convergence of

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_{n+1} - v_n\|.$$

Hence there exists a function $v \in \Pi[0, \infty)$ such that

$$\|v_n - v\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (23)$$

that is, v_n/ρ converges to v/ρ uniformly in $[0, \infty) \times \mathbf{R}^n$.

Making use of (18) and (23), we find that v is a solution of integral equation

$$v(t, x) = v_0(t, x) + (\Phi v)(t, x).$$

Therefore the solution v of integral equation $v(t, x) = v_0(t, x) + (\Phi v)(t, x)$ is the required global solution of (IVP)', since $\Pi[0, \infty) \subset \Sigma[0, \infty)$ and since a solution of integral equation in $\Pi[0, \infty)$ is a classical solution of (IVP)' according to Proposition 2. ■

References

- [1] H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect.A Math.* **16** (1966), 109-124.
- [2] K.Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, *Proc.Japan Acad.* **49** (1973) 503-505.
- [3] K.Kobayashi, T.Sirao and H.Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J.Math.Soc.Japan* **29** (1977) 407-424.
- [4] T.-Y.Lee and W.-M.Ni, Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992) 365-378.
- [5] H.Uesaka, Oscillation or non-oscillation property for semilinear wave equations, preprint.

Large Time Behavior of Solutions to Nonlinear Dissipative Equations

伊藤 直子 (東京理科大学理学研究科数学専攻 D1)

j1102701@ed.kagu.tus.ac.jp

1 序

次の非線形消散型方程式に対する初期値問題を考える.

$$\begin{cases} u_t + \alpha (-\partial_x^2)^\beta u + \gamma |u|^{p-1} u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

但し, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $\Re \alpha > 0$, $\beta > \frac{1}{4}$, $p > 2\beta + 1$ とする. 本稿では, 時間大域解の存在と次のような時間減衰評価が得られることを示す.

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

初期値問題 (1) において, $\beta = 1$ の場合は複素 Ginzburg-Landau 方程式となり, 解の存在性について多くの研究がなされている. また, 次の初期値問題

$$\partial_t u + (-\partial_x^2)^\beta u - u^p = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) > 0, \quad (2)$$

に対する正值解の爆発については, $\beta = 1$ の場合については Fujita [1], Hayakawa [2], Kobayashi-Sirao-Tanaka [3], Weissler [5] によって示されている. また, $0 < \beta \leq 1$ の場合は Sugitani [4] によって爆発することが示されている. 具体的には Fujita [1] において, $p < 3$, $\beta = 1$ について, Hayakawa [2], Kobayashi-Sirao-Tanaka [3], Weissler [5] では, $p = 3$, $\beta = 1$ の場合に対して爆発することが示されている. 一方, 時間大域解に関しては, Fujita [1], Weissler [5] において $p > 3$, $\beta = 1$ についての結果が得られている. しかし, $\beta \neq 1$ の場合の結果は知られていない. 本稿においては定理 1 として, この $\beta \neq 1$ の場合における時間大域解の存在を示す.

ここで関数空間と記号の定義をする. L^p は通常用いられる Lebesgue 空間とする. 尚, 簡易化の為, $\|\phi\| = \|\phi\|_2$ と記述することとする. また重み付きの Sobolev 空間を

$$H^{m,s} = \left\{ \phi \in L^2; \|\phi\|_{m,s} = \| \langle x \rangle^s \langle i\partial_x \rangle^m \phi \|_2 < \infty, m, s \in \mathbb{R}^+ \right\}, \text{ 但し } \langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$$

と定義する. $C(\mathbf{I}; \mathbf{B})$ は時間区間 $\mathbf{I}$ から Banach 空間 $\mathbf{B}$ への連続関数の空間を表すこととする. $\mathcal{F}\phi(x)$ また $\hat{\phi}(x)$ は, 関数 ϕ に対するフーリエ変換を意味し, $\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi} \phi(x) dx$ で定義され, 一方フーリエ逆変換は $\mathcal{F}^{-1}\phi(x)$, $\check{\phi}(x)$ で表わし, $\check{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \phi(\xi) d\xi$ と

定義する. 初期値問題 (1) を考える際に, 分数冪の微分を取り扱うことになるが, 分数冪の微分はフーリエ変換を用いて以下のように定義される.

$$|\partial_x|^\delta = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^\delta \mathcal{F}\phi$$

作用素 $\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{F}^{-1}e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t}\hat{\phi}(\xi)$$

と定義すると, 先程述べた初期値問題 (1) に関する線形の初期値問題

$$\begin{cases} u_t + \alpha(-\partial_x^2)^\beta u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

に対する解, 即ち初期値問題 (1) の基本解は $u(t) = \mathcal{G}(t)\phi$ となる. 次の補題は, この基本解に対する評価式である.

補題 1. $\mathcal{G}(t)\phi$ について以下の評価が得られる.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_\infty &\leq Ct^{-\frac{1}{2\beta}}\|\phi\|_1, \\ \|\partial_x^\delta \mathcal{G}(t)\phi\| &\leq Ct^{-\frac{1}{4\beta}-\frac{\delta}{2\beta}}\|\phi\|_1, \\ \| |x|^\mu \mathcal{G}(t)\phi \| &\leq Ct^{-\frac{1}{4\beta}+\frac{\mu}{2\beta}}\|\phi\|_1 + C\|\phi\|_{0,\mu}, \quad \mu < 2\beta, \mu < 1. \end{aligned}$$

また初期値問題 (1) より次の積分方程式を得ることができる.

$$u(t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(u)d\tau. \quad (4)$$

但し, $f(u) = -\gamma|u|^{p-1}u$. この積分方程式 (4) に対する時間大域解の存在についての定理が以下である.

定理 1. p, δ, μ がそれぞれ $p > 1 + 2\beta$, $\frac{1}{2} > \delta > 0$, $\frac{1}{2} > \mu > 0$ を満たすものとする. 初期値 u_0 が次の条件を満たしているとする.

$$\begin{aligned} (I) \quad & 2 \leq p, \text{ のとき} \quad u_0 \in L^1 \cap H^{\delta,0}, \quad \|u_0\|_1 + \|u_0\|_{\delta,0} = \varepsilon, \\ (II) \quad & \frac{1}{4} < \beta < \frac{1}{2} \text{ かつ } p < 2, \text{ のとき } u_0 \in L^1 \cap H^{\delta,0} \cap H^{0,\mu}, \quad \|u_0\|_1 + \|u_0\|_{\delta,0} + \|u_0\|_{0,\mu} = \varepsilon, \end{aligned}$$

但し ε は十分小さいものとする. このとき,

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \infty); H^{\delta,0}), \\ \|u(t)\|_\infty &\leq C\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}. \end{aligned}$$

となる積分方程式 (4) に対する時間大域解が一意に存在する.

以下, この定理に対する証明を与えていくが, はじめに第 2 節において補題 1 の証明を与える. また第 3 節において, 定理 1 の条件 (I) の場合, 第 4 節では条件 (II) の場合について証明を与える.

2 補題 1 の証明

この節においては補題 1 の証明を与える. まずはじめに 1 番目の評価式を示す. $\mathcal{G}(t)$ が $\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{F}^{-1}e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t}\hat{\phi}(\xi)$ と定義されていたことより,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\infty} &= \|\mathcal{F}^{-1}e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t}\hat{\phi}(\xi)\|_{\infty} \leq C\|e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t}\hat{\phi}(\xi)\|_1 \\ &\leq C\|\hat{\phi}(\xi)\|_{\infty}\|e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t}\|_1 \leq C|t|^{-\frac{1}{2\beta}}\|\phi\|_1.\end{aligned}$$

よって 1 番目の評価式が得られた. 次に 2 番目の評価式について示す.

$$\| |\partial_x|^{\delta} \mathcal{G}(t)\phi \| = \| |\xi|^{\delta} e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t} \hat{\phi}(\xi) \|_2 \leq C t^{-\frac{1}{4\beta} - \frac{\delta}{2\beta}} \|\phi\|_1.$$

この評価式を用いて, 次の 3 番目の評価式を示す. 尚, $G(t) = \mathcal{F}^{-1}e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t}$ とおく.

$$\begin{aligned}\| |x|^{\mu} \mathcal{G}(t)\phi \| &= \| |x|^{\mu} \mathcal{F}^{-1}e^{-\alpha|\xi|^{2\beta}t} \hat{\phi}(\xi) \| \\ &= \| |x|^{\mu} (G(t) * \phi)(x) \| \\ &\leq C \| (|\cdot|^{\mu} G(t) * \phi)(x) \| + C \| (G(t) * |\cdot|^{\mu} \phi)(x) \| \\ &\leq C \|\phi\|_1 \| |x|^{\mu} G(t) \|_2 + C \|G(t)\|_1 \| |x|^{\mu} \phi \|_2 \\ &\leq C t^{-\frac{1}{4\beta} + \frac{\mu}{2\beta}} \|\phi\|_1 + C \|\phi\|_{0,\mu}.\end{aligned}$$

以上より補題 1 が示せた.

3 定理 1 (I) の証明

この節においては定理 1 における, 条件が (I) の場合についての縮小写像の原理を用いて証明を与える. ここで証明に用いる関数空間を導入する.

$$X = \{f \in C([0, \infty); L^2); \|f\|_X < \infty\}.$$

ノルムは

$$\|f\|_X = \sup(1+t)^{\frac{1}{4\beta}} \|f(t)\|_{\delta,0} + \sup(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|f(t)\|_{\infty}$$

と定義する. 但し $0 < \delta < \frac{1}{2}$ とする. また閉球を次のように定義する.

$$X_{\rho} = \{f \in X; \|f\|_X \leq \rho\}.$$

次の線形化された積分方程式を扱う.

$$u(t) = \mathcal{M}v = \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(v)d\tau. \quad (5)$$

但し, $f(v) = -\gamma|v|^{p-1}v$, $v \in X_\rho$. $\rho > 0$ を十分小さくとれば, 写像 $\mathcal{M}$ が X_ρ からそれ自身に移すことを示す. 積分方程式 (5) の両辺で $H^{\delta,0}$ ノルムと L^∞ ノルムをそれぞれとる. 尚ここで補題 1 を用いる.

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\delta,0} &= \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\delta,0} + \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau)f(v)\|_{\delta,0} d\tau \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{4\beta}}(\|u_0\|_1 + \|u_0\|_{\delta,0}) + C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4\beta}}(\|f(v)\|_1 + \|f(v)\|_{\delta,0}) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}(\|u_0\|_1 + \|u_0\|_{\delta,0}) + C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2\beta}}(\|f(v)\|_1 + \|f(v)\|_{\delta,0}) d\tau \quad (7)$$

これらの不等式 (6), (7) は定理の証明の基本となる. 不等式中の $f(v)$ の $H^{\delta,0}$ ノルム及び L^1 ノルムについて評価する. $f(v)$ の定義 $f(v) = -\gamma|v|^{p-1}v$, 及び $v \in X_\rho$ であることから,

$$\|f(v)\|_1 \leq C\|v\|_\infty^{p-2}\|v\|_2^2 \leq C\rho^p(1+\tau)^{-\frac{1}{2\beta}(p-1)}, \quad (8)$$

$$\|f(v)\|_{\delta,0} \leq \|v\|_\infty^{p-1}(\|v\|_2 + \|v\|_{\delta,0}) \leq C\rho^p(1+\tau)^{-\frac{1}{2\beta}(p-\frac{1}{2})}. \quad (9)$$

(8) は今 p が $p > 2$ を満たすことから, 上のように評価可能であり, $H^{\delta,0}$ ノルムに対する不等式は Besov ノルムの同値性を用いている. 不等式 (6), (8) 及び (9) より次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} (1+t)^{\frac{1}{4\beta}} \|u(t)\|_{\delta,0} &\leq C\varepsilon + C\rho^p(1+t)^{\frac{1}{4\beta}} \int_0^t (1+(t-\tau))^{-\frac{1}{4\beta}} (1+\tau)^{-\frac{1}{2\beta}(p-1)} d\tau \\ &\leq C\varepsilon + C\rho^p. \end{aligned}$$

また不等式 (7), (8) 及び (9) を用いることにより, 次の不等式を得ることができる.

$$\begin{aligned} (1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|u(t)\|_\infty &\leq C\varepsilon + C(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \int_0^t (1+(t-\tau))^{-\frac{1}{2\beta}} (1+\tau)^{-\frac{1}{2\beta}(p-1)} d\tau \\ &\leq C\varepsilon + C\rho^p. \end{aligned}$$

上の 2 つの不等式より

$$\|u\|_X = \|Mv\|_X \leq C\varepsilon + C\rho^p \leq \rho. \quad (10)$$

同様に次の不等式が得られる.

$$\|Mv_1 - Mv_2\|_X \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_X. \quad (11)$$

(10), (11) が得られ, 縮小写像の原理より (4) に対する時間大域解が存在することが示せた.

4 定理 1 (II) の証明

この節においては条件 (II) の場合の証明を与える. この節においては関数空間を次のように定義する.

$$X = \{f \in C([0, \infty); L^2); \|f\|_X < \infty\}.$$

X のノルムは

$$\|f\|_X = \sup(1+t)^{\frac{1}{4\beta}} \|f(t)\|_{\delta,0} + \sup(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|f(t)\|_{\infty} + \sup(1+t)^{\frac{1}{4\beta} - \frac{\mu}{2\beta}} \|f(t)\|_{0,\mu}$$

と定義する. 但し, $\frac{1}{2} > \delta > 0$, $\frac{1}{2} > \mu > 0$. また閉球を次のように定義する.

$$X_{\rho} = \{f \in X; \|f\|_X \leq \rho\}.$$

第 3 節と同様に, (5) で定義された写像 $\mathcal{M}$ が $\rho > 0$ を十分小さくとれば, X_{ρ} からそれ自身に移すことを示す. 積分方程式 (5) の両辺で $H^{\delta,0}$ ノルム, L^{∞} ノルムまた $H^{0,\mu}$ ノルムをそれぞれとる. 但し, 前節においてすでに $H^{\delta,0}$ ノルムと L^{∞} ノルムに関しては不等式 (6)(7) が得られているので, ここでは $H^{0,\mu}$ ノルムについての評価を行う.

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{0,\mu} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{4\beta} + \frac{\mu}{2\beta}} (\|u_0\|_{0,\mu} + \|u_0\|_1) \\ &\quad + C \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4\beta} + \frac{\mu}{2\beta}} (\|f(v)\|_{0,\mu} + \|f(v)\|_1) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

補題 1 を用いることにより上の不等式が得られる. また不等式中の $f(v)$ の $H^{0,\mu}$ ノルムについては次のように評価できる.

$$\|f(v)\|_{0,\mu} \leq C\|v\|_{\infty}^{p-1}\|v\|_{0,\mu} \leq C\rho^p(1+\tau)^{-\frac{1}{2\beta}(p-1) - \frac{1}{4\beta} + \frac{\mu}{2\beta}}. \quad (13)$$

以上より, $f(v)$ の $H^{0,\mu}$ ノルムについての評価を得ることができたが, L^1 に関する評価も必要となる. なぜならば, 前節において L^1 ノルムに対する評価を行ったが, その際 p に関する条件として $p > 2$ という条件を用いて (8) を得た. よって, この節においては $p < 2$ という条件下で証明であるので (8) を用いることができない為, 再度 $f(v)$ の L^1 ノルムに対して評価式を得る必要がある. 以下それを示す. Hölder の不等式を用いることによって次の不等式が得られる.

$$\|f(v)\|_1 \leq C\|v\|_{2(p-1)}^{p-1}\|v\|_2.$$

再度, Hölder の不等式を用いると,

$$\|v\|_{2(p-1)} \leq C\|v\|_{0, \frac{\gamma}{2(p-1)}}, \text{ 但し, } \gamma > 2-p.$$

となり, これを代入すると,

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_1 &\leq C\|v\|_{0, \frac{\gamma}{2(p-1)}}^{p-1}\|v\| \\ &\leq C\rho^p(1+t)^{-\frac{1}{4\beta} + (-\frac{1}{4\beta} - \frac{1}{2\beta} \frac{\gamma}{2(p-1)})(p-1)} \\ &\leq C\rho^p(1+t)^{-\frac{1}{4\beta}(p-\gamma)}. \end{aligned} \quad (14)$$

前節で扱った (6), (7), 及び上で得られた (12) に (14) を適用すると以下の式が得られる.

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{1}{4\beta}} \|u(t)\|_{\delta,0} &\leq C\varepsilon + C\rho^p (1+t)^{\frac{1}{4\beta}} \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4\beta}} (1+\tau)^{-\frac{1}{4\beta}(p-\gamma)} d\tau, \\(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|u(t)\|_{\infty} &\leq C\varepsilon + C\rho^p (1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \int_0^t (1+(t-\tau))^{-\frac{1}{2\beta}} (1+\tau)^{-\frac{1}{4\beta}(p-\gamma)} d\tau, \\(1+t)^{\frac{1}{4\beta}-\frac{\mu}{2\beta}} \|u(t)\|_{0,\mu} &\leq C\varepsilon + C\rho^p (1+t)^{\frac{1}{4\beta}-\frac{\mu}{2\beta}} \int_0^t (1+(t-\tau))^{-\frac{1}{4\beta}+\frac{\mu}{2\beta}} (1+\tau)^{-\frac{1}{2\beta}(p-1)} d\tau.\end{aligned}$$

よって, 上の不等式により

$$\|u\|_X = \|Mv\|_X \leq C\varepsilon + C\rho^p \leq \rho. \quad (15)$$

同様に次の不等式が得られる.

$$\|Mv_1 - Mv_2\|_X \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_X. \quad (16)$$

(15), (16) より、縮小写像の原理より (4) に対する時間大域解が存在することが示せた.

参考文献

- [1] H.Fujita, *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, **13** (1966), pp. 109-124.
- [2] K. Hayakawa, *On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), pp. 503-505.
- [3] K.Kobayashi, T.Sirao and H.Tanaka, *On the growing up problem for semi-linear heat equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), pp. 407-424.
- [4] S.Sugitani, *On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations*, Osaka J. Math., **12** (1975), pp.
- [5] F. B. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math., **38** (1981), no1-2, pp.29-40. 45-51.

Transition Layers for General Bistable Equations

浦野 道雄 (早稲田大学 理工学研究科 修士2年)

michio_u@akane.waseda.jp

§1. Introduction

以下の反応拡散方程式の定常問題について考える;

$$(E) \quad \begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x, u), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

ここで ε は正のパラメータで, $f(x, u)$ は次で与えられる関数である;

$$f(x, u) = -(u - a(x))(u - b(x))(u - c(x)).$$

また, $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot) \in C^2([0, 1])$ であり,

$$a(x) < b(x) < c(x) \quad \text{in } [0, 1]$$

を満たしているとする.

この方程式は, 物理学における相転移現象を表す方程式としてよく知られており, $a(x) \equiv 0$, $0 < b(x) < 1$, $c(x) \equiv 1$ の場合については Angenent, Mallet-Paret and Peletier[1] によって, 遷移層を持つ定常解の存在が示されている. ここで遷移層とは空間的にきわめて狭い区間において, 解が $u = 0$ 付近から $u = 1$ 付近へと変化する層のことをさす. 以下, 遷移層を持つ解を遷移層解と呼ぶ. また, Angenent らは遷移層における解の形状等やその線形化安定性についても詳しく論じている.

今回の目的は, それらの結果の一般化にある. この問題の解の存在は, Sunada[4] により論じられているが, 今回得られた結果はその解の存在領域をより精度化したものである.

まず (E) のような非線形項を持つ方程式になぜ遷移層解が現れるかについて考えよう. (E) の方程式の両辺に u_t を乗じて x について 0 から 1 まで積分すると,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2 u_x^2 - F(x, u) \right] dx \leq 0$$

を得る. ここで

$$F(x, u) := \int_{a(x)}^u f(x, s) ds$$

である. また

$$I(u) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2 u_x^2 - F(x, u) \right] dx$$

とおこう. この $I(u)$ をエネルギーと呼ぶ. 上式から $I(u)$ は時間とともに単調減少であることが分かる. これは (E) の解がエネルギーの減少するように時間発展していくことを意味する.

エネルギーはパラメータ ε が十分小さいとき, $-F(x, u)$ が支配的となるので, その様子は $-F(x, u)$ の形状に大きく依存する. $-F(x, u)$ の形状について議論するために, 次の関数を導入する;

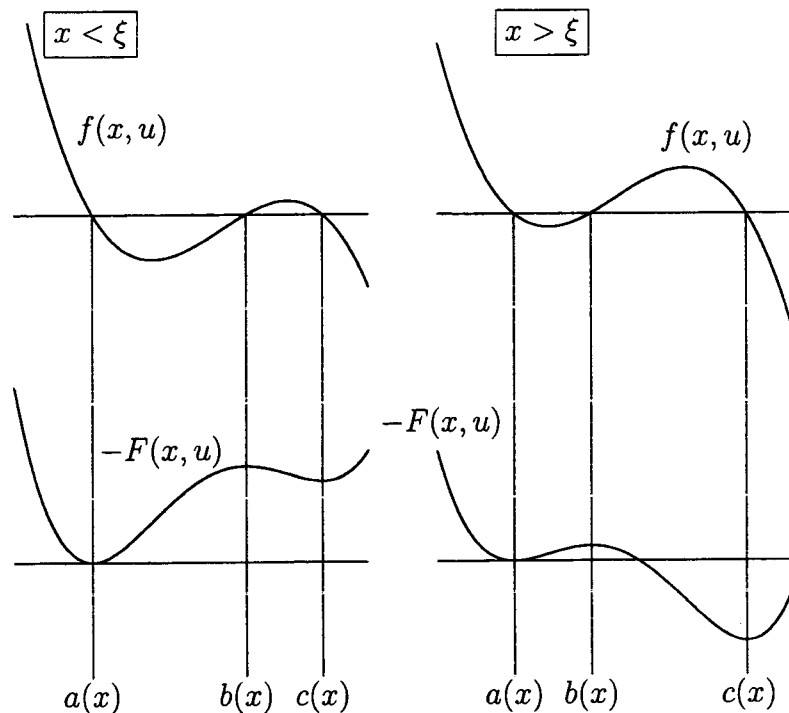
$$\Phi(x) := (c(x) - b(x)) - (b(x) - a(x)).$$

この関数はその形の表す通り, ある点 x における a と b の距離と, b と c の距離とを比較する関数である. ここで Φ は有限個の零点を $(0, 1)$ 上に持ち, 0 または 1 は零点でないと仮定する. その中から次の仮定を満たすように n 個の零点の集合 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ を任意に選び出す;

$$0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < 1 \text{ かつ } (-1)^i \Phi'(\xi_i) < 0.$$

ここでは簡単のため上の仮定を満たすような零点が $\xi = \xi_1$ だけだった場合について考える. $\Phi'(\xi) > 0$ に注意しよう.

このように ξ を定義すると, $x = \xi$ の前後で $-F(x, u)$ の様子は大きく異なる. 下の図は $f(x, u)$ と $-F(x, u)$ を x と ξ の大小関係ごとに比較して描いたものであり, 横軸は u を表す.



$x < \xi$ において井戸 (potential well) の深さを比べると, $u = a(x)$ の方が $u = c(x)$ よりも深いことが分かる. これは $a(x)$ の方が $c(x)$ に比べると安定性が高いことを意味する.

一方, $x > \xi$ ではその安定性の関係が逆転する. したがって $x = \xi$ を境に $x < \xi$ では $a(x)$ に, $x > \xi$ では $c(x)$ に解が引き寄せられ, 結果として $x = \xi$ 付近で $a(x)$ から $c(x)$ をつなぐような遷移層解が生じると考えられる.

本稿では実際にこのような遷移層解が存在することを証明する.

また, このような2つの井戸を持つ W 字型のポテンシャル $-F(x, u)$ を双安定なポテンシャルと呼ぶ. 本稿では双安定なポテンシャルの井戸の深さが変化する場合を扱うが, 2つの井戸の深さが常に等しい場合, すなわち $\Phi \equiv 0$ の場合については, Nakashima[2] により遷移層解の存在が示されている.

§2. Preliminaries

(E) の定常問題は

$$(SE) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

となる. ここで $'$ は x に関する微分を表す.

(SE) の遷移層解の存在を示すためにいくつかの準備をしよう.

定義 2.1. 有限個の点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ ($0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$) に対して, 以下の性質を満たす関数 u の全体を $PC^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする;

- (i) $u \in C([0, 1])$,
- (ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_i - 0} u'(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_i + 0} u'(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$,
- (iii) $\exists \lim_{x \rightarrow +0} u'(x), \exists \lim_{x \rightarrow 1 - 0} u'(x)$,
- (iv) $u \in C^2(x_i, x_{i+1}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. ただし $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$ とする.

定義 2.2 (supersolution, subsolution). 関数 $u \in PC^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が以下の (S1)–(S3) を満たすとき, u を (SE) の **supersolution** という;

- (S1) $\varepsilon^2 u'' + f(x, u) \leq 0, \quad \text{in } (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n$
- (S2) $\lim_{x \rightarrow x_i - 0} u'(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_i + 0} u'(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$
- (S3) $\lim_{x \rightarrow +0} u'(x) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1 - 0} u'(x) \geq 0.$

また, (S1)–(S3) において逆向きの不等式を満たす u を (SE) の **subsolution** という.

命題 2.3 ([3]). $\bar{u}, \underline{u}$ をそれぞれ (SE) の supersolution, subsolution とし, $[0, 1]$ 上で $\bar{u} \geq \underline{u}$ が成立するとする. このとき $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ を満たす (SE) の安定な解 u が存在する.

§3. Existence

(SE) には複数の遷移層を持つ解も存在するが、ここでは簡単のため遷移層を1つだけ持つ遷移層解の存在を示す。そのために1. で定めた Φ が

$$\Phi(\xi) = 0 \text{ かつ } \Phi'(\xi) > 0$$

なる零点をただ1つだけ持つと仮定する。このとき $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$ は連続なので

$$\Phi'(x) > 0 \quad \text{in } (\xi - \delta, \xi + \delta)$$

を満たすような定数 $\delta > 0$ をとることができる。

定理 3.1. 任意の $\theta \in (0, 2)$ に対して、ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta) > 0$ が存在して、 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ を満たす任意の ε に対して (SE) は以下の性質を持つ安定な解を持つ;

- (i) $|u(x) - a(x)| < \varepsilon^{2-\theta} \quad \text{in } (0, \xi - \delta),$
- (ii) $|u(x) - c(x)| < \varepsilon^{2-\theta} \quad \text{in } (\xi + \delta, 1).$

証明. supersolution $\bar{u}$ を構成する。まず $0 \leq x \leq \xi - \delta$ 上で考える。任意の $\theta \in (0, 2)$ に対して

$$\bar{u}(x) := a(x) + \varepsilon^{2-\theta}, \quad 0 \leq x \leq \xi - \delta \quad (3.1)$$

とおくと $\bar{u}$ は $0 \leq x \leq \xi - \delta$ において (S1) を満たす。実際、

$$\begin{aligned} f(x, \bar{u}) &= f(x, a(x) + \varepsilon^{2-\theta}) \\ &= \varepsilon^{2-\theta} (b(x) - a(x) - \varepsilon^{2-\theta}) (c(x) - a(x) - \varepsilon^{2-\theta}) \\ &\leq -M \varepsilon^{2-\theta} \quad \text{with } M > 0 \text{ if } \varepsilon \ll 1, \end{aligned}$$

なので、 ε を十分小さくとれば

$$\varepsilon^2 \bar{u}'' + f(x, \bar{u}) \leq \varepsilon^2 a'' - M \varepsilon^{2-\theta} < 0$$

とすることができる。

(3.1) の $\bar{u}$ は $x = 0$ を含む区間で定義されているので、(S3) についても考えなくてはならない。すなわち、 $\bar{u}'(0) = a'(0) > 0$ のときは (3.1) の $\bar{u}$ をそのまま用いることはできない。そこで、 $a'(0) > 0$ の場合の修正法を述べる;

$$\bar{u}(x) := a(x) + \varepsilon^{2-\theta} + \varepsilon^{-\theta'} (x - \varepsilon^{\theta''})^2, \quad 0 \leq x \leq \varepsilon^{\theta''} \quad (3.2)$$

とする。ここで θ', θ'' は $0 < \theta'' < \theta' < 2\theta''$, $\theta' < \theta$ を満たすようにとる。このとき、

$$\bar{u}'(0) = a'(0) - 2\varepsilon^{\theta''-\theta'}$$

となるので、 ε が十分小さいならば $\bar{u}'(0) < 0$ とすることができる。すなわち(3.2)の $\bar{u}$ は(S3)を満たす。一方、 $\bar{u}(\varepsilon^{\theta''}) = a(\varepsilon^{\theta''}) + \varepsilon^{2-\theta}$ 、 $\bar{u}'(\varepsilon^{\theta''}) = a'(\varepsilon^{\theta''})$ なので、 $x = \varepsilon^{\theta''}$ において、 $\bar{u}$ は(3.1)で定められた $\bar{u}$ と微分もこめて連続である。さらに(S1)の成立を示そう。今、 $\theta' < 2\theta''$ なので

$$f(x, \bar{u}) < f(x, a(x) + \varepsilon^{2-\theta}) \quad \text{if } \varepsilon \ll 1$$

が成立することに注意する。ただし上式の $\bar{u}$ は(3.2)で定義された関数である。すると

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \bar{u}'' + f(x, \bar{u}) &< \varepsilon^2 a'' + 2\varepsilon^{2-\theta'} + f(x, a(x) + \varepsilon^{2-\theta}) \\ &\leq \varepsilon^2 a'' + 2\varepsilon^{2-\theta'} - M\varepsilon^{2-\theta} \\ &< 0 \quad \text{if } \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

とすることができる。

次に $x \geq \xi - \delta$ で supersolution を構成するために以下の初期値問題を考える；

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & x > \xi - \delta, \\ u(\xi - \delta) = a(\xi - \delta) + \varepsilon^{2-\theta} + \eta, \\ u'(\xi - \delta) = a'(\xi - \delta). \end{cases}$$

ここで、 η は $\eta \in (0, p - a(\xi - \delta))$ となるように十分小さくとるものとする。ただし p は $F(\xi - \delta, c(\xi - \delta)) = F(\xi - \delta, p)$ を満たし、かつ $p \in (a(\xi - \delta), b(\xi - \delta))$ なるものとする。今、 $x = \xi - \delta + \varepsilon t$ 、 $U(t) = u(\xi - \delta + \varepsilon t)$ なる変換をすると

$$(P'_\varepsilon) \quad \begin{cases} U'' + f(\xi - \delta + \varepsilon t, U) = 0, & t > 0, \\ U(0) = a(\xi - \delta) + \varepsilon^{2-\theta} + \eta, \\ U'(0) = \varepsilon a'(\xi - \delta). \end{cases}$$

となる。 $\varepsilon = 0$ の場合について考えよう；

$$(P_0) \quad \begin{cases} U'' + f(\xi - \delta, U) = 0, & t > 0, \\ U(0) = a(\xi - \delta) + \eta, \\ U'(0) = 0. \end{cases}$$

(P_0) は η のとり方から

$$U_0(t) \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

なる解 U_0 を持つ。このとき ε に無関係な正定数 T_0 が存在して

$$U_0(T_0) = c(\xi - \delta) + 1$$

が成立する。常微分方程式の解のパラメータに関する連続性から、 (P'_ε) の解 U_ε で、ある $T_\varepsilon \in (0, T_0 + 1)$ に対して

$$U_\varepsilon(T_\varepsilon) = c(\xi - \delta) + 1$$

を満たすものが存在する. このとき c の連続性と中間値の定理により, ある $T'_\varepsilon \in (0, T_\varepsilon)$ に対して

$$U_\varepsilon(T'_\varepsilon) = c(\xi - \delta + \varepsilon T'_\varepsilon) + \varepsilon^{2-\theta}$$

が成立する. ただし, 上式では T_ε が ε によらずに有界なので $\varepsilon T'_\varepsilon (< \varepsilon T_\varepsilon)$ をいくらでも小さくとれることを用いている. すなわち, この U_ε に対応する (P_ε) の解を u_1^ε とすれば

$$u_1^\varepsilon(\xi - \delta + \varepsilon T'_\varepsilon) = c(\xi - \delta + \varepsilon T'_\varepsilon) + \varepsilon^{2-\theta}$$

が成立する. $\xi_1^\varepsilon = \xi - \delta + \varepsilon T'_\varepsilon$ とおけば前述の通り $\varepsilon T'_\varepsilon$ はいくらでも小さくとることができるので $\xi_1^\varepsilon \in (\xi - \delta, \xi)$ とすることができる. そこで, $\xi - \delta \leq x \leq \xi_1^\varepsilon$ における supersolution を次で定義する;

$$\bar{u}(x) := u_1^\varepsilon(x), \quad \xi - \delta \leq x \leq \xi_1^\varepsilon. \quad (3.3)$$

また

$$\bar{u}(x) := c(x) + \varepsilon^{2-\theta}, \quad \xi_1^\varepsilon \leq x \leq 1 \quad (3.4)$$

とおけば, これは (3.1) の議論と同様に $\xi_1^\varepsilon \leq x \leq 1$ における supersolution となる. また, $x = 1$ について修正が必要ならば $x = 0$ における修正と同様の修正を施せばよい.

最後に (3.1) と (3.3) は $x = \xi - \delta$ において不連続なのでその修正をしよう;

$$\bar{u}(x) := a(x) + \varepsilon^{2-\theta} + w_1(x), \quad \xi - \delta - \varepsilon^\sigma \leq x \leq \xi - \delta \quad (3.5)$$

と修正すればよい. ただし

$$w_1(x) := \eta \varepsilon^{-2\sigma} (x - \xi + \delta + \varepsilon^\sigma)^2$$

であり, σ は $2\sigma < \theta$ を満たす正定数である.

$\bar{u}(\xi - \delta - \varepsilon^\sigma) = a(\xi - \delta - \varepsilon^\sigma) + \varepsilon^{2-\theta}$, $\bar{u}(\xi - \delta) = a(\xi - \delta) + \varepsilon^{2-\theta} + \eta$ なので, $x = \xi - \delta - \varepsilon^\sigma$, $x = \xi - \delta \leq x$ でそれぞれ (3.1), (3.3) で定義された supersolution と連続的に結ばれる. さらに $\bar{u}'(\xi - \delta - \varepsilon^\sigma) = a'(\xi - \delta - \varepsilon^\sigma)$ なので (3.1) とは微分もこめて連続である. 一方, $\bar{u}'(\xi - \delta) = a'(\xi - \delta) + 2\eta \varepsilon^{-\sigma}$ なので, ε が十分小さいならば, $x = \xi - \delta$ において (S2) も成立する. あとは (S1) の成立をみればよい;

$0 \leq w_1(x) \leq \eta$ なので, 必要ならば η をさらに小さくすることにより

$$f(x, \bar{u}) \leq f(x, a(x) + \varepsilon^{2-\theta}), \quad \xi - \delta - \varepsilon^\sigma \leq x \leq \xi - \delta$$

とすることができる. したがって

$$\varepsilon^2 \bar{u}'' + f(x, \bar{u}) \leq \varepsilon^2 a'' + 2\eta \varepsilon^{2-2\sigma} - M \varepsilon^{2-\theta} < 0 \quad \text{if } \varepsilon \ll 1$$

が成立する.

以上により

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} a(x) + \varepsilon^{2-\theta} & \text{in } [0, \xi - \delta - \varepsilon^\sigma], \\ a(x) + \varepsilon^{2-\theta} + w_1(x) & \text{in } [\xi - \delta - \varepsilon^\sigma, \xi - \delta], \\ u_1^\varepsilon(x) & \text{in } [\xi - \delta, \xi_1^\varepsilon], \\ c(x) + \varepsilon^{2-\theta} & \text{in } [\xi_1^\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

は (SE) の supersolution となる. ただし, $x = 0$ または $x = 1$ においては, 必要ならばしかるべき修正がなされているものとする.

一方, subsolution $\underline{u}$ は以下のように定義できる;

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} a(x) - \varepsilon^{2-\theta} & \text{in } [0, \xi_2^\varepsilon], \\ u_2^\varepsilon(x) & \text{in } [\xi_2^\varepsilon, \xi + \delta], \\ c(x) - \varepsilon^{2-\theta} - w_2(x) & \text{in } [\xi + \delta, \xi + \delta + \varepsilon^\sigma], \\ c(x) - \varepsilon^{2-\theta} & \text{in } [\xi + \delta + \varepsilon^\sigma, 1]. \end{cases}$$

ここで, u_2^ε は

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & x < \xi + \delta, \\ u(\xi + \delta) = a(\xi + \delta) - \varepsilon^{2-\theta} - \eta, \\ u'(\xi + \delta) = c'(\xi + \delta). \end{cases}$$

の解で, ほぼ $c(x)$ と $a(x)$ の間を結ぶような形状をした解である. これは supersolution の定義における u_1^ε に対応する. また ξ_2^ε は u_2^ε と $a(x) - \varepsilon^{2-\theta}$ との交点で $\xi_2^\varepsilon \in (\xi, \xi + \delta)$ を満たす正定数であり, w_2 は w_1 に対応する関数で,

$$w_2(x) = \eta \varepsilon^{-2\sigma} (x + \xi - \delta - \varepsilon^\sigma)^2, \quad \xi + \delta \leq x \leq \xi + \delta + \varepsilon^\sigma$$

で定義されるものである. さらに $c'(1) > 0$ のときは $x = 0$ における修正と同様に

$$\underline{u}(x) = c(x) - \varepsilon^{2-\theta} - \varepsilon^{-\theta'} (x - 1 + \varepsilon^{\theta''})^2, \quad 1 - \varepsilon^{\theta''} \leq x \leq 1$$

なる修正がなされているものとする.

このように supersolution および subsolution を定義すると, その構成の仕方から $\underline{u} \leq \bar{u}$ は明らかである. したがって命題 2.3 を適用して定理が示される. $\square$

参考文献

- [1] S. B. Angenent, J. Mallet-Paret, and L. A. Peletier, *Stable transition layers in a semilinear boundary value problem*, J. Differential Equations, **67**(1987), 212–242.
- [2] K. Nakashima, *Stable transition layers in a balanced bistable equation*, Differential Integral Equations, **13**(2000), 1025–1238.
- [3] D. H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. , **21**(1972), 979–1000.

- [4] Y. Sunada, *Transition Layers for General Bistable Equations with Small Diffusion*,
早稲田大学 修士論文, 2001.

Asymptotic profiles of variational solutions for a FitzHugh-Nagumo type elliptic system

松澤 寛 (東京都立大学)

hmatsu@comp.metro-u.ac.jp

1 Introduction and Main results

In this paper, we consider the following FitzHugh-Nagumo type elliptic system:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda(f(u) - v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = \lambda(\delta u - \gamma v) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, δ, γ are positive constants, $\lambda > 0$ is a parameter and f is given by $f(u) = u(u - a)(1 - u)$ where $0 < a < 1/2$. This problem is the stationary problem for the FitzHugh-Nagumo equation:

$$(D_\lambda) \begin{cases} u_t - \lambda^{-1} \Delta u = f(u) - v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ v_t - \lambda^{-1} \Delta v = \delta u - \gamma v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x). \end{cases}$$

These equation are used as a model for nerve conduction and other chemical and biological systems. See [15] and the references therein about the case where the diffusion constant of u is much smaller than the diffusion constant of v .

If we set $\delta = 0$ in (P_λ) , then the problem is reduced to the scalar problem:

$$(S_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where the function f is the one given in the above. It is well known that for large $\lambda > 0$ there are at least two positive solutions. One is obtained as the global minimizer of

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \lambda F(u) dx$$

and has a boundary layer of width $O(\lambda^{-1/2})$. The other is obtained as a mountain pass solution and has a spiky shape if Ω is convex (see [11]). Moreover if Ω is a ball, Ouyang and Shi [17] obtained the exact multiplicity of solutions to (S_λ) for any $\lambda > 0$.

Our study is motivated to understand the complete dynamics of solutions for (D_λ) . Although the Lyapunov functional has been obtained in [7], we need to study the structure of solutions to (P_λ) in details to understand the complete dynamics of solutions to (D_λ) . In this paper we focus on the study of the asymptotic profiles of solutions to (P_λ) as a first step of this program.

Now we recall briefly two approaches to construct solutions to (P_λ) . See section 2 for the details. Since the second equation can be inverted to solve v in terms of u , the problem (P_λ) can be then written as a single equation for u including a nonlocal term. More precisely, if we define the operator $B_\lambda := (-\lambda^{-1} \Delta + \gamma)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, then the problem (P_λ) is reduced to the following problem:

$$(NL_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + \lambda \delta B_\lambda u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Klaasen and Mitidieri [13] obtained two nontrivial solutions $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ and $(\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda)$ in some parameter range as a critical points of the functional

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} \delta (B_\lambda u) u - \lambda F(u) dx$$

on $H_0^1(\Omega)$, where $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Using an a priori estimate for the solution to (P_λ) , the function f will be modified for large $|u|$, so that the functional J_λ is well defined on $H_0^1(\Omega)$. The pair $(\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda)$ is obtained as a global minimizer and $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ is obtained by the well-known *Mountain Pass Theorem*. We will often call $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ a *mountain pass solution*. See section 2 for details.

On the other hand, recently in [20] Reinecke and Sweers discovered a nice transformation (P_λ) to a quasimonotone system and obtained a solution (U_λ, V_λ) by using the method of sub-supersolutions for a somewhat restricted parameter range. This solution (U_λ, V_λ) is stable and has a boundary layer of width $O(\lambda^{-1/2})$. Moreover (U_λ, V_λ) is a unique solution in certain order interval. Hence we will call (U_λ, V_λ) a *boundary layer solution*. However the relation between these solutions obtained by these different approach was unclear.

In this paper, we show the global minimizer $(\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda)$ coincides with the boundary layer solution (U_λ, V_λ) for sufficient large $\lambda > 0$ when Ω is a strictly convex domain. Moreover, we prove that a mountain pass solution $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ has a spiky asymptotic profile for large $\lambda > 0$ when Ω is ball.

To state our main results precisely, we need to assume the following three conditions on the parameters γ , δ and a .

Conditions . (C1) $\frac{\delta}{\gamma} < a < \gamma - 2\sqrt{\delta}$.

(C2) $\gamma - 2\sqrt{\delta} > M := \frac{(1-a)^2}{2} + \frac{1+a}{2}\sqrt{(1-a)^2 + 4\frac{\delta}{\gamma}} + 3\frac{\delta}{\gamma}$

(C3) $\frac{2a^2 - 5a + 2}{9} > \beta := \frac{1}{2}(\gamma - M) - \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma - M)^2 - 4\delta}$

Remark . De Figueiredo and Mitidieri [6] showed that under the condition (C1) every nontrivial solution to the problem (NL_λ) is positive (see Proposition 2.4). Next we will use the condition (C2) to transform (P_λ) to some quasimonotone system and use the condition (C3) to construct a subsolution to the quasimonotone system. We also note that the condition (C3) implies $(2a^2 - 5a + 2)/9 > (\delta/\gamma)$ (see (2.2) in Section 2). If δ is sufficiently small and γ is sufficiently large then all conditions (C1), (C2) and (C3) are satisfied.

Now we state our main results. First one is a new characterization of the boundary layer solution (U_λ, V_λ) .

Theorem 1.1. *Suppose that Ω is strictly convex and conditions (C2) and (C3) hold. Then there exist $\varepsilon > 0$ and $\lambda^\# > 0$ such that if (u_λ, v_λ) is a positive solution of (P_λ) with $\max_\Omega u_\lambda \in (\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon, \rho_{\delta/\gamma}^+)$ and $\lambda > \lambda^\#$ then $u_\lambda = U_\lambda$.*

Using Theorem 1.1, we can show that the global minimizer $(\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda)$ coincides with the boundary layer solution (U_λ, V_λ) for sufficiently large $\lambda > 0$.

Theorem 1.2. *Suppose that the all conditions in Theorem 1.1 and (C1) are satisfied. Then there exists $\lambda^b > 0$ such that for $\lambda > \lambda^b$, $\bar{u}_\lambda = U_\lambda$ holds.*

Lastly, we show a spiky profile of a mountain pass solution $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$, when Ω is a ball.

Theorem 1.3. *Let $\Omega = B_1(0)$ be the unit ball in $\mathbb{R}^N$ and conditions (C1), (C2) and (C3) hold. And let $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ be a mountain pass solution to (P_λ) . Then the followings hold.*

- (1) $\underline{u}_\lambda(0) \geq \rho_{\delta/\gamma}^-$, where $\rho_{\delta/\gamma}^-$ is a positive constant independent of λ and will be defined in Section 2.
- (2) If we set $\tilde{u}_\lambda(x) = \underline{u}_\lambda(\lambda^{-1/2}x)$, $\tilde{v}_\lambda(x) = \underline{v}_\lambda(\lambda^{-1/2}x)$, the set of functions $\{\tilde{u}_\lambda\}, \{\tilde{v}_\lambda\}$ are precompact in $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ and have subsequences which converge to a positive radially symmetric solution to the problem

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f(u) - v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty, \\ v(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

(3) $\underline{u}_\lambda \rightarrow 0, \underline{v}_\lambda \rightarrow 0$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ uniformly on every compact subset of $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$.

This paper is organized as follows. In section 2, we recall preliminary known results. In section 3 we first establish an a priori bound for positive solutions. Next we prove Theorems 1.1 and 1.2 and we show a lower bound estimate for the maximum of the positive solution. Finally we prove Theorem 1.3. In section 4 we state open questions for the problem (P_λ) .

2 Preliminary known results

In this section we collect some preliminary known results. First we define the operator $B_\lambda : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ as follows: for all $w \in L^2(\Omega)$, $v = B_\lambda w$ is the unique weak solution to

$$\begin{cases} -\lambda^{-1} \Delta v + \gamma v = w & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Then the second equation of (P_λ) is equivalent to $v = \delta B_\lambda u$ and by substituting into the first equation of (P_λ) we obtain the single equation including a nonlocal term

$$(NL_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + \lambda \delta B_\lambda u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

The definition of B_λ implies that $\int_\Omega (B_\lambda u) u dx \geq 0$ and B_λ is bounded operator in $L^2(\Omega)$ with $\|B_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq 1/\gamma$. See [13] for proofs of these results.

First we describe how to construct the variational solutions in our setting. For the construction we just impose the following weaker condition:

$$\frac{2a^2 - 5a + 2}{9} > \frac{\delta}{\gamma} \quad (2.2)$$

than the condition (C3). Condition (2.2) is equivalent to the following:

$g(u) := f(u) - \frac{\delta}{\gamma} u$ has three roots $0 < \rho_{\delta/\gamma}^- < \rho_{\delta/\gamma}^+ < 1$ and satisfies

$$\int_0^{\rho_{\delta/\gamma}^+} \left(f(u) - \frac{\delta}{\gamma} u \right) du > 0.$$

Next we state a priori estimate for the solutions to (P_λ) .

Proposition 2.1. ([14, Lemma 3]) *Suppose that there exists $m = m(\delta/\gamma) > 0$ such that*

$$\frac{f(y)}{y} < -\frac{\delta}{\gamma} \quad \text{for } y : |y| > m$$

and let (u, v) be a solution to (P_λ) . Then $|u(x)| \leq m$ for all $x \in \Omega$.

To obtain the variational solution, we have to define the energy functional. We have to modify the function f as follows so that it is well defined and its critical points are the solution to the problem (NL_λ) . Now we assume furthermore condition (C1):

$$\frac{\delta}{\gamma} < a < \gamma - 2\sqrt{\delta}.$$

We note that the direct calculation for $f(u) = u(u - a)(1 - u)$ yields

$$m = m(\delta/\gamma) = \frac{a+1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^2 + 4\frac{\delta}{\gamma}}, \quad (2.3)$$

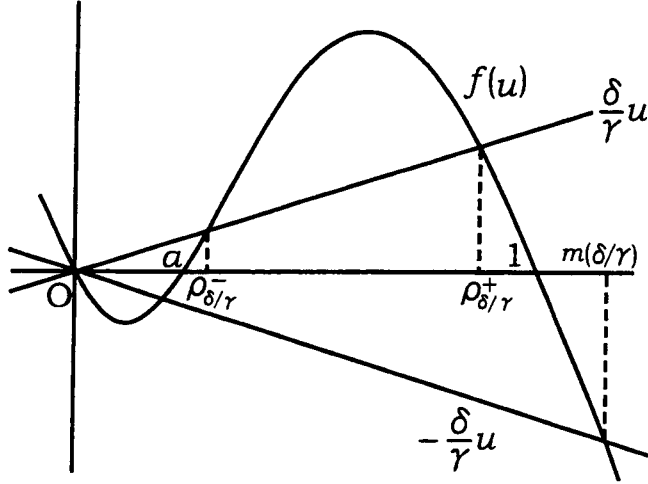


Figure 1:

$$\begin{aligned}
 M = M(\delta/\gamma) &= \max\{-f'(u) | 0 \leq u \leq m(\delta/\gamma)\} \\
 &= \frac{(1-a)^2}{2} + \frac{1+a}{2} \sqrt{(1-a)^2 + 4\frac{\delta}{\gamma} + 3\frac{\delta}{\gamma}} > 1-a > a.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

(see Figure 1).

Using this estimate we modify the function f to $\tilde{f}$ satisfying the following conditions.

- (1) $f(u) = \tilde{f}(u)$ for $0 < u \leq m$.
- (2) $\frac{\tilde{f}(u)}{u} < -\frac{\delta}{\gamma}$ for $|u| > m$.
- (3) $\tilde{f}'(u) = -a < -\frac{\delta}{\gamma}$ for large $u > m$ and for all $u < 0$.
- (4) $\tilde{f}'(u) + M \geq 0$ for all $u \in \mathbb{R}$.
- (5) $\tilde{f}$ is smooth.

Since we are interested in positive variational solutions, we use the modified function $\tilde{f}$ instead of f in the problem (NL_λ) . And later we show that for every nontrivial solution to (NL_λ) with modified function $\tilde{f}$ is positive. Hereafter we consider the problem (NL_λ) with $\tilde{f}$.

Next we define the following functional:

$$J_\lambda(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} \delta(B_\lambda u) u dx - \lambda \tilde{F}(u) dx, \tag{2.5}$$

where $\tilde{F}(u) = \int_0^u \tilde{f}(s) ds$. Hereafter we also use the same notation f and F for the modified function $\tilde{f}$ and $\tilde{F}$. Then we can show that if $u \in H_0^1(\Omega)$ is a critical point of J_λ if and only if u is a weak solution to the (NL_λ) . Moreover by the standard bootstrap argument, $(u, v) = (u, \delta B_\lambda u)$ is a classical solution of (P_λ) .

Now we state the existence result.

Proposition 2.2. ([13, Theorem 1, Theorem 2]) *Let us assume condition (2.2) and (C1). Then there exists $\lambda^\dagger > 0$ such that for all $\lambda > \lambda^\dagger$ there exist two nontrivial solutions $(\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda)$, $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ to (P_λ) satisfies $J_\lambda(\bar{u}_\lambda) < 0$, $J_\lambda(\underline{u}_\lambda) > 0$.*

We note that $(\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda)$ is obtained as a global minimizer of J_λ and $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ is obtained by the *Mountain Pass Theorem* (see [3]).

Actually existence of these two nontrivial solutions to (P_λ) has been proved in [13] without condition (C1). We can show that the solutions obtained by the same procedure as in [13] to (P_λ) with the modified f are solutions to (P_λ) with the original f by Proposition 2.1 and the following argument.

Namely we can show that the variational solutions obtained by the procedure as in [13] to (P_λ) with the modified f are positive.

Since the positivity of the solutions is invariable by the scaling:

$$\begin{aligned}\bar{u}_\lambda(x) &= u(\lambda^{-1/2}x), \quad \bar{v}_\lambda(x) = v(\lambda^{-1/2}x) \\ \text{for } x &\in \lambda^{1/2}\Omega := \{y \in \mathbb{R}^N | \lambda^{1/2}y \in \Omega\}\end{aligned}$$

we may assume $\lambda = 1$ and we consider the problem (NL_1) . Let us define the operator

$$T := -\Delta + \delta B_1, \text{ with } D(T) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

T is a closed and a self adjoint operator. Let us denote by $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$ the eigenvalues of $-\Delta$ with Dirichlet boundary condition and by $\{\phi_k\}$ the corresponding eigenfunctions. It is easily seen that

$$\hat{\mu}_k = \mu_k + \frac{\delta}{\gamma + \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

are the eigenvalues of the operator T . Since $\{\phi_k\}$ is a complete orthonormal system in $L^2(\Omega)$, it is readily shown that $\{\hat{\mu}_k\}$ are the only eigenvalues of T .

The following proposition follows from the positivity of the resolvent operator of T (see [6, Corollary 1.3]).

Proposition 2.3. ([6, Remark 1.3]) *Let us $\gamma + \mu_1 > \sqrt{\delta}$, and $2\sqrt{\delta} - \gamma \leq \mu < \hat{\mu}_1$. If $z \in L^2(\Omega)$, $z \geq 0$ a.e. and w is a weak solution to*

$$\begin{cases} -\Delta w + \delta B_1 w - \mu w = z & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

then $w \geq 0$ a.e. Moreover, if $z \in C(\bar{\Omega})$, $z \geq 0$ in Ω , then $w > 0$ in Ω and the outward normal derivative satisfies $(\partial w / \partial \nu) < 0$ on $\partial\Omega$.

Now we show the positivity of solutions to problem (NL_λ) with the modified function f . We note that our modification implies that $f(u) \geq -au$ for all $u \in \mathbb{R}$. And we can easily check that all conditions of Proposition 2.3 with $\mu = -a$ are satisfied. Therefore every nontrivial solution u to

$$\begin{cases} -\Delta u + \delta B_1 u - (-a)u = f(u) + au & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

is positive. Hence the following proposition holds (see [6, Remark 2.8]).

Proposition 2.4. ([6]) *Let us assume the condition (C1). Then every nontrivial solution to (NL_λ) with the modified f is positive.*

Next we recall the other construction of a solution to (P_λ) due to Reinecke and Sweers [20]. Since our assumption and the modification of f is slightly different from the one in [20], we present it in details, although the strategy is the same one as in [20]. Problem (P_λ) can be transformed to quasimonotone system in some parameter range. At first we state the definition and properties of a quasimonotone system.

Definiton 2.5. Let $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. An elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta u = F_1(u, w) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta w = F_2(u, w) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

is called *quasimonotone* if

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial F_2}{\partial w} \right| \leq K,$$

for some $K > 0$ and

$$\frac{\partial F_1}{\partial w}(u, w) \geq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial F_2}{\partial u}(u, w) \geq 0, \quad \text{for all } (u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Definition 2.6. $(u, w) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ is called a *subsolution*(*supersolution*) to the elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = F_1(u, w) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta w = F_2(u, w) & \text{in } \Omega, \\ u = w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

if it satisfies

(1)

$$\begin{aligned} -\Delta u &\leq (\geq) F_1(u, w) & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \\ -\Delta w &\leq (\geq) F_2(u, w) & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \end{aligned}$$

and

$$(2) \quad (u, w) \leq (\geq) (0, 0) \quad \text{on } \partial\Omega.$$

$(u, w) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ is called a *C-solution* to the problem (2.7) if it is a subsolution and a supersolution.

Proposition 2.7. ([20]) *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded domain with smooth boundary and assume (2.7) is a quasimonotone system.*

If $(\underline{u}, \underline{w})$ and $(\bar{u}, \bar{w})$ are a supersolution and a subsolution to (2.7), respectively, with $(\underline{u}, \underline{w}) \leq (\bar{u}, \bar{w})$ on $\partial\Omega$, then there exists a C-solution (u, w) to (2.7) with

$$(\underline{u}, \underline{w}) \leq (u, w) \leq (\bar{u}, \bar{w}).$$

We note that since Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and F_1, F_2 are C^1 , any C-solution (u, w) is actually in $C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$.

Next proposition is an extension of the result of Gidas, Ni and Nirenberg [9], due to Troy [21] to the quasimonotone system.

Proposition 2.8. ([21, Theorem 1]) *Suppose that $\Omega = B_R(0)$ and (2.7) is quasimonotone. If $u > 0, w > 0$ is a solution to this system with $u, w \in C^2(\bar{B}_R(0))$, then u, w is radially symmetric and $\partial u / \partial r, \partial w / \partial r < 0$ on $(0, R)$.*

Next we explain how to transform (P_λ) to some quasimonotone system.

Under the condition (C2):

$$\gamma - 2\sqrt{\delta} > M,$$

we can define β and α by

$$\begin{aligned} \beta &:= \frac{1}{2}(\gamma - M) - \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma - M)^2 - 4\delta} > 0, \\ \alpha &= \gamma - \beta > 0. \end{aligned}$$

Note that $-\beta(\beta + M) = \delta - \gamma\beta$ and that

$$\theta := 1 - \frac{\delta}{\gamma\beta} > 0.$$

One may verify that (u, w) is a positive solution to

$$(Q_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda(f(u) - \beta u + \beta w) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta w = \lambda(f(u) + Mu - \alpha w) & \text{in } \Omega, \\ u = w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

if and only if $(u, \beta u - \beta w)$ is a positive solution to (P_λ) . We note that from our modification of f , we have $f'(s) + M \geq 0$ on $\mathbb{R}$ and hence $f(s) + Ms$ is monotone increasing on $\mathbb{R}$. Moreover f' is bounded on $\mathbb{R}$. Therefore the system (Q_λ) is quasimonotone.

Next we construct a solution for (Q_λ) . We assume the condition (C3):

$$\frac{2a^2 - 5a + 2}{9} > \beta.$$

It is easy to see that the condition (C3) implies the condition (2.2).

Next to construct the subsolutions to (Q_λ) we also need the following proposition.

Proposition 2.9. ([20, Proposition 3.1]) *Suppose that conditions (C2) and (C3) are satisfied and let $B = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$. Then there exists $\lambda_B > 0$ such that*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_B(f(u) - \beta u + \beta w) & \text{in } B, \\ -\Delta w = \lambda_B(f(u) + Mu - \alpha w) & \text{in } B, \\ u = w = 0 & \text{on } \partial B \end{cases} \quad (2.8)$$

has a solution (U_B, W_B) with following properties:

(1) $0 \leq (U_B, W_B) < (\rho_{\delta/\gamma}^+, \theta \rho_{\delta/\gamma}^+)$ with $\theta = 1 - \delta/(\gamma\beta)$.

(2) U_B, W_B is radially symmetric with

$$U_B'(0) = W_B'(0) = 0 \quad \text{and} \quad U_B'(\tau), W_B'(\tau) < 0 \quad \text{on } (0, 1].$$

(3) $(U_B(0), W_B(0)) > (\rho_{\delta/\gamma}^-, \theta \rho_{\delta/\gamma}^-)$ and $W_B(0) \geq \theta U_B(0)$.

Proof. Since the condition (C3) holds, for fixed large $\lambda = \lambda_B$, there exists a positive solution $\underline{u}$ to

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(f(u) - \beta u) & \text{in } B \\ u = 0 & \text{on } \partial B \end{cases}$$

with $\max \underline{u} \in (\rho_\beta^-, \rho_\beta^+)$ (see [5]), where $\rho_\beta^-, \rho_\beta^+$ are the positive roots of $f(u) - \beta u$. Since $(\underline{u}, 0)$ is a subsolution to (2.9), and $(\rho_{\delta/\gamma}^+, \theta \rho_{\delta/\gamma}^+)$ is a supersolution with $(\underline{u}, 0) < (\rho_{\delta/\gamma}^+, \theta \rho_{\delta/\gamma}^+)$ there exists a solution (U_B, W_B) with $\underline{u} \leq U_B < \rho_{\delta/\gamma}^+$ and $0 \leq W_B < \theta \rho_{\delta/\gamma}^+$ to (2.9), see [20, Proposition A.3.]. By Proposition 2.8 we have that U_B and W_B are radially symmetric with $U_B'(0) = W_B'(0) = 0$ and $U_B'(\tau), W_B'(\tau) < 0$ on the interval $(0, 1)$. Also $(-\Delta + \lambda_B \alpha)W_B = \lambda_B(f(U_B) + MU_B) \geq 0$ and by the strong maximum principle $W_B'(1) < 0$. Let $\tau := U_B(0)$ and $V_B := \beta(U_B - W_B)$ it also follows from the maximum principle that

$$\max V_B < \frac{\delta}{\gamma} \tau. \quad (2.9)$$

Indeed, $(-\Delta + \lambda_B \gamma)(V_B - \delta\tau/\gamma) = \lambda_B(U_B - \tau) \leq 0$ in B with $V_B = 0$ on ∂B . Since by (2.9)

$$V_B(0) = \beta(\tau - W_B(0)) < \frac{\delta}{\gamma} \tau,$$

we have

$$W_B(0) > \left(1 - \frac{\delta}{\gamma\beta}\right) \tau = \theta \tau > \theta \rho_{\delta/\gamma}^-.$$

Since $(-\Delta + \lambda_B \gamma)V_B = \lambda_B \delta U_B \geq 0$, $V_B'(1) = \beta(U_B'(1) - W_B'(1)) < 0$ and hence $U_B'(1) < W_B'(1) < 0$. $\square$

Using the solution obtained above, we construct subsolutions to (Q_λ) . First we fix $z^* \in \Omega$ and set,

$$\lambda(z^*) := \lambda_B \text{dist}(z^*, \partial\Omega)^{-2}.$$

Next for all $\lambda > \lambda(z^*)$, we set

$$Z_\lambda(x) := \begin{cases} (U_B, W_B) ((\lambda/\lambda_B)^{1/2}(x - z^*)) & \text{for } |x - z^*| \leq (\lambda_B/\lambda)^{1/2}, \\ 0 & \text{for } |x - z^*| > (\lambda_B/\lambda)^{1/2} \end{cases}$$

with (U_B, W_B) as in Proposition 2.9. Next we set

$$Z_\lambda^y(x) := Z_\lambda(x + z^* - y)$$

for $y \in \Omega$ satisfying $\text{dist}(y, \partial\Omega) > (\lambda_B/\lambda)^{1/2}$ and define the following family of functions:

$$S_\lambda = \{Z_\lambda^y : y \in \Omega \text{ such that } \text{dist}(y, \partial\Omega) > (\lambda_B/\lambda)^{1/2}\}.$$

We recall that since $\partial\Omega$ is smooth, Ω satisfy the following *uniform interior sphere condition*:

there exists $\varepsilon_\Omega > 0$ such that

$$\Omega = \bigcup \{B(y, \varepsilon) : y \in \Omega \text{ and } \text{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon_\Omega\}.$$

We may suppose that

$$\Omega_\nu := \{y \in \Omega : \text{dist}(y, \partial\Omega) > \nu\}$$

is connected for all $\varepsilon \leq \varepsilon_\Omega$ (see [5]).

The following statements, especially the part (2), are included implicitly in [20].

Proposition 2.10. ([20, Lemma 3.2]) *Suppose that conditions (C2) and (C3) are satisfied. Then*

(1) *For all $\lambda > \lambda(z^*)$, Z_λ is a subsolution to (Q_λ) and*

$$Y := (\rho_{\delta/\gamma}^+, \theta \rho_{\delta/\gamma}^+)$$

is a supersolution to (Q_λ) with $Z_\lambda < Y$. Hence there exists a solution (U_λ, W_λ) to (Q_λ) in the order interval $[Z_\lambda, Y]$.

(2) *There exist $\lambda^* > \lambda(z^*)$ such that for all $\lambda > \lambda^*$ every element in S_λ is a subsolution to (Q_λ) . Moreover if (u, w) is a solution to (Q_λ) in $[Z_\lambda, Y]$ then for every $Z_\lambda^y \in S_\lambda$, (u, w) is a solution to (Q_λ) in $[Z_\lambda^y, Y]$.*

Proof. (1) It follows directly that Y is a supersolution. Next denote $Z_\lambda = (Z_\lambda^1, Z_\lambda^2)$, $Y = (Y^1, Y^2)$ and take $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ with $\varphi \geq 0$. Then if we set $B = B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*)$, we obtain by the Green's identity

$$\begin{aligned} \int_\Omega Z_\lambda^1(-\Delta\varphi)dx &= \int_B Z_\lambda^1(-\Delta\varphi)dx \\ &= - \int_B \Delta Z_\lambda^1 \varphi dx - \int_{\partial B} \left(Z_\lambda^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial \nu} \varphi \right) d\sigma \\ &\leq \int_\Omega (f(Z_\lambda^1) - \beta Z_\lambda^1 + \beta_\lambda^2) \varphi dx. \end{aligned}$$

A similar result holds for Z_λ^2 .

Finally $\max Z_\lambda^1 = Z_\lambda^1(z^*) < \rho_{\delta/\gamma}^+ = Y^1$, $\max Z_\lambda^2 = Z_\lambda^2(z^*) < \theta \rho_{\delta/\gamma}^- = Y^2$. Hence $Z_\lambda < Y$.

(2) We can show that Z_λ^y is a subsolution in a similar way as in (1). Next we show that for large $\lambda > 0$ if (u, w) is a solution to (Q_λ) in $[Z_\lambda, Y]$ then for every $y \in \Omega$ satisfies $\text{dist}(y, \partial\Omega) > (\lambda_B/\lambda)^{1/2}$, (u, w) is a solution to (Q_λ) in $[Z_\lambda^y, Y]$. Let $\lambda^* := \{\lambda(z^*), \lambda_B \varepsilon_\Omega^{-2}\}$. Suppose that $(u, w) \in [Z_\lambda, Y]$ is a solution to (Q_λ) with $\lambda > \lambda^*$. As in [5] there exists for every $y \in \Omega_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}$, a curve in $\Omega_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}$ connecting y with z^* . Using the sweeping principle (see [20, Proposition A.6.]), it follows that $(u, w) > Z_\lambda^y$ for all $y \in \Omega_{(\lambda/\lambda_B)^{1/2}}$. $\square$

Using the earlier notation, we arrive at the important results in [20].

Proposition 2.11. ([20, Theorem 2.1, Lemma 4.2]) *Suppose conditions (C2) and (C3) are satisfied. Then there exists $\lambda^* > 0$ and a function*

$$\Lambda \in C^1([\lambda^*, +\infty), C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega}))$$

such that $(U_\lambda, V_\lambda) := \Lambda(\lambda)$ is a positive solution to (P_λ) for all $\lambda \geq \lambda^*$. Furthermore

- (1) $(U_\lambda, W_\lambda) = (U_\lambda, \beta(U_\lambda - V_\lambda))$ is unique solution to (Q_λ) in the order interval $[Z_\lambda, Y]$.
- (2) $\max U_\lambda \in (\rho_{\delta/\gamma}^-, \rho_{\delta/\gamma}^+)$ and $\max V_\lambda \in \frac{\delta}{\gamma}(\rho_{\delta/\gamma}^-, \rho_{\delta/\gamma}^+)$,
- (3) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Lambda(\lambda) = \left(\rho_{\delta/\gamma}^+, \frac{\delta}{\gamma} \rho_{\delta/\gamma}^+ \right)$ uniformly on compact subsets of Ω .

Using the results of Propositions 2.10 and 2.11, we can obtain the following proposition.

Proposition 2.12. *Suppose that conditions (C2) and (C3) and $\lambda > \lambda^*$ are satisfied. Let $y_1, y_2 \in \Omega$ be such that*

$$\text{dist}(y_1, \partial\Omega), \text{dist}(y_2, \partial\Omega) > (\lambda_B/\lambda)^{1/2}.$$

Then (u, w) is a solution to (Q_λ) in $[Z_\lambda^{y_1}, Y]$ if and only if (u, w) is a solution to (Q_λ) in $[Z_\lambda^{y_2}, Y]$.

It is shown that the solution U_λ obtained by Proposition 2.11 has a boundary layer of width $O(\lambda^{-1/2})$ (see [20] for details). Hence we often call this solution a *boundary layer solution*.

Finally we state the following result about symmetry of positive solution to quasimonotone system which was proved by Troy [21].

Proposition 2.13. ([21, Theorem 1]) *Suppose that (2.7) is quasimonotone and that $\Omega = B_R(0)$. If $u > 0$, $w > 0$ is a solution to this system with $u, w \in C^2(\overline{B_R(0)})$, then u, w is radially symmetric and $\partial u / \partial r, \partial w / \partial r < 0$ on $(0, R)$.*

3 Proof of main results

In this section we prove the main results. We need some lemmas and propositions.

Lemma 3.1. *Suppose that conditions (C2), (C3) hold. Then for every positive solution (u, w) to (Q_λ) we have*

$$u(x) \leq \rho_{\delta/\gamma}^+, \quad w(x) \leq \theta \rho_{\delta/\gamma}^+ = \left(1 - \frac{\delta}{\gamma\beta}\right) \rho_{\delta/\gamma}^+.$$

Proof. Let us assume that $u_0 := \max_\Omega u > \rho_{\delta/\gamma}^+$.

Step 1. First we show that $w(x) \leq \theta u_0$. From the second equation of (Q_λ) we have

$$-\Delta(w - \theta u_0) + \lambda\alpha(w - \theta u_0) = \lambda(f(u) + Mu - \alpha\theta u_0).$$

Next we have

$$\begin{aligned} & \alpha\theta u_0 - (f(u_0) + Mu_0) \\ &= (\gamma - \beta) \left(1 - \frac{\delta}{\gamma\beta}\right) u_0 - (f(u_0) + Mu_0) \\ &= \left(\frac{\beta\gamma - \delta}{\beta} - \beta + \frac{\delta}{\gamma}\right) u_0 - (f(u_0) + Mu_0) \\ &= \left(\beta + M - \beta + \frac{\delta}{\gamma}\right) u_0 - (f(u_0) + Mu_0) \\ &= \frac{\delta}{\gamma} u_0 - f(u_0) > 0. \end{aligned}$$

Here we use the relation $-\beta(\beta + M) = \delta - \beta\gamma$. Hence by the monotonicity of $f(s) + Ms$ we have

$$-\Delta(w - \theta u_0) + \lambda\alpha(w - \theta u_0) \leq 0.$$

By the maximum principle $w(x) \leq \theta u_0$ follows.

Step 2. Next we show that at a maximum point x_0 of u , $-\Delta u(x_0) < 0$. In fact from the first equation of (Q_λ)

$$\begin{aligned} -\Delta u(x_0) &= \lambda(f(u(x_0)) - \beta u(x_0) + \beta w(x_0)) \\ &\leq \lambda(f(u(x_0)) - \beta u(x_0) + \beta \theta u(x_0)) \\ &= \lambda\left(f(u(x_0)) - \frac{\delta}{\gamma}u(x_0) + \frac{\delta}{\gamma}u(x_0) - \beta u(x_0) + \beta \theta u(x_0)\right) \\ &= \lambda\left(f(u(x_0)) - \frac{\delta}{\gamma}u(x_0)\right) < 0. \end{aligned}$$

On the other hand, $-\Delta u(x_0) \geq 0$, since x_0 is maximum point. This is a contradiction. Hence we can conclude $u(x) \leq \rho_{\delta/\gamma}^+$.

Step 3. Finally we show that $w(x) \leq \theta \rho_{\delta/\gamma}^+$. At first, from the second equation of (Q_λ) , we have

$$-\Delta w + \lambda\alpha w = \lambda(f(u) + Mu).$$

Next we note that

$$\lambda\alpha\theta\rho_{\delta/\gamma}^+ = \lambda(f(\rho_{\delta/\gamma}^+) + M\rho_{\delta/\gamma}^+).$$

Subtracting and using the monotonicity of $f(s) + Ms$ it follows that

$$-\Delta(w - \theta\rho_{\delta/\gamma}^+) + \lambda\alpha(w - \theta\rho_{\delta/\gamma}^+) = \lambda(f(u) + Mu - (f(\rho_{\delta/\gamma}^+) + M\rho_{\delta/\gamma}^+)) \leq 0.$$

Hence by the maximum principle $w \leq \theta\rho_{\delta/\gamma}^+$ follows. $\square$

By the strong maximum principle we obtain the following result.

Proposition 3.2. *Suppose that conditions (C2), (C3) hold. Let Ω be any bounded domain with smooth boundary and the pair (u, w) be the positive solution to*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu(f(u) - \beta u + \beta w) & \text{in } \Omega \\ -\Delta w = \mu(f(u) + Mu - \alpha w) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

with $u(x) \leq \rho_{\delta/\gamma}^+$, $w(x) \leq \theta\rho_{\delta/\gamma}^+$ in Ω , $\mu > 0$. And if $u(x_0) = \rho_{\delta/\gamma}^+$ (resp. $w(x_0) = \theta\rho_{\delta/\gamma}^+$) at some point $x_0 \in \Omega$, then $u(x) \equiv \rho_{\delta/\gamma}^+$ (resp. $w(x) \equiv \theta\rho_{\delta/\gamma}^+$) on Ω hold.

To prove Theorem 1.1 we also need the following lemma.

Lemma 3.3. *Suppose that conditions (C2), (C3) hold. And let Z_λ^1, Z_λ^2 be the first and second components of Z_λ , respectively, and Y^1, Y^2 be the first and second components of Y , respectively. Let (u, w) be the solution to (Q_λ) such that $Z_\lambda^1 \leq u \leq Y^1$ in Ω . Then $Z_\lambda^2 \leq w \leq Y^2$ in Ω .*

Proof. First, since the condition implies that u is a positive solution, from the second equation of (Q_λ) we have

$$-\Delta w + \lambda\alpha w = \lambda(f(u) + Mu) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Since $w = 0$ on $\partial\Omega$ by the maximum principle we obtain that $w \geq 0$ in Ω .

Next we show that $Z_\lambda^2 \leq w$ in Ω . Since on $\Omega \setminus B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*)$, $Z_\lambda^2 = 0$ (see Proposition 2.10), we have only to show it on $B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*)$ (Note that Z_λ is smooth on $B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*)$). Indeed Z_λ is a subsolution to (Q_λ) and w is a solution to (Q_λ) we have

$$\begin{aligned} -\Delta Z_\lambda^2 + \lambda\alpha Z_\lambda^2 &\leq \lambda(f(Z_\lambda^1) + MZ_\lambda^1) & \text{in } B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*) \\ -\Delta w + \lambda\alpha w &= \lambda(f(u) + Mu) & \text{in } B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*) \end{aligned}$$

Subtracting we have

$$-\Delta(Z_\lambda^2 - w) + \lambda\alpha(Z_\lambda^2 - w) \leq \lambda(f(Z_\lambda^1) + MZ_\lambda^1 - (f(u) + Mu)) \leq 0,$$

since $Z_\lambda^1 \leq u$ and $f(s) + Ms$ is an increasing function. And we have $Z_\lambda^2 - w \leq 0$ on $\partial B_{(\lambda_B/\lambda)^{1/2}}(z^*)$. By the maximum principle we can conclude that $Z_\lambda^2 \leq w$ in Ω . We can show that $w \leq Y^2$ in a similar way as in the proof of $Z_\lambda^2 \leq w$. $\square$

Now we prove Theorem 1.1.

Proof of Theorem 1.1. If the result is false, there exists $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$ such that

$$\lambda_n \nearrow \infty \text{ and } u_{\lambda_n} \neq U_{\lambda_n} \text{ and } \max_{\Omega} u_{\lambda_n} \rightarrow \rho_{\delta/\gamma}^+.$$

Let $u_{\lambda_n}(x_n) = \max_{\Omega} u_{\lambda_n}$. Since Ω is strictly convex, by the Proposition 2.13, we have

$$\text{dist}(x_n, \partial\Omega) > C > 0, \text{ for all } n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

for some $C > 0$. Let us set

$$\tilde{u}_{\lambda_n}(x) = u_{\lambda_n}(\lambda_n^{-1/2}x + x_n), \quad \tilde{v}_{\lambda_n}(x) = v_{\lambda_n}(\lambda_n^{-1/2}x + x_n) \text{ in } B_{R_n}(0),$$

where $R_n = \lambda_n^{1/2} \text{dist}(x_n, \partial\Omega)$. Since $R_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, $\tilde{u}_{\lambda_n}, \tilde{v}_{\lambda_n}$ is well defined in $B_R(0)$ for all $R > 0$, if n is sufficiently large. By Lemma 3.1 and the positivity of u_{λ_n}

$$0 < \tilde{u}_{\lambda_n} < \rho_{\delta/\gamma}^+ \text{ and } \tilde{u}_{\lambda_n}(0) = \max_{\Omega} u_{\lambda_n} \rightarrow \rho_{\delta/\gamma}^+ \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

For all $R > 0$, $(\tilde{u}_{\lambda_n}, \tilde{v}_{\lambda_n})$ satisfies

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_{\lambda_n} &= f(\tilde{u}_{\lambda_n}) - \tilde{v}_{\lambda_n} & \text{in } B_R(0), \\ -\Delta \tilde{v}_{\lambda_n} &= \delta \tilde{u}_{\lambda_n} - \gamma \tilde{v}_{\lambda_n} & \text{in } B_R(0) \end{aligned}$$

and $(\tilde{u}_{\lambda_n}, \tilde{w}_{\lambda_n}) := (\tilde{u}_{\lambda_n}, \tilde{u}_{\lambda_n} - (1/\beta)\tilde{v}_{\lambda_n})$ satisfies

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_{\lambda_n} &= f(\tilde{u}_{\lambda_n}) - \beta \tilde{u}_{\lambda_n} + \beta \tilde{w}_{\lambda_n} & \text{in } B_R(0), \\ -\Delta \tilde{w}_{\lambda_n} &= f(\tilde{u}_{\lambda_n}) + M \tilde{u}_{\lambda_n} - \alpha \tilde{w}_{\lambda_n} & \text{in } B_R(0) \end{aligned}$$

for sufficiently large n . Note that $\{f(\tilde{u}_{\lambda_n})\}$ is uniformly bounded in L^∞ -norm, thus $\{\tilde{u}_{\lambda_n}\}, \{\tilde{w}_{\lambda_n}\}$ is uniformly bounded in $C^\alpha(\overline{B_R(0)})$ -norm for some $0 < \alpha < 1$, by elliptic L^p estimates. Thus, by Schauder's estimates, $\{\tilde{u}_{\lambda_n}\}, \{\tilde{w}_{\lambda_n}\}$ is uniformly bounded in $C^{2,\alpha}(\overline{B_R(0)})$, and is relatively compact in $C^2(\overline{B_R(0)})$. Hence there exist $U, W \in C^2(\overline{B_R(0)})$ with $0 \leq U \leq \rho_{\delta/\gamma}^+$ satisfying

$$\begin{aligned} -\Delta U &= f(U) - \beta U + \beta W & \text{in } B_R(0), \\ -\Delta W &= f(U) + MU - \alpha W & \text{in } B_R(0), \\ U(0) &= \rho_{\delta/\gamma}^+. \end{aligned}$$

Then by the maximum principle $U \equiv \rho_{\delta/\gamma}^+$ on $\overline{B_R(0)}$. In fact from the first equation and Lemma 3.1, we have

$$\begin{aligned} &-\Delta(U - \rho_{\delta/\gamma}^+) + (\beta + M)(U - \rho_{\delta/\gamma}^+) \\ &= f(U) + MU - (f(\rho_{\delta/\gamma}^+) + M\rho_{\delta/\gamma}^+) + \beta(W - \theta\rho_{\delta/\gamma}^+) \leq 0. \end{aligned}$$

Hence the maximum principle and $U(0) = \rho_{\delta/\gamma}^+$ yield $U \equiv \rho_{\delta/\gamma}^+$.

On the other hand, by (3.1), if n is sufficiently large, z^* and $x_n \in \Omega$ satisfies

$$\text{dist}(z^*, \partial\Omega), \text{dist}(x_n, \partial\Omega) > (\lambda_B/\lambda_n)^{1/2}.$$

Hence by Proposition 2.12, U_{λ_n} is first component of the *unique* solution to (Q_λ) in the order interval $[Z_\lambda^{x_n}, Y]$. Then by Lemma 3.3 and the assumption $u_{\lambda_n} \neq U_{\lambda_n}$ we have

$$u_{\lambda_n}(x) < Z_\lambda^{x_n,1}(x) = U_B((\lambda_n/\lambda_B)^{1/2}(x - x_n)) < U_B(0) < \rho_{\delta/\gamma}^+$$

at some $x \in B_{(\lambda_B/\lambda_n)^{1/2}}(x_n)$, where the function $Z_\lambda^{x_n,1}$ is the first component of $Z_\lambda^{x_n}$ and the functions U_B and constant λ_B are as in Proposition 2.9. Thus

$$\tilde{u}_{\lambda_n}(x) < U_B(0) < \rho_{\delta/\gamma}^+$$

for some $x \in B_{\lambda_B^{1/2}}(0)$ and therefore $\tilde{u}_{\lambda_n}$ cannot possess a subsequence which converges to $\rho_{\delta/\gamma}^+$ uniformly on $\overline{B_{\lambda_B^{1/2}}(0)}$. This leads to a contradiction and completes the proof of Theorem 1.1. $\square$

Remark . We can show that Theorem 1.1 when Ω is general bounded domain (not necessary convex). See [16] for details.

Next we prove Theorem 1.2.

Proof of Theorem 1.2. First if u is the first component of the solution to (P_λ) then

$$-\Delta u + \lambda \delta B_\lambda u = \lambda f(u).$$

Multiplying u and using Green's formula, we have

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \delta (B_\lambda u)u - \lambda f(u)u dx = 0.$$

Substituting this into the energy functional

$$J_\lambda(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} \delta (B_\lambda u)u - \lambda F(u) dx,$$

we have

$$J_\lambda(u) = \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{2} f(u)u - F(u) dx.$$

We set $H(u) := (1/2)f(u)u - F(u)$ and let u^* be such that

$$\frac{f(u^*)}{u^*} = f'(u^*).$$

Then we note that the assumption on f implies that H is decreasing on $(u^*, +\infty)$ and $\rho_{\delta/\gamma}^+ > u^*$. Next we set

$$G(u) = \int_0^u g(v) dv = \int_0^u \left(f(v) - \frac{\delta}{\gamma} v \right) dv.$$

Claim 1. $H(\rho_{\delta/\gamma}^+) < 0$. In fact our condition implies that

$$g(\rho_{\delta/\gamma}^+) = 0 \quad \text{and} \quad G(\rho_{\delta/\gamma}^+) = \int_0^{\rho_{\delta/\gamma}^+} g(v) dv > 0.$$

Then we have

$$\begin{aligned} H(\rho_{\delta/\gamma}^+) &= \frac{1}{2} f(\rho_{\delta/\gamma}^+) \rho_{\delta/\gamma}^+ - F(\rho_{\delta/\gamma}^+) \\ &= \frac{1}{2} g(\rho_{\delta/\gamma}^+) \rho_{\delta/\gamma}^+ + \frac{\delta}{2\gamma} (\rho_{\delta/\gamma}^+)^2 - G(\rho_{\delta/\gamma}^+) - \frac{\delta}{2\gamma} (\rho_{\delta/\gamma}^+)^2 \\ &= \frac{1}{2} g(\rho_{\delta/\gamma}^+) \rho_{\delta/\gamma}^+ - G(\rho_{\delta/\gamma}^+) \\ &= -G(\rho_{\delta/\gamma}^+) < 0. \end{aligned}$$

Claim 2. There exists $\lambda^b > 0$ such that for $\lambda > \lambda^b$, $\bar{u}_\lambda = U_\lambda$. If not, there exists a sequence $\{\lambda_n\}$ such that

$$\lambda_n \nearrow \infty \text{ and } \bar{u}_{\lambda_n} \neq U_{\lambda_n}.$$

From Theorem 1.1, there exists $\varepsilon > 0$ and $\lambda^\sharp > 0$ such that if (u, v) is a positive solution to (P_λ) with $\max_\Omega u \in (\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon, \rho_{\delta/\gamma}^+)$ and $\lambda > \lambda^\sharp$ then $u = U_\lambda$.

Since by Proposition 2.4, $\bar{u}_{\lambda_n}$ is positive, sufficiently large n , $\max_\Omega \bar{u}_{\lambda_n} \notin (\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon, \rho_{\delta/\gamma}^+)$.

Next we choose $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ and $\Omega' \subset\subset \Omega$ by the following way.

First we choose $\varepsilon_2 > 0$ such that

$$(1) \quad 0 > H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon) > H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2), \quad \varepsilon < \varepsilon_2.$$

We note that by taking $\varepsilon > 0$ small, if necessary we may assume that $H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon) < 0$ and we also note that $H(u)$ is decreasing near $\rho_{\delta/\gamma}^+$. Next we choose $\varepsilon_1 > 0$ so small that

$$(2) \quad (\sup_{u \geq 0} H(u) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+))\varepsilon_1 < (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2))|\Omega|,$$

where $|\Omega|$ denotes the measure of Ω . Finally we choose $\Omega' \subset\subset \Omega$ so that

$$(3) \quad |\Omega \setminus \Omega'| < \varepsilon_1.$$

Then by Proposition 2.11 there exist $\lambda^b > 0$ such that for all $\lambda > \lambda^b$ and for all $x \in \Omega'$

$$\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2 < U_\lambda(x) < \rho_{\delta/\gamma}^+.$$

Then we have

$$J_{\lambda_n}(\bar{u}_{\lambda_n}) = \lambda_n \int_\Omega H(\bar{u}_{\lambda_n}) dx \geq \lambda_n |\Omega| H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon)$$

and

$$\begin{aligned} J_{\lambda_n}(U_{\lambda_n}) &= \lambda_n \int_\Omega H(U_{\lambda_n}) dx = \lambda_n \int_{\Omega'} H(U_{\lambda_n}) dx + \lambda_n \int_{\Omega \setminus \Omega'} H(U_{\lambda_n}) dx \\ &\leq \lambda_n (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)|\Omega'| + \sup_{u \geq 0} H(u)\varepsilon_1) \\ &\leq \lambda_n (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)(|\Omega| - \varepsilon_1) + \sup_{u \geq 0} H(u)\varepsilon_1) \\ &= \lambda_n (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)|\Omega| + (\sup_{u \geq 0} H(u) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2))\varepsilon_1) \\ &\leq \lambda_n (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)|\Omega| + (\sup_{u \geq 0} H(u) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+))\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Here we used that $|\Omega'| \geq |\Omega| - \varepsilon_1$ and $H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)|\Omega'| \leq H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)(|\Omega| - \varepsilon_1)$. Therefore

$$\begin{aligned} &\lambda_n^{-1} (J_{\lambda_n}(U_{\lambda_n}) - J_{\lambda_n}(\bar{u}_{\lambda_n})) \\ &\leq (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2)|\Omega| + (\sup_{u \geq 0} H(u) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+))\varepsilon_1 - |\Omega| H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon)) \\ &= (\sup_{u \geq 0} H(u) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+))\varepsilon_1 - (H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon) - H(\rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon_2))|\Omega| \\ &< 0. \end{aligned}$$

This contradicts to the fact that $\bar{u}_{\lambda_n}$ is the global minimizer of J_{λ_n} . □

To show Theorem 1.3, we prepare two lemmas. The following lemma shows that the maximum of any positive solution is bounded away from 0 uniformly in λ .

Lemma 3.4. *Suppose that conditions (C2), (C3) hold. Then for every positive solution (u, v) of (P_λ) satisfies*

$$\max_\Omega u \geq \rho_{\delta/\gamma}^-.$$

Proof. If we set $w = u - (1/\beta)v$, then

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(f(u) - \beta u + \beta w) && \text{in } \Omega, \\ -\Delta w &= \lambda(f(u) + Mu - \alpha w) && \text{in } \Omega, \\ u = w &= 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Now we assume that $\max_{\Omega} u < \rho_{\delta/\gamma}^-$ and set $u_0 := \max_{\Omega} u > 0$.

Step 1. We show that $w(x) \leq \theta \max_{\Omega} u = \theta u_0$. In fact we have

$$\begin{aligned} &(-\Delta + \lambda\alpha)(w - \theta u_0) \\ &= -\Delta w + \lambda\alpha w - \lambda\alpha\theta u_0 \\ &= \lambda(f(u) + Mu) - (\gamma - \beta) \left(1 - \frac{\delta}{\gamma\beta}\right) u_0 \\ &= \lambda \left(f(u) - \frac{\delta}{\gamma} u_0 + Mu - \left(\frac{\gamma\beta - \delta}{\beta} - \beta \right) u_0 \right) \\ &= \lambda \left(f(u) - \frac{\delta}{\gamma} u_0 + M(u - u_0) \right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Then by the maximum principle $w(x) \leq \theta u_0$ follows.

Step 2. If $u(x_0) = \max_{\Omega} u = u_0$ then $-\Delta u(x_0) < 0$. In fact we have

$$\begin{aligned} &-\Delta u(x_0) \\ &= \lambda(f(u(x_0)) - \beta u(x_0) + \beta w(x_0)) \\ &\leq \lambda \left(f(u(x_0)) - \frac{\delta}{\gamma} u(x_0) + \frac{\delta}{\gamma} u(x_0) - \beta u(x_0) + \beta\theta u(x_0) \right) \\ &= \lambda \left(f(u(x_0)) - \frac{\delta}{\gamma} u(x_0) \right) < 0. \end{aligned}$$

On the other hand since $x_0 \in \Omega$ is a maximum point of u , then we have $-\Delta u(x_0) \geq 0$. This is a contradiction. $\square$

Next by using Proposition 2.8, we obtain the following proposition.

Proposition 3.5. *Let $\Omega = B_R(0)$ and (u, v) is a positive solution to (P_λ) . Then u, v are radially symmetric,*

$$u'(r), v'(r) < 0, \text{ on } (0, R]$$

and

$$u'(0) = v'(0) = 0,$$

where $'$ is the derivative in $r = |x|$.

Proof. Let us set $w = u - (1/\beta)v$. (u, w) satisfies the quasimonotone system (Q_λ) and we note that w is positive in $B_R(0)$ since u is positive. Then by Proposition 2.8 u and w are radially symmetric and decreasing in $r = |x|$. We also have v is radially symmetric. Next we note that v is the solution to the problem

$$\begin{aligned} -\lambda^{-1}\Delta v + \gamma v &= \delta u && \text{in } B_R(0), \\ v &= 0 && \text{on } \partial B_R(0). \end{aligned}$$

By the regularity of solutions, we differentiate the above equation in r , then we have

$$\begin{aligned} -\lambda^{-1}\Delta v' + \left(\frac{N-1}{\lambda|x|^2} + \gamma \right) v' &= \delta u' < 0 && \text{in } B_R(0) \setminus \{0\}, \\ v' = \frac{\partial v}{\partial \nu} &< 0 && \text{on } \partial B_R(0), \end{aligned} \tag{3.2}$$

since u is decreasing in r , where ν is an outward unit normal vector of $\partial B_R(0)$. Then we can conclude $v' < 0$ on $(0, R]$. Indeed if $\max_{r \in (0, R]} v'(r) \geq 0$ then we have $\max_{r \in (0, R]} v'(r) = v'(r_0)$ for some $r_0 \in (0, R)$. Then we have

$$-\lambda^{-1} \Delta v'(r_0) + \left(\frac{N-1}{\lambda r_0^2} + \gamma \right) v'(r_0) \geq 0.$$

This contradicts to (3.2). The proof is completed. $\square$

We can obtain Theorem 1.3 by using a similar argument as in [19]. For readers convenience, we give the proof of Theorem 1.3 in details.

Proof of Theorem 1.3. First we note that from Proposition 2.8 and Lemma 3.4, we have $\underline{u}_\lambda(0) \geq \rho_{\delta/\gamma}^-$, which is (1) of Theorem 1.3. And from Theorem 1.1 we have $\max \underline{u}_\lambda$ is bound from above by $\rho_{\delta/\gamma}^+$ uniformly for sufficiently large λ . And also we note that from Proposition 2.8 $\underline{u}_\lambda$ and $\underline{v}_\lambda$ are radially symmetric, decreasing in $r = |x|$ and satisfy $u'(0) = v'(0) = 0$, where $'$ represents a differentiation with respect to $r = |x|$.

Part 1. Proof of (2).

Step 1.1. Let $\lambda_1 > 0$ be sufficiently large. The functions $\{\tilde{u}_\lambda : \lambda > 2\lambda_1\}$ and $\{\tilde{v}_\lambda : \lambda > 2\lambda_1\}$ satisfy

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_\lambda = f(\tilde{u}_\lambda) - \tilde{v}_\lambda & \text{in } B_{\sqrt{2\lambda_1}}(0), \\ -\Delta \tilde{v}_\lambda = \delta \tilde{u}_\lambda - \gamma \tilde{v}_\lambda & \text{in } B_{\sqrt{2\lambda_1}}(0) \end{cases}$$

and from Lemma 3.1 we have

$$\|\tilde{u}_\lambda\|_{L^\infty(B_{\sqrt{2\lambda_1}}(0))} \leq \rho_{\delta/\gamma}^+, \quad \|\tilde{v}_\lambda\|_{L^\infty(B_{\sqrt{2\lambda_1}}(0))} \leq \frac{\delta}{\gamma} \rho_{\delta/\gamma}^+$$

and also

$$\|f(\tilde{u}_\lambda)\|_{L^\infty(B_{\sqrt{2\lambda_1}}(0))} \leq K_f := \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Using interior elliptic estimates, Schauder's interior estimates, and the fact that f is locally Lipschitz, we find that $\{\tilde{u}_\lambda : \lambda > 2\lambda_1\}$ and $\{\tilde{v}_\lambda : \lambda > 2\lambda_1\}$ are bounded in $C^{2,\alpha}(\overline{B_{\sqrt{\lambda_1}}}(0))$ for some $0 < \alpha < 1$ and hence precompact in $C^2(\overline{B_{\sqrt{\lambda_1}}}(0))$. Then there exists a sequence $\{\lambda_{1,n}\}$ such that $\lambda_1 < \lambda_{1,n} \nearrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ and $\{\tilde{u}_{\lambda_{1,n}}\}, \{\tilde{v}_{\lambda_{1,n}}\}$ converge in $C^2(\overline{B_{\sqrt{\lambda_1}}}(0))$. We set for $x \in \overline{B_{\sqrt{\lambda_1}}}(0)$

$$u_1(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_{\lambda_{1,n}}(x), \quad v_1(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_{\lambda_{1,n}}(x).$$

On $\overline{B_{\sqrt{\lambda_1}}}(0)$ the functions u_1, v_1 are solutions of the equation

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f(u_1) - v_1 \\ -\Delta v_1 &= \delta u_1 - \gamma v_1 \end{aligned}$$

Let $\lambda_2 := \lambda_{1,1}$ and repeat the argument in Step 1.1 to obtain that $\{\tilde{u}_{\lambda_{1,n}}\}$ and $\{\tilde{v}_{\lambda_{1,n}}\}$ are bounded sequence in $C^{2,\alpha}(\overline{B_{\sqrt{\lambda_2}}}(0))$ and precompact in $C^2(\overline{B_{\sqrt{\lambda_2}}}(0))$. Again we extract subsequences $\{\lambda_{2,n}\}$ from $\{\lambda_{1,n}\}$ such that $\{\tilde{u}_{\lambda_{2,n}}\}$ and $\{\tilde{v}_{\lambda_{2,n}}\}$ converge in $C^2(\overline{B_{\sqrt{\lambda_2}}}(0))$. We extend the functions u_1 and v_1 to $\overline{B_{\sqrt{\lambda_2}}}(0)$ by defining for $x \in \overline{B_{\sqrt{\lambda_2}}}(0)$

$$u_2(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_{\lambda_{2,n}}(x), \quad v_2(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_{\lambda_{2,n}}(x).$$

These functions satisfy the equations on $\overline{B_{\sqrt{\lambda_2}}}(0)$.

By repeating this process we obtain for every $k \in \mathbb{N}$ subsequence $\{\lambda_{k,n}\}$ from $\{\lambda_{k-1,n}\}$ such that $\{\tilde{u}_{\lambda_{k,n}}\}$ and $\{\tilde{v}_{\lambda_{k,n}}\}$ converge in $C^2(\overline{B_{\sqrt{\lambda_k}}}(0))$. And we obtain the function u_k and v_k such that for $\overline{B_{\sqrt{\lambda_k}}}(0)$

$$u_k(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_{\lambda_{k,n}}(x), \quad v_k(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_{\lambda_{k,n}}(x)$$

satisfy the equation on $\overline{B_{\sqrt{\lambda_k}}}(0)$. And we can choose λ_k so that $\lambda_k \nearrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$.

Step 1.2. We define the function U, V defined on $\mathbb{R}^N$ as follows. For $x \in \mathbb{R}^N$ there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $x \in B_{\sqrt{\lambda_k}}(0)$. Then we define $U(x) = u_k(x)$ and $V(x) = v_k(x)$. Therefore U, V satisfies

$$\begin{cases} -\Delta U = f(U) - V & \text{on } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta V = \delta U - \gamma V & \text{on } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

By Lemma 3.4, we have

$$\max_{B_{\sqrt{\lambda}}(0)} \tilde{u}_\lambda \geq \rho_{\delta/\gamma}^-$$

and hence

$$\max_{\mathbb{R}^N} U \geq \rho_{\delta/\gamma}^- > 0.$$

Consequently $U, V \neq 0$.

Step 1.3. It remains to show that $u(x), v(x) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$. By Proposition 3.5 all the functions $\tilde{u}_\lambda$ and $\tilde{v}_\lambda$ are radially symmetric. We will consider $\tilde{u}_\lambda, \tilde{v}_\lambda, U, V$ as functions of one variable $r = |x|$, in particular we have that $U'(r) \leq 0, V'(r) \leq 0$ for $r > 0$ and $U'(0) = V'(0) = 0$. Let

$$l_u := \lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = \inf_{r > 0} U(r), \quad l_v := \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \inf_{r > 0} V(r). \quad (3.3)$$

In Step 1.4 we show that

$$l_u \in \{0, \rho_{\delta/\gamma}^-, \rho_{\delta/\gamma}^+\} \quad \text{and} \quad l_v = \frac{\delta}{\gamma} l_u \quad (3.4)$$

Then by Lemma 3.1 and Theorem 1.1, there exists $\varepsilon > 0$ for sufficiently large λ

$$\tilde{u}_\lambda(x) \leq \rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon < \rho_{\delta/\gamma}^+.$$

Hence we have $l_u \leq \rho_{\delta/\gamma}^+ - \varepsilon < \rho_{\delta/\gamma}^+$ and $l_u \neq \rho_{\delta/\gamma}^+$. To exclude the possibility $l_u = \rho_{\delta/\gamma}^-$ we show in Step 1.5 that

$$\int_0^{l_u} \left(f(s) - \frac{\delta}{\gamma} s \right) ds = F(l_u) - \frac{\delta}{2\gamma} l_u^2 \geq 0. \quad (3.5)$$

Then it cannot be $l_u = \rho_{\delta/\gamma}^-$. Then the only remaining possibility is that $l_u = l_v = 0$.

Step 1.4. We prove (3.4). Because of the radial symmetry we have that

$$\begin{cases} -U'' - \frac{N-1}{r} U' = f(U) - V & r > 0, \\ -V'' - \frac{N-1}{r} V' = \delta U - \gamma V & r > 0, \\ U'(0) = V'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Multiplying the first equation with U' and the second equation with V' and integrating on $(0, R)$ one finds that for all $R > 0$

$$\frac{1}{2} U'(R)^2 + (N-1) \int_0^R \frac{(U')^2}{r} dr = F(U(0)) - F(U(R)) + \int_0^R U' V dr$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V'(R)^2 + (N-1) \int_0^R \frac{(V')^2}{r} dr \\ &= -\delta(U(R)V(R) - U(0)V(0)) + \delta \int_0^R U' V dr + \frac{\gamma}{2} (V(R)^2 - V(0)^2). \end{aligned}$$

Adding the above identities we find that

$$\begin{aligned} & \frac{U'(R)^2 + \delta^{-1} V'(R)^2}{2} + (N-1) \int_0^R \frac{(U')^2 + \delta^{-1} (V')^2}{r} dr - 2 \int_0^R U' V dr \\ &= F(U(0)) - F(U(R)) - (U(R)V(R) - U(0)V(0)) \\ & \quad + \frac{\gamma}{2\delta} (V(R)^2 - V(0)^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

and subtracting that

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(U'(R)^2 - \delta^{-1}V'(R)^2) + (N-1) \int_0^R \frac{(U')^2 - \delta^{-1}(V')^2}{r} dr \\
&= F(U(0)) - F(U(R)) - U(0)V(0) + U(R)V(R) \\
&\quad - \frac{\gamma}{2\delta}(V(R)^2 - V(0)^2).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Because $U'(R), V'(R) \leq 0$ and $U(R), V(R)$ stay bounded as $R \rightarrow \infty$ we have that from (3.7) that

$$U'(R) \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad V'(R) \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty.$$

Also we see from (3.6) that

$$-U''(R) \rightarrow f(l_u) - l_v \quad \text{and} \quad -V''(R) \rightarrow \delta l_u - \gamma l_v \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

so that $f(l_u) - l_v = 0$ and $\delta l_u - \gamma l_v = 0$ and hence (3.4) follows.

Step 1.5. Next we prove (3.5). We first note that $(\sqrt{\delta}/\beta) - 1 \geq 0$. In fact

$$\frac{\beta}{\sqrt{\delta}} = \frac{\gamma - M}{2\sqrt{\delta}} + \sqrt{\left(\frac{\gamma - M}{2\sqrt{\delta}}\right)^2 - 1} \leq 1.$$

Next we set $\tilde{w}_\lambda = \tilde{u}_\lambda - (1/\beta)\tilde{v}_\lambda$. Then we have

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'_\lambda - \delta^{-1/2}\tilde{v}'_\lambda &= \tilde{u}'_\lambda - (\sqrt{\delta}/\beta)^{-1}\tilde{u}'_\lambda + (\sqrt{\delta}/\beta)^{-1}\tilde{w}'_\lambda, \\
&= (\sqrt{\delta}/\beta)^{-1}(\sqrt{\delta}/\beta - 1)\tilde{u}'_\lambda + (\sqrt{\delta}/\beta)^{-1}\tilde{w}'_\lambda \leq 0
\end{aligned}$$

and hence we have

$$\tilde{u}'_\lambda(r)^2 - \delta^{-1}\tilde{v}'_\lambda(r)^2 = (\tilde{u}'_\lambda(r) - \delta^{-1/2}\tilde{v}'_\lambda(r))(\tilde{u}'_\lambda(r) + \delta^{-1/2}\tilde{v}'_\lambda(r)) \geq 0. \tag{3.9}$$

From (3.8) we see by letting $R \rightarrow \infty$ that

$$\begin{aligned}
& (N-1) \int_0^\infty \frac{U'(r)^2 - \delta^{-1}V'(r)^2}{r} dr \\
&= F(U(0)) - F(l_u) - U(0)V(0) + \frac{\delta}{2\gamma}l_u^2 + \frac{\gamma}{2\gamma}V(0)^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

On the other hand, for every solution $(\tilde{u}_\lambda, \tilde{v}_\lambda)$ it holds that

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\tilde{u}'_\lambda(\sqrt{\lambda})^2 - \delta^{-1}\tilde{v}'_\lambda(\sqrt{\lambda})^2) + (N-1) \int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{\tilde{u}'_\lambda(r)^2 - \delta^{-1}\tilde{v}'_\lambda(r)^2}{r} dr \\
&= F(\tilde{u}_\lambda(0)) - \tilde{u}_\lambda(0)\tilde{v}_\lambda(0) + \frac{\gamma}{2\delta}\tilde{v}_\lambda(0)^2.
\end{aligned}$$

Hence from (3.9), for all $K > 0$ and all $\lambda > K^2$ it holds that

$$(N-1) \int_0^K \frac{\tilde{u}'_\lambda(r)^2 - \delta^{-1}\tilde{v}'_\lambda(r)^2}{r} dr \leq F(\tilde{u}_\lambda(0)) - \tilde{u}_\lambda(0)\tilde{v}_\lambda(0) + \frac{\gamma}{2\delta}\tilde{v}_\lambda(0)^2$$

so that

$$(N-1) \int_0^K \frac{U'(r)^2 - \delta^{-1}V'(r)^2}{r} dr \leq F(U(0)) - U(0)V(0) + \frac{\gamma}{2\delta}V(0)^2.$$

Letting $K \rightarrow \infty$ we find that

$$(N-1) \int_0^\infty \frac{U'(r)^2 - \delta^{-1}V'(r)^2}{r} dr \leq F(U(0)) - U(0)V(0) + \frac{\gamma}{2\delta}V(0)^2. \tag{3.11}$$

From (3.10) and (3.11) we have

$$\begin{aligned} F(U(0)) - F(l_u) - U(0)V(0) + \frac{\delta}{2\gamma}l_u^2 + \frac{\gamma}{2\delta}V(0)^2 \\ \leq F(U(0)) - U(0)V(0) + \frac{\gamma}{2\delta}V(0)^2, \end{aligned}$$

which is precisely (3.5).

Part 2. Finally we prove the (3), i.e., $\underline{u}_\lambda \rightarrow 0$ and $\underline{v}_\lambda \rightarrow 0$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ on every compact subset of $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$. We prove only for $\underline{u}_\lambda$. If the result is false, there exist $\Omega' \subset \subset \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ and a sequence $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ such that

$$\lambda_n \nearrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty$$

and

$$\sup_{\overline{\Omega'}} |\underline{u}_{\lambda_n}(x)| \geq \varepsilon. \quad (3.12)$$

Since $\overline{\Omega'}$ is compact in $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$, there exists $r_0 > 0$ such that

$$r_0^{-1} \leq |x| \leq r_0 \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega'}.$$

Then since $\underline{u}_{\lambda_n}$ is decreasing in $r = |x|$, we have

$$0 \leq \underline{u}_{\lambda_n}(r_0) \leq \underline{u}_{\lambda_n}(x) \leq \underline{u}_{\lambda_n}(r_0^{-1}) \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega'}.$$

where $\underline{u}_{\lambda_n}(r_0)$ and $\underline{u}_{\lambda_n}(r_0^{-1})$ are the values of the function $\underline{u}_{\lambda_n}$ considered as a function of one variable $r = |x|$ at $r = r_0$ and r_0^{-1} . Hence

$$0 \leq \tilde{u}_{\lambda_n}(\lambda_n^{1/2}r_0) \leq \underline{u}_{\lambda_n}(x) \leq \tilde{u}_{\lambda_n}(\lambda_n^{1/2}r_0^{-1}) \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega'}$$

and

$$\sup_{\overline{\Omega'}} |\underline{u}_{\lambda_n}(x)| \leq \tilde{u}_{\lambda_n}(\lambda_n^{1/2}r_0^{-1}). \quad (3.13)$$

On the other hand since $\tilde{u}_{\lambda_n}$ is decreasing in r , for fixed $r > 0$ and sufficiently large n we have

$$\tilde{u}_{\lambda_n}(\lambda_n^{1/2}r_0^{-1}) \leq \tilde{u}_{\lambda_n}(r). \quad (3.14)$$

Letting $n \rightarrow \infty$ in (3.13) and (3.14), if necessary taking a subsequence, we have

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\overline{\Omega'}} |\underline{u}_{\lambda_n}(x)| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_{\lambda_n}(\lambda_n^{1/2}r_0^{-1}) \leq U(r).$$

Letting $r \rightarrow \infty$ we obtain

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\overline{\Omega'}} |\underline{u}_{\lambda_n}(x)| \leq 0.$$

This contradicts to (3.12). The proofs of (3) and Theorem 1.3 are completed. $\square$

From the proof of Theorem 1.3, we can obtain the following corollary.

Corollary 3.6. *Suppose that the all conditions of Theorem 1.3 hold and let (u_λ, v_λ) be a solutions to (P_λ) such that $u_\lambda \neq U_\lambda$ for all sufficiently large $\lambda > 0$. Then the same results of Theorem 1.3 hold.*

4 Open questions

By Theorem 1.2 and 1.3, we obtained the asymptotic profiles of variational solutions at least for the case $\Omega = B_R(0)$ is a ball. However, in order to understand the complete dynamics of solutions for (D_λ) , the following problems still remain:

(Q1) Linearized stability of solutions.

(Q2) Exact multiplicity of solutions.

(Q3) Asymptotic profile of the mountain pass solution when Ω is not ball.

At first we state about Problem (Q1). In Reinecke and Sweers [20], linearized stability is considered in the space $X := C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$. First we define the linearized operator $A_\lambda(U, V) : D(A_\lambda(U, V)) \subset X \rightarrow X$ around the solution (U, V) to (P_λ) is given by

$$\begin{cases} A_\lambda(U, V) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} f'(U) & -1 \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ D(A_\lambda) := \{(u, v) \in X \mid u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega, (\Delta u, \Delta v) \in X\}, \end{cases}$$

where in the definition of $D(A_\lambda)$, Δu and Δv are to be understood in distributional sense. If the spectrum $\sigma(A_\lambda(U, V))$ is contained in $\{\nu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \nu > 0\}$ the solution (U, V) to (P_λ) is called linearly stable and $\sigma(A_\lambda(U, V)) \cap \{\nu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \nu < 0\} \neq \emptyset$ then (U, V) is called linearly unstable. In Reinecke and Sweers [20] it is shown that the boundary layer solution (U_λ, V_λ) is linearly stable, that is, the following results holds.

Proposition 4.1. ([20], Theorem 2.2) *Assume that the all conditions (C1), (C2), (C3) hold and let λ^* and Λ be as in Theorem 2.11. For every $\lambda \geq \lambda^*$ the solution $\Lambda(\lambda) = (U_\lambda, V_\lambda)$ to (P_λ) is linearly (exponentially) stable stationary solution to the initial value problem (D_λ) i.e., for every $\lambda \geq \lambda^*$ there exists $\nu_\lambda > 0$ such that the spectrum $\sigma(A_\lambda(U_\lambda, V_\lambda))$ is contained in $\{\nu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \nu > \nu_\lambda\}$.*

Hence by the Theorem 1.2, the global minimizer is stable for sufficiently large $\lambda > 0$. However, the stability of the mountain pass solution is not yet known, although we believe that a mountain pass solution is unstable.

Next about Problem (Q2), in the scalar case (S_λ) , if Ω is ball it is shown that there exists $\lambda_0 > 0$ such that for $\lambda > \lambda_0$, the problem (S_λ) has exactly two positive solutions, exactly one nontrivial solution for $\lambda = \lambda_0$ and no solution for $\lambda < \lambda_0$ (see [17]). Taking into account that the quasimonotone system would have similar properties as in the scalar equation, we can expect that problem (P_λ) has exact two nontrivial solutions in our parameter range. Especially, Gardner and Peletier [8] have shown that the problem (S_λ) has exactly two solutions for sufficiently large $\lambda > 0$. In [8], the exact multiplicity of solutions was investigated based on the uniqueness of positive radially symmetric solutions of the problem:

$$(S) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

(see Peletier and Serrin [18]). Hence when considering Problem (Q2), it would be necessary to consider the uniqueness of positive radially symmetric solutions for the problem

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f(u) - v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty, \\ v(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

simultaneously. We believe that the solution to (P) is unique at least for small $\delta > 0$. However, it seems no result for the uniqueness of positive radially symmetric solution to (P) as far as we know.

Finally about Problem (Q3), when Ω is general domain, the asymptotic profile of the mountain pass solution is not yet known. We believe that a mountain pass solution has a spiky profile when Ω is convex as the result about the scalar case in [11].

References

- [1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM. Rev. , **18**(1976), 620-709.

- [2] H. Amann, *Nonlinear operators in ordered Banach spaces and some applications to nonlinear boundary value problems*, in "Nonlinear operators and the calculus of variations", Lecture Notes in Math. **543**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.
- [3] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14**(1973), pp349-381.
- [4] Ph. Clément and L.A. Peletier, *Positive superharmonic solutions to semilinear elliptic eigenvalue problems*, J. Math. Anal. Appl. **100**(1984), 561-582.
- [5] Ph. Clément and G. Sweers, *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **14**(4)(1987), 97-121.
- [6] D.G. de Figueiredo and E. Mitidieri, *A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems*, SIAM J. Math. Anal. **17**(1986), 836-849.
- [7] P. Freitas and C. Rocha, *Lyapunov Functionals and Stability for Fitz-Hugh-Nagumo Systems*, J. Differential Equations, **169**(2001), 208-227.
- [8] R. Gardner and L.A. Peletier, *The set of positive solutions of semilinear equations in large balls*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **104A**(1986), 53-72.
- [9] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68**(1979), 209-243.
- [10] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, "Elliptic partial differential equations of second order", Springer-Verlag, Berlin, second edition 1983.
- [11] J. Jang, *On spike solutions of singularly perturbed semilinear Dirichlet problem*, J. Differential Equations, **114**(1994), 370-395.
- [12] G. Klaassen, *Stationary special patterns for a reaction-diffusion system with an excitable steady state*, Rocky Mountain J. Math. **16**(1986), 119-127.
- [13] G. Klaassen and E. Mitidieri, *Standing wave solutions for system derived from the FitzHugh-Nagumo equations for nerve conduction*, SIAM J. Math. Anal., **17**(1986), 74-83.
- [14] A.C. Lazer and P.J. McKenna, *On steady states solutions of a system of reaction-diffusion system*, Nonlinear Analysis, **6**(1982), 523-530.
- [15] Y. Nishiura, "Far-from-Equilibrium Dynamics", Translations of Mathematical Monographs(Iwanami Series in Modern Mathematics), Volume 209, American Math. Soc, 2002.
- [16] H. Matsuzawa, *Asymptotic profiles of variational solutions for a FitzHugh-Nagumo type elliptic system*, to appear in Differential and Integral Equations.
- [17] T. Ouyang and J. Shi, *Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem*, J. Differential Equations, **146**(1998), 121-156.
- [18] L.A. Peletier and J. Serrin, *Uniqueness of Positive Solutions of Semilinear Equations in $\mathbb{R}^N$* , Arch. Rational Mech. Anal., **81**(1983), 181-197.
- [19] C. Reinecke and G. Sweers, *A Positive Solution on $\mathbb{R}^N$ to a Equations of FitzHugh-Nagumo Type*, J.Differential Equations, **153**(1999), 292-312.
- [20] C. Reinecke and G. Sweers, *Existence and uniqueness of solution on bounded domains to a FitzHugh-Nagumo type elliptic system*, Pacific Journal of Mathematics, **197**(2001), 183-211.
- [21] W.C. Troy, *Symmetry properties of elliptic equations*, J.Differential Equations, **42**(1981), 400-413.

Uniqueness of weak solutions for the complex Ginzburg-Landau equation*

横田 智巳 (東京理科大)

yokota@rs.kagu.tus.ac.jp

1. 序

本稿では次の複素 Ginzburg-Landau 方程式の初期値境界値問題の弱解の一意性について考える:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{p-1}u - \gamma u = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & t = 0, x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は (必ずしも有界で滑らかな境界をもたなくてよい) 領域で, $p > 1$, $\lambda \geq 0$, $\kappa, \alpha, \beta, \gamma$ は実定数である. 特に $\Omega = \mathbb{R}^n$ で $\lambda > 0$ かつ $\kappa > 0$ であるとき, Ginibre-Velo [4], [5] は条件「 $1 < p < \infty$ ($n = 1, 2$), $1 < p \leq (n+2)/(n-2)$ ($n \geq 3$)」の下で, 初期値 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ に対する問題 (1.1) の時間大域的適切性を証明した. ただし, 彼らはもう少し一般の非線形項まで扱っていたことに注意する. 彼らはまた非線形項にかかっている複素係数 $\kappa + i\beta$ に次の条件を課して, 初期値 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対する問題 (1.1) の弱解の一意性を証明していた:

$$(1.2) \quad |\beta| \leq \frac{2\sqrt{p}}{p-1}\kappa.$$

その結果は, Okazawa-Yokota [8]–[10] によって単調性の方法で示されているように, $\mathbb{R}^n$ の一般領域における初期値境界値問題 (1.1) に対しても成立する. 特に $\lambda = \beta = \gamma = 0$ かつ $\alpha = \kappa = 1$ という最も単純な場合については Lions [6] を参照されたい. ここで, 条件 (1.2) の意味について少し説明しておこう. 条件 (1.2) は複素係数まで含めた非線形項の単調性の構造を保つ役割を果たす. 即ち, 条件 (1.2) の下では次の不等式が成立する:

$$\operatorname{Re}((\kappa + i\beta)(|u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2), u_1 - u_2) \geq 0$$

([9, Lemma 3.1] および [10, Lemma 2.1] 参照). また [8] と [10] では, $\lambda > 0$ のとき条件 (1.2) の下で, 問題 (1.1) に対する弱解の一意性だけでなく平滑化効果 (smoothing effect) も証明されている. しかしながら, (1.2) のような制限なしに, $\mathbb{R}^2$ の一般領域における初期値境界値問題 (1.1) に対する弱解の一意性に関する結果は知られていないようである.

本稿では, $\mathbb{R}^2$ の一般領域における初期値境界値問題 (1.1) の弱解の一意性について新しく得られた結果を報告する. その結果とは, $p \leq 3$ を仮定すれば (1.2) のような制限は一切必要ないというものである.

*本研究は九州大学の小川卓克助教授との共同研究である.

主結果を述べるために、問題 (1.1) の弱解を定義する。初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ が与えられたとき、関数 u が問題 (1.1) の弱解であるとは

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0, T; L^{p+1}(\Omega))$$

であり、問題 (1.1) が超関数の意味で満たされるときをいう：

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left(u(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \right)_{L^2(\Omega)} dt + (\lambda + i\alpha) \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + (\kappa + i\beta) \int_0^T {}_{L^{1+1/p}(\Omega)} \langle |u(t)|^{p-1} u(t), \varphi(t) \rangle_{L^{p+1}(\Omega)} dt - \gamma \int_0^T (u(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt = 0. \end{aligned}$$

ここで $\varphi(\cdot) \in C_0^\infty((0, T); H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega))$ で $T > 0$ である。

さて、主結果を述べよう。はじめに、“ $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ” の場合に得られた結果を述べる。 $p \leq 3$ のとき、複素係数には $\lambda \geq 0$ という仮定以外には何も条件を追加せずに問題 (1.1) の弱解の一意性定理を得ることができた。次の定理で弱解の存在の部分の主張は、 $\lambda > 0$ のとき [4] で、 $\lambda = 0$ のとき [3], [6], [11] で示されている。我々が得たのは一意性の部分である。

定理 1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を (必ずしも有界でない) 領域とし、 $\lambda \geq 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, 1 < p \leq 3$ とする。

(i-a) $\kappa \geq 0$ かつ $\alpha\beta \geq 0$ ($\alpha \neq 0$) のとき、任意の初期値 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して問題 (1.1) の時間大域的弱解 $u \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ が一意的に存在する。

(i-b) $\kappa \geq 0$ かつ $\alpha\beta < 0$ のとき、任意の初期値 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して、ある $T^* > 0$ があって問題 (1.1) の時間局所的弱解 $u \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega))$ が一意的に存在する。さらに、もし“ $\lambda > 0$ ”あるいは“ $1 < p < 3$ ”あるいは“ $\|u_0\|_2$ が十分小さい”ならば、 $T^* = \infty$ と取れる。

(ii) $\kappa < 0$ ならば、任意の初期値 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して、ある $T^* > 0$ があって問題 (1.1) の時間局所的弱解 $u \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega))$ が一意的に存在する。

注意. 上の結果は $\lambda \geq 0$ という仮定のほかには複素係数に対して何も制限を必要としないことに注意する。その代わりに非線形項のべき p に $1 < p \leq 3$ という制限がつくが、それでも $p = 3$ かつ $\kappa \geq 0$ という物理的に重要な場合を含んでいる。特に $\lambda = \beta = \gamma = 0$ かつ $\alpha = \kappa = 1$ の場合の問題 (1.1) に対する一意性の結果、即ち定理 1.1 (i-a) の特別な場合は Lions [6] によって証明されていたことにも注意する。

次に“ $u_0 \in L^2(\Omega)$ ” の場合に得られた結果を述べる。 $\lambda > 0$ かつ $\kappa \geq 0$ という追加条件のもとで、定理 1.1 よりも弱い正則性をもつ解の一意性を示すことができ、次の定理を得た。弱解の存在については本質的には [4] および [10] で証明されていることに注意する。

定理 1.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を定理 1.1 と同じものとし、 $\lambda > 0, \kappa \geq 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, 1 < p \leq 3$ とする。このとき任意の初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して問題 (1.1) の時間大域的弱解

$$u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0, T; L^{p+1}(\Omega))$$

が一意的に存在する。

最後に定理 1.2 を高次元の場合に拡張した結果を述べよう. n ラプラシアンをもつ複素 Ginzburg-Landau 方程式の初期値境界値問題

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha) \operatorname{div} (|\nabla u|^{n-2} \nabla u) + (\kappa + i\beta) |u|^{p-1} u - \gamma u = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & t = 0, x \in \Omega \end{cases}$$

について考える. ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) は有界領域で, $p > 1$, $\lambda > 0$, $\kappa > 0$, α, β, γ は実定数である. 問題 (1.3) は [10] で扱われた p ラプラシアンの場合の特別な場合である. [10] では次の条件の下で, 問題 (1.3) の時間大域的弱解の存在が証明されている:

$$(1.4) \quad \frac{|\alpha|}{\lambda} \leq \frac{2\sqrt{n-1}}{n-2}.$$

しかしながら, [10] では弱解の一意性は (1.2) の制限なしには証明されていない. 次の定理は条件 $1 < p \leq 1 + \frac{n}{n-1}$ の下では条件 (1.2) が不要であることを示している.

定理 1.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) を有界領域とし, $\lambda > 0$, $\kappa \geq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $1 < p \leq 1 + \frac{n}{n-1}$ とする. さらに条件 (1.4) が満たされていると仮定する. このとき任意の初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して問題 (1.3) の時間大域的弱解

$$u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^n(0, T; W_0^{1,n}(\Omega)) \cap L^{p+1}(0, T; L^{p+1}(\Omega))$$

が一意的に存在する.

2. 証明の鍵

定理 1.1-1.3 を証明する上で最も難しい点は, 一般に $f \in W_0^{1,n}(\Omega)$ であっても $f \in L^\infty(\Omega)$ ではないことである. この困難を避けるために, まず次の Trudinger 型の不等式に着目した.

補題 2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) を (必ずしも有界でない) 領域とし, $f \in W_0^{1,n}(\Omega)$ とする. このとき任意の $0 < \nu < n\omega_n^{1/n-1}$ に対して Ω と無関係な定数 $C_0 > 0$ が存在して次の不等式が成立する:

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} \left[\exp \left\{ \nu \left(\frac{|f(x)|}{\|\nabla f\|_n} \right)^{n/(n-1)} \right\} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\nu^k}{k!} \left(\frac{|f(x)|}{\|\nabla f\|_n} \right)^{nk/(n-1)} \right] dx \leq C_0 \frac{\|f\|_n^n}{\|\nabla f\|_n^n}.$$

ここで ω_n は n 次元単位球の表面積である.

補題 2.1 の証明については Adachi-Tanaka[1] を参照されたい. Ω が有界領域の場合には, このタイプの不等式は Trudinger [14] によって最初に得られ, Moser [7] によって精密化された. その場合の不等式は次のような形で表される:

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \exp \left\{ \nu_n \left(\frac{|f(x)|}{\|\nabla f\|_n} \right)^{n/(n-1)} \right\} dx \leq C_0 |\Omega|.$$

ここで ν_n は $\nu_n := n\omega_n^{1/(n-1)}$ で与えられる定数で, それは等周不等式の最良定数である. Ogawa [11] は不等式 (2.2) を Ω が $\mathbb{R}^2$ の非有界領域あるいは全空間の場合へ拡張し, さらに Ogawa-Ozawa [12] により高次元の場合まで一般化された. そして, その不等式の精密な形が $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合に [1] によって得られた. $f \in W_0^{1,n}(\Omega)$ の場合, 不等式 (2.1) は $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合の不等式と稠密性によりすぐに得られる. なお, 一般領域の場合には $\nu = n\omega_n^{1/(n-1)}$ は到達されないことに注意する ([1] 参照).

補題 2.1 から, 一意性の証明の鍵を握る Gagliardo-Nirenberg の不等式の定数因子の評価をすることができ, 次の補題を得ることができる.

補題 2.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は補題 2.1 と同じものとし, $f \in W_0^{1,n}(\Omega)$ とする. このとき $q \geq n$ と $\nu < n\omega_n^{1/(n-1)}$ に対して q と無関係な定数 $C_0 > 0$ が存在して次の不等式が成立する:

$$(2.3) \quad \|f\|_q \leq (C_0 a(q) \sqrt{q})^{\frac{1}{q}} \left(\frac{(n-1)q}{n\nu} \right)^{\frac{n-1}{n}} \|f\|_n^{\frac{n}{q}} \|\nabla f\|_n^{1-\frac{n}{q}}, \quad q \gg n.$$

ここで $a(q)$ は $q \in [n, \infty)$ についての有界な L^1 関数で, n と ν のみに依存している.

補題 2.2 の証明. まず補題 2.1 の Trudinger 型の不等式から次の不等式が得られる:

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{1}{k!} \left\{ \nu \left(\frac{|f(x)|}{\|\nabla f\|_n} \right)^{n/(n-1)} \right\}^k dx \leq C_0 \frac{\|f\|_n^n}{\|\nabla f\|_n^n}.$$

したがって次の不等式を満たす ν のみに依存した数列 $\{a_k\} \in l^1$ が存在する:

$$\frac{\nu^k}{k! \|\nabla f\|_n^{\frac{nk}{n-1}}} \int_{\Omega} |f(x)|^{\frac{kn}{n-1}} dx \leq C_0 a_k \frac{\|f\|_n^n}{\|\nabla f\|_n^n}, \quad k = n-1, n, \dots$$

特に Stirling の公式: $k! \simeq \sqrt{2\pi k} e^{-k} k^k$ ($k \rightarrow \infty$) から

$$(2.4) \quad \|f\|_{\frac{kn}{n-1}} \leq \left(\frac{C_0 a_k \sqrt{2\pi k} k^k}{(e\nu)^k} \right)^{\frac{n-1}{nk}} \|f\|_n^{\frac{n-1}{k}} \|\nabla f\|_n^{1-\frac{n-1}{k}}, \quad k \gg n-1$$

を得る. 各 k について不等式 (2.4) を補間すれば,

$$\|f\|_q \leq \left(\frac{C_0(n-1)a_q \sqrt{2\pi(n-1)q}}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{(n-1)q}{n\nu} \right)^{\frac{n-1}{n}} \|f\|_n^{\frac{n}{q}} \|\nabla f\|_n^{1-\frac{n}{q}}, \quad q \gg n$$

が得られる. これで不等式 (2.3) が証明された. □

補題 2.1 を使えば, [11] および [12] における議論と同様にして, 定理 1.1–1.3 が証明される. 証明の詳細等については [13] を参照されたい. なお, [13] では我々の方法が粘性消滅極限問題 ([2], [15], [16] 参照) に対しても有効であることが示されている.

3. 付録

解の一意性を示すときや、縮小写像の原理を使って解の存在を示すときなどに、非線形項の差の評価が必要になる。その際、複素数に対する次の初等的不等式がよく登場する：

$$(3.1) \quad ||z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w| \leq C \max\{|z|^{p-1}, |w|^{p-1}\} |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

しかしながら、ほとんどの文献で不等式 (3.1) の定数因子 C はあいまいになっている上にその証明も省略されている。もちろん定数因子 C にこだわらなければ、不等式 (3.1) の証明はそれほど難しくはないので、省略されてしまうのかもしれない。

ここでは、**大学院生を中心とする若手研究者のために**、最良定数 C を明確に与えて不等式 (3.1) を丁寧に証明する。実数 $z, w \in \mathbb{R}$ に対する不等式 (3.1) は平均値の定理から $C = p$ で成立することがすぐにわかる。実は複素数のときにも同じ定数 $C = p$ で成立する。

補題 3.1. $p > 1$ とする。このとき次の不等式が成立する：

$$(3.2) \quad ||z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w| \leq p \max\{|z|^{p-1}, |w|^{p-1}\} |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

補題 3.1 の証明. まず、 $|z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w$ を次のように書き直す：

$$(3.3) \quad \begin{aligned} |z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w &= \left[|tz + (1-t)w|^{p-1}(tz + (1-t)w) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[|tz + (1-t)w|^{p-1}(tz + (1-t)w) \right] dt. \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |tz + (1-t)w|^{p-1} &= \frac{d}{dt} \left[|tz + (1-t)w|^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \\ &= \frac{p-1}{2} \left[|tz + (1-t)w|^2 \right]^{\frac{p-1}{2}-1} \frac{d}{dt} |tz + (1-t)w|^2 \\ &= \frac{p-1}{2} |tz + (1-t)w|^{p-3} \frac{d}{dt} \left[(tz + (1-t)w)(\overline{tz + (1-t)w}) \right] \\ &= (p-1) |tz + (1-t)w|^{p-3} \operatorname{Re} \left[(tz + (1-t)w)(\overline{z-w}) \right] \end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[|tz + (1-t)w|^{p-1}(tz + (1-t)w) \right] \\ &= (p-1) |tz + (1-t)w|^{p-3} \left\{ \operatorname{Re} \left[(tz + (1-t)w)(\overline{z-w}) \right] \right\} (tz + (1-t)w) \\ &\quad + |tz + (1-t)w|^{p-1}(z-w) \end{aligned}$$

が得られる。この不等式を (3.3) に適用すれば、

$$\begin{aligned} ||z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w| &\leq \int_0^1 \left[(p-1) |tz + (1-t)w|^{p-1} |z-w| + |tz + (1-t)w|^{p-1} |z-w| \right] dt \\ &\leq p \int_0^1 (t|z| + (1-t)|w|)^{p-1} |z-w| dt \leq p \max\{|z|^{p-1}, |w|^{p-1}\} |z-w| \end{aligned}$$

が得られる。これで不等式 (3.2) が証明された。 $\square$

参考文献

- [1] S. Adachi and K. Tanaka, *Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^n$ and their best exponents*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 2051-2057.
- [2] P. Bechouche and A. Jüngel, *Inviscid limits of the complex Ginzburg-Landau equation*, Comm. Math. Phys., **214** (2000), 201-226.
- [3] T. Cazenave, *Introduction to Nonlinear Schrödinger equations*, Textos de Métodos Matemáticos **22**, Univ. Federal do Rio de Janeiro, 1989.
- [4] J. Ginibre and G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation I, Compactness methods*, Physica D **95**, (1996), 191-228.
- [5] J. Ginibre and G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation II, Contraction methods*, Comm. Math. Phys., **187** (1997), 45-79.
- [6] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Paris 1969.
- [7] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **11** (1971), 1077-1092.
- [8] N. Okazawa and T. Yokota, *Monotonicity method for the complex Ginzburg-Landau equation, including smoothing effect*, Nonlinear Anal. T.M.A., **47** (2001), 79-88.
- [9] N. Okazawa and T. Yokota, *Monotonicity method applied to the complex Ginzburg-Landau and related equations*, J. Math. Anal. Appl., **267** (2002), 247-263.
- [10] N. Okazawa and T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p -Laplacian*, J. Differential Equations, **182** (2002), 541-576.
- [11] T. Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. T.M.A., **14** (1990), 765-769.

- [12] T. Ogawa and T. Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem*, J. Math. Anal. Appl., **155** (1991), 531-540.
- [13] T. Ogawa and T. Yokota, *Uniqueness and inviscid limits of solutions for the complex Ginzburg-Landau equation in a two-dimensional domain*, preprint.
- [14] N. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech., **17** (1967), 473-484.
- [15] B. Wang, *The limit behavior of solutions for the Cauchy problem of the complex Ginzburg-Landau equation*, Comm. Pure Appl. Math., **55** (2002), 481-805.
- [16] J. Wu, *The inviscid limit of the complex Ginzburg-Landau equation*, J. Differential Equations, **142** (1998), 413-433.

On a system of nonlinear PDE's for phase transitions with vector order parameter

Emil Minchev and Takanobu Okazaki

Department of Mathematics,
Graduate School of Science and Technology,
Chiba University, Yayoi - cho 1 - 33, Inage - ku,
Chiba 263 - 8522, Japan
{minchev, okazaki}@math.e.chiba-u.ac.jp

November 30, 2002

Abstract

The paper deals with a system of nonlinear PDE's which describes a phase - field model with temperature dependent constraint to the vector order parameter. Existence of solutions for the system under consideration is proved by the method of Yosida approximation.

AMS Subject Classification Code: 35R70, 35K50, 74N30

Keywords: nonlinear PDE's, existence of solutions, subdifferential, Yosida approximation, hysteresis, vector order parameter

1 Introduction

The present paper deals with a class of phase transition models which takes into account the hysteresis and diffusive effects and is described by the following system of PDE's

$$a\mathbf{w}_t - \kappa\Delta\mathbf{w} + \partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w}, u) \quad \text{in } Q, \quad (1)$$

$$(\lambda(\mathbf{w}))_t + du_t - \Delta u = h(\mathbf{w}, u) \quad \text{in } Q, \quad (2)$$

where $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $T > 0$, $\Omega \subset R^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $Q = (0, T) \times \Omega$; a, κ, d are given constants; $\lambda : R^2 \rightarrow R$, $F : R^2 \times R \rightarrow R^2$, $h : R^2 \times R \rightarrow R$, $f_*, f^*, g_*, g^* : R \rightarrow R$ are given functions. We assume that $f_*, f^*, g_*, g^* \in C^2(R)$, $f_*(u) \leq f^*(u)$ on R , $g_*(u) \leq g^*(u)$ on R , $f'_*, f''_*, f^{*'}, f^{*''}, g'_*, g''_*, g^{*'}, g^{*''}$ are bounded on R , $f_*(u), f^*(u), g_*(u), g^*(u)$ are nondecreasing functions on R . Also we suppose that there exists a constant $k_0 > 0$ such that $f_*(u) = f^*(u)$, $g_*(u) = g^*(u)$ on $(-\infty, -k_0] \cup [k_0, +\infty)$ and $f^*(u) - g^*(u)$ is a nondecreasing function on $(-\infty, -k_0] \cup [k_0, +\infty)$.

Define

$$K(u) = \{(w_1, w_2) : f_*(u) \leq w_1 + w_2 \leq f^*(u), g_*(u) \leq -w_1 + w_2 \leq g^*(u)\}.$$

We denote by $\mathbf{I}_{K(u)}(\cdot)$ the indicator function of the set $K(u)$ and $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\cdot)$ denotes the subdifferential of $\mathbf{I}_{K(u)}(\cdot)$. The subdifferential $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w})$ is a set-valued mapping and in our statement of the problem $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) = \{0\}$ if $\mathbf{w} \in \text{int}K$, and $\partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w})$ coincides with the cone of normals to K at the point $\mathbf{w}$ if $\mathbf{w} \in \partial K$.

Equations (1) and (2) correspond respectively to the kinetics of the vector order parameter $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ and the balance of the internal energy; u is the relative temperature. The system (1),(2) describes solid-liquid phase transitions of a physical system which is a mixture of two substances having different solidification temperatures. If we consider melting problem of only one substance then the respective system contains scalar function for the order parameter. However, in the case when we have mixture of two different substances, the adequate mathematical model describing their solid-liquid phase transitions contains two component vector order parameter. Let us note that models with vector hysteresis are object of active recent investigations (see papers [1], [7], [14] as well as the monograph [13]).

Various special cases of the system (1),(2) have been already studied. In [15], [16] Visintin proposed the following system

$$aw_t + \partial I_{[-1,1]}(w) \ni a_1 w + a_2 u \quad \text{in } Q,$$

$$cw_t + du_t - \Delta u = g(x, t) \quad \text{in } Q$$

as a model for Stefan problem with phase relaxation, where $f_*(u) \equiv -1$, $f^*(u) \equiv 1$. Further investigations deal with the case of cubic nonlinearity

$-a_0w^3 + a_1w + a_2u$ in the kinetics of the order parameter, see [6], [9], [10]. The equation

$$w_t + \partial I_u(w) \ni 0 \quad \text{in } Q,$$

including the constraint $f_*(u) \leq w \leq f^*(u)$, was investigated in [3] and [15], see also [8], [11], [12]. In [5], P. Colli, N. Kenmochi and M. Kubo studied the system (1),(2) in the special case when w is scalar function, $f_*(u) = f^*(u) = -1$ on $(-\infty, -k_0]$, $f_*(u) = f^*(u) = 1$ on $[k_0, \infty)$, $h = h(t, x)$ and λ is a linear function.

In the present paper we formulate results for boundedness and existence of solutions of the system (1),(2). Using the method of Yosida approximation we prove that there exists at least one solution in the cases when: $\kappa = 0$ or $\kappa > 0$ is sufficiently small.

2 Preliminaries

Denote by H the Hilbert space $L^2(\Omega)$ with the usual scalar product $(\cdot, \cdot)_H$ and norm $|\cdot|_H$, and by $\mathbf{H}$ the product space $H \times H$. Denote by V the Sobolev space $H^1(\Omega)$ equipped with the norm $|u|_V = (u, u)_V^{1/2}$, where

$$(u, v)_V = (u, v)_H + a(u, v),$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad u, v \in V.$$

Denote by $A : V \rightarrow V'$ the linear continuous operator defined by

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v), \quad u, v \in V,$$

where V' is the dual space of V and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stands for the duality pairing between V' and V .

Define the operator $-\Delta_N : D(-\Delta_N) \subset H \rightarrow H$ by the restriction of A to the elements $w \in V$ such that $Aw \in H$, i.e.,

$$D(-\Delta_N) = \left\{ w \in H^2(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{in } H^{1/2}(\partial\Omega) \right\}$$

and

$$-\Delta_N w = -\Delta w \quad \text{for all } w \in D(-\Delta_N),$$

where $\frac{\partial}{\partial n}$ is the outward normal derivative on $\partial\Omega$.

Now we give the definition of solutions in a weak (variational) sense for the system (1),(2).

Definition 2.1 Let $\kappa \geq 0$. A pair of functions $\{\mathbf{w}, u\}$ is called a solution of the system (1),(2) if:

(i) $w_1, w_2 \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ if $\kappa > 0$ and $w_1, w_2 \in W^{1,2}(0, T; H)$ if $\kappa = 0$.

(ii) $u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$.

(iii) $a\mathbf{w}' - \kappa\Delta_N\mathbf{w} + \partial\mathbf{I}_{K(u)}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{F}(\mathbf{w}, u)$ in $H \times H$ a.e. in $(0, T)$.

(iv) $(\lambda(\mathbf{w}))' + du' - \Delta_N u = h(\mathbf{w}, u)$ in H a.e. in $(0, T)$.

(v) $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad u(0) = u_0$.

For simplicity we denote respectively by $\mathbf{w}'$ and u' the time - derivatives $\mathbf{w}_t$ and u_t of $\mathbf{w}$ and u .

Note that the inclusion (iii) is equivalent to the following conditions:

(iii)-(a) $\mathbf{w} \in K(u)$ a.e. in Q .

(iii)-(b) $(a\mathbf{w}'(t) - \kappa\Delta\mathbf{w}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{w}(t), u(t)))(\mathbf{w}(t) - \mathbf{z}) \leq 0$ for all $\mathbf{z} \in \mathbf{H}$ with $\mathbf{z} \in K(u(t))$ a.e. in Ω for a.e. $t \in (0, T)$.

(iii)-(c) $\frac{\partial \mathbf{w}(t)}{\partial n} = 0$ a.e. on $\partial\Omega$ for a.e. $t \in (0, T)$.

Throughout the paper we suppose that the following assumptions hold:

H1. a, κ, d are given constants such that $a > 0, \kappa \geq 0, d > 0$; $\lambda(w_1, w_2) \in C^2(R^2, R)$ and there exist constants c_λ, C_λ such that $0 < c_\lambda \leq \lambda_{w_i} \leq C_\lambda, i = 1, 2$ on R .

H2. $f_*, f^*, g_*, g^* \in C^2(R)$ are such that $f_*(u) \leq f^*(u)$ on $R, g_*(u) \leq g^*(u)$ on $R, f'_*, f'', f^{*'}, f^{*''}, g'_*, g'', g^{*'}, g^{*''}$ are bounded on $R, f_*(u), f^*(u), g_*(u), g^*(u)$ are nondecreasing functions on R and there exists a constant $k_0 > 0$ such that $f_*(u) = f^*(u)$ and $g_*(u) = g^*(u)$ on $(-\infty, -k_0] \cup [k_0, +\infty)$ and $f^*(u) - g^*(u)$ is a nondecreasing function on $(-\infty, -k_0] \cup [k_0, +\infty)$.

H3. $\sup_{(\mathbf{w}, u) \in R^2 \times R} |h(\mathbf{w}, u)| < +\infty$.

H4. F and h are locally Lipschitz continuous functions on $R^2 \times R$.

H5. $w_{01}, w_{02}, u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap V$ and $\mathbf{w}_0 \in K(u_0)$ a.e. in Ω , where $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, w_{02})$.

3 Main results

Now we formulate the main results.

Theorem 3.1 *Any solution $\{\mathbf{w}, u\}$ of (1),(2) satisfies the estimate*

$$|w_1|_\infty, |w_2|_\infty, |u|_\infty \leq M_0, \quad (3)$$

where

$$M_0 = \max \left\{ k_2, \frac{3(|f_*(k_2)| + |f^*(k_2)|) + |g_*(k_2)| + |g^*(k_2)|}{2} \right\},$$

$$k_2 = k_1 + M_1 T, \quad k_1 = \max\{k_0, |u_0|_\infty\}, \quad M_1 = \frac{1}{d}|h|_\infty.$$

Theorem 3.2 *There exists a constant $\kappa_0 > 0$ such that for $0 < \kappa < \kappa_0$ there exists at least one solution of the system (1),(2).*

Theorem 3.3 *There exists at least one solution of the system (1),(2) with $\kappa = 0$.*

References

- [1] C. Appino, M. Valsania, V. Basso, A vector hysteresis model including domain wall motion and coherent rotation, *Physica B*, **275** (2000), 103 - 106.
- [2] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi - Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North - Holland / American Elsevier, Amsterdam - London - New York, 1973.
- [3] M. Brokate, J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, New York, 1996.

- [4] P. Colli, K. H. Hoffmann, A nonlinear evolution problem describing multi - component phase changes with dissipation, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **14** (1993), 275 - 297.
- [5] P. Colli, N. Kenmochi, M. Kubo, A phase field model with temperature dependent constraint, *J. Math. Anal. Appl.*, **256** (2001), 668 - 685.
- [6] A. Damlamian, N. Kenmochi, N. Sato, Subdifferential operator approach to a class of nonlinear systems for Stefan problems with phase relaxation, *Nonlinear Analysis*, **23** (1994), 115 - 142.
- [7] J. Füzi, A. Ivanyi, Isotropic vector Preisach particle, *Physica B*, **275** (2000), 179 - 182.
- [8] M. Hilpert, On uniqueness for evolution problems with hysteresis, in: *Mathematical Models for Phase Change Problems*, Birkhauser, Basel, (1989), 377 - 388.
- [9] N. Kenmochi, T. Koyama, G. H. Meyer, Parabolic PDEs with hysteresis and quasivariational inequalities, *Nonlinear Analysis*, **34** (1998), 665 - 686.
- [10] N. Kenmochi, M. Kubo, Weak solutions of nonlinear systems for non-isothermal phase transitions, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **9** (1999), 499 - 521.
- [11] N. Kenmochi, A. Visintin, Asymptotic stability for nonlinear PDEs with hysteresis, *Euro. J. Appl. Math.*, **5** (1994), 39 - 56.
- [12] P. Krejci, J. Sprekels, A hysteresis approach to phase - field models, *Nonlinear Analysis*, **39** (2000), 569 - 586.
- [13] I. D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer, New York, 1991.
- [14] A. Visintin, A Weiss - type model of ferromagnetism, *Physica B*, **275** (2000), 87 - 91.
- [15] A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Springer, Berlin, 1994.
- [16] A. Visintin, *Models of Phase Transitions*, Birkhauser, Boston, 1996.
- [17] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A Linear Monotone Operators*, Springer, New York - Berlin, 1990.

非 Newton 流体の方程式について

松浦 啓 (早稲田大学大学院理工学研究科)

kino@otani.phys.waseda.ac.jp

0.1 はじめに

タイトルを「非 Newton 流体の方程式について」としたが、ここではマイクロポーラ電磁流体 (magneto-micropolar fluid) の方程式についてのみ述べることにする。

本稿の目的は [9] の解説である。[9] ではマイクロポーラ電磁流体の運動を記述する方程式系の強解の一意的な存在の結果を述べたが、ここでは初めにそのマイクロポーラ電磁流体 (Magneto-micropolar fluid) とは何かを簡単に説明する。その後、数学の話に移るが、まず解を探す関数空間を定義し、方程式に現れる微分作用素のよく知られている性質をまとめる。その後、方程式系を抽象的な常微分方程式として定式化する。次にその常微分方程式の解の存在を導く際に利用する抽象論 (Ôtani [18]) を、今回扱う問題に適した形で紹介する。解の存在の証明は、考えている方程式がその抽象論の仮定をみたしていることを示すことになるが、論文では省略してしまうような議論を中心に述べる。なお、抽象論を用いて示せるのは解の存在のみであり、一意性は他の議論に基づいて証明しなければならない。本稿の最後の部分を一意性の証明にあてる。

0.2 物理的背景および方程式

0.2.1 Newton 流体と極性流体

マイクロポーラ電磁流体は、電磁場の作用下にある電気伝導性のある極性流体である。極性流体とは Newton 流体の一般化のひとつである。Newton 流体の運動方程式は Navier-Stokes 方程式である。Navier-Stokes 方程式は、流体のモデルとして非常に有用であるが、血液、高分子溶液、液晶など微視的な構造を持つ流体のモデルとして用いるには不適当な場合がある。例えば、管を流れるこれらの流体の粘性は管の半径の変化に伴って変化するが、そのような現象は Navier-Stokes 方程式では説明できない。そこで、こうした現象をも説明し得るように Navier-Stokes 方程式を一般化したモデルがいくつか提唱されている。そのうちのひとつが Eringen による極性流体の理論である。この理論の特徴は、流体の応力テンソルの反対称成分を考慮していることである。応力テンソルの反対称成分は流体中の微粒子の持つ角運動量と関係付けられる。Navier-Stokes 方程式は応力テンソルの対称成分のみしか考慮に入れていない。上では、流体力学の応用面の要請に応えるように極性流体の理論が登場したかのように述べたが、次のように考えている理論物理学者もいた (湯川 [27] より一部引用)。

しかし、ひずみというのは対称テンソルなんです。(中略) それからまた、ス

トレス, 応力のほうも対称テンソルなんです. 私はその議論がよくわからないのです. (中略) また, 応力のほうも極限の取り方によっては対称でない部分がありまして. そういうものは回転と関係している, そういうことがあるわけです. ところが, 普通のやり方ではこの反対称の項は非常に簡単に落とされちゃうわけです.

また, 今井 [8] においては, 物質中の電磁場において, Maxwell 応力は一般に対称テンソルではないという事実を考察の基礎におき, 内部角運動量を導入している.

0.2.2 方程式系

ここでは, Ortega-Torres and Rojas-Medar [17] に従い, 非圧縮性マイクロポーラ電磁流体の方程式系を述べる. 詳しい導出過程については, 論文では Ahmadi and Shahinpoor [1], Petrosyan [19] を, 邦書では棚橋 [23], [24] を参照してほしい. なお, 特に極性流体の方程式の数学的な研究については Lukaszewicz [14] が詳しい.

流体の入っている容器を 3 次元有界開単連結領域 Ω とし, その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであると仮定する. 流体は非圧縮性であると仮定する. それに伴い, 密度は 1 に等しいとおく.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - (\mu + \chi)\Delta u + (u \cdot \text{grad})u - r(b \cdot \text{grad})b + \text{grad}(p + rb \cdot b) &= f + \chi \text{curl} \omega, \\ j \frac{\partial \omega}{\partial t} - \gamma \Delta \omega - (\alpha + \beta) \text{grad}(\text{div} \omega) + 2\chi \omega + j(u \cdot \text{grad})\omega &= g + \chi \text{curl} u, \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \nu \text{curl}(\text{curl} b) + \text{curl}(u \times b) &= 0.\end{aligned}$$

ここで, 諸量について述べておく. u, ω, b はいずれもそれぞれ $\mathbb{R}^3$ に値をもつ空間変数 x および時間変数 t の未知関数で, それぞれ流速, 微小粒子の角速度, 磁束密度をあらわす. なお, 第一式は運動量保存則から, 第二式は角運動量保存則から, 第三式は Maxwell の方程式系および Ohm の法則, MHD 近似などから得られる.

また, f, g は与えられた $\mathbb{R}^3$ 値の関数で, それぞれ外力, 外偶力を表す.

$\mu, \chi, \gamma, \alpha, \beta, \nu, r, j$ は定数である. これらのうち, $\mu, \chi, \gamma, \nu, r, j$ はいずれも正の実数であるとする. また, α, β に関しては, $\alpha + \beta + \gamma > 0$ であるとする. ただし, この α, β, γ の仮定については, 注意が必要である. この 3 つの定数は極性流体の方程式を導く際に導入された量である. その際, Eringen [3] によると, 熱力学第二法則を表す Clausius-Duhem の不等式をみたすという要請から,

$$\gamma - \beta \geq 0, \quad \gamma + \beta \geq 0, \quad 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0 \quad (1)$$

という条件が導かれる. そして, この条件を導いた直後に述べられた定理 ([3], Theorem 2) では

$$3\alpha + 2\gamma \geq 0, \quad -\gamma \leq \beta \leq \gamma, \quad \gamma \geq 0 \quad (2)$$

という関係に書き換えられている。これらは等価でないと思われる。実際、例えば $\alpha = -2/3$, $\beta = 1/4$, $\gamma = 3/2$ とおくと、これらは (2) をみたすが (1) をみたさない。逆に、(1) から (2) が導かれる。このことは、(1) の方が (2) よりも強い条件になっていることを意味する。なお、(1) からは、 $2\beta + 2\gamma \geq 0$ を $3\alpha + \beta + \gamma \geq 0$ に加えることにより、 $\alpha + \beta + \gamma \geq 0$ を導く事ができる。すなわちこの条件は (1) を含んだものになっている。

以上のような事情をふまえ、ここでは先に述べた $\alpha + \beta + \gamma > 0$ の条件を採用することにする。この条件は、Galdi and Rionero [6] や [17], [20] において用いられている。

なお、[14] においては、 ω の係数を次のようにおいている。

$$\gamma = c_a + c_d, \quad \alpha + \beta = c_0 + c_d - c_a$$

そして、次の不等式が成り立つとしている。

$$c_d \geq 0, \quad c_a + c_d \geq 0, \quad 3c_0 + 2c_d \geq 0, \quad -(c_a + c_d) \leq c_d - c_a \leq c_a + c_d$$

この条件は、 $\alpha = c_0$, $\beta = c_d - c_a$, $\gamma = c_a + c_d$ とみなせば (1) と同等である。また、 $\alpha + \beta + \gamma \geq 0$ を導くこともできる。

他の定数については、簡単のため、 $j = 1$ および $r = 1$ として ω および b の係数を減らしておく。 j については単位系を変更すればよく、 r については $\sqrt{r}b$ を新たに b とおいたとみなせばよいだろう。

二度手間になるが、上に述べたような変更をし、さらに流体が非圧縮性であるという仮定 ($\operatorname{div} u = 0$) および単磁荷が存在しないという仮定 ($\operatorname{div} b = 0$) を加えて以下の方程式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\mu + \chi)\Delta u + (u \cdot \operatorname{grad})u - (b \cdot \operatorname{grad})b + \operatorname{grad}(p + b \cdot b) = f + \chi \operatorname{curl} \omega, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \gamma \Delta \omega - (\alpha + \beta) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \omega) + 2\chi \omega + (u \cdot \operatorname{grad})\omega = g + \chi \operatorname{curl} u, \quad (4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \nu \operatorname{curl}(\operatorname{curl} b) + \operatorname{curl}(u \times b) = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{div} b = 0. \quad (6)$$

0.2.3 初期条件および境界条件

初期条件は次のようにおく。

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), \quad \omega(\cdot, 0) = \omega_0(\cdot), \quad b(\cdot, 0) = b_0(\cdot), \quad (7)$$

境界条件は次のものを採用する。

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

$$b \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\operatorname{curl} b) \times n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

ここに、 n は境界における単位外向き法線ベクトルである。

境界条件についていくつか注意を述べておく。

まず流速 u については、粘性流体であることから静止した境界との相対速度が零、すなわちすべりなしの条件が自然であろう。したがって斉次 Dirichle 条件となる。

微小粒子の角速度 ω についてはさまざまな境界条件が提案されているが、そのいずれが適当かについては明確な基準がないようである。したがってここでは簡単のため斉次 Dirichlet 条件を採用した。

磁束密度については、[20] および [17] では議論を簡単にするためということで斉次 Dirichlet 条件を用いているが、ここでは電磁流体の理論で通常用いられている完全導体壁の条件を採用する。この点については、Sermange and Temam [21]、コシリヤコフ、グリニエルおよびスミルノフ [12]、吉田 [26] 等を参照されたい。流体の封入されている容器 Ω の壁が電気伝導性のよい壁で囲まれている状況であると考えればよく、このとき電磁場は壁には入り込まない。MHD 近似等により電磁氣的な効果をすべて磁束密度の振舞で代表させているが、(10) の第一項はそのことを表現している。これにより、電磁場についても容器内において閉じた系として扱う事ができるのである。

0.3 数学的定式化

解くべき方程式系および初期条件、境界条件が決まった。次に考える事はどのような解を求めるかを定めることである。それに応じて解を探す関数空間が決まり、その中で微分作用素の性質が求まり、解の存在および一意性などについて議論する枠組が決定する。ここでは L^2 の枠組で解を探すことにする。以下に関数空間を設定し、微分作用素について知られている結果を述べ、さらに方程式系を抽象発展方程式に書き換える。

0.3.1 関数空間

まず記法の約束をしておく。 Ω 上における $\mathbb{R}^1$ 値関数の空間を $X(\Omega)$ 、 $\mathbb{R}^3$ 値関数のうち、成分関数がすべて $X(\Omega)$ に属するものの全体を $\mathbf{X}(\Omega)$ のように書く。また、 S をある正の数、 E をある Banach 空間とすると、 $L^2(0, S; E)$ でノルム $\|u\|_{L^2(0, S; E)} = (\int_0^S \|u(t)\|_E^2 dt)^{1/2}$ を備えた Banach 空間を表す。

次に、具体的に以下のような関数空間を設定する.

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^\infty(\bar{\Omega}) &= \{v \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega}) \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\
\mathbf{C}_\sigma^\infty(\Omega) &= \{v \in \mathbf{C}_n^\infty(\bar{\Omega}) \mid \operatorname{supp} v \subset \Omega\}, \\
\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega) &= \mathbf{C}_n^\infty(\bar{\Omega}) \text{ の } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ における閉包} \\
&= \mathbf{C}_\sigma^\infty(\Omega) \text{ の } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ における閉包} \\
&= \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\
\mathbf{H}_n^1(\Omega) &= \mathbf{C}_n^\infty(\bar{\Omega}) \text{ の } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ における閉包} \\
&= \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\
\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) &= \mathbf{C}_\sigma^\infty(\Omega) \text{ の } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ における閉包} \\
&= \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega\}, \\
H &= \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_\sigma^2, \\
V &= \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1.
\end{aligned}$$

また、次のように Hilbert 内積およびノルムを導入する.

$$\begin{aligned}
(u, v) &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u^i v^i, & |u| &= (u, u)^{1/2} & \text{for } u, v \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\
(u, v)_\sigma &= (u, v), & |u|_\sigma &= |u| & \text{for } u, v \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega), \\
((u, v)) &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \frac{\partial v^j}{\partial x_i}, & ||u|| &= ((u, u))^{1/2} & \text{for } u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\
((u, v))_n &= (\operatorname{curl} u, \operatorname{curl} v), & ||u||_n &= ((u, u))_n^{1/2} & \text{for } u, v \in \mathbf{H}_n^1(\Omega), \\
((u, v))_\sigma &= ((u, v)), & ||u||_\sigma &= ((u, u))_\sigma^{1/2} & \text{for } u, v \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(U_1, U_2)_H &= (u_1, u_2)_\sigma + (\omega_1, \omega_2) + (b_1, b_2)_\sigma & \text{for } U_i = (u_i, \omega_i, b_i) \in H \ (i = 1, 2), \\
|U|_H &= (U, U)_H^{1/2} & \text{for } U \in H, \\
(U_1, U_2)_V &= ((u_1, u_2))_\sigma + ((\omega_1, \omega_2)) + ((b_1, b_2))_n & \text{for } U_i = (u_i, \omega_i, b_i) \in V \ (i = 1, 2), \\
|U|_V &= (U, U)_V^{1/2} & \text{for } U \in V,
\end{aligned}$$

ここに, $u = (u^1, u^2, u^3)$, $v = (v^1, v^2, v^3)$.

ここで少し注意を述べておく. まず, 上記の関数空間の特徴付けについては, Temam [25] および [21] を参照していただきたい.

$\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ と $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ との間には $\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ という包含関係がある.

また, $H_0^1(\Omega)$ の任意の元 ξ に対し, Poincaré の不等式 $\|\xi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\operatorname{grad} \xi\|_{L^2(\Omega)}$ が成り立つことから, $\|\cdot\|_\sigma$ は $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ノルムと同値なノルムになる.

一方, $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ の任意の元 b に対し, Poincaré の不等式が成り立つとは一般には言えないが, 類似の不等式 $\|b\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\operatorname{curl} b\|_{L^2(\Omega)}$ が成り立つ. この事実は, $\operatorname{curl} b = 0$ から

$b = \text{grad } q$ なるスカラーポテンシャル q の存在が示唆され, $\text{div } b = 0$ および $b \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ より $\Delta q = 0$, $\partial q / \partial n|_{\partial\Omega} = 0$ を得て, $0 = \text{grad } q = b$ が結論されることから想像できよう. 厳密な議論は Foias and Temam [5] (または, その一部の英語訳である [25] の Appendix I) を参照してほしい. これと関連して, $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ においてノルム $\|\cdot\|_n$ と, 通常の $\mathbf{H}^1$ ノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1} = (\|\cdot\|^2 + \|\cdot\|^2)^{1/2}$ とが同値であることも注意しておく.

本節を終えるにあたり, 以上のような関数空間を導入した理由について一言触れておく. 流速および磁束密度に対しては, わきだし無しの条件 (6) を関数空間に組み込んだ. それが $\mathbf{L}_o^2(\Omega)$ である. これよりも滑らかな関数空間については, $\mathbf{H}_o^1(\Omega)$ は流速のみたすべき境界条件を完全に取り込んでいるが, $\mathbf{H}_o^2(\Omega)$ は磁束密度のみたすべき境界条件を一部しか取り込んでいない. なお, 角速度が属すべき空間については境界条件を組み入れた $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ となっている.

0.3.2 作用素

はじめに, 非圧縮性流体を扱う際に通常用いられる Helmholtz 分解または Weyl 分解と呼ばれる $\mathbf{L}^2(\Omega)$ の直和分解:

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{L}_o^2(\Omega) \oplus \mathbf{G}(\Omega), \quad \mathbf{G}(\Omega) = \{\text{grad } q | q \in \mathbf{H}^1(\Omega)\}. \quad (11)$$

を導入する. そして, $P: \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}_o^2(\Omega)$ を直交射影とする.

空間に関する 2 階微分を作用素 A_i ($i = 1, 2, 3$) として, 次で定義する.

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_o^1(\Omega), \\ A_1 u &= -(\mu + \chi) P \Delta u \quad \text{for } u \in D(A_1); \\ D(A_2) &= \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ A_2 \omega &= -\gamma \Delta \omega - (\alpha + \beta) \text{grad}(\text{div } \omega) \quad \text{for } \omega \in D(A_2); \\ D(A_3) &= \{b \in \mathbf{H}^2(\Omega) | \text{curl } b \times n = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \cap \mathbf{H}_n^1(\Omega), \\ A_3 b &= \nu \text{curl}(\text{curl } b) \quad \text{for } b \in D(A_3). \end{aligned}$$

まずはじめにわかることは, 微分の線形性より, これらの作用素がいずれも線形作用素であるということである. また, $\mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$ および $\mathbf{C}_n^\infty(\bar{\Omega})$ はそれぞれ $D(A_1)$, $D(A_3)$ に含まれ, いずれも定義から $\mathbf{L}_o^2(\Omega)$ で稠密である. したがって $D(A_1)$, $D(A_3)$ も $\mathbf{L}_o^2(\Omega)$ で稠密である. 同様な論法により, $D(A_2)$ が $\mathbf{L}^2(\Omega)$ で稠密であることが従う (定義域の稠密性は, これらの作用素が極大単調作用素であることから導かれる).

これらの作用素は, いずれも自己共役な極大単調作用素である. そのことを, A_2 と A_3 について述べよう.

まず, $\omega_1, \omega_2 \in D(A_2)$ ならば, 部分積分において現れる境界積分が 0 となることから,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \omega_1 \cdot (-\Delta \omega_2) &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \omega_1^i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_2^i}{\partial x_j} = \int_{\Omega} (-\Delta \omega_1) \cdot \omega_2, \\ \int_{\Omega} \omega_1 \cdot (-\operatorname{grad}(\operatorname{div} \omega_2)) &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \omega_1 \operatorname{div} \omega_2 = \int_{\Omega} (-\operatorname{grad}(\operatorname{div} \omega_1)) \cdot \omega_2\end{aligned}$$

を得て, これらから直ちに $(\omega_1, A_2 \omega_2) = (A_2 \omega_1, \omega_2)$ を得る. すなわち, A_2 が対称作用素であることがわかる. 単調性を得るには, まず次の事実に着目する. この事実は, 境界積分が 0 である場合, curl が対称作用素であることを意味する. $u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ に対し,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{curl} u \cdot v &= \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u^k}{\partial x_j} v^i \\ &= \int_{\partial \Omega} \varepsilon_{ijk} v^i n_j u^k - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^i}{\partial x_j} u^k \\ &= \int_{\partial \Omega} (n \times u) \cdot v + \int_{\Omega} \varepsilon_{kji} u^k \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \\ &= \int_{\partial \Omega} (n \times u) \cdot v + \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{curl} v\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, ε_{ijk} は 3 階の反対称テンソルであり, その値は, (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶順列のとき 1, 奇順列のとき -1, それ以外のときは 0 である. また, 添字が繰り返し現れるとき, その添字について 1 から 3 までの和をとるという和の規約を用いた.

上の部分積分の結果およびベクトル解析の公式 $\operatorname{curl} \operatorname{curl} = -\Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div}$, そして再び境界積分が 0 になることを用いると, $\omega \in D(A_2)$ に対し,

$$\begin{aligned}|\operatorname{curl} \omega|^2 &= (\operatorname{curl} \omega, \operatorname{curl} \omega) \\ &= (\omega, \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \omega)) \\ &= (\omega, -\Delta \omega) + (\omega, \operatorname{grad}(\operatorname{div} \omega)) \\ &= \|\omega\|^2 - \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

すなわち, $\|\omega\|^2 = |\operatorname{curl} \omega|^2 + \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2$ を得る. 従って, $\alpha + \beta$ が正か負かの場合分けをすることによって, 次の不等式を得る.

$$\begin{aligned}(A_2 \omega, \omega) &= \gamma \|\omega\|^2 + (\alpha + \beta) \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \max(\gamma, \alpha + \beta + \gamma) \|\omega\|^2.\end{aligned}$$

ゆえに A_2 の単調性が示された.

次に, 極大性を調べるため, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ 上の双線形形式 a_2 を

$$a_2(\omega_1, \omega_2) = \gamma \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \omega_1^i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_2^i}{\partial x_j} + (\alpha + \beta) \int_{\Omega} \operatorname{div} \omega_1 \operatorname{div} \omega_2$$

とおく. これは Schwarz の不等式から連続であること, および単調性を示すときに導いた不等式から強圧的であることがわかる. ゆえに Lax-Milgram の定理を適用でき, 任意の $g \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ に対する方程式 $\omega + A_2\omega = f$ の解 $\omega \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ の存在を示すことができる. ただしここで $A_2\omega$ と書いたが, これは正しい書き方ではない. 解 ω が $D(A_2)$ に属することはこの段階ではまだわからないからである. しかし, Nečas [16] にある結果により, 解 ω が $\mathbf{H}^2(\Omega)$ に属していることが保証される.

以上により, A_2 が極大単調かつ対称な作用素であることがわかったが, これらより自己共役性が従うことが知られている.

次に, A_3 について調べる. まず, $b \in D(A_3)$ に対し, $A_3b \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ であることを示そう. 先に述べた curl に関する等式と Helmholtz 分解を用いる. $q \in H^1(\Omega)$ を任意に固定し, $\mathbb{R}^3$ 上で定義された台がコンパクトな滑らかな関数の列 (q_n) で, $H^1(\Omega)$ で $q_n|_\Omega \rightarrow q$ なるものを選ぶ. このとき, 各 n に対し,

$$(A_3b, \text{grad } q_n) = \int_{\partial\Omega} (n \times \text{curl } b) \cdot \text{grad } q_n + (\text{curl } b, \text{curl}(\text{grad } q_n)) = 0$$

が成り立つ. ここで, ベクトル解析の公式 $\text{curl grad} = 0$ を用いた. したがって $n \rightarrow \infty$ の極限を取ることににより, $(A_3b, \text{grad } q) = 0$ を得る. これから, A_3 が $D(A_3)$ から $\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ への作用素として正しく定義されていることがわかる.

次に, 対称性および単調性を調べる. $b_1, b_2 \in D(A_3)$ に対し, 部分積分に伴って現れる境界上の積分が 0 になることから,

$$(A_3b_1, b_2)_\sigma = (A_3b_1, b_2) = \nu(\text{curl } b_1, \text{curl } b_2) = (b_1, A_3b_2) = (b_1, A_3b_2)_\sigma$$

が成り立つ. これにより対称であることがわかる.

そもそも非発散場の微分については, $\text{curl curl} = -\Delta$ であるから, A_3 を $-\Delta$ を用いて定義してもよいように思われるが, 境界条件との整合性を保たせるために $A_3 = \text{curl curl}$ とおいたのである. また, A_3 の定義域に b に対する残りの境界条件を含めたことにより, A_3 はさらに望ましい性質をもつことになる.

単調性は, 上の式において $b_1 = b_2 = b$ とおくと $(A_3b, b)_\sigma \geq \nu\|b\|_n^2$ が得られることからわかる.

極大性を調べるため, $\mathbf{H}_n^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ 上の双線形形式 a_3 を

$$a_3(b_1, b_2) = \nu(\text{curl } b_1, \text{curl } b_2)$$

によって定めれば, a_2 に関するのと同様の議論により, a_3 が連続で強圧的であることが示され, 与えられた任意の $h \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ に対し, $a_3(b, \xi) = (h, \xi)_\sigma$ をすべての $\xi \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ につきみたす解 $b \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ の一意的な存在が得られる. そして, Georgescu [7] および Miyakawa [15] にある結果より, $b \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ であることがわかる. これらはいずれも Lions and Magenes [13] で得られた結果を基礎にしている.

残るは, 境界条件である. これは次のような議論によって示される. そのために, 方程式 $a_3(b, \xi) = (h, \xi)_\sigma$ における ξ として, $\mathbf{H}^1(\Omega)$ の元を取れることを示す. まず, $\xi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$

として、 $\xi \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ をみたすものをとる。このとき、 $\xi = \text{grad } \psi$ となるような $\psi \in H^2(\Omega)$ の存在が、斉次 Neumann 境界条件つき Poisson 方程式 $\Delta\psi = \text{div } \xi$, $\partial\psi/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ を解くことにより得られる。その解を用いて、 $\bar{\xi} = \xi - \text{grad } \psi$ とおけば、 $\bar{\xi} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ であるから、 $a_3(b, \bar{\xi}) = (h, \bar{\xi})_\sigma$ をみたす。ここで、 $\text{curl grad} = 0$ および $\text{grad } \psi \in \mathbf{G}(\Omega)$ より、

$$\begin{aligned} a_3(b, \bar{\xi}) &= \int_{\Omega} \text{curl } b \cdot \text{curl}(\xi - \text{grad } \psi) = \int_{\Omega} \text{curl } b \cdot \text{curl } \xi, \\ (h, \bar{\xi})_\sigma &= (h, \xi) + (h, \text{grad } \psi) = (h, \xi) \end{aligned}$$

を得る。すなわち、 $\xi \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす任意の $\xi \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ に対し $(\text{curl } b, \text{curl } \xi) = (h, \xi)$ が成り立つことが示された。そして、

$$(\text{curl } b, \text{curl } \xi) = (\text{curl}(\text{curl } b), \xi) + \int_{\partial\Omega} \xi \cdot (\text{curl } b \times n)$$

となることから（ここで、右辺の境界積分において、ベクトル三重積に関する公式 $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a)$ を用いた）、特に $\xi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega) = \{\eta \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \eta \subset \Omega\}$ とすれば境界積分が消えるので、 $(\text{curl}(\text{curl } b) - h, \xi) = 0$ を得る。 $\mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ は $\mathbf{L}^2(\Omega)$ で稠密であるから、等式 $\text{curl}(\text{curl } b) = h$ を得る。よって境界積分の項は恒等的に 0 であることがわかる。ここで、 $\text{curl } b \times n$ は n に垂直であることを利用する。 n を境界の近傍において滑らかに拡張しておく。任意の $\xi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ に対し、 $\tilde{\xi} = \xi - (\xi \cdot n)n$ とおけば、 $\tilde{\xi} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ かつ $\tilde{\xi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ となるから、

$$0 = \int_{\partial\Omega} \tilde{\xi} \cdot (\text{curl } b \times n) = \int_{\partial\Omega} (\xi - (\xi \cdot n)n) \cdot (\text{curl } b \times n) = \int_{\partial\Omega} \xi \cdot (\text{curl } b \times n)$$

を得る。これより $\text{curl } b \times n|_{\partial\Omega} = 0$ を結論する。ゆえに $b \in D(A_3)$ が示された。

以上により、 A_3 が自己共役な極大単調作用素であることがわかった。

A_1 の性質については、例えば [25] を参照されたい。

以上に述べた正則性の結果に付随して、以下の議論において重要な役割を果たす次の不等式が得られる。詳細については各作用素に関連して挙げた参考文献を見ていただきたい。

補題 1 Ω および定数 $\mu, \chi, \gamma, \alpha, \beta, \nu$ にのみ依存する定数 C_i ($i = 1, 2, 3$) が存在して、次が成り立つ。

1. $\|u\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C_1 |A_1 u|_\sigma$ for $u \in D(A_1)$,
2. $\|\omega\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C_2 |A_2 \omega|$ for $\omega \in D(A_2)$,
3. $\|b\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C_3 |A_3 b|_\sigma$ for $b \in D(A_3)$.

0.3.3 抽象方程式への書き換え

今後、3 つの未知関数 $u, b \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $\omega \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ を $U = (u, \omega, b)$ とおき、 H の元とみなす表記を用いることにする。それに伴い、作用素 $\Lambda : D(\Lambda) \rightarrow H$ を、定義域 $D(\Lambda) =$

$D(A_1) \times D(A_2) \times D(A_3)$, そして $U = (u, \omega, b) \in D(\Lambda)$ に対し $\Lambda U = (A_1 u, A_2 \omega, A_3 b)$ なるものとして定義する. このとき, Λ は H における自己共役な極大単調作用素になる. したがって, $0 \leq \theta \leq 1$ に対して分数巾作用素 Λ^θ を定義することができる. ここで特に注意しておくことは, $D(\Lambda^{1/2})$ のグラフノルムが V のノルムと同値であることである. その理由は後に述べる.

さて, 関数空間と微分作用素を定義したので, それらを用いた定式化をしよう. 方程式をみたす十分滑らかな解が存在したと仮定して, 扱いやすい形に定式化する. まず標準的な議論に従い $\text{grad}(p + b \cdot b)$ を消去するため, 射影作用素 P を方程式 (3) に作用させる. このとき, $P \partial u / \partial t = \partial u / \partial t$ および $P \text{curl} \omega = \text{curl} \omega$ に注意する. これらを示すには, たとえば Helmholtz 分解を利用する. $u \in L^2(0, T; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega))$ とし, ほとんどすべての t に対し $\partial u / \partial t$ が存在し, しかも $\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ に属するとすれば, $h \rightarrow 0$ とすると

$$\left| \frac{u(\cdot, t+h) - u(\cdot, t)}{h} - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right| \rightarrow 0.$$

そして任意の $G \in \mathbf{G}(\Omega)$ に対し, $(u(\cdot, t+h), G) = (u(\cdot, t), G)$ であることから,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t), G \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) - \frac{u(\cdot, t+h) - u(\cdot, t)}{h}, G \right)$$

を得て, $h \rightarrow 0$ とすれば上式の左辺が 0 であることがわかる.

$\text{curl} \omega$ については, 境界上で $\omega = 0$ であることを用い, $A_3 b \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ を示した議論をなぞればよい.

さて, 他の項については次のようにおく.

1 階以下の空間微分を含む項については,

$$\begin{aligned} B(U) &= (B_1, B_2, B_3), \\ B_1 &= P(u \cdot \text{grad})u - P(b \cdot \text{grad})b - \chi \text{curl} \omega, \\ B_2 &= (u \cdot \text{grad})\omega - \chi \text{curl} u + 2\chi \omega, \\ B_3 &= \text{curl}(u \times b) = (u \cdot \text{grad})b - (b \cdot \text{grad})u, \end{aligned}$$

ここで, B_3 においてはベクトル解析の公式を用いた.

外力項については, $F = (Pf, g, 0)$.

以上のような準備を経て, 方程式系 (3)–(10) を次の抽象 Cauchy 問題として定式化することができる.

$$\frac{dU}{dt}(t) + \Lambda U(t) + B(U(t)) = F(t) \quad \text{in } [0, T], \quad (12)$$

$$U(0) = U_0 = (u_0, \omega_0, b_0). \quad (13)$$

実は, Λ が線型な自己共役極大単調作用素であることから, 劣微分が Λ に等しいような下半連続凸汎関数の存在が言える. 以下, 劣微分に関する基本的な性質をいくつか用いるが, 詳しくは Brézis [2] を参照していただきたい.

H 上の汎関数を次のように定義する.

$$\varphi(U) = \begin{cases} \frac{\mu + \chi}{2} \|u\|_0^2 + \frac{\gamma}{2} \|\omega\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{2} \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|b\|_n^2 & \text{if } U \in V, \\ \infty & \text{if } U \in H \setminus V. \end{cases} \quad (14)$$

この汎関数が適正であることは, $D(\varphi) = V$ が空でなく, しかも $U \in V$ に対し $\varphi(U)$ が有限確定であることからわかる. また, A_2 の単調性を示す際に導いた等式 $\|\omega\|^2 = |\operatorname{curl} \omega|^2 + \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2$ は稠密性の議論により, $\omega \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ に対しても成り立つ. したがって, φ の定義式において, ω に関する部分は因数 $1/2$ を無視すると

$$\gamma |\operatorname{curl} \omega|^2 + (\alpha + \beta + \gamma) \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2$$

という形に書き換えることができる. この書き換えにより, φ が非負値であることもただちにわかる. 凸であることも微分の線型性およびノルムの自乗の凸性から従う. 次に下半連続性を示す. 標準的な議論に従い, 集合 $E_\lambda = \{U \in H \mid \varphi(U) \leq \lambda\}$ が任意の実数 λ に対して閉集合であることを示すことを目標にする. $\lambda < 0$ のときは空集合であるから閉である. $\lambda = 0$ のときには $E_\lambda = \{0\}$ となり, これも閉. $\lambda > 0$ のときには, λ が有限であるからまず $E_\lambda \subset D(\varphi)$ であることがわかる. 列 $U_n \in E_\lambda$ が H において U に収束しているという仮定のもとで, $U \in E_\lambda$ であることを示せばよい. 仮定から, $U_n \in V$ が従う. また, 容易にわかるように $\varphi(U_n)$ は U_n の V ノルムと同値であるから, (U_n) は V における有界列になっている. V は Hilbert 空間であるから, (U_n) から V で弱収束する部分列を選ぶことができる. その部分列を再び (U_n) とおく. Sobolev 空間における微分の定義を思い起こせば, その弱収束極限は U の導関数に相当することがわかり, $U \in V$ を得る. 最後に $U \in E_\lambda$ を確認しなければならない. これは, (U_n) が U に V で弱収束することから U_n の各成分がそれぞれの属する関数空間で弱収束することと, ノルムの弱位相における下半連続性に注意すれば導かれる. たとえば, $U_n = (u_n, \omega_n, b_n)$ とみなしたとき, (ω_n) が $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ で弱収束している. このことから, さらに ω_n の各成分 ω_n^i が $H_0^1(\Omega)$ で弱収束することから, $\operatorname{curl} \omega_n$ や $\operatorname{div} \omega_n$ がそれぞれ $L^2(\Omega)$ および $L^2(\Omega)$ で弱収束していることが従う. そしてその各々の空間のノルムの自乗の連続性, 特に下半連続性を用いればよい.

φ が下半連続凸な汎関数であるから, その劣微分 $\partial\varphi$ は極大単調作用素である. ここで, $\Lambda = \partial\varphi$ を示そう. それには $\Lambda \subset \partial\varphi$ を言えばよい. それが言えれば, Λ が極大単調作用素であることから $\Lambda = \partial\varphi$ が従うからである. 目標は, 各 $U \in D(\Lambda)$ につき, 不等式

$$\varphi(W) - \varphi(U) \geq (\Lambda U, W - U)_H$$

が任意の $W \in H$ に対して成り立つことを示すことである. $W \in H \setminus V$ に対してはこの不等式は無条件に成り立つので, $W \in V = D(\varphi)$ に対して成り立つかどうかを肝心である. まず, U を $U = (u, 0, 0), (0, \omega, 0), (0, 0, b)$ のように特別な形におくことによって議論を分割することにする. ここでは $U = (0, 0, b)$, $b \in D(A_3)$ の場合を述べることにする. 他の場合については, 類似の手法で示すことができるので割愛する. このとき W も U

の取り方に応じて, $W = (0, 0, \zeta)$, $\zeta \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ と選んでおく. この場合について示しておけば, $W = (\xi, \eta, \zeta)$ という一般の形の場合についても示したことになる. さて, このとき示すべき不等式は

$$\frac{\nu}{2}(\|\zeta\|_n^2 - \|b\|_n^2) \geq (A_3 b, \zeta - b)_\sigma$$

となるが, これは次のように示せる.

$$\begin{aligned} (A_3 b, \zeta - b)_\sigma &= \nu(\operatorname{curl} b, \operatorname{curl} \zeta - \operatorname{curl} b) \\ &= \nu((b, \zeta))_n - \nu\|b\|_n^2 \\ &\leq \nu\|b\|_n\|\zeta\|_n - \nu\|b\|_n^2 \\ &\leq \frac{\nu}{2}(\|b\|_n^2 + \|\zeta\|_n^2) - \nu\|b\|_n^2 \end{aligned}$$

途中, Schwarz の不等式と相加平均・相乗平均の不等式を用いた.

このようにして, $\partial\varphi = \Lambda$ が言えるが, この関係より $\partial\varphi$ が一価であることもわかる.

なお, $D(\psi) = D(\Lambda^{1/2})$, $\psi(U) = |A^{1/2}U|_H^2$ ($U \in D(\psi)$) とおいても $\partial\psi = \Lambda$ となるが, $\partial\varphi = \Lambda = \partial\psi$ および $\varphi(0) = 0 = \psi(0)$ から $\varphi = \psi$ となり, $V = D(\Lambda^{1/2})$ を得る.

以上の考察から, (12) を次のように劣微分作用素によって支配される抽象発展方程式とみなせることがわかった. 初期条件は (13) である.

$$\frac{dU}{dt}(t) + \partial\varphi(U(t)) + B(U(t)) = F(t) \quad \text{in } [0, T]. \quad (15)$$

この (15) と (12) は作用素の捉え方の違いによって表現が異なるが, 数学的な中身は全く同等である. 以下の議論においてこれらふたつを混同するが, 同じ方程式を指しているということを心に留めておいていただきたい.

0.4 解の存在と一意性

ここでは, 主定理とその証明を一部を述べる. 証明で触れない点については [9] を参照していただきたい.

0.4.1 主定理

分数巾の定義域 $D(\Lambda^\theta)$ のグラフノルムを $|\cdot|_\theta$ とおく. また, 次のような関数空間を設定する.

$$L_*^q(0, S) = \left\{ v \left| v : [0, S] \rightarrow \mathbb{R} \text{ is measurable and } \int_0^S |v(t)|^q \frac{dt}{t} < \infty \right. \right\} \quad \text{for } 1 \leq q < \infty,$$

$$L_*^\infty(0, S) = L^\infty(0, S).$$

求める解の存在と一意性に関する結果は次のように述べられる.

定理 1 $T > 0$, $\theta \in [1/4, 1/2]$ とする. $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ を任意の関数とし, $U_0 \in D(\Lambda^\theta)$ を仮定する.

このとき, $|U_0|_\theta$ にのみ依存する $T_0 \in (0, T]$ および次をみたす (15) および (13) の一意解 U が $[0, T_0]$ 上で存在する.

$$(i) \quad U \in C([0, T_0]; H) \cap C((0, T_0]; V) \quad \text{if } \theta \in [1/4, 1/2), \quad (16)$$

$$U \in C([0, T_0]; V) \quad \text{if } \theta = 1/2; \quad (17)$$

$$(ii) \quad t^{1/2-\theta} \frac{dU}{dt}, \quad t^{1/2-\theta} \Lambda(U(\cdot)), \quad t^{1/2-\theta} B(U(\cdot)) \in L^2(0, T_0; H); \quad (18)$$

$$(iii) \quad t^{1/2-\theta} |U(\cdot)|_V, \quad t^{-\theta} |U(\cdot) - U_0|_H \in L_*^q(0, T_0) \quad \text{for } q \in [2, \infty]. \quad (19)$$

さらに次をみたすような, T に依存しない正の定数 r が存在する: もし

$$|U_0|_\theta + \sup_{1 \leq t \leq T} \left(\int_{t-1}^t |F(s)|_H^2 ds \right)^{1/2} \leq r,$$

であるならば, (i)–(iii) において T_0 を T でおきかえたものをみたす (15) および (13) の解 U が $[0, T]$ 上で存在する.

これは, 初期値に対する条件を [20] および [17] よりも弱めた場合の結果である. マイクロポーラ電磁流体は電磁流体の一般化に相当すること, ならびに方程式 (3)–(5) に現れる非線型項が Navier-Stokes 方程式に現れるものと同様な形であることから, Navier-Stokes 方程式において知られている Fujita-Kato [4] の結果が成り立つことが期待される. この定理はそのような予想に対する答えのひとつである.

0.4.2 解の存在の証明

解の存在の証明は, [18] に述べられている非単調摂動論に負う. それは劣微分作用素が時間に依存する非線形作用素であり, しかも非線形摂動項が多価である場合にも適用できる, 非常に強力な理論である. Navier-Stokes 方程式に関する結果を抽象化することを目標のひとつとした理論であるから, Navier-Stokes 方程式に類似した方程式の解析において威力を発揮する. この理論を応用したものとしては, 例えば Inoue and Ôtani [10] を挙げておく.

なお, 今考えている方程式は, 劣微分作用素が時間に依存せず, 線型であり, また摂動項が一価であることをふまえて, ここではその場合に適した形で抽象論を紹介する.

一般論であるからそれを述べるためにあらたに記号を用意する.

$\mathcal{H}$ を (可分な) Hilbert 空間とし, そのノルムを $|\cdot|_{\mathcal{H}}$, 内積を $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ とおく. $\psi: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ を適正凸下半連続汎関数とし, $\mathcal{A}$ を線型な自己共役極大単調作用素とする. これらの間に次の関係があるものとする.

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} |\mathcal{A}^{1/2} u|_{\mathcal{H}}^2 & \text{if } u \in D(\psi), \\ \infty & \text{if } u \in \mathcal{H} \setminus D(\psi), \end{cases}$$

$$D(\psi) = D(\mathcal{A}^{1/2}), \quad \partial\psi = \mathcal{A}.$$

このとき、 $\mathcal{A}$ の Brézis クラス $\mathfrak{B}_{\theta,2}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}^\theta$ の定義域と一致する．それをみるには，線型劣微分作用素の Brézis クラスおよび分数巾の定義域の半群による特徴付けを比較すればよい．もう少し正確に述べると， $S(t)$ を $-\partial\psi(= -\mathcal{A})$ によって生成される半群とすると， $\theta \in (0, 1/2)$ に対して

$$\begin{aligned} u \in \mathfrak{B}_{\theta,2} \text{ と } t^\theta |S(t)u - u|_{\mathcal{H}} &\in L_*^2(0, 1) \text{ とは同値,} \\ u \in D(\mathcal{A}^\theta) \text{ と } t^{\theta-1} |S(t)u - u|_{\mathcal{H}} &\in L^2(0, \infty) \text{ とは同値,} \end{aligned}$$

ということが知られている．前者は [18] において Theorem 2.2 として引用されている．後者は例えば [13] の Chapter 1, Theorem 10.1 を参照されたい．後者の特徴付けにおける積分区間は前者より広いが，重要なことは $t = 0$ の近傍における可積分性である． $\mathcal{A}$ の線型性により， $S(t)$ は縮小半群であるから， $t > 1$ における可積分性は前者においては常に保証される．従ってふたつの空間の特徴付けは同等である．なお，Brézis クラスについては [18] の他，高村・小西 [11] の第 5 章を参照されたい．

上の設定のもとで，次の抽象 Cauchy 問題 (ACP) の可解性について考察する．

$$(ACP) \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial\psi(u(t)) + \mathcal{B}(u(t)) = \mathcal{F}(t) & \text{in } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

ここで， $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{H}$ は $D(\partial\psi) \subset D(\mathcal{B})$ であるような一価の非線形作用素であり， $\mathcal{F}$ は $[0, T]$ 上の $\mathcal{H}$ 値関数である．次の条件 (A.1)–(A.4) を考える．

(A.1) すべての $L > 0$ に対し集合 $\{u \in \mathcal{H} \mid |u|_{\mathcal{H}} + \psi(u) \leq L\}$ は $\mathcal{H}$ でコンパクト．

(A.2) $\mathcal{B}$ は ψ -demiclosed : すなわち，もし u_n が u に $C([0, T]; \mathcal{H})$ で強収束し，

$\partial\psi(u_n)$ が $\partial\psi(u)$ に $L^2(0, T; \mathcal{H})$ で弱収束し，さらに $\mathcal{B}(u_n)$ が v に $L^2(0, T; \mathcal{H})$ で弱収束するならば， $(0, T)$ 上ほとんどいたるところで $v(t) = \mathcal{B}(u(t))$ が成り立つ．

(A.3) ある $\theta_0 \in (0, 1/2)$ および 非減少関数 $\ell_0, \ell_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在して

任意の $\varepsilon > 0$ および $u \in D(\partial\psi)$ に対し次をみたす：

$$|\mathcal{B}(u)|_{\mathcal{H}} \leq \ell_0(|u|_{\mathcal{H}}) \left[\varepsilon |\partial\psi(u)|_{\mathcal{H}} + \ell_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \{\psi(u)\}^{\frac{1-\theta_0}{1-2\theta_0}} + 1 \right].$$

(A.4)(i) $\psi(0) = 0$,

(ii) ある定数 $K > 0$ および $q \in [2, \infty)$ が存在して，任意の $u \in D(\psi)$ に対し $K|u|_{\mathcal{H}}^q \leq \psi(u)$ が成り立つ．

(iii) 正の数 δ が存在して，任意の $u \in D(\partial\psi)$ に対し次が成り立つ：

$$(-\partial\psi(u) - \mathcal{B}(u), u)_{\mathcal{H}} + \delta\psi(u) \leq 0.$$

これらの条件は，主に (A.1)–(A.3) が解の局所的存在に，(A.4) は解の大域的存在に関与している．これらの条件がみたされていると，[18] の Theorems I, II, V および VI の直

接的な結果として、定理 1 の存在に関する結果のうち、ただひとつ解の正則性 (16) を除くすべてが得られる。その代わりに、(ACP) の解について次のような正則性が得られる。

- (i) $u \in C([0, T_0]; \mathcal{H})$ であって、しかも任意の $\delta' > 0$ に対し、 u は $[\delta', T_0]$ 上で絶対連続であり、 $t \rightarrow +0$ の極限において、 $u(t)$ は $\mathcal{H}$ 上で u_0 に収束する。

また、(18) に相当する結果から $du/dt \in L^2([\delta', T_0]; \mathcal{H})$ が言える。これらを合わせると、[2] の Lemme 3.3 により、 $t \mapsto \psi(u(t))$ が $[\delta', T_0]$ 上で絶対連続であることがわかる。 $\sqrt{\psi(\cdot)}$ をノルムとみなし、 $(\mathcal{A}^{1/2}u, \mathcal{A}^{1/2}v)_{\mathcal{H}} (u, v \in D(\psi))$ を内積とみなせば $D(\psi)$ は Hilbert 空間になる。 $t \in [\delta', T_0]$ を固定し、 $t_n \rightarrow t$ なる列をとると、 $\mathcal{H}$ において $u(t_n) \rightarrow u(t)$ となり、また $\psi(u(t_n)) \rightarrow \psi(u(t))$ となる。これにより、列 $(u(t_n))$ が $D(\psi)$ において有界列であることがわかり、 (t_n) の部分列 (t_{n_k}) を適当にとることにより、 $(u(t_{n_k}))$ が $D(\psi)$ において弱収束するようにできる。ところが、 $\mathcal{H}$ において $u(t_n) \rightarrow u(t)$ であるから、その弱収束極限は $u(t)$ でなければならない。この議論を (t_n) の任意の部分列 (t_{n_k}) に対して適用することにより、 (t_{n_k}) の部分列 $(t_{n'_k})$ で $(u(t_{n'_k}))$ が $u(t)$ に弱収束するようなものが必ず存在することが言える。ゆえに $(u(t_n))$ が $u(t)$ に弱収束することが従い、 $t \mapsto u(t)$ が $D(\psi)$ の弱位相で連続であることがわかる。ここで再び $t \mapsto \psi(u(t))$ が連続であることを思い起こすと、これは u の $D(\psi)$ におけるノルムが t について連続であることを示している。したがって、 (u_{t_n}) は $D(\psi)$ において弱収束かつノルム収束していることになる。いま $D(\psi)$ は Hilbert 空間であるから、これら 2 つの収束性から強収束が従う。すなわち、 u は $D(\psi)$ で連続であることがわかった。ゆえに $u \in C([\delta', T_0]; D(\mathcal{A}^{1/2}))$ となる。このようにして (16) が示される。(17) は、上の議論で $\delta' = 0$ とできることから従う。

さて、以下では [9] で詳しく述べなかった (A.2) の条件について述べる。まず、次の補題に注意する。

補題 2 $u \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ および $v, w \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ に対し次が成り立つ。

$$((u \cdot \text{grad})v, w) = -((u \cdot \text{grad})w, v).$$

特に $w = v$ とおくと、 $((u \cdot \text{grad})v, v) = 0$ を得る。

これを証明するには、まず左辺の被積分項を積の微分則

$$u^i \frac{\partial v^j}{\partial x_i} w^j = u^i \frac{\partial v^j w^j}{\partial x_i} - u^i v^j \frac{\partial w^j}{\partial x_i}$$

を用いて変形する。続いてこの右辺第一項を部分積分すると、 $\text{div } u = 0$ および $u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ によって第一項が 0 となり、右辺が残ることを示せばよい。

非線形項の評価の最初の結果として次が成り立つ。

補題 3 $u \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ とする。このとき、 $v \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ ならば

$$|(u \cdot \text{grad})v| \leq C \|u\|_n \|v\|_n^{1/2} \|v\|_{\mathbf{H}^2}^{1/2},$$

$v \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ならば

$$|(u \cdot \text{grad})v| \leq C \|u\|_n \|v\|^{1/2} \|v\|_{\mathbf{H}^2}^{1/2}$$

が成り立つ. ここで, C は Ω のみに依存する定数である.

この補題により, $D(\Lambda) \subset D(B)$ がわかる.

証明の指針は以下の通りである. $w \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ を任意に固定する. $((u \cdot \text{grad})v, w)$ を評価するため, 指数を $(6, 4, 12, 2)$ と振り分けた Hölder の不等式を利用する.

$$\begin{aligned} |((u \cdot \text{grad})v, w)| &\leq \sum_{i,j} \int_{\Omega} |u^i D_i v^j w^j| \\ &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} |u^i| |D_i v^j|^{1/2} |D_i v^j|^{1/2} |w^j| \\ &\leq C \sum_{i,j} \|u^i\|_{L^6} \|D_i v^j\|_{L^2}^{1/2} \|D_i v^j\|_{L^6}^{1/2} \|w^j\|_{L^2}. \end{aligned}$$

ここで, Sobolev の埋め込み定理 $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ を用いると,

$$(\text{最右辺}) \leq C \|u\|_{\mathbf{H}^1} \|v\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2} \|v\|_{\mathbf{H}^2}^{1/2} \|w\|$$

両辺を $|w|$ で割り, $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ または $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ のノルムが $\mathbf{H}^1(\Omega)$ のノルムと同値であることを用いばよい.

さて, (A.2) がみたされることを示そう. φ と $\partial\varphi$ の間に成り立つ関係 $2\varphi(U) = (\partial\varphi(U), U)$ に着目すると, U_n および $\partial\varphi(U_n)$ の収束性に関する仮定より, $\varphi(U_n(\cdot))$ が $L^2(0, T)$ において $\varphi(U(\cdot))$ に強収束することがわかる. 解の正則性を示したのと同様の議論により, U_n が U に $L^2(0, T; V)$ で収束することが示される. よって $U_n = (u_n, \omega_n, b_n)$, $U = (u, \omega, b)$ とおくと, ω_n , $\text{curl} \omega_n$, $\text{curl} u_n$ はそれぞれ ω , $\text{curl} \omega$, $\text{curl} u$ に $L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ で強収束する. 非線形項については稠密性の議論に訴えて示すことにする. たとえば $(u_n \cdot \text{grad})\omega_n$ の項について考えてみる. 他の非線形項についても平行に論じることができる.

$\eta \in C(0, T; D(A_2))$ を任意に選ぶ. まず, 補題 3 の証明で導いた不等式を利用すると, 各 t において

$$\begin{aligned} &|((u_n \cdot \text{grad})\eta, \omega_n) - ((u \cdot \text{grad})\eta, \omega)| \\ &= |(((u_n - u) \cdot \text{grad})\eta, \omega_n)| + |((u \cdot \text{grad})\eta, \omega_n - \omega)| \\ &\leq C \|u_n - u\|_n \|\eta\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2} \|\eta\|_{\mathbf{H}^2}^{1/2} |\omega_n| + C \|u\|_n \|\eta\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2} \|\eta\|_{\mathbf{H}^2}^{1/2} |\omega_n - \omega| \\ &\leq CC_\eta^2 \{ \|u_n - u\|_n |\omega_n| + \|u\|_n |\omega_n - \omega| \} \end{aligned}$$

を得る. ここで見やすくするため t を省いた. $C_\eta = \sup_{t \in [0, T]} \|\eta\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$ において η の各ノルムを t によらない定数 C_η で押さえ, 上の不等式の両辺を t で積分し, t に関する Hölder の不等式を用いて最右辺をさらに上から評価し, $n \rightarrow \infty$ の極限をとると最右辺は 0 に収束する. ここで補題 2 を考慮して η_n と ω_n , η と ω を交換することによ

り, $((u_n \cdot \text{grad})\omega_n, \eta)_{L^2(0,T;L^2)}$ が $((u \cdot \text{grad})\omega, \eta)_{L^2(0,T;L^2)}$ に収束することが結論される. 一方, 仮定により $((u_n \cdot \text{grad})\omega_n, \eta)_{L^2(0,T;L^2)}$ は $(v, \eta)_{L^2(0,T;L^2)}$ に収束する. したがって, $(v - (u \cdot \text{grad})\omega, \eta)_{L^2(0,T;L^2)} = 0$ を得る. $C(0, T; D(A_2))$ は $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ で稠密であるから, $v = (u \cdot \text{grad})\omega$ が結論される.

0.4.3 解の一意性の証明

抽象論を用いて解の存在がよく知られた不等式を組み合わせるだけで簡単に得られたが, 一意性については考えている問題に固有の性質を用いて別個に示さなければならない.

一意性を証明するのに用いられる標準的な議論では, 同じ初期値をもつ相異なるふたつの解が存在したと仮定し, その差を評価することによって Gronwall 型の積分不等式を導き, それによってふたつの解が恒等的に等しいという矛盾を引き出す. 定理 1 における解の正則性の結果から, t が十分大きいときには解が十分滑らかなので Gronwall の不等式に現れる積分の可積分性は比較的容易に示すことができる. しかし, $t = 0$ の近傍においては解の t に関する滑らかさが失われていくので可積分性を得るためにより深い解析を必要とする. ここでは, Serrin [22] に述べられている不等式を基礎にして一意性を示す. その際, 重要な役割を担うのが (19) である. (19) の役割に焦点をあてて, 証明のあらましを述べる.

U_1 と U_2 を, $U_1(0) = U_2(0) = U_0 \in D(\Lambda^\theta)$ をみたすふたつの解とする. これらの解を方程式 (15) に代入し, 辺々引くことによって, 解の差 $\tilde{U} = U_1 - U_2$ は

$$\frac{d\tilde{U}}{dt}(t) + \partial\varphi(\tilde{U}(t)) + B(U_1(t)) - B(U_2(t)) = 0. \quad (20)$$

をみたすことがわかる. この (20) と $\tilde{U}$ の H 内積をとり, $[0, t] \subset [0, T_0]$ なる区間上で時間変数について積分すれば

$$|\tilde{U}(t)|_H^2 + 4 \int_0^t \varphi(\tilde{U}(s)) ds = -2 \int_0^t (B(U_1(s)) - B(U_2(s)), \tilde{U}(s))_H ds \quad (21)$$

を得る. この式の右辺を変形して行く. $U_i = (u_i, \omega_i, b_i)$ for $i = 1, 2$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\omega}, \tilde{b})$ とおき, 成分ごとに計算する. 特に非線型項については, $((\text{差} \cdot \text{grad}) \text{差}, \bigcirc_1)$ という形を目指して補題 2 を活用して変形する. その結果, 右辺を $I_1 + I_2$ という形にもっていける. ただし, ここに I_1, I_2 は下式で定義されるものである.

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\chi \int_0^t \{(\tilde{\omega}, \text{curl } \tilde{u}) - |\tilde{\omega}|^2\} ds, \\ I_2 &= \int_0^t \{((\tilde{u} \cdot \text{grad})\tilde{u}, u_1) - ((\tilde{b} \cdot \text{grad})\tilde{b}, u_1) \\ &\quad + ((\tilde{u} \cdot \text{grad})\tilde{b}, b_1) - ((\tilde{b} \cdot \text{grad})\tilde{u}, b_1) + ((\tilde{u} \cdot \text{grad})\tilde{\omega}, \omega_1)\} ds, \end{aligned}$$

I_1 は次のように評価される.

$$I_1 \leq 4\chi \int_0^t \left(|\tilde{\omega}|^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{u}\|_\sigma^2 - |\tilde{\omega}|^2 \right) ds \leq 2 \int_0^t \varphi(\tilde{U}(s)) ds.$$

肝心なのは I_2 の評価である。ここで非線型項に関するふたつめの評価を述べる。

補題 4 Ω にのみ依存する定数 C が存在して、次が成り立つ。

$$\left| \int_{\Omega} (u \cdot \text{grad}) v \cdot w \, dx \right| \leq C |u|^{1/2} \|u\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2} \|v\| \|w\|_{\mathbf{H}^1} \quad \text{for all } u, v, w \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (22)$$

この証明は、補題 3 と異なり $(u \cdot \text{grad}) v \cdot w$ に対して Hölder の不等式を、指数を $(3, 2, 6)$ として適用することにより、

$$\left| \int_{\Omega} (u \cdot \text{grad}) v \cdot w \right| \leq C \|u\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|v\| \|w\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)}$$

を得る。Sobolev の不等式および、それと Hölder の補間不等式を組み合わせ得られる不等式より、 $\|w\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \leq C \|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ および $\|u\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \leq |u|^{1/2} \|u\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)}^{1/2}$ が成り立つことを用いれば、求める不等式を得る。

この補題 4 と、 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ のノルムと同値なノルムに注意すると、 I_2 は次のように評価される。

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C' \int_0^t |\tilde{U}(s)|_H^{1/2} |\tilde{U}(s)|_V^{1/2} |\tilde{U}(s)|_V |U_1(s)|_V \, ds \\ &\leq C' \int_0^t |\tilde{U}(s)|_H^{1/2} \varphi(\tilde{U}(s))^{3/4} \varphi(U_1(s))^{1/2} \, ds \\ &\leq \int_0^t \varphi(\tilde{U}(s)) \, ds + C' \int_0^t \varphi(U_1(s))^2 |\tilde{U}(s)|_H^2 \, ds, \end{aligned}$$

ここで、 C' は $\Omega, \mu, \chi, \gamma, \alpha, \beta, \nu$ にのみ依存する定数を表す。

この不等式の右辺に現れる積分の中身が可積分であることについて述べよう。 $\varphi(U_1(\cdot))$ が $|U_1(\cdot)|_V^4$ で押さえられることから、(19) において $q = 4$ とおけば $\varphi(U_1(\cdot))^2 \in L^1(0, T_0)$ であることが導かれる。具体的には、例えば

$$\int_0^t |U_1(s)|_V^4 \, ds = \int_0^t s^{4\theta-1} (s^{1/2-\theta} |U_1(s)|_V)^4 \frac{ds}{s} \leq t^{4\theta-1} \int_0^t (s^{1/2-\theta} |U_1(s)|_V)^4 \frac{ds}{s}$$

とすればよい。この方法によると、 $\theta \geq 1/4$ という分数巾の指数 θ の下限が効いてくる。すなわち、因数 $s^{4\theta-1}$ を積分の外に出すときに $4\theta - 1 \geq 0$ を用いている。また、 $|\tilde{U}(\cdot)|_H$ については、(19) の第二式を用いれば、

$$t^{-\theta} |\tilde{U}(\cdot)|_H \leq t^{-\theta} (|U_1(\cdot) - U_0|_H + |U_2(\cdot) - U_0|_H) \in L_*^q(0, T_0)$$

が従う。これを利用することにより、 $\varphi(U_1(\cdot))^2$ との積の可積分性等を得ることができる。

以上の結果から直ちに Gronwall の不等式を得て、 $\tilde{U} \equiv 0$ 、すなわち解の一意性が結論される。

関連図書

- [1] G. Ahmadi and M. Shahinpoor, *Universal stability of magneto-micropolar fluid motions*, Int. J. Engng. Sci. 12 (1974), 657–663.
- [2] H. Brézis, “Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert”, Math. Studies, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam/New York, 1973.
- [3] A. C. Eringen, *Theory of Micropolar Fluids*, J. Math. Mech. 16 (1966), 1–18.
- [4] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem, I*, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964), 269–315.
- [5] C. Foias and R. Temam, *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie IV, 5 (1979), 29–63.
- [6] G. P. Galdi and S. Rionero, *A note on the existence and uniqueness of solutions of the micropolar fluid equations*, Int. J. Engng. Sci. 15 (1977), 105–108.
- [7] V. Georgescu, *Some boundary value problems for differential forms on compact Riemannian manifolds*, Annali di Matematica Pura ed. Applicata, serie 4. 122 (1979), 159–198.
- [8] 今井 功, 電磁気学を考える, サイエンス社, 1990.
- [9] H. Inoue, K. Matsuura and M. Ôtani, *Strong solutions of magneto-micropolar fluid equation*, to appear.
- [10] H. Inoue and M. Ôtani, *Strong solutions of initial boundary value problems for heat convection equations in noncylindrical domains*, Nonlinear Anal., T.M.A., 24 (1995), 1061–1080.
- [11] 高村 幸男・小西 芳雄, 非線型発展方程式, 岩波書店, 1977.
- [12] コシリヤコフ他, 物理・工学における偏微分方程式 下, 岩波書店, 1976.

- [13] J-L. Lions and E. Magenes, “Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications,” vol. 1, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1972.
- [14] G. Łukaszewicz, “Micropolar Fluids,” Birkhäuser Boston, Inc. Boston, MA, 1999.
- [15] T. Miyakawa, *The L^p approach to the Navier-Stokes equations with the Neumann boundary condition*, Hiroshima Math. J. 10 (1980), 517–537.
- [16] J. Nečas, “Le méthodes directes en théorie des équations elliptiques”, Masson, 1967.
- [17] E. E. Ortega-Torres and M. A. Rojas-Medar, *Magneto-micropolar fluid motion: global existence of strong solutions*, Abst. Appl. Anal. 4 (1999), 109–125.
- [18] M. Ôtani, *Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems*, J. Diff. Eqns. 46 (1982), 268–299.
- [19] L. G. Petrosyan, *On a model of magnetohydrodynamics of asymmetric fluids*, Appl. Mech. 12 (1976), 103–109 (in Russian).
- [20] M. A. Rojas-Medar, *Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution*, Math. Nachr. 188 (1997), 301–319.
- [21] M. Sermange and R. Temam, *Some mathematical questions related to the MHD equations*, Comm. Pure and Appl. Math. 36 (1983), 635–664.
- [22] J. Serrin, *Initial value problem for the Navier-Stokes equations*, in “Nonlinear Problems”, Univ. Wisconsin Press, Madison (1963), 69–98.
- [23] 棚橋 隆彦, 電磁熱流体の数値解析, 森北出版, 1995.
- [24] 棚橋 隆彦, 連続体の力学, 理工図書, (2), (3) 1986; (4) 1989.
- [25] R. Temam, “Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis”, 3rd rev. ed., North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [26] 吉田 善章, 集団現象の数理, 岩波書店, 1995.
- [27] 湯川 秀樹, 物理講義, 講談社, 1996.

Asymptotic Behavior of Solutions of Semilinear Parabolic Equations

高市 恭治 早稲田大学理工学部

1. Introduction.

次の半線形熱方程式の初期値境界値問題 (P) の大域解の漸近挙動について、考察する。

$$(P) \begin{cases} 1. & u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ 2. & u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \\ 3. & \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \sigma(x)|u(x, t)|^{m-2}u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty), 0 \leq \sigma \in L^\infty(\partial\Omega) \end{cases}$$

ここで、 Ω は $\mathbf{R}^N$ 内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域であり、 f は、下記の非線形性 (f) を満足する、 $\Omega \times \mathbf{R}^1$ から $\mathbf{R}^1$ への連続関数である：

$$(f) \begin{cases} \text{以下の 3 条件を満たす定数 } K_i (i = 0, 1, 2, 3) \text{ と実数 } p \in (2, 2^*), \delta > 0, \\ \text{そして } \varepsilon > 0 \text{ が存在する。ここで、} 2^* \text{ は、一般に臨界ソボレフ指数と呼ばれ、} \\ 2^* = \infty \text{ for } N = 1, 2; 2^* = 2N/(N-2) \text{ for } N \geq 3 : \\ (i) & |f(x, u)| \leq K_0(1 + |u|^{p-1}), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}^1 \\ (ii) & F(x, u) = \int_0^u f(x, t)dt \geq K_1|u|^{2+\delta} - K_2, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}^1 \\ (iii) & uf(x, u) \geq (2 + \varepsilon)F(x, u) - K_3, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}^1, \varepsilon > m - 2 \end{cases}$$

さらに、 $m \in (2, \hat{2})$ とする。ここで、 $\hat{2}$ は、ソボレフのトレースの埋蔵定理に於ける臨界指数と呼ばれ、 $\hat{2} = \infty$ for $N = 1, 2; \hat{2} = 2(N-1)/(N-2)$ for $N \geq 3$ である。

これまで、上記の半線形放物型方程式の境界条件ディリクレゼロの問題の大域解の漸近挙動に関しては、数多く研究されてきているが、Neumann 0 条件を含む第三種境界条件問題に関しては、ほとんど研究されていない。発表者は、修士論文において、境界条件が第三種境界条件の場合、第 22 回本セミナーにおいて、一相ステファン問題に対して、そして今回、境界条件が非線形の場合につき、研究に取り組んだ。特に、本発表では、大域解が存在する事を仮定した時の、あるノルムでの、有界性に注目する。すなわち、キーワードとしては、『 $T_m = +\infty \Rightarrow$ bound of norm?』である。

(研究の歴史)

境界条件 : ディリクレ

(i) $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < +\infty$

	非線形項 f に関する条件	増大度 p	有界性
M.Ôtani '80	$u u ^{p-2}$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t \geq 0} \ u(t)\ _{H_0^1} < \infty$
Ni-Sacks-Tavantzis '84	$u u ^{p-2} = u^{p-1}$ (u : Positive) Ω : convex	$2 < p < 2 + \frac{2}{N}$	$\sup_{t \geq 0} \ u(t)\ _{L^\infty} < \infty$
Cazenave-Lions '84	$f \in C^1(\mathbb{R})$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t \geq 0} \ u(t)\ _{L^\infty} < \infty$

(ii) $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\| \leq C(\|u_0\|)$

	非線形項 f に関する条件	増大度 p	初期値依存性
Cazenave-Lions '84	$f \in C^1(\mathbb{R})$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t \geq 0} \ u(t)\ _{L^\infty} \leq C(\ u_0\ _{L^\infty})$
Giga '86	$u u ^{p-2} = u^{p-1}$ (u : Positive)	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t \geq 0} \ u(t)\ _{L^\infty} \leq C(\ u_0\ _{L^\infty})$
P.Quittner '99	$u u ^{p-2}$	$2 < p < 2^*$	$\sup_{t \geq 0} \ u(t)\ _{C^1} \leq C(\ u_0\ _{H^1})$

2. Main Results

定理 I. (H^1 Bound)

条件 (f) が満足され、 u が、 $V \equiv W_{loc}^{1,2}([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2([0, \infty); H^2(\Omega))$ に属するような、(P) の大域解であるとする。そのとき、以下を満たす様な正定数 $C_0(|u_0|_{H^1}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ が存在する。

- (1) $\sup_{t \geq 0} |u(t)|_{L^2} \leq C_0,$
- (2) $\sup_{t \geq 0} |u(t)|_{H^1} < +\infty,$
- (3) $\exists T_0(|u_0|_{H^1}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ s.t. $\sup_{t \geq T_1} |u(t)|_{H^1} \leq C_0,$
- (4) $p \in (2, 2_*)$ であれば、 $\sup_{t \geq 0} |u(t)|_{H^1} \leq C_0$. ここで、
 $2_* = \infty$ for $N = 1$; $2_* = 2 + 12/(3N - 4)$ for $N \geq 2$.

定理 II. (L^∞ Bound)

条件 (f) が満足され、 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ で u が、 $L_{loc}^\infty([0, \infty); L^\infty(\Omega)) \cap W_{loc}^{1,2}([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2([0, \infty); H^2(\Omega))$ に属するような、(P)_R の大域解であるとする。
 このとき、以下を満たす様な正定数 $C_1 = C_1(|u_0|_{L^\infty}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ が存在する。

- (5) $\sup_{t \geq 0} |u(t)|_{L^\infty} < \infty,$
- (6) $\exists T_1(|u_0|_{L^\infty}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ s.t. $\sup_{t \geq T_1} |u(t)|_{L^\infty} \leq C_1,$
- (7) $p \in (2, 2_*)$ であれば、 $\sup_{t \geq 0} |u(t)|_{L^\infty} \leq C_1$. ここで、
 $2_* = \infty$ for $N = 1$; $2_* = 2 + 12/(3N - 4)$ for $N \geq 2$.

3. Notation

$$a(u) := \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 dx)$$

$$\tilde{a}(u) := \frac{1}{m} \int_\Gamma \sigma(x) |u|^m d\Gamma$$

$$G(u) := \int_\Omega \int_0^{u(x)} (\lambda t + f(x, t)) dt dx$$

$$J(u) := a(u) + \tilde{a}(u) - G(u)$$

$$j(u) := \int_\Omega u(\lambda u + f(x, u)) dx - 2a(u) - m\tilde{a}(u)$$

4. 証明の概略

L^2 有界性 (ステップ 1)

命題 1.

u が V に属するような (P) の大域解であるとする。そのとき、

(i) $J(u(t))$ は t に関して、単調減少である。

(ii) $J(u(t)) \geq -d_0 \quad \forall t \geq 0.$

(iii) $\int_0^\infty |u_t(t)|^2 dt \leq J(u_0) + d_0,$

(iv) $|u(t)| \leq K_4, \quad \forall t \geq 0$ を満たすような、 $K_i (i = 0, 1, 2, 3), \varepsilon, \delta, d_0$ と $J(u_0)$ だけに依存する定数 K_4 が存在する。

(証明)

エネルギー等式

$$\begin{aligned} \cdot \int_{\Omega} eq. \times u_t &\Rightarrow \frac{d}{dt} J(u(t)) = -|u_t(t)|^2 \Rightarrow (i) \\ \cdot \int_{\Omega} eq. \times u &\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 = j(u(t)) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda u + f(x, u)) dx - 2a(u) - m\tilde{a}(u) \\ &\geq (2 + \varepsilon) \int_{\Omega} G(x, u) dx - K_3 |\Omega| - 2a(u) - m\tilde{a}(u) \\ &\geq (2 + \varepsilon) G(u) - m(a(u) + \tilde{a}(u)) - K_3 |\Omega| \\ &= (2 + \varepsilon - m) G(u) - mJ(u) - K_3 |\Omega| \\ &\geq (2 + \varepsilon - m) K_1 |\Omega|^{-\frac{\delta}{2}} |u(t)|^{2+\delta} - (2 + \varepsilon - m) K_2 |\Omega| \\ &\quad - mJ(u) - K_3 |\Omega| \end{aligned}$$

背理法により、(ii) ($J(u(t)) < -d_0 \Rightarrow j(u(t)) > \alpha > 0$)

$\Downarrow$

$|u(t)| \nearrow$

$\Downarrow$

$\exists t_1 > 0, \forall t \geq t_1$ で、

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 \geq \frac{1}{2} (2 + \varepsilon - m) K_1 |\Omega|^{-\delta/2} \|u(t)\|^{2+\delta} \Rightarrow$ 有限時間で Blow up $\Rightarrow$ 矛盾

上式の両辺を $[0, \infty)$ で積分して $\Rightarrow$ (iii)

再び、背理法により、

$$\exists t_1 > 0, \quad (2 + \varepsilon - m) K_1 |\Omega|^{-\delta/2} |u(t_1)|^{2+\delta} / 2 > (2 + \varepsilon - m) K_2 \cdot |\Omega| - mJ(u_0) - K_3 \cdot |\Omega|$$

$\Downarrow$

t_1 の近傍で、 $|u(t)| \nearrow$

$\Downarrow$

$$\forall t \geq t_1 \text{ で、 } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \geq \frac{1}{2} \varepsilon K_1 \cdot l_{\infty}^{-\delta/2} \cdot \|u(t)\|^{2+\delta}$$

$\Downarrow$

有限時間で、Blow up. $\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow$ (iv)

H^1 有界性 (ステップ 2)

補題 1. $r, q \in [1, \infty)$, m : 非負整数 の時

$$|u|_s \leq C|u|_{W_{m,r}^a}|u|_q^{1-a} \quad \text{for } \forall u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$$

$$\text{ただし, } a \in [0, 1], s \in [1, \infty) \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{s} = a \times \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + (1-a) \times \frac{1}{q}$$

補題 2. $u \in V$ が (P) の大域解の時

$\exists$ 正値単調減少関数 $T(\cdot)$ s.t.

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| + 1 \quad \text{for all } t_0 \text{ and } t \in [t_0, t_0 + T(\|u(t_0)\|)] \quad (21)$$

証明. まず第一に、 $\exists \lambda \in (0, 2]$ s.t.

$$|u|_{2(p-1)}^{2(p-1)} \leq C|u|_{H^2}^{2-\lambda} \|u\|^{2p-4+\lambda} \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad (22)$$

実際、 $N = 1, 2$ または $N \geq 3$ で $2(p-1) \leq 2N/(N-2)$ 、の場合には、 $\lambda = 2$ ととれる。それ以外の場合は、補題 1 を $s = 2(p-1)$, $m = r = 2$, $q = 2N/(N-2)$ とし、適用し、 $H^1(\Omega)$ は、 $L^{2N/(N-2)}(\Omega)$ に連続に埋め込まれるという事実を使いさえすればよい。この不等式は次を満たす単調増加関数 $M(\cdot)$ が存在する事を意味する。

$$|g(\cdot, u)|^2 \leq \frac{1}{2}|\Delta u|^2 + M(\|u\|) \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad (23)$$

$$\cdot \int_{\Omega} \text{eq.} \times -\Delta u(t) + \lambda u(t) \Rightarrow$$

$$(u_t, -\Delta u + \lambda u) - (\Delta u, -\Delta u + \lambda u) + (\lambda u, -\Delta u + \lambda u) = (g(\cdot, u), -\Delta u + \lambda u)$$

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= (u_t, -\Delta u) + (u_t, \lambda u) + |\Delta u|^2 - \lambda(\Delta u, u) - \lambda(u, \Delta u) + \lambda^2|u|^2 \\ &= -\int_{\Omega} u_t \cdot \Delta u dx + \lambda \int_{\Omega} u_t \cdot u dx + |\Delta u|^2 - 2\lambda \int_{\Omega} \Delta u \cdot u dx + \lambda^2|u|^2 \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_t d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla u dx + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + |\Delta u|^2 \\ &\quad - 2\lambda \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx + \lambda^2|u|^2 \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^{m-2} u \cdot u_t d\Gamma + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + |\Delta u|^2 \\ &\quad + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma |u|^{m-2} u \cdot u d\Gamma + 2\lambda |\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 \\ &= \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^m d\Gamma + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + |\Delta u|^2 \\ &\quad + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^m d\Gamma + 2\lambda |\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 \\ &= \frac{d}{dt} (a(u) + \tilde{a}(u)) + |\Delta u|^2 + 2\lambda |\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= -(g(\cdot, u), \Delta u) + \lambda(g(\cdot, u), u) \\ &\leq |-(g(\cdot, u), \Delta u) + \lambda(g(\cdot, u), u)| \\ &\leq |(g(\cdot, u), \delta u)| + \lambda|(g(\cdot, u), u)| \\ &\leq |g(\cdot, u)| |\Delta u| + \lambda|g(\cdot, u)| |u| \\ &\leq \frac{1}{2C} |\Delta u|^2 + 2C|g(\cdot, u)|^2 + \lambda\left(\frac{1}{2C'} |u|^2 + 2C'|g(\cdot, u)|^2\right) \end{aligned}$$

↓

$$\frac{d}{dt}(a(u) + \tilde{a}(u)) + |\Delta u|^2 + 2\lambda|\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma|u|^m d\Gamma \leq \frac{1}{2C}|\Delta u|^2 + 2C|g(\cdot, u)|^2 + \lambda(\frac{1}{2C'}|u|^2 + 2C'|g(\cdot, u)|^2)$$

↓

$$\frac{d}{dt}(a(u) + \tilde{a}(u)) \leq \tilde{C}M(\|u\|) \quad \text{for a.e. } t \in [0, \infty)$$

↓

ある $t_1 > t_0$ が存在して、 $\|u(t_1)\|^2 \geq \|u(t_0)\| + 1$ とすると、

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\|u(t_1)\|^2 - \|u(t_0)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1} M(\|u(t)\|^2) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} M(\|u(t_0)\|^2 + 1) dt = M(\|u(t_0)\|^2 + 1)(t_1 - t_0)$$

↓

$$t_1 - t_0 \geq \frac{1}{2M(\|u(t_0)\|^2 + 1)}$$

↓

$$t_1 \geq t_0 + \frac{1}{2M(\|u(t_0)\|^2 + 1)}$$

↓

$$(21) \text{ with } T(r) = \frac{1}{2M(r+1)}$$

Q.E.D.

((定理 I の証明))

(6) と (7) の証明

命題 1 の (iii) $\Rightarrow \exists T_0 > 0$ s.t.

$$\int_{T_0}^{\infty} |u_t(t)|^2 dt \leq \left(\frac{d}{K_4}\right)^2 T(d_1) \quad (24)$$

↓

$$\|u(t)\| \leq d_1 + 1 \quad \text{for all } t \geq T_1 \stackrel{\text{def}}{=} T_0 + \frac{K_4^2}{2\alpha} \quad (25)$$

背理法で証明。Not! $\Rightarrow \exists t_1 \geq T_1$ s.t. $\|u(t_0)\| > d_1 + 1$

↓(j 領域の考察)

$$j(u(t_1)) > \alpha$$

↓

$$\exists t_0 \text{ s.t. } j(u(t)) = \alpha \text{ and } j(u(t)) > \alpha, \forall t \in (t_0, t_1]$$

2 番目のエネルギー等式を $[t_0, t_1]$ で積分し、命題 1 (iv) を使って

$$t_1 - t_0 \leq \frac{K_4^2}{2\alpha} \Rightarrow t_0 \geq T_0$$

再び、2 番目のエネルギー等式を $[t_0, t_1]$ で積分して

$$\alpha(t_1 - t_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} j(u(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} |u_t(t)| |u(t)| dt \leq K_4(t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\infty} |u_t(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(24) \Downarrow$$

$$t_1 - t_0 \leq T(d_1)$$

$\|u(t_0)\| \leq d_1$ と補題 2 より

$\|u(t_1)\| \leq d_1 + 1 \Rightarrow$ 矛盾!

$\Rightarrow (6)$ と (7)

補題 3.

$$u \in L^r(I; L^r(\Omega)), \quad r < 2^*$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^\infty(I; L^{r/2+1}(\Omega))} \leq C(\|u\|_{L^r(I; L^r(I; L^r(\Omega))), d_0, d_3, r}).$$

証明.

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d}{dt} |u(t)|_s^s = (u_t(t), |u|^{s-2} u(t)) \right] \leq |u_t(t)| |u(t)|_r^{s-1} \leq \frac{1}{2} (|u_t(t)|^2 + |u(t)|_r^r), \quad s = \frac{r}{2} + 1$$

$\Downarrow$ 区間 I で積分して

$$\frac{1}{s} |u(t_0 + \gamma)|_s^s - \frac{1}{s} |u(t_0)|_s^s \leq \frac{1}{2} (\int_I |u_t(t)|^2 dt + \int_I |u(t)|_r^r dt) \leq \frac{1}{2} (J(u_0) + d_0 + \|u\|_{L^r(I; L^r(\Omega))}^r)$$

ここで、(f) の (i) より、

$$|g(x, t)| \leq K_0(1 + |t|^{p-1})$$

$\Downarrow$

(積分して)

$$-\int_0^t u(x) |K_0(1 + |t|^{p-1})| dt \leq \int_0^{u(x)} g(x, t) dt \leq \int_0^t u(x) |K_0(1 + |t|^{p-1})| dt = K_0[t + \frac{1}{p}|t|^{p-1}t]_0^t u(x) = K_0[|u(x)| + \frac{1}{p}|u(x)|^{p-1}u(x)]$$

$\Downarrow$

$$-CA(u) \leq G(u) \leq CA(u)$$

従って、

$$\frac{1}{s} |u(t_0 + \gamma)|_s^s \leq \frac{1}{s} |u(t_0)|_s^s + \frac{1}{2} (J(u_0) + d_0 + \|u\|_{L^r(I; L^r(\Omega))}^r)$$

依って、

$$|u(t_0)|_s \leq C \|u(t_0)\| \leq C \cdot d_3, \quad J(u_0) = A(u_0) - G(u_0) \leq A(u_0) + CA(u_0) \leq C' \cdot d_3 \text{ より、証明終。}$$

命題 2.

$$u \in L^\infty(I; L^r(\Omega)), \quad \frac{N(p-2)}{2} < r < \infty,$$

$$\implies |u|_{L^\infty(I; H^1(\Omega))} \leq C(|u_0|_{L^\infty(I; L^r(\Omega))}, C_0).$$

証明. (1) の両辺に $|u|^{l-2}u(t)$ ($2 < l < 2^*$) を掛けて積分する事により、(f) の (i) から、以下を得る、

$$\frac{1}{l} \frac{d}{dt} |u(t)|_l^l + \frac{4(l-1)}{l^2} A(|u(t)|^{\frac{l}{2}})^2 \leq K_0(2|u(t)|_{p+l-2}^{p+l-2}) \quad (26)$$

すべての $l > (p-2)N/2$ に対して、補題 1 を、
 $s = 2(p+l-2)/l$, $m = 1$, $r = q = 2$ として使い、 u を $|u|^{l/2}$ に変えると、

$$|u|_{p+l-2}^{p+l-2} \leq C \|u\|^{p+l-2} A(|u|^{\frac{l}{2}})^{2-\lambda} \quad (27)$$

従って、(26) 式を I で積分して、(27) 式を $l=r$ とする事により、次を得る。

$$\|u\|^{\frac{r}{2}}_{L^2(I; H^1(\Omega))} \leq C(|u|_{L^\infty(I; L^r(\Omega))}, A(u_0)) \quad (28)$$

再度、補題 1 を $s = 2(N+2)/N$, $m = 1$, $r = q = 2$ として使い、 u を $|u|^{\frac{r}{2}}$ に変更して、次を得る。

$$|u|_{(2+N)r/N}^{(2+N)r/N} \leq C |u|_r^{2/N} A(|u|^{\frac{r}{2}})^2.$$

従って、(28) と (29) より、 $u \in L^{(2+N)r/N}(I; L^{(2+N)r/N}(\Omega))$ となる。これより、補題 2 から、 $u \in L^\infty(I; L^{(2+N)r/2N+1}(\Omega))$ 。この作業を繰り返す事によって、 $u \in L^\infty(I; L^{r_i}(\Omega))$ 、ここで、 r_i は、下の漸化式によって、定義される。

$$r_{i+1} = \frac{N+2}{2N} r_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad r_1 = r.$$

$i \rightarrow \infty$ で、 $r_i \rightarrow 2^*$ で、 $p < 2^*$ なので、有限回の操作で、 $r_i > p$ とでき、

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(I; L^p(\Omega))} &\leq |u|_{L^\infty(I; L^{r_i}(\Omega))} \\ &\leq C(|u|_{L^\infty(I; L^r(\Omega))}, C_0) \end{aligned}$$

最後に、命題 1 の (i) より、

$$a(u) + \tilde{a}(u) - G(u) = J(u) \leq J(u_0)$$

$\Downarrow$

$$\|u\| \leq C(a(u) + \tilde{a}(u)) \leq G(u) + J(u_0) \leq C'|u|_p + J(u_0)$$

$\Downarrow$

$$|u|_{L^\infty(I; H^1(\Omega))} \leq C|u|_{L^\infty(I; L^p(\Omega))}.$$

Q.E.D.

命題 3. $N=1,2,3,4$ のときは、

$$|u|_{L^\infty(I;L^q(\Omega))} \leq C_0 \text{ for all } q < q^*.$$

ここで、 $N=1$ のときは、 $q^* = \infty$ で、 $N=2,3,4$ のときは、 $q^* = 2 + 8/(3N - 4)$

証明. $q_1 = 2$, $q_{i+1} = 4 - Nq_i/2N + (6N + 8)/2N$, $i = 1, 2, 3, \dots$ とする。補題 1 を $s = q_{i+1}$, $m = 1$, $r = 2$, そして $q = (2 + q_i)/2$ として適用して、

$$|u|_{q_{i+1}}^{q_{i+1}} \leq C |u|_{(2+q_i)/2}^{q_{i+1}-4} \|u\|^4.$$

従って、命題 1 の (iv) と 補題 2 から、すべての q_i で $u \in L^{q_i}(I; L^{q_i}(\Omega))$. ここで、 $i \rightarrow \infty$ のとき、 $q_i \rightarrow q^*$ なので、有限回の操作により、主張を得る事ができる。

Q.E.D.

命題 4. $N \geq 5$ のときは、

$$|u|_{L^\infty(I;L^q(\Omega))} \leq C_0 \text{ for all } q < q_* = 3 + (N - 4)(2 - p)/4$$

証明. $N \geq 4$ ときは、 $p < 2^* \leq 4$ であり、命題 1 の (vi) より、 $|u|_{L^4(I;L^{2^*}(\Omega))} \leq C_0$ なので、 $|u|_{L^p(I;L^p(\Omega))} \leq C_0$ となる。

$p_1 = p$, $p_{i+1} = (N - 4)p_i/(N - 2) + [8 + (N - 4)(2 - p)]/(N - 2)$ そして、 $s_i = 2 + p_i - p$, $i = 1, 2, 3, \dots$ としよう。 $u \in L^{p_i}(I; L^{p_i}(\Omega))$ を仮定する。すると、(26) 式より、 $|u|^{\frac{s_i}{2}} \in L^2(I; H^1(\Omega))$. $\Downarrow$ 補題

1 with $s = 2p_{i+1}/s_i$, $m = 1$, $r = 2$, $q = 2 \cdot 2^*/s_i$, $u = |u|^{s_i/2}$

$$|u|_{p_{i+1}}^{p_{i+1}} \leq C |u|_{2^*}^{\lambda_1} \| |u|^{s_i/2} \|_2^{\lambda_2} \text{ with } \lambda_1/2 + \lambda_2 \leq 2$$

$\Downarrow$

$$|u|_{L^{p_{i+1}}(I;L^{p_{i+1}}(\Omega))} \leq C_0$$

ここで、 $i \rightarrow \infty$ のとき、 $p_i/2 + 1 \rightarrow q_*$ なので、有限回の操作により、主張を得る事ができる。

Q.E.D.

命題 2 と 3 と 4 により、ステップ 2 終了。

((定理 2 の証明))

Moser's Iteration scheme を利用して、 H^1 Bound から L^∞ Bound を得る事によって証明。

参考文献

- [1] Ôtani, M.: *Bounds for global solutions of some semilinear parabolic equations*, 京都大学数理解析研究所講究録 (1989)

- [2] Ôtani, M.: *Existence and asymptotic stability of strong solution of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials*, *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai*, **30**, Qualitative theory of differential equations, North Holland, 1980.
- [3] Giga, Y.: *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, *Comm.Math.Phys.*, **103**(1986), 415-421
- [4] Baras, P. and Cohen, L.: *Complete blow-up after $T_{\max}$ for the solutions of a semilinear heat equation*, *J.Funct.Anal.* **71**, 1987, 142-174
- [5] Brézis, H.: *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, E.Zarantonello ed., Acad. press, 1971, 101-165
- [6] Ni, W.M, Sacks, P.E., and J.Tavantzis, *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equation of parabolic type*, *J. Differ. Equations* **54**(1984), 97-120.
- [7] Cazenave, T. and Lions, P.L., *Solutions globales d'équations de la chaleur semi linéaires*, *ibid.*, **9**(1984), 955-978.
- [8] Quittner, P.: *A priori bound for global solutions of a semilinear parabolic problem* **30**, *Acta Math.Univ.Comenianae*(1999).

The Solution to Derivative Nonlinear Schrödinger Equation Via Integral Equation

NAOYASU KITA
Kyushu University

1 Introduction and Main Theorem

We consider the local Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation which includes the first order derivatives of unknown function in its nonlinearity :

$$\begin{cases} i\partial_t u &= -\frac{1}{2}\partial_x^2 u + \mathcal{N}(u, \partial_x u), \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

In the above equation, u is unknown function from $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ to $\mathbf{C}$. The derivatives ∂_t and ∂_x denote $\partial/\partial t$ and $\partial/\partial x$, respectively. The nonlinear term $\mathcal{N}(u, q)$ consists of the quadratic polynomial of u , $\bar{u}$, q and $\bar{q}$, i.e.,

$$\mathcal{N}(u, q) = \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=2} C_{j_1 j_2 j_3 j_4} u^{j_1} \bar{u}^{j_2} q^{j_3} \bar{q}^{j_4},$$

where $C_{j_1 j_2 j_3 j_4} \in \mathbf{C}$.

When the nonlinear term contains the derivatives, it causes the serious regularity loss and makes mathematicians worried about how to construct a solution. Since the Schrödinger group $U_0(t) = \exp(it\partial_x^2/2)$ does not absove the derivatives in $L_T^\infty L_x^2$, we could not make use of contraction mapping principle simply in $L_T^\infty L_x^2$ like nonlinear heat type equations. If we impose the special structure on the nonlinearity, then it is possible to derive a priori estimate and the energy method works. For the general nonlinear case, we refer to Kenig-Ponce-Vega's method [3]. In [3], they showed the smoothing property of $U_0(t)$ in $L_x^\infty L_T^2$:

$$\|\partial_x \int_0^t U_0(t-t') F(t') dt'\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C \|F\|_{L_x^1 L_T^2},$$

where $\|u\|_{L_x^\infty L_T^r} = \sup_x \|u(\cdot, x)\|_{L_T^r}$ and $\|u\|_{L_x^p L_T^r} = \|(\|u(\cdot, x)\|_{L_T^r})\|_{L_x^p}$. This linear estimate recovers the regularity loss from the nonlinearity. Therefore, we can apply the contraction mapping priciple via integral equation and obtain the local well-posedness of the solution. In their work, however, we require the size restriction on the initial data. This is because the estimate $L_x^1 L_T^\infty \cdot L_x^\infty L_T^2 \subset L_x^1 L_T^2$ appears in the nonlinear estimate and the quantity $\|u\|_{L_x^1 L_T^\infty}$ does not expect to be small even though $T \downarrow 0$.

To remove this size restriction, Hayashi-Ozawa [2] applied the gauge transformation of unknown function. They showed that the energy method is still applicable to the general nonlinear case. Note that the gauge transformation eliminate the nonlinear component causing the regularity loss so that we can construct a priori estimate. In [2], they obtained the existence and uniqueness of the solution by assuming that $u_0 \in H_x^{3,0} \cap H_x^{2,1}$ (It seems that, by the sophisticated estimate, we can relax this condition into $H_x^{s,0} \cap H_x^{s-1,1}$ with $s > 5/2$), where

$$H_x^{\sigma,\alpha} = \{u; \|\langle x \rangle^\alpha \langle D_x \rangle^\sigma u\|_{L_x^2} < \infty\}$$

with $\langle x \rangle^\alpha = (1 + x^2)^{\alpha/2}$ and $\langle D_x \rangle^\sigma = \mathcal{F}^{-1} \langle \xi \rangle^\sigma \mathcal{F}$.

More recently, Kenig-Ponce-Vega [5] have enabled to remove the size restriction of u_0 and obtained the local well-posedness of the solution. In [5], they write (1.1) as

$$\begin{aligned} i\partial_t u^{(k)} &= -\frac{1}{2}\partial_x^2 u^{(k)} + \mathcal{N}_q(u, \partial_x u) \partial_x u^{(k)} + \mathcal{N}_{\bar{q}}(u, \partial_x u) \partial_x \bar{u}^{(k)} + (\text{remainder}) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_x^2 u^{(k)} + \mathcal{N}_q(u_0, \partial_x u_0) \partial_x u^{(k)} + \mathcal{N}_{\bar{q}}(u_0, \partial_x u_0) \partial_x \bar{u}^{(k)} + (\text{remainder}), \end{aligned}$$

where $u^{(k)} = \partial_x^k u$, $\mathcal{N}_q(u, q) = \partial_q \mathcal{N}(u, q)$, $\mathcal{N}_{\bar{q}}(u, q) = \partial_{\bar{q}} \mathcal{N}(u, q)$ and the remainder consists of at most $k-1$ th order derivatives together with $(\partial_x u - \partial_x u_0)u^{(k)}$ etc. They showed the smoothing property of the linear solution to $\mathcal{L}v = F$ in the time-space norm, where

$$\mathcal{L}v = i\partial_t v + \frac{1}{2}\partial_x^2 v - \mathcal{N}_q(u_0, \partial_x u_0) \partial_x v - \mathcal{N}_{\bar{q}}(u_0, \partial_x u_0) \partial_x \bar{v}.$$

Hence, we can apply the contraction mapping principle via integral equation. Since the theory of pseudo-differential operators is used in their argument, we require the large regularity of u_0 .

Our aim in this work is to show the local well-posedness of the solution without any size restriction on u_0 in less regular Sobolev space. Our idea is based on the a priori estimate in time-space norm. Concretely speaking, we first modify (1.1) by the parabolic regularization:

$$\begin{cases} i\partial_t u_\nu &= -\frac{1}{2}(1 - i\nu)\partial_x^2 u_\nu + \mathcal{N}(u_\nu, \partial_x u_\nu), \\ u_\nu(0, x) &= u_0(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

where $\nu \in (0, 1]$. Since the linear semigroup $U_\nu(t) = \exp((i + \nu)t\partial_x^2/2)$ has the strong smoothing property like $\|\partial_x U_\nu(t)\phi\|_{L_x^2} \leq C(\nu t)^{-1/2} \|\phi\|_{L_x^2}$, we can construct a local solution via integral equation. Let $T_\nu \in (0, \infty]$ be the upper limit for the existence of the solution. To realize the solution to (1.1) by taking $\nu \downarrow 0$, we require the lower uniform bound of T_ν . For this purpose, we construct a priori estimate in a Banach space Y_T (which will be defined in section 4). We shall apply the gauge transformation of u_ν to eliminate the heavy term after diagonalizing the system of $(u_\nu, \bar{u}_\nu)^t$. This is the speciality of one space dimension. Recall that the Sobolev embedding gives the regularity constraint on u_0 . On the other hand, in our argument, it is given by (so-called) the estimate of maximal function

$$\|\partial_x U_\nu(t)u_0\|_{L_x^1 L_T^\infty} \leq C(\|u_0\|_{H_x^{s,0}} + \|u_0\|_{H_x^{s',\alpha'}})$$

with $s > s' + \alpha' > 2$, $s' > 3/2$ and $\alpha' > 1/2$.

Our main theorem in this article is

Theorem 1.1 (i) Let $u_0 \in H_x^{s,0} \cap H_x^{s',\alpha'} \equiv X^s$ with $s > s' + \alpha' > 2$, $s' > 3/2$ and $\alpha' > 1/2$. Then, for some $T > 0$, there exists a unique solution u to (1.1) such that

$$u \in C([0, T]; X^s) \quad \text{and} \quad \langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u \in L_x^2 L_T^\infty \quad (j = 0, 1).$$

Furthermore, this solution satisfies the smoothing property such that

$$\|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty.$$

(ii) Let u' be the solution to (1.1) with initial data $u'_0 \in B_\rho(u_0) \equiv \{v_0; \|v_0 - u_0\|_{X^s} < \rho\}$. Then, for some $T' = T'(\rho) \in (0, T)$, we have

$$\begin{aligned} \|u' - u\|_{L_{T'} X^s} &\leq C \|u'_0 - u_0\|_{X^s}, \\ \|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 (u' - u)\|_{L_x^\infty L_{T'}^2} &\leq C \|u'_0 - u_0\|_{X^s}. \end{aligned}$$

We now close this section by introducing several notations. The quantity $\|\cdot\|_X$ denotes the norm of a Banach space X . Let $\mathcal{B}(X; Y)$ be the set of bounded operators from X to Y . When $X = Y$, we simply write $\mathcal{B}(X; X)$ as $\mathcal{B}(X)$. Let $L_x^p L_T^r$ and $L_T^r L_x^p$ be the function spaces $L^p(\mathbf{R}; L^r[0, T])$ and $L^r([0, T]; L_x^p)$, respectively. The fractional order differentiation D_x^s stands for $\mathcal{F}^{-1}|\xi|^s \mathcal{F}$.

2 Deformation of (1.2)

Let $u_\nu^{(1)} = \partial_x u_\nu$. Then, $u_\nu^{(1)}$ satisfies

$$\begin{aligned} i\partial_t u_\nu^{(1)} &= \frac{1}{2}(-1 + \nu)\partial_x^2 u_\nu^{(1)} + \mathcal{N}_q(u_\nu, u_\nu^{(1)})\partial_x u_\nu^{(1)} + \mathcal{N}_{\bar{q}}(u_\nu, u_\nu^{(1)})\partial_x \bar{u}_\nu^{(1)} \\ &\quad + \mathcal{N}_u(u_\nu, u_\nu^{(1)})u_\nu^{(1)} + \mathcal{N}_{\bar{u}}(u_\nu, u_\nu^{(1)})\bar{u}_\nu^{(1)}, \end{aligned}$$

where $\mathcal{N}_q$, $\mathcal{N}_{\bar{q}}$, $\mathcal{N}_u$ and $\mathcal{N}_{\bar{u}}$ stand for the partial derivatives with respect to q , $\bar{q}$, u and $\bar{u}$. To eliminate the explicit appearance of $\partial_x \bar{u}_\nu^{(1)}$ by the diagonalization, we first employ the systemized representation of the above equation. Namely, let $\vec{u}_\nu^{(1)} = (u_\nu^{(1)}, \bar{u}_\nu^{(1)})^t$ and we have

$$i\partial_t \vec{u}_\nu^{(1)} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}_\nu \partial_x^2 \vec{u}_\nu^{(1)} + \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)})\partial_x \vec{u}_\nu^{(1)} + \vec{P}(u_\nu, u_\nu^{(1)}), \quad (2.1)$$

where $\mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} 1 - i\nu & 0 \\ 0 & -1 - i\nu \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}(u, q) = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{N}_q(u, q)}{-\mathcal{N}_{\bar{q}}(u, q)} & \frac{\mathcal{N}_{\bar{q}}(u, q)}{-\mathcal{N}_q(u, q)} \\ \frac{\mathcal{N}_u(u, q)q + \mathcal{N}_{\bar{u}}(u, q)\bar{q}}{-\mathcal{N}_{\bar{u}}(u, q)q - \mathcal{N}_u(u, q)\bar{q}} \end{pmatrix}$ and $\vec{P}(u, q) =$

(Step 1) Diagonalization. Let $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ (which will be taken sufficiently close to u_0 in X^s). We write (1.2) as

$$\begin{aligned} i\partial_t \tilde{u}_\nu^{(1)} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\nu \partial_x^2 \tilde{u}_\nu^{(1)} + \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi) \partial_x \tilde{u}_\nu^{(1)} \\ &\quad + (\mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi)) \partial_x \tilde{u}_\nu^{(1)} + \vec{P}(u_\nu, u_\nu^{(1)}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

so that, roughly speaking, the third term in (2.2) is negligible when $T \downarrow 0$. Some readers might wonder why we do not take $\varphi = u_0$. The answer to this question will be shown at the end of this section. Let

$$\tilde{v}_\nu = (\mathbf{I} + \mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1}) \tilde{u}_\nu^{(1)}, \quad (2.3)$$

where $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{N}_{\bar{q}}(\varphi, \partial_x \varphi) \\ -\mathcal{N}_{\bar{q}}(\varphi, \partial_x \varphi) & 0 \end{pmatrix}$ and $\partial_x^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$. By noting the commutator relation like

$$[(\mathbf{I} + \mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1}), -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\nu] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{N}_{\bar{q}}(\varphi, \partial_x \varphi) \\ \mathcal{N}_{\bar{q}}(\varphi, \partial_x \varphi) & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \mathbf{A}_\nu ((\partial_x \mathbf{J}(\varphi)) + (\partial_x^2 \mathbf{J}(\varphi)) \partial_x^{-1}),$$

we see that

$$\begin{aligned} i\partial_t \tilde{v}_\nu &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\nu \partial_x^2 \tilde{v}_\nu + \mathbf{B}_{diag}(\varphi, \partial_x \varphi) \partial_x \tilde{v}_\nu \\ &\quad + (\mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi)) \partial_x \tilde{u}_\nu^{(1)} + \vec{Q}_\nu(\varphi, u_\nu), \end{aligned} \quad (2.4)$$

where $\mathbf{B}_{diag}(\varphi, \partial_x \varphi)$ denotes the diagonal part of $\mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi)$ and

$$\begin{aligned} \vec{Q}_\nu(\varphi, u_\nu) &= \mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x \tilde{u}_\nu^{(1)} + (\mathbf{I} + \mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1}) \vec{P}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \\ &\quad - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi) \partial_x \mathbf{J}(\varphi) \tilde{u}_\nu - \mathbf{B}_{off}(\varphi, \partial_x \varphi) \partial_x \mathbf{J}(\varphi) \tilde{u}_\nu \\ &\quad + \mathbf{A}_\nu ((\partial_x \mathbf{J}(\varphi)) \tilde{u}_\nu^{(1)} + (\partial_x^2 \mathbf{J}(\varphi)) \tilde{u}_\nu), \end{aligned}$$

with $\tilde{u}_\nu = (u_\nu, \bar{u}_\nu)^t$ and $\mathbf{B}_{off} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{diag}$.

(Step2) Gauge Transformation. To eliminate $\mathbf{B}_{diag}(\varphi, \partial_x \varphi) \tilde{v}_\nu$ in the right hand side of (2.4), we set $\tilde{w}_\nu = \mathbf{K}_\nu(\varphi) \tilde{v}_\nu$ where

$$\mathbf{K}_\nu(\varphi) = \begin{pmatrix} \exp \frac{\partial_x^{-1} \mathcal{N}_{\bar{q}}(\varphi, \partial_x \varphi)}{-1+i\nu} & 0 \\ 0 & \exp \frac{\partial_x^{-1} \mathcal{N}_{\bar{q}}(\varphi, \partial_x \varphi)}{-1-i\nu} \end{pmatrix}.$$

This transformation yields

$$i\partial_t \tilde{w}_\nu = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\nu \partial_x^2 \tilde{w}_\nu + \mathbf{K}_\nu(\varphi) (\mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi)) \partial_x \tilde{u}_\nu^{(1)} + \vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu), \quad (2.5)$$

where $\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu) = (1/2) \mathbf{A}_\nu (\partial_x^2 \mathbf{K}_\nu(\varphi)) \tilde{v}_\nu + \mathbf{K}_\nu(\varphi) \vec{Q}_\nu(\varphi, u_\nu)$. Since the remainder $\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu)$ contains the large order derivatives of φ , we could not replace φ by u_0 .

3 Lemmas

In this section, we introduce several key estimates frequently used in our argument. In what follows, we employ the brief notation $G_\nu F$ for $\int_0^t U_\nu(t-t')F(t') dt'$. The smoothing property of $U_\nu(t)$ and G_ν plays an important role in recovering the regularity loss from the nonlinearity. Hereafter, we assume that $0 < T < 1$. The positive constant C is independent of $\nu \in (0, 1]$.

Lemma 3.1 *Let $p \in [2, \infty]$ and $p' \in [2, \infty)$. Then, we have*

$$\|D_x^{1/2-1/p}U_\nu(t)\phi\|_{L_x^p L_T^2} \leq CT^{1/p}\|\phi\|_{L_x^2}, \quad (3.1)$$

$$\|D_x^{1-1/p'}G_\nu F\|_{L_x^{p'} L_T^2} \leq CT^{1/p'}\|F\|_{L_x^1 L_T^2}, \quad (3.2)$$

$$\|\partial_x G_\nu F(t')\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C\|F\|_{L_x^1 L_T^2}, \quad (3.3)$$

$$\|D_x^{1/2}G_\nu F\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq C\|F\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (3.4)$$

Proof of Lemma 3.1. The estimates (3.1) with $p = \infty$, (3.3) and (3.4) are proved in [3; Theorem 2.3, Corollary 2.3]. The interpolation yields (3.1) and (3.2) (See [2; Proposition 2.3]). (Q.E.D.)

The following lemma is the well-known Strichartz inequalities.

Lemma 3.2 *Let $0 \leq 2/r_j = 1/2 - 1/p_j \leq 1/2$, ($j = 1, 2$). Then, we have*

$$\|U_\nu(t)\phi\|_{L_T^{r_1} L_x^{p_1}} \leq C\|\phi\|_{L_x^2}, \quad (3.5)$$

$$\|G_\nu F\|_{L_T^{r_1} L_x^{p_1}} \leq C\|F\|_{L_T^{r'_2} L_x^{p'_2}}, \quad (3.6)$$

where $1/r_2 + 1/r'_2 = 1/p_2 + 1/p'_2$.

Proof of Lemma 3.2. See [9, 11]. (Q.E.D.)

By interpolating Lemma 3.1 and 3.2, we obtain another type of smoothing property of $U_\nu(t)$ and G_ν .

Lemma 3.3 *Let $p \in [6, \infty)$. Then, we have*

$$\|D_x^{1/2-3/p}U_\nu(t)\phi\|_{L_x^p L_T^{2p/(p-4)}} \leq C\|\phi\|_{L_x^2}, \quad (3.7)$$

$$\|D_x^{1-6/p}G_\nu F\|_{L_x^p L_T^{2p/(p-4)}} \leq CT^{3/2p}\|F\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (3.8)$$

Proof of Lemma 3.3. Let $(i^{-1}\partial_x)^z \equiv \mathcal{F}^{-1}\xi^z\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\exp(z\text{Log}\xi)\mathcal{F}$ with $z \in \mathbf{C}$ and $\text{Log}\xi = \log|\xi| + i\arg\xi$. Then, by the analogous argument as in [3], we have

$$\|(i^{-1}\partial_x)^{1+i\theta}U(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq Ce^{\pi|\theta|}\|\phi\|_{L_x^2}, \quad (3.9)$$

$$\|(i^{-1}\partial_x)^{1+i\theta}GF\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq Ce^{\pi|\theta|/2}\|F\|_{L_x^1 L_T^2} \quad \text{for } \theta \in \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

On the other hand, by Lemma 3.2 with $p_1 = r_1 = 6$, $p'_2 = 1$ and $r'_2 = 4/3$, we see that

$$\|(i^{-1}\partial_x)^{i\theta}U_\nu(t)\phi\|_{L_x^6 L_T^6} \leq Ce^{\pi|\theta|}\|\phi\|_{L_x^2}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \|(i^{-1}\partial_x)^{i\theta}G_\nu F\|_{L_x^6 L_T^6} &\leq Ce^{\pi|\theta|}\|G_\nu F\|_{L_T^6 L_x^6} \\ &\leq Ce^{\pi|\theta|}\|F\|_{L_T^{4/3} L_x^1} \\ &\leq Ce^{\pi|\theta|}T^{1/4}\|F\|_{L_x^1 L_T^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note that, to show the first inequality of (3.12), we used the Fourier multiplier theorem for $(i^{-1}\partial_x)^{i\theta}$. Applying Stein's interpolation [7] to the combination of (3.9) with (3.11), and (3.10) with (3.12), we obtain Lemma 3.3. (Q.E.D.)

Let us call $\|f(\cdot, x)\|_{L_T^\infty}$ "the maximal function of $f(t, x)$ ". We next give the estimates for the maximal function.

Lemma 3.4 *Let $\sigma > 1/2$ and $T \in [0, 1)$. Then, we have*

$$\|U_\nu(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq C\|\phi\|_{H_x^{\sigma,0}}, \quad (3.13)$$

$$\|G_\nu F(t')\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq CT^{1/2}\|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,0}}. \quad (3.14)$$

Proof of Lemma 3.4. For the estimate (3.13), see [6]. By (3.13), we can show (3.14) since

$$\begin{aligned} \|G_\nu F\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq \int_0^T \|U_\nu(t-t')F(t')\|_{L_x^2 L_T^\infty} dt' \\ &\leq C\|F\|_{L_T^1 H_x^{\sigma,0}} \\ &\leq CT^{1/2}\|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,0}}. \end{aligned} \quad (\text{Q.E.D.})$$

For the estimate of $U_\nu(t)$ in weighted norm spaces, we often require the commutator estimate of D_x^σ and $\langle x \rangle^\alpha$. This is described as

Lemma 3.5 *Let $0 \leq \alpha < \sigma < 1$ and let $W(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ satisfy*

$$|\partial_x^j W(x)| \leq C_j \langle x \rangle^{\alpha-j} \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \dots$$

and

$$|W(x) - W(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{for } |x - y| > 1.$$

Then, $[D_x^\sigma, W(x)] \equiv D_x^\sigma W(x) - W(x)D_x^\sigma$ belongs to $\mathcal{B}(L_x^p)$ and $\mathcal{B}(L_x^p L_T^r)$ for $p, r \in [1, \infty]$.

Proof of Lemma 3.5. Since $[D_x^\sigma, W(x)]$ has the integral kernel like

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (2\pi)^{-1} Os - \int e^{i(x-y)\xi} |\xi|^\sigma d\xi (W(x) - W(y)) \\ &= (2\pi)^{-1} Os - \int e^{i\xi} |\xi|^\sigma d\xi (x-y)^{-1} |x-y|^{-\sigma} (W(x) - W(y)), \end{aligned}$$

where $Os - f$ stands for the oscillatory integral, we see that

$$|K(x, y)| \leq C \begin{cases} |x-y|^{-\sigma} & \text{if } |x-y| \leq 1, \\ |x-y|^{-1-\sigma+\alpha} & \text{if } |x-y| > 1. \end{cases}$$

Then, Young's inequality yields Lemma 3.5. (Q.E.D.)

We next show the commutator estimate of D_x^σ and the gauge transform.

Lemma 3.6 *Let $p \in [1, \infty]$, $\sigma \in (0, 1)$ and $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Then, we have*

$$\|D_x^\sigma e^{\partial_x^{-1}\psi} f\|_{L_x^p} \leq C e^{\|\psi\|_{L_x^1}} (1 + \|\psi\|_{L_x^\infty}) (\|f\|_{L_x^p} + \|D_x^\sigma f\|_{L_x^p}), \quad (3.15)$$

where $\partial_x^{-1}\psi = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy$.

Proof of Lemma 3.6. We write $D_x^\sigma e^{\partial_x^{-1}\psi} f$ as

$$D_x^\sigma e^{\partial_x^{-1}\psi} f = e^{\partial_x^{-1}\psi} D_x^\sigma f + [D_x^\sigma, e^{\partial_x^{-1}\psi}] f \equiv f_1 + f_2.$$

It is easy to see that $\|f_1\|_{L_x^p} \leq e^{\|\psi\|_{L_x^1}} \|D_x^\sigma f\|_{L_x^p}$.

To estimate f_2 , we note that $[D_x^\sigma, e^{\partial_x^{-1}\psi}]$ possesses the integral kernel like

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (2\pi)^{-1} Os - \int e^{i\xi} |\xi|^\sigma d\xi (x-y)^{-1} |x-y|^{-\sigma} \\ &\quad \times \left\{ \exp\left(\int_{-\infty}^y \psi(z) dz\right) - \exp\left(\int_{-\infty}^x \psi(z) dz\right) \right\}. \end{aligned}$$

This yields

$$|K(x, y)| \leq C e^{\|\psi\|_{L_x^1}} \begin{cases} |x-y|^{-\sigma} \|\psi\|_{L_x^\infty} & \text{if } |x-y| \leq 1, \\ |x-y|^{-1-\sigma} & \text{if } |x-y| > 1. \end{cases}$$

Applying Young's inequality, we have $\|f_2\|_{L_x^p} \leq C e^{\|\psi\|_{L_x^1}} (1 + \|\psi\|_{L_x^\infty}) \|f\|_{L_x^p}$. Hence, we obtain the desired result. (Q.E.D.)

When we apply the fractional order derivative to the nonlinear term, we often use Leibniz' type rule described in the following.

Lemma 3.7 *Let $\sigma \in (0, 1)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, \sigma]$ with $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Also, let $p, r \in [1, \infty)$ and $p_1, p_2, r_1, r_2 \in (1, \infty)$ with $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ and $1/r = 1/r_1 + 1/r_2$. Then, we have*

$$\|D_x^\sigma(fg) - (D_x^\sigma f)g - f(D_x^\sigma g)\|_{L_x^p L_T^r} \leq C \|D_x^{\sigma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{r_1}} \|D_x^{\sigma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{r_2}}. \quad (3.16)$$

Proof of Lemma 3.7. For the proof of Lemma 3.7, see [4; Appendix]. (Q.E.D.)

We next consider weighted norm version of the Strichartz type estimate and the estimate of maximal function.

Lemma 3.8 *Let $\sigma \in [1/2, 1)$, $\alpha \in [1/2, 1)$, $\sigma' > \sigma + \alpha$ and $0 \leq 2/r = 1/2 - 1/p \leq 1/2$. Then, we have*

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha U_\nu(t) \phi\|_{L_T^r L_x^p} \leq C(\|\phi\|_{H_x^{\sigma',0}} + \|\phi\|_{H_x^{\sigma,\alpha}}), \quad (3.17)$$

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F\|_{L_T^r L_x^p} \leq CT^{1/2}(\|D_x^{\sigma'-1/2} F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,\alpha}}). \quad (3.18)$$

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F\|_{L_T^r L_x^q} \leq CT^{1/2}(\|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma',0}} + \|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma,\alpha}}). \quad (3.19)$$

For the case $\alpha < 1/2$, we can show the following.

Lemma 3.9 *Let $\sigma \in [1/2, 1)$, $\alpha \in (0, 1/2)$ and $0 \leq 2/r = 1/2 - 1/p \leq 1/2$. Then, we have*

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha U_\nu(t) \phi\|_{L_T^r L_x^p} \leq CT^{1/2}(\|\phi\|_{H_x^{\sigma+1/2}} + \|\phi\|_{H_x^{\sigma,\alpha}}), \quad (3.20)$$

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F(t')\|_{L_T^r L_x^p} \leq CT^{1/2}(\|D_x^\sigma F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,\alpha}}), \quad (3.21)$$

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F\|_{L_T^r L_x^q} \leq CT^{1/2}(\|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma+1/2,0}} + \|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma,\alpha}}). \quad (3.22)$$

Proof of Lemma 3.8. Let $f(x, t) = U_\nu(t) \phi(x)$. Then f satisfies

$$\begin{cases} i\partial_t f = -\frac{1}{2}(1 - i\nu)\partial_x^2 f, \\ f(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (3.23)$$

Multiplying $\langle x \rangle^\alpha$ on both hand sides of (3.23), we have

$$i\partial_t(\langle x \rangle^\alpha f) = -\frac{1}{2}(1 - i\nu)\partial_x^2(\langle x \rangle^\alpha f) + (1 - i\nu)(\partial_x \langle x \rangle^\alpha)\partial_x f + \frac{1}{2}(1 - i\nu)(\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha)f.$$

Rewriting the above relation by Duhamel's principle, we see that

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^\alpha U_\nu(t) \phi &= U_\nu(t) \langle x \rangle^\alpha \phi - (i + \nu)G_\nu(\partial_x \langle x \rangle^\alpha)\partial_x f - \frac{1}{2}(i + \nu)G_\nu(\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha)f \\ &\equiv f_1(t, x) + f_2(t, x) + f_3(t, x). \end{aligned} \quad (3.24)$$

By making use of Lemma 3.2, f_1 and f_3 are easily estimated as

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L_T^r L_x^p} &\leq C\|\phi\|_{H_x^{\sigma,\alpha}}, \\ \|f_3\|_{L_T^r L_x^p} &\leq C\|D_x^\sigma(\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha)U_\nu(t)\phi\|_{L_T^1 L_x^2} \\ &\leq CT\|\phi\|_{H_x^{\sigma,0}} \leq CT\|\phi\|_{H_x^{\sigma,\alpha}}. \end{aligned}$$

As for the estimate of f_2 , we apply Lemma 3.2 and we have

$$\begin{aligned}
\|f_2\|_{L_T^r L_x^p} &\leq C \|D_x^\sigma (\partial_x \langle x \rangle^\alpha) \partial_x U_\nu(t) \phi\|_{L_T^1 L_x^2} \\
&\leq CT^{1/2} (\|(\partial_x \langle x \rangle^\alpha) D_x^\sigma \partial_x U_\nu(t) \phi\|_{L_x^2 L_T^2} + \|[D_x^\sigma, \partial_x \langle x \rangle^\alpha] \partial_x U_\nu(t) \phi\|_{L_T^2 L_x^2}) \\
&\leq CT^{1/2} (\|D_x^\sigma \partial_x U_\nu(t) \phi\|_{L_x^q L_T^2} + T^{1/2} \|\phi\|_{H_x^{1,0}}),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

where $1/q \in (\alpha - 1/2, 1/2)$. Using Lemma 3.1, we see that

$$\|f_2\|_{L_T^r L_x^p} \leq CT^{1/2} \|\phi\|_{H_x^{\sigma+1/q+1/2,0}}.$$

As a result, we obtain (3.17).

To prove (3.18), we first follow the analogous derivation of (3.24) and obtain

$$\begin{aligned}
D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F &= G_\nu (D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha F) - (i + \nu) G_\nu (D_x^\sigma (\partial_x \langle x \rangle^\sigma) \partial_x G_\nu F) \\
&\quad - \frac{1}{2} (i + \nu) G_\nu (D_x^\sigma (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) G_\nu F) \\
&\equiv g_1(t, x) + g_2(t, x) + g_3(t, x).
\end{aligned}$$

According to Lemma 3.2, we have

$$\begin{aligned}
\|g_1\|_{L_T^r L_x^q} &\leq C \|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha F\|_{L_T^1 L_x^2} \\
&\leq CT^{1/2} \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,\alpha}}, \\
\|g_3\|_{L_T^r L_x^q} &\leq CT \|D_x^\sigma (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) G_\nu F\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leq CT^{3/2} \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,0}} \\
&\leq CT^{3/2} \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,\alpha}}.
\end{aligned}$$

It remains to estimate g_2 . Lemma 3.2 and 3.5 give

$$\begin{aligned}
\|g_2\|_{L_T^r L_x^q} &\leq CT^{1/2} (\|(\partial_x \langle x \rangle^\alpha) D_x^\sigma \partial_x G_\nu F\|_{L_x^2 L_T^2} + \|[D_x^\sigma, \partial_x \langle x \rangle^\alpha] \partial_x G_\nu F\|_{L_T^2 L_x^2}) \\
&\leq CT^{1/2} \|D_x^\sigma \partial_x G_\nu F\|_{L_x^q L_T^2} + CT \|G_\nu F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma',0}},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

where $1/q \in (\alpha - 1/2, 1/2)$. Applying Lemma 3.1 (3.2) to the first term of (3.26) and Lemma 3.1 (3.4) to the second, we have

$$\|g_2\|_{L_T^r L_x^p} \leq CT^{1/2} (\|D_x^{\sigma+1/q} F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 L_x^2}).$$

Hence, we obtain (3.18).

The estimate (3.19) follows by using

$$\begin{aligned}
\|D_x^\sigma \partial_x G_\nu F\|_{L_x^q L_T^2} &\leq \int_0^T \|D_x^\sigma \partial_x U(t) U(-t') F(t')\|_{L_x^q L_T^2} dt' \\
&\leq CT \|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma+1/q+1/2,0}}.
\end{aligned}$$

in (3.26). (Q.E.D.)

Proof of Lemma 3.9. This is almost similar to the proof of Lemma 3.8 except for using the following estimates in (3.25) and (3.26).

$$\begin{aligned}\|f_2\|_{L_T^r L_x^p} &\leq CT^{1/2}(\|D_x^\sigma \partial_x U_\nu(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\phi\|_{H_x^{1,0}}) \\ &\leq CT^{1/2}\|\phi\|_{H^{\sigma+1/2,0}} \quad (\text{by Lemma 3.1(3.1)}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{L_T^r L_x^p} &\leq CT^{1/2}(\|D_x^\sigma \partial_x GF\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|GF\|_{L_T^\infty H_x^{1,0}}) \\ &\leq CT^{1/2}(\|D_x^\sigma F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 L_x^2}) \quad (\text{by Lemma 3.1(3.3)-(3.4)}).\end{aligned}$$

Hence, we obtain Lemma 3.9. (Q.E.D.)

We next prove the estimates of maximal function in the weighted norm space. These estimates give the regularity constraint on the initial data.

Lemma 3.10 *Let $\sigma \in [0, 1)$, $\alpha \in [1/2, 1)$, $\sigma' > \sigma + \alpha + 1/2$ and $\sigma'' > \sigma + 1/2$. Then, we have*

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha U_\nu(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq C(\|\phi\|_{H_x^{\sigma',0}} + \|\phi\|_{H^{\sigma'',\alpha}}), \quad (3.27)$$

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq CT^{1/2}(\|D_x^{\sigma'-1/2} F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma'',\alpha}}). \quad (3.28)$$

$$\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha G_\nu F\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq CT^{1/2}(\|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma'+1/2,0}} + \|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma'',\alpha}}). \quad (3.29)$$

Proof of Lemma 3.10. We only prove the estimate (3.27) since the other estimates follow similarly to the proof of Lemma 3.8. According to the derivation of (3.24), we see that

$$\begin{aligned}\|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha U_\nu(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq \|U_\nu(t)D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha \phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} + 2\|G_\nu D_x^\sigma (\partial_x \langle x \rangle^\alpha) \partial_x U_\nu(t')\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\quad + \|G_\nu D_x^\sigma (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) U_\nu(t')\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

By Lemma 3.4 and 3.5, it follows that

$$\begin{aligned}I_1 &\leq C\|\phi\|_{H_x^{\sigma'',\alpha}}, \\ I_3 &\leq C\|(\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) U_\nu(t)\phi\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma'',0}} \\ &\leq C\|\phi\|_{H_x^{\sigma'',\alpha}}.\end{aligned}$$

Applying Lemma 3.1, 3.4 and 3.5, we see that

$$\begin{aligned}I_2 &\leq C(\|D_x^{\sigma''} (\partial_x \langle x \rangle^\alpha) \partial_x U_\nu(t)\phi\|_{L_T^2 L_x^2} + \|(\partial_x \langle x \rangle^\alpha) \partial_x U_\nu(t)\phi\|_{L_T^2 L_x^2}) \\ &\leq C(\|(\partial_x \langle x \rangle^\alpha) D_x^{\sigma''} \partial_x U_\nu(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^2} + \|\phi\|_{H_x^{1,0}}) \\ &\leq C(\|D_x^{\sigma''} \partial_x U_\nu(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^2} + \|\phi\|_{H_x^{1,0}}) \\ &\leq C\|\phi\|_{H_x^{\sigma''+1/p+1/2,0}},\end{aligned}$$

where $1/p > \alpha - 1/2$. Hence, we obtain (3.27). (Q.E.D.)

The lemma given below is used to show that $\{u_\nu\}_{\nu \in (0,1]}$ is the Cauchy sequence in a Banach space Z_T specified in section 4.

Lemma 3.11 *Let $0 < \epsilon' < \epsilon < 1$. Then, we have*

$$\|\partial_x(G_\nu - G_0)F\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C(\nu T)^{\epsilon'/2} \|D_x^{1/2+\epsilon} F\|_{L_T^1 L_x^2}$$

Proof of Lemma 3.11. We write

$$\begin{aligned} \partial_x(G_\nu - G_0)F &= \int_0^t D_x^{-\epsilon} (e^{\nu(t-t')\partial_x^2} - 1) D_x^\epsilon \partial_x U_0(t-t') F(t') dt' \\ &\equiv \int_0^t K(\nu(t-t')) D_x^\epsilon \partial_x U_0(t-t') F(t') dt'. \end{aligned}$$

Since, for some $\rho > 0$, the integral kernel of $K(\nu(t-t'))$ (we denote this by $K(\nu(t-t'))[x-y]$) is estimated as

$$\begin{aligned} |K(\nu(t-t'))[x-y]| &= \left| (2\pi)^{-1} \int e^{i(x-y)\xi} \frac{e^{-\nu(t-t')\xi^2} - 1}{|\xi|^\epsilon} d\xi \right| \\ &\leq \begin{cases} C(\nu T)^{\epsilon/2-\rho} |x-y|^{-1+\rho} & \text{if } |x-y| \leq 1, \\ C(\nu T)^{\epsilon/2+\rho} |x-y|^{-1-\rho} & \text{if } |x-y| > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

we see that

$$\begin{aligned} \|\partial_x(G_\nu - G_0)F\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq C(\nu T)^{\epsilon'/2} \int_0^T \|D_x^\epsilon \partial_x U_0(\cdot) U_0(-t') F(t')\|_{L_x^\infty L_T^2} dt' \quad (\text{by Young's inequality}), \\ &\leq C(\nu T)^{\epsilon'/2} \int_0^T \|D_x^{1/2+\epsilon} F(t')\|_{L_x^2} dt' \quad (\text{by Lemma 3.1}). \end{aligned}$$

Hence, we obtain the desired result. (Q.E.D.)

4 Estimates of Nonlinearity

We will require the estimates of $\|G_\nu \partial_x(u_\nu - \varphi) \partial_x^2 u_\nu\|_{L_T^\infty X^s}$ and $\|G_\nu \tilde{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^\infty X^s}$ when we apply the contraction mapping principle. In this section, we show these nonlinear estimates. Since so many kinds of norms appear in our argument, we first define new notations for the simple description.

Let $\|u\|_{Y_T} = \|u\|_{\text{initial}} + \|u\|_{\text{smooth}} + \|u\|_{\text{maximal}} + \|u\|_{\text{lower}}$, where

$$\begin{aligned} \|u\|_{\text{initial}} &= \|u\|_{L_T^\infty X^s}, \\ \|u\|_{\text{smooth}} &= \|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sup_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1} \|D_x^{s-\sigma-3/2} \partial_x^2 u\|_{L_x^{6/\sigma} L_T^{6/(3-2\sigma)}} \quad \text{with } \sigma_0 \text{ small}, \\ \|u\|_{\text{maxim}} &= \sup_{j=1,2} \sup_{0 \leq \sigma \leq \sigma_0} (\|D_x^\sigma \langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u\|_{L_x^2 L_T^\infty}), \\ \|u\|_{\text{lower}} &= \sup_{j=1,2} (\|D_x^{s-3/2} \langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x u\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|D_x^{s'-1} \langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u\|_{L_T^4 L_x^\infty}) \quad \text{with } \mu = \frac{s-s'-\alpha'}{2(s-s')}. \end{aligned}$$

We give the metric to a closed ball in Y_T , which is defined by $\|u_{\nu'} - u_{\nu}\|_{Z_T}$ for $u_{\nu'}, u_{\nu} \in B_r(Y_T) = \{u; \|u\|_{Y_T} \leq r\}$, where

$$\|u\|_{Z_T} = \|u\|_{L_T^\infty H_x^{3/2,0}} + \|\partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sup_{j=0,1} \|\langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x^j u\|_{L_T^4 L_x^\infty}.$$

We remark here that $Y_T \subset Z_T$ since, for instance, $L_T^2 L_x^\infty \subset L_x^\infty L_T^2$ and $(1 - D_x^{s-3/2} \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2 \in \mathcal{B}(L_x^\infty L_T^2)$ yield

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq \|(1 + D_x^{s-3/2} \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2 (1 + D_x^{s-3/2} \partial_x^2) u\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leq C(\|u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_T^2}) \\ &\leq C(T^{1/2} \|u\|_{L_T^\infty L_x^\infty} + \|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_T^2}) \\ &\leq C\|u\|_{Y_T}. \end{aligned}$$

As for the nonlinear estimate, it suffices to see the following.

Lemma 4.1 *There exists some $\beta > 0$ such that*

$$\begin{aligned} \|D_x^{s-3/2} (\partial_x f \partial_x^2 g)\|_{L_x^1 L_T^2} &\leq \|\partial_x f\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 g\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\quad + CT^\beta \|f\|_{Y_T} \|g\|_{Y_T}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\|D_x^{s-3/2} \langle x \rangle^{1/2-\mu} (\partial_x f \partial_x^2 g)\|_{L_x^2 L_T^2} \leq C\|f\|_{Y_T} \|g\|_{Y_T}, \quad (4.2)$$

$$\|D_x^{s'-1} \langle x \rangle^{\alpha'} (\partial_x f \partial_x^2 g)\|_{L_x^2 L_T^2} \leq C\|f\|_{Y_T} \|g\|_{Y_T}. \quad (4.3)$$

Lemma 4.2 *There exists some $C_\varphi > 0$ (which may possibly diverge as $\varphi \rightarrow u_0$ in X^s) such that*

$$\|\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^\infty H_x^{s-1,0}} \leq C_\varphi(1 + \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}) \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} &\|(\vec{R}_{\nu'}(\varphi, u_{\nu'}) - \vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu))\|_{L_T^2 H_x^{1/2,0}} \\ &\leq C_\varphi(1 + \max_{j=0,1} \|\partial_x^j u\|_{L_x^1 L_T^\infty} + \|u_{\nu'}\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}} + \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}) \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} \\ &\quad + C_\varphi(\nu' + \nu)(1 + \|u_{\nu'}\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}} + \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}})^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Proof of Lemma 4.1. We only prove the first estimate since the others likewise follow. According to the Leibniz rule for the fractional order derivatives, we see that

$$\begin{aligned} \|D_x^{s-3/2} (\partial_x f \partial_x^2 g)\|_{L_x^1 L_T^2} &\leq \|\partial_x f (D_x^{s-3/2} \partial_x^2 g)\|_{L_x^1 L_T^2} + \|(D_x^{s-3/2} \partial_x f) \partial_x^2 g\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + C\|D_x^\sigma \partial_x f\|_{L_x^{6/(6-\sigma)} L_T^{3/\sigma}} \|D_x^{s-\sigma-3/2} \partial_x^2 g\|_{L_x^{6/\sigma} L_T^{6/(3-2\sigma)}} \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

By Hölder's inequality,

$$I_1 \leq \|\partial_x f\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|D_x^{s-3/2} \partial_x^2 g\|_{L_x^\infty L_T^2}.$$

Let $0 < \mu < \mu'$ and note that $L_x^2 L_T^2 = L_T^2 L_x^2$. Then, we have

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \|(\langle x \rangle^{1/2-\mu} D_x^{s-3/2} \partial_x f)(\langle x \rangle^{\mu'} \partial_x^2 g)\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\leq CT^{1/4} \|\langle x \rangle^{1/2-\mu} D_x^{s-3/2} \partial_x f\|_{L_T^4 L_x^\infty} \|\langle x \rangle^{\mu'} \partial_x^2 g\|_{L_T^\infty L_x^2}. \end{aligned}$$

Making use of the commutator estimate $[\langle x \rangle^{1/2-\mu}, D_x^{s-3/2}] \in \mathcal{B}(L_T^4 L_x^\infty)$ and the interpolation $H_x^{s,0} \cap H_x^{s',\alpha'} \subset H_x^{2,\mu'}$ with $2 = \theta s + (1-\theta)s'$ and $\mu' = (1-\theta)\alpha'$ ($0 < \theta < 1$), we can show that

$$\begin{aligned} I_2 &\leq CT^{1/4} (\|D_x^{s-3/2} \langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x f\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|f\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}) \|g\|_{L_T^\infty X^s} \\ &\leq CT^{1/4} (\|f\|_{\text{lower}} + \|f\|_{\text{initial}}) \|g\|_{\text{initial}}. \end{aligned}$$

Finally, we see that

$$\begin{aligned} I_3 &\leq CT^{\sigma/3} \|\langle x \rangle^{1/2} D_x^\sigma \partial_x f\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|g\|_{\text{smooth}} \\ &\leq CT^{\sigma/3} \|f\|_{\text{maxim}} \|g\|_{\text{smooth}}, \end{aligned}$$

since $[\langle x \rangle^{1/2}, D_x^\sigma] \in \mathcal{B}(L_x^1 L_T^\infty; L_x^2 L_T^\infty)$ and $[\langle x \rangle^{-(\alpha'-1/2)}, D_x^\sigma] \in \mathcal{B}(L_x^2 L_T^\infty)$ yield

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{1/2} D_x^\sigma \partial_x f\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq \|D_x^\sigma \langle x \rangle^{1/2} \partial_x f\|_{L_x^2 L_T^\infty} + C \|\partial_x f\|_{L_x^1 L_T^\infty} \\ &\leq \|\langle x \rangle^{-(\alpha'-1/2)} D_x^\sigma \langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x f\|_{L_x^2 L_T^\infty} + C \|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x f\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\leq \|f\|_{\text{maxim}}. \quad (\text{Q.E.D.}) \end{aligned}$$

Proof of Lemma 4.2. The quantity $\|D_x^{s-1}(\mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x \bar{u}_\nu^{(1)})\|_{L_T^\infty L_x^2}$ appears in $\|\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^\infty H_x^{s-1,0}}$. This is the most intricate term to be handled and so we mainly consider the estimate of it. Note that

$$\begin{aligned} \|D_x^{s-2} \partial_x (\mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x \bar{u}_\nu^{(1)})\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leq \|D_x^{s-2} (\mathbf{J}(\varphi) \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x \bar{u}_\nu^{(1)})\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\quad + \|D_x^{s-2} ((\partial_x \mathbf{J}(\varphi)) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x \bar{u}_\nu^{(1)})\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

By the commutator estimate of $[D_x^{s-2}, \mathbf{J}(\varphi)]$ and the Leibnitz rule for the fractional order derivative,

$$I_1 \leq C_\varphi \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}^2.$$

I_2 is estimated as

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|(\partial_x \mathbf{J}(\varphi)) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x \bar{u}_\nu^{(1)}\|_{L_T^\infty H_x^{1,0}} \\ &\leq C_\varphi \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}^2. \end{aligned}$$

Hence, the first estimate of Lemma 4.1 follows. As for the second estimate of Lemma 4.1, we only consider the quantity $\|\mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x^2 (\bar{u}_{\nu'} - \bar{u}_\nu)\|_{L_T^2 H_x^{1/2,0}}$. We observe

$$\|\mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x^2 (\bar{u}_{\nu'} - \bar{u}_\nu)\|_{L_T^2 H_x^{1/2,0}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \| \mathbf{J}(\varphi) \partial_x^{-1} \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x^2 (\tilde{u}_{\nu'} - \tilde{u}_\nu) \|_{L_T^2 H_x^{1,0}} \\
&\leq C \| \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x^2 (\tilde{u}_{\nu'} - \tilde{u}_\nu) \|_{L_T^2 L_x^2} \\
&\quad + C_\varphi \| \mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) \partial_x^2 (\tilde{u}_{\nu'} - \tilde{u}_\nu) \|_{L_T^2 L_x^1} \\
&\leq C_\varphi \max_{j=0,1} (\| \partial_x^j u_\nu \|_{L_x^1 L_T^\infty} + \| \partial_x^j u_\nu \|_{L_x^2 L_T^\infty}) \| \partial_x^2 (\tilde{u}_{\nu'} - \tilde{u}_\nu) \|_{L_x^\infty L_T^2}.
\end{aligned}$$

By $\| \partial_x^j u_\nu \|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq \| \partial_x^j u_\nu \|_{L_x^1 L_T^\infty} + \| \partial_x^j u_\nu \|_{L_x^\infty L_T^\infty}$, we obtain Lemma 4.2. (Q.E.D.)

5 Proof of Theorem 1.1 (existence)

In this section, we construct the a priori estimate of u_ν in the function space Y_T . For this purpose, we transfer (1.2) and (2.5) into the integral equations :

$$u_\nu = U_\nu(t)u_0 - iG_\nu \mathcal{N}(u_\nu, \partial_x u_\nu), \quad (5.1)$$

$$\tilde{w}_\nu = U_\nu(t)\tilde{w}_\nu(0) - G_\nu [\mathbf{K}_\nu(\mathbf{B}(u_\nu, u_\nu^{(1)}) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi)) \partial_x^2 \tilde{u}_\nu + \tilde{R}_\nu(\varphi, u_\nu)], \quad (5.2)$$

where $U_\nu(t) = \exp(it\mathbf{A}_\nu \partial_x^2)$ and $G_\nu \vec{F} = \int_0^t U_\nu(t-t') \vec{F}(t') dt'$. Let

$$T_\nu^* = \sup\{T'; \|u_\nu\|_{Y_T} < 2C_0 \|u_0\|_{X^s} \text{ for } T \in [0, T']\},$$

where the large positive constant C_0 will be specified later. Note that $\|u_\nu\|_{Y_T}$ is continuous in $T \in [0, T_\nu^*]$. We prove

Proposition 5.1 *There exists a uniform lower bound T_0 such that $T_0 \leq T_\nu^*$ for $\nu \in (0, 1]$. Furthermore, we have*

$$\|u_\nu\|_{Y_{T_0}} \leq 2C_0 \|u_0\|_{X^s}. \quad (5.3)$$

Combining the weak-* compactness argument and Proposition 5.1, we see that

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\nu_n} &= u \text{ weakly-* in } L_{T_0}^\infty H_x^{s,0} \cap L_{T_0}^\infty H_x^{s',\alpha'}, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u_{\nu_n} &= \langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u \text{ weakly-* in } L_x^2 L_{T_0}^\infty \text{ for } j = 1, 2,
\end{aligned}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_x^{s-3/2} \partial_x^2 u_{\nu_n} = D_x^{s-3/2} \partial_x^2 u \text{ weakly-* in } L_x^\infty L_{T_0}^2.$$

To guarantee the convergence of the nonlinearity, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(u_{\nu_n}, \partial_x u_{\nu_n}) = \mathcal{N}(u, \partial_x u)$ in $L_{T_0}^\infty L_x^2$, we require certain strong convergence of u_{ν_n} . This is given by

Proposition 5.2 *$\{u_{\nu_n}\}$ is the Cauchy sequence in $L_{T_0}^\infty H_x^{3/2,0}$. Namely, we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\nu_n} = u \text{ strongly in } L_{T_0}^\infty H_x^{3/2,0}. \quad (5.4)$$

To prove Proposition 5.1 and 5.2, we need two lemmas.

Lemma 5.3

$$\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}} \leq C\|D_x^{s-1}\vec{w}_\nu\|_{L_T^\infty L_x^2} + C\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s-1,0}}, \quad (5.5)$$

$$\|D_x^{s-3/2}\partial_x^2 u_\nu\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C\|D_x^{s-3/2}\partial_x \vec{w}_\nu\|_{L_x^\infty L_T^2} + C_\varphi T^\beta \|u_\nu\|_{Y_T}^2, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{3/2,0}} &\leq C\|D_x^{1/2}(\vec{w}_{\nu'} - \vec{w}_\nu)\|_{L_T^\infty L_x^2} + C\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{1,0}} \\ &\quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta) \|u_\nu\|_{Y_T}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2(u_{\nu'} - u_\nu)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq C\|\partial_x(\vec{w}_{\nu'} - \vec{w}_\nu)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\quad + C_\varphi T^\beta (\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{3/2,0}} + \|\partial_x(u_{\nu'} - u_\nu)\|_{L_T^4 L_x^\infty}) \\ &\quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta) \|u_{\nu'}\|_{Y_T}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Lemma 5.4 *Let $j = 0, 1$. Then, we have*

$$\|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} \leq C\|u_0 - \varphi\|_{X^s} + C_\varphi T^\beta + CT^{1/2} \|u_\nu\|_{Y_T}^2. \quad (5.9)$$

Proof of Lemma 5.3. These estimates follow from the relation $\partial_x \vec{u}_\nu = \mathbf{K}_\nu(\varphi)^{-1} \vec{w}_\nu - \mathbf{J}(\varphi) \vec{u}_\nu$. (Q.E.D.)

Proof of Lemma 5.4. Applying Lemma 3.10 to (5.1), we see that

$$\begin{aligned} \|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} &\leq C\|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\leq C(\|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j U_\nu(t)(u_0 - \varphi)\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j(U_\nu(t) - I)\varphi\|_{L_x^2 L_T^\infty}) \\ &\quad + CT^{1/2} \|D_x^{s-3/2}(\mathcal{N}_q \partial_x^2 u_\nu + \mathcal{N}_{\bar{q}} \partial_x^2 \vec{u}_\nu)\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + CT^{1/2} \|(\mathcal{N}_q \partial_x^2 u_\nu + \mathcal{N}_{\bar{q}} \partial_x^2 \vec{u}_\nu)\|_{L_T^2 H_x^{s',\alpha'}} \\ &\quad + CT\|u_\nu\|_{L_T^\infty X^s}^2, \end{aligned}$$

where $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_q(u_\nu, \partial_x u_\nu)$ and $\mathcal{N}_{\bar{q}} = \mathcal{N}_{\bar{q}}(u_\nu, \partial_x u_\nu)$. Since

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j(U_\nu(t) - I)\varphi\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq C\|\langle x \rangle^2 (U_\nu(t) - I) \partial_x^j \varphi\|_{L_T^\infty L_x^\infty} \\ &\leq C\|(U_\nu(t) - I) \langle x \rangle^2 \partial_x^j \varphi\|_{L_T^\infty L_x^\infty} + C\|[x^2, U_\nu(t)] \partial_x^j \varphi\|_{L_T^\infty L_x^\infty} \\ &\leq CT\|\varphi\|_{H_x^{3,2}}, \end{aligned}$$

Hence, Lemma 3.10 and 4.1 yield

$$\|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} \leq C\|u_0 - \varphi\|_{X^s} + C_\varphi T^\beta + CT^{1/2} \|u_\nu\|_{Y_T}^2.$$

This completes the proof. (Q.E.D.)

Proof of Proposition 5.1. Let us proceed in several steps.

(Step 1) Estimate of $\|u_\nu\|_{initial}$. Applying Lemma 3.1 to (5.2), we have

$$\begin{aligned} \|D_x^{s-1}\vec{w}_\nu\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leq \|\vec{w}_{\nu,0}\|_{H_x^{s-1,0}} \\ &\quad + C\|D_x^{s-3/2}\mathbf{K}_\nu(\varphi)(\mathbf{B}(u_\nu, \partial_x u_\nu) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_\nu\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + CT\|D_x^{s-1}\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^\infty L_x^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

According to Lemma 4.1 and the commutator estimate $[D_x^{s-3/2}, \mathbf{K}_\nu(\varphi)] \in \mathcal{B}(L_x^1 L_T^2)$ (Lemma 3.6), we see that

$$\begin{aligned} (\text{the second term in (5.10)}) &\leq C\|\mathbf{K}_\nu(\varphi)D_x^{s-3/2}(\mathbf{B}(u_\nu, \partial_x u_\nu) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_\nu\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + \|[D_x^{s-3/2}, \mathbf{K}_\nu(\varphi)](\mathbf{B}(u_\nu, \partial_x u_\nu) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_\nu\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\leq C(\max_{j=0,1}\|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty})\|u_\nu\|_{Y_T} \\ &\quad + C_\varphi T^\beta(1 + \|u_\nu\|_{Y_T})\|u_\nu\|_{Y_T}. \end{aligned}$$

Combining Lemma 4.2, 5.3, 5.4 and the above estimates, we have

$$\begin{aligned} \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}} &\leq C\|u_0\|_{X^s} + C\|u_0 - \varphi\|_{X^s}\|u_\nu\|_{Y_T} \\ &\quad + C_\varphi T^\beta(1 + \|u_\nu\|_{Y_T}^2)\|u_\nu\|_{Y_T} + C\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s-1}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

The estimate $\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s-1,0}}$ in (5.11) easily follows. In fact, by (5.1),

$$\begin{aligned} \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s-1,0}} &\leq \|u_0\|_{H_x^{s-1,0}} + CT\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}}^2 \\ &\leq \|u_0\|_{X^s} + CT\|u_\nu\|_{Y_T}^2. \end{aligned}$$

Thus, from (5.11), it follows that

$$\begin{aligned} \|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s,0}} &\leq C\|u_0\|_{X^s} + C\|u_\nu - \varphi\|_{X^s}\|u_\nu\|_{Y_T} \\ &\quad + C_\varphi T^\beta(1 + \|u_\nu\|_{Y_T}^2)\|u_\nu\|_{Y_T}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

We next estimate $\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s',\alpha'}}$. Applying Lemma 3.8, 4.1 and 4.2 to (5.1), we can show that

$$\|u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{s',\alpha'}} \leq C\|u_0\|_{X^s} + CT^{1/2}\|u_\nu\|_{Y_T}^2. \quad (5.13)$$

The estimates (5.12) and (5.13) implies that

$$\begin{aligned} \|u_\nu\|_{initial} &\leq C\|u_0\|_{X^s} + C\|u_0 - \varphi\|_{X^s}\|u_\nu\|_{Y_T} \\ &\quad + C_\varphi T^\beta(1 + \|u_\nu\|_{Y_T}^2)\|u_\nu\|_{Y_T}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

(Step 2) Estimate of $\|u_\nu\|_{smooth}$. Applying Lemma 3.1 to (5.2), we have

$$\begin{aligned} \|D_x^{s-3/2}\partial_x \vec{w}_\nu\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq \|\vec{w}_{\nu,0}\|_{H_x^{s-1,0}} \\ &\quad + C\|D_x^{s-3/2}\mathbf{K}_\nu(\mathbf{B}(u_\nu, \partial_x u_\nu) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_\nu\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + CT\|D_x^{s-1}\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^\infty L_x^2}, \end{aligned}$$

In the above estimate, we used

$$\begin{aligned}
\|D_x^{s-3/2}\partial_x \mathbf{G}_\nu \tilde{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq \int_0^T \|\chi_{[0,t]}(t') D_x^{s-3/2}\partial_x \mathbf{U}_\nu(t-t') \tilde{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_x^\infty L_T^2} dt' \\
&\leq \int_0^T \|D_x^{s-3/2}\partial_x \mathbf{U}_\nu(t) \tilde{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_x^\infty L_T^2} dt' \\
&\leq C \|D_x^{s-1} \tilde{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^1 L_x^2} \quad (\text{by Lemma 3.1}),
\end{aligned}$$

where $\chi_{[0,t]}$ is the characteristic function on $[0, t]$. Then, similarly to the derivation of (5.11), we see that

$$\begin{aligned}
\|D_x^{s-3/2}\partial_x^2 u_\nu\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq C \|u_0\|_{X^s} + C \|u_0 - \varphi\|_{X^s} \|u_\nu\|_{Y_T} \\
&\quad + C_\varphi T^\beta (1 + \|u_\nu\|_{Y_T}^2) \|u_\nu\|_{Y_T}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

On the other hand, by applying Lemma 3.3 and 4.1 to (5.1),

$$\|D_x^{s-\sigma-3/2}\partial_x^2 u\|_{L_x^{6/\sigma} L_T^{6/(3-2\sigma)}} \leq C \|u_0\|_{X^s} + C T^\beta \|u_\nu\|_{Y_T}^2 \tag{5.16}$$

for $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$. Combining (5.15) and (5.16), we have

$$\begin{aligned}
\|u_\nu\|_{smooth} &\leq C \|u_0\|_{X^s} + C \|u_0 - \varphi\|_{X^s} \|u_\nu\|_{Y_T} \\
&\quad + C_\varphi T^\beta (1 + \|u_\nu\|_{Y_T}^2) \|u_\nu\|_{Y_T}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

(Step 3) Estimate of $\|u_\nu\|_{maxim}$ and $\|u_\nu\|_{lower}$. Applying Lemma 3.8–3.10 and the nonlinear estimates in Lemma 4.1 to (5.1), we see that

$$\|u_\nu\|_{maxim} + \|u_\nu\|_{lower} \leq C \|u_0\|_{X^s} + C T^\beta \|u_\nu\|_{Y_T}^2. \tag{5.18}$$

(Step 4) Uniform Bound of $\|u_\nu\|_{Y_T}$. Collecting the estimates in (Step 1)–(Step 3), we have

$$\begin{aligned}
\|u_\nu\|_{Y_T} &\leq C_0 \|u_0\|_{X^s} + C_1 \|u_0 - \varphi\|_{X^s} \|u_\nu\|_{Y_T} \\
&\quad + C_\varphi T^\beta (1 + \|u_\nu\|_{Y_T}^2) \|u_\nu\|_{Y_T},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

where C_0, C_1 and C_φ do not depend on $\nu \in (0, 1]$ (C_φ possibly diverges as $\varphi \rightarrow u_0$ in X^s). Taking the limit $T \uparrow T_\nu^*$ in (5.19), we observe

$$\begin{aligned}
2C_0 \|u_0\|_{X^s} &\leq C_0 \|u_0\|_{X^s} + 2C_0 C_1 \|u_0 - \varphi\|_{X^s} \|u_0\|_{X^s} \\
&\quad + 2C_0 C_\varphi T_\nu^{*\beta} (1 + 4C_0^2 \|u_0\|_{X^s}^2) \|u_0\|_{X^s}.
\end{aligned}$$

Let us choose $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ sufficiently close to u_0 in X^s so that $C_1 \|u_0 - \varphi\|_{X^s} \leq 1/4$. Then, we obtain the uniform lower bound of T_ν^* such that

$$(4C_\varphi (1 + 4C_0 \|u_0\|_{X^s}^2))^{-\beta} \equiv T_0 \leq T_\nu^*.$$

Hence, $\|u_\nu\|_{Y_{T_0}} \leq 2C_0 \|u_0\|_{X^s}$ for $\nu \in (0, 1]$. (Q.E.D.)

Proof of Proposition 5.2. We measure $u_{\nu'} - u_\nu$ in Z_T . Applying Lemma 3.1 and 3.11 to (5.2), we can show that

$$\begin{aligned}
& \|D_x^{1/2}(\vec{w}_{\nu'} - \vec{w}_\nu)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
& \leq C\|\mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu',0} - \mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu,0}\|_{L_T^\infty H_x^{1/2,0}} \\
& \quad + C\|\mathbf{K}_{\nu'}(\varphi)(\mathbf{B}(u_{\nu'}, \partial_x u_{\nu'}) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_{\nu'} - \mathbf{K}_\nu(\mathbf{B}(u_\nu, \partial_x u_\nu) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_\nu\|_{L_x^1 L_T^2} \\
& \quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta)T^\beta\|\mathbf{K}_\nu(\varphi)(\mathbf{B}(u_\nu, \partial_x u_\nu) - \mathbf{B}(\varphi, \partial_x \varphi))\partial_x^2 \vec{u}_\nu\|_{L_T^2 H_x^{s-3/2,0}} \\
& \quad + CT^{1/2}\|D_x^{1/2}(\vec{R}_{\nu'}(\varphi, u_{\nu'}) - \vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu))\|_{L_T^2 L_x^2} \\
& \quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta)T\|\vec{R}_\nu(\varphi, u_\nu)\|_{L_T^\infty H_x^{s-3/2,0}}.
\end{aligned}$$

Then, Lemma 4.2 and 5.3 yield

$$\begin{aligned}
& \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{L_T^\infty H_x^{3/2,0}} \\
& \leq C\|\mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu',0} - \mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu,0}\|_{L_T^\infty H_x^{1/2,0}} + C\|(U_{\nu'}(t) - U_\nu(t))u_0\|_{L_T^\infty H_x^{1,0}} \\
& \quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta)(1 + \|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})^2 \\
& \quad + C_\varphi T^\beta(\|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} \\
& \quad + C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Applying Lemma 3.1 to (5.2) and using the similar derivation of (5.20), we see that

$$\begin{aligned}
& \|\partial_x^2(u_{\nu'} - u_\nu)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
& \leq C\|\partial_x(\mathbf{U}_{\nu'}(t)\vec{w}_{\nu',0} - \mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu,0})\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
& \quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta)(1 + \|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})^2 \\
& \quad + C_\varphi T^\beta(1 + \|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} \\
& \quad + C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Finally, applying Lemma 3.9 to (5.1), we have

$$\begin{aligned}
\|\langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x^j(u_{\nu'} - u_\nu)\|_{L_T^4 L_x^\infty} & \leq \|\langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x^j(U_{\nu'}(t) - U_\nu(t))u_0\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
& \quad + CT^\beta(\|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} \\
& \quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta)(\|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T}).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Collecting (5.20)–(5.22), we can show that

$$\begin{aligned}
\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} & \leq C\|\mathbf{U}_{\nu'}(t)\vec{w}_{\nu',0} - \mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu,0}\|_{L_T^\infty H_x^{1/2,0}} + C\|\partial_x \mathbf{U}_{\nu'}(t)\vec{w}_{\nu',0} - \mathbf{U}_\nu(t)\vec{w}_{\nu,0}\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
& \quad + C\|(U_{\nu'}(t) - U_\nu(t))u_0\|_{Z_T} \\
& \quad + C(\nu'^\beta + \nu^\beta)(1 + \|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})^2 \\
& \quad + C_\varphi T^\beta(1 + \|u_{\nu'}\|_{Y_T} + \|u_\nu\|_{Y_T})\|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} \\
& \quad + C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Taking $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ close to u_0 in X^s so that $C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_\nu - \varphi)\|_{L_x^1 L_T^\infty} < 1/4$ for small $T > 0$, we observe

$$\lim_{\nu', \nu \rightarrow 0} \|u_{\nu'} - u_\nu\|_{Z_T} = 0.$$

Hence, we obtain Proposition 5.2. (Q.E.D.)

Proof of Theorem 1.1 (Existence). Taking the limit $n \rightarrow \infty$ in the integral equation (5.1), we have

$$u = U_0(t)u_0 - iG_0\mathcal{N}(u, \partial_x u) \quad \text{in } L_{T_0}^\infty L_x^2, \quad (5.24)$$

where $u \in Y_{T_0}$. We next prove that the solution u is continuous in time as a X^s valued function. Let us write

$$\begin{aligned} & G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u)(t+h) - G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u)(t) \\ &= \int_t^{t+h} U_0(t+h-t')\mathcal{N}(u, \partial_x u) dt' + (U_0(h) - I) \int_0^t U_0(t-t')\mathcal{N}(u, \partial_x u) dt' \\ &\equiv J_1 + (U(h) - I)J_2. \end{aligned}$$

Since

$$\|D_x^s J_1\|_{L_x^2} \leq C \|D_x^{s-3/2} \partial_x \mathcal{N}(u, \partial_x u)\|_{L_x^1 L^2([t, t+h])},$$

the convergence theorem yields $\|J_1\|_{H_x^{s,0}} \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. Also, we note that $J_2 \in H_x^{s,0}$. This implies that $\lim_{h \rightarrow 0} (U(h) - I)J_2 = 0$ in $H_x^{s,0}$. Thus, $G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u) \in C([0, T_0]; H_x^{s,0})$. The continuity of $G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u)$ in $H_x^{s',\alpha'}$ follows from the representation:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{\alpha'} G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u) &= G_0 \langle x \rangle^{\alpha'} \mathcal{N}(u, \partial_x u) - 2G_0(\partial_x \langle x \rangle^{\alpha'}) \partial_x G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u) \\ &\quad - G_0(\partial_x^2 \langle x \rangle^{\alpha'}) G_0\mathcal{N}(u, \partial_x u). \end{aligned}$$

Hence, $u \in C([0, T_0]; H_x^{s,0} \cap H_x^{s',\alpha'})$. (Q.E.D.)

6 Proof of Theorem 1.1 (uniqueness)

Let u_k ($k = 1, 2$) be the solutions to (1.1) with $u_k \in C([0, T]; X^s)$ and $\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u_k \in L_x^2 L_T^\infty$. Let

$$T^* = \sup\{T' \in [0, T]; u_1(t) = u_2(t) \quad \text{for } t \in [0, T']\}.$$

Our main concern in this section is to show that $T^* = T$ by saying contradiction. Therefore, we first assume that $T^* < T$. Then, there exists some $\tau > 0$ such that $I^* \equiv [T^*, T^* + \tau] \subset [0, T]$. We estimate the quantity $\|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}}$ where

$$\|u\|_{Z_{I^*}} = \|u\|_{L_{I^*}^\infty H_x^{1/2,0}} + \|\partial_x^2 u\|_{L_x^\infty L_{I^*}^2} + \max_{j=0,1} \|\langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x^j u\|_{L_{I^*}^4 L_x^\infty},$$

with $\|u\|_{L_{I^*}^r L_x^p} = (\int_{I^*} \|u(t, \cdot)\|_{L_x^p}^r dt)^{1/r}$ and $\|u\|_{L_x^p L_{I^*}^r} = (\int_{-\infty}^{\infty} \|u(\cdot, x)\|_{L_{I^*}^r}^p dx)^{1/p}$. Note that $\|u_k\|_{Z_{I^*}} < \infty$ for $k = 1, 2$ since u_k satisfies (5.1) and we see that $\partial_x^2 u_k \in L_x^\infty L_{I^*}^2$. Following the analogous argument as in section 2, we see that u_k satisfies the integral equation like

$$u_k = U_0(t - T^*)u_k(T^*) - i \int_{T^*}^t U_0(t - t') \mathcal{N}(u_k, \partial_x u_k) dt' \quad (6.1)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{w}_k &= U_0(t - T^*)\vec{w}_k(T^*) \\ &\quad - i \int_{T^*}^t U_0(t - t') \mathbf{K}_0(\varphi^*)(\mathbf{B}(u_k, \partial_x u_k) - \mathbf{B}(\varphi^*, \partial_x \varphi^*)) \partial_x^2 \vec{u}_k dt' \\ &\quad - i \int_{T^*}^t U_0(t - t') \vec{R}_0(\varphi^*, u_k)(t') dt', \end{aligned} \quad (6.2)$$

where $\vec{w}_k = \mathbf{K}_0(\varphi^*)(\partial_x + \mathbf{J}(\varphi^*))\vec{u}_k$, and $\varphi^* \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Note that $\vec{w}_1(T^*) = \vec{w}_2(T^*)$. By referring to the proof of Proposition 5.2, it follows that

$$\begin{aligned} &\|D_x^{1/2}(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)\|_{L_{I^*}^\infty L_x^2} + \|\partial_x(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)\|_{L_x^\infty L_{I^*}^2} \\ &\leq C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_1 - \varphi^*)\|_{L_x^1 L_{I^*}^\infty} \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}} \\ &\quad + C_{\varphi^*} \tau^\beta (1 + \max_{j=0,1} \|\partial_x^j u_1\|_{L_x^1 L_{I^*}^\infty} + \max_{k=1,2} \|u_k\|_{L_{I^*}^\infty X^s}) \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}}. \end{aligned}$$

Making use of the relation $\partial_x \vec{u}_k = \mathbf{K}_0(\varphi^*)^{-1} \vec{w}_k - \mathbf{J}(\varphi^*) \vec{u}_k$, we have

$$\begin{aligned} &\|u_1 - u_2\|_{L_{I^*}^\infty H_x^{3/2,0}} + \|\partial_x^2(u_1 - u_2)\|_{L_x^\infty L_{I^*}^2} \\ &\leq C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_1 - \varphi^*)\|_{L_x^1 L_{I^*}^\infty} \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}} \\ &\quad + C_{\varphi^*} \tau^\beta (1 + \max_{j=0,1} \|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u_1\|_{L_x^1 L_{I^*}^\infty} + \max_{k=1,2} \|u_k\|_{L_{I^*}^\infty X^s}) \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

On the other hand, by (6.1), we see that

$$\begin{aligned} &\|\langle x \rangle^{1/2-\mu} \partial_x^j(u_1 - u_2)\|_{L_{I^*}^4 L_x^\infty} \\ &\leq C \tau^\beta (\max_{j=0,1} \|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u_1\|_{L_x^2 L_{I^*}^\infty} + \max_{k=1,2} \|u_k\|_{L_{I^*}^\infty X^s}) \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Combining (6.3) and (6.4), we have

$$\begin{aligned} &\|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}} \\ &\leq C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_1 - \varphi^*)\|_{L_x^1 L_{I^*}^\infty} \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}} \\ &\quad C_{\varphi^*} \tau^\beta (1 + \max_{j=0,1} \|\langle x \rangle^{\alpha'} \partial_x^j u_1\|_{L_x^2 L_{I^*}^\infty} + \max_{k=1,2} \|u_k\|_{L_{I^*}^\infty X^s}) \|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

We here choose $\varphi^* \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ close to $u_1(T^*)$ in X^s so that $C \max_{j=0,1} \|\partial_x^j(u_1 - \varphi^*)\|_{L_x^1 L_{I^*}^\infty} < 1/4$ for small $\tau > 0$. Thereafter, fixing φ^* and taking $\tau > 0$ further small, we observe $\|u_1 - u_2\|_{Z_{I^*}} \leq 0$. Hence, we can continue the uniqueness over T^* . This is the contradiction. (Q.E.D.)

References

- [1] D. Bekiranov, T. Ogawa and G. Ponce, *On the well-posedness of Benny's interaction equation of short and long waves*, Advances in Diff. Eq. **6** (1996) 919–937.
- [2] N. Hayashi and T. Ozawa, "Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension," Diff. and Integral Eq. **7** (1994), 453–461.
- [3] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré **10** (1993) 255–288.
- [4] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, "Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction mapping principle," Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527–620.
- [5] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, "Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations," Invent. Math. **134** (1998) 489–545.
- [6] C.E. Kenig and A. Ruiz, *A strong (2, 2) estimate for the maximal function associated to the Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983) 239–246.
- [7] T. Ozawa, *Finite energy solutions for the Schrödinger equations with quadratic nonlinearity in one space dimension*, Funkcialaj Ekvacioj **41** (1998) 451–468.
- [8] E. M. Stein, *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956) 482–492.
- [9] R.S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of wave equation*, Duke Math. J. **44** (1977) 705–714.
- [10] L. Vega, *Schrödinger equations: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988) 874–878.
- [11] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys. **110** (1987) 415–426.

Approximation of nonlinear parabolic PDE by first order functional PDE

Kazufumi Shimano

(Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University)

E-mail address: kshimano@comp.metro-u.ac.jp

This paper is based on the joint work with Professor Hitoshi Ishii of Waseda University.

1. Introduction

We consider the asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for the functional partial differential equation

$$(CP)_\varepsilon \quad \begin{cases} (E)_\varepsilon & u_t^\varepsilon(x, t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon} H(Du^\varepsilon(x, t, \xi), \xi) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_I k(\xi, \eta) [u^\varepsilon(x, t, \eta) - u^\varepsilon(x, t, \xi)] d\eta \\ & \text{for } (x, t, \xi) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \times I, \\ u^\varepsilon(x, 0, \xi) = g(x, \xi) & \text{for } (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I, \end{cases}$$

where ε is a positive parameter, I is a given finite interval of the real line, H is a Borel function on $\mathbf{R}^n \times I$ such that for each $\xi \in I$ the function $H(\cdot, \xi)$ is continuous on $\mathbf{R}^n$, and k is a bounded, positive, Borel measurable function on $I \times I$.

The functional partial differential equation $(E)_\varepsilon$ may be regarded as an infinite system of first order partial differential equations. Indeed, one of our motivations to study $(CP)_\varepsilon$ is to extend an asymptotic result obtained in Evans [3] for a finite system of partial differential equations to that for $(CP)_\varepsilon$. Prior to [3] there are many contributions to the asymptotic behavior of solutions of systems of differential equations related to the problems treated in [3] and we refer for these to [3], [6], [7] and the references therein.

The functional partial differential equation $(E)_\varepsilon$ arises as a fundamental equation for the optimal control of the system whose states are described by ordinary differential equations, subject to random changes of states in I and to control which induce the integral term in $(E)_\varepsilon$ and the nonlinearity of H , respectively.

Other than the extension to infinite systems, new features in this paper beyond [3] are: (i) the treatment of the initial layer, i.e., the case when the initial data $g(x, \xi)$ depends on ξ and (ii) the nonlinearity of the term H .

In our asymptotic analysis of $(CP)_\varepsilon$, we use the perturbed test function method developed in [3], which is based on the notion of viscosity solution and the stability properties of viscosity solutions. The extension from finite systems to infinite systems was not trivial and, as we will see in section 3, we need to take into account of terms up to order ε^2 when we build the perturbed test function.

The problem of the initial layer in our analysis is resolved by constructing appropriate barrier functions, a result of which is stated in Lemma 3.4 below. On the other hand, the extension to the nonlinear term H is rather straightforward.

2. Preliminaries

We use the following notation: $Q_T = \mathbf{R}^n \times (0, T)$, $R_T = \mathbf{R}^n \times [0, T)$ for $0 < T \leq \infty$, and for function $f : S \rightarrow \mathbf{R}^m$ we write $\|f\|_\infty = \sup_S |f|$. I denotes a fixed finite interval, with length $|I| > 0$, and also the identity operator on a given space.

For any $k \in \mathbf{Z}_+ := \mathbf{N} \cup \{0\}$ and $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $C^k(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$ denotes the set of functions f on $\Omega \times I$ such that for each $x \in \Omega$ the function $f(x, \cdot)$ is Borel measurable in I and for each $\xi \in I$ the function $f(\cdot, \xi)$ is k times continuously differentiable on Ω . We write also $C(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$ for $C^0(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$. For any Borel subset $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $\mathcal{B}(\Omega)$ denotes the space of all Borel functions on Ω , and $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ denotes the Banach space of bounded Borel functions f on Ω with norm $\|f\|_\infty$.

Throughout this paper we fix positive numbers κ_0, κ_1 , with $\kappa_0 < \kappa_1$, and consider the class $\mathcal{D}_0$ of Borel functions k on $I \times I$ such that $\kappa_0 \leq k(\xi, \eta) \leq \kappa_1$ for all $\xi, \eta \in I$.

We call a continuous function $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ a modulus if ω is non-decreasing in $[0, \infty)$ and $\omega(0) = 0$.

Let G_1 and G_2 denote the sets, respectively, of all pairs (ω, L) of a modulus ω and a positive constant L and of all pairs of a collection $\{\omega_R\}_{R>0}$ of moduli and a collection $\{L_R\}_{R>0}$ of positive constants. We write $G = G_1 \times G_2$.

For $\gamma_1 \equiv (\omega, L) \in G_1$ let $\mathcal{D}_1(\gamma_1)$ denote the set of all functions $g \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ such that

$$(D1) \quad |g(x, \xi) - g(y, \xi)| \leq \omega(|x - y|), \quad |g(x, \xi)| \leq L \quad \text{for all } x, y \in \mathbf{R}^n, \xi \in I.$$

For $\gamma_2 \equiv (\{\omega_R\}_{R>0}, \{L_R\}_{R>0}) \in G_2$ let $\mathcal{D}_2(\gamma_2)$ denote the set of all functions $H \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ such that

$$(D2) \quad |H(p, \xi) - H(q, \xi)| \leq \omega_R(|p - q|), \quad |H(p, \xi)| \leq L_R \\ \text{for all } p, q \in B(0, R), \xi \in I, R > 0,$$

where $B(0, R)$ denotes the closed ball with radius R centered at the origin. For $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2) \in G$ we write

$$\mathcal{D}(\gamma) = \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1(\gamma_1) \times \mathcal{D}_2(\gamma_2),$$

and set

$$\mathcal{D}_i = \bigcup \{\mathcal{D}_i(\gamma) \mid \gamma \in G_i\} \quad \text{for } i = 1, 2 \quad \text{and} \quad \mathcal{D} = \bigcup \{\mathcal{D}(\gamma) \mid \gamma \in G\}.$$

We often consider the subclass of functions $k \in \mathcal{D}_0$ for which

$$(K1) \quad \int_I k(\xi, \eta) d\eta = 1 \quad \text{for all } \xi \in I.$$

For such a function k , we define the continuous linear operator $K : \mathcal{B}^\infty(I) \rightarrow \mathcal{B}^\infty(I)$ by

$$(2.1) \quad Kf(\xi) = \int_I k(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \quad \text{for } \xi \in I.$$

Note that this formula extends the domain of definition of K to the space of (Lebesgue) measurable functions $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ which are integrable. Associated with this operator, we define the compact linear operator $\bar{K} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ by

$$(2.2) \quad \bar{K}f(\xi) = \int_I k(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \quad \text{for } f \in L^2(I).$$

As usual and in the above formula, we often identify elements of $L^2(I)$ with measurable functions on I , the square of which are integrable. The precise meaning of (2.2) is the following: for function $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ which is measurable and such that $|f|^2$ is integrable, let

$$[f] := \{g : I \rightarrow \mathbf{R} \mid g \text{ measurable, } g(\xi) = f(\xi) \text{ a.e. } \xi \in I\}.$$

With this notation, $\bar{K}$ is defined by

$$\bar{K}[f] = [Kf].$$

By hypothesis (K1), the operator $\bar{K}$ has unity as its eigenvalue and the function $\mathbf{1} \in L^2(I)$ defined by $\mathbf{1}(\xi) \equiv 1$ as a corresponding eigenfunction. By the Perron-Frobenius theory, we see that the kernel $\text{Ker}(I - \bar{K})$ is one-dimensional, i.e.,

$$\text{Ker}(I - \bar{K}) = \text{span}\{\mathbf{1}\}.$$

(See the proof of Lemma 3.5 in section 3.)

By the Fredholm-Riesz-Schauder theory (see, e.g., [8]), the kernel $\text{Ker}(I - \bar{K}^*)$, where $\bar{K}^*$ denotes the adjoint operator of $\bar{K}$, is a one-dimensional subspace of $L^2(I)$. Hence, there exists a unique vector $r \in L^2(I)$ such that

$$\begin{aligned} \int_I r(\xi) k(\xi, \eta) d\xi &= r(\eta) \quad \text{a.e. } \eta \in I, \\ \int_I r(\xi) d\xi &= 1. \end{aligned}$$

When we regard the vector r as a function, we may assume by replacing r if necessary that $r \in \mathcal{B}^\infty(I)$ and that

$$(2.3) \quad \int_I r(\xi) k(\xi, \eta) d\xi = r(\eta) \quad \text{for all } \eta \in I.$$

Moreover, by the Perron-Frobenius theory, we see that $r(\xi) > 0$ for all $\xi \in I$. Then from (2.3) we get

$$(2.4) \quad \kappa_0 \leq r(\xi) \leq \kappa_1 \quad \text{for } \xi \in I.$$

By the Fredholm-Riesz-Schauder theory, there is a bounded linear operator $\bar{S} : \{r\}^\perp \rightarrow \{1\}^\perp$, where $B^\perp$ denotes the orthogonal complement of B in $L^2(I)$, such that

$$(2.5) \quad \bar{S}f - \bar{K}\bar{S}f = f \quad \text{for } f \in \{r\}^\perp.$$

For any integrable function $h : I \rightarrow \mathbf{R}$, we define

$$\{h\}^{\perp, \infty} = \{f \in \mathcal{B}^\infty(I) \mid \int_I h(\xi)f(\xi)d\xi = 0\}.$$

Associated with $\bar{S}$, we define a continuous linear operator $S : \{r\}^{\perp, \infty} \rightarrow \{1\}^{\perp, \infty}$ by

$$Sf = f + Kg, \quad \text{with } g \in \bar{S}[f].$$

Here note that Kg does not depend on the choice of $g \in \bar{S}[f]$ and that for $f \in \{r\}^{\perp, \infty}$ and $g \in \bar{S}[f]$,

$$\begin{aligned} |Kg(\xi)| &\leq \int_I k(\xi, \eta)|g(\eta)|d\eta \leq \left(\int_I |k(\xi, \eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \|\bar{S}[f]\|_2 \\ &\leq \kappa_1 |I|^{1/2} \|\bar{S}\| \|f\|_2 \leq \kappa_1 |I| \|\bar{S}\| \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

where $\|f\|_2 = (\int_I |f(\xi)|^2 d\xi)^{1/2}$.

Now, (2.5) reads

$$(2.6) \quad (I - K)Sf = f \quad \text{for } f \in \{r\}^{\perp, \infty}.$$

Let $H \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ satisfy (D2) for some $(\{\omega_R\}, \{L_R\}) \in G_2$ and

$$(H1) \quad \int_I H(p, \xi)r(\xi)d\xi = 0 \quad \text{for } p \in \mathbf{R}^n.$$

We define $a \in C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ by

$$(2.7) \quad a(p, \cdot) = SH(p, \cdot).$$

Observe that if, in addition, we assume that $H \in C^m(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ for some $m \in \mathbf{N}$ and that for each $R > 0$ there are a constant $C_R > 0$ and a modulus ω_R such that for any multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ with $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$,

$$(2.8) \quad \begin{aligned} |D_p^\alpha H(p, \xi)| &\leq C_R \quad \text{for } (p, \xi) \in B(0, R) \times I, \xi \in I, \\ |D_p^\alpha H(p, \xi) - D_p^\alpha H(q, \xi)| &\leq \omega_R(|p - q|) \quad \text{for } p, q \in B(0, R), \xi \in I, R > 0, \end{aligned}$$

and if we set $f(p, \xi) = SH(p, \cdot)(\xi)$ for $(p, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I$, then $f \in C^m(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ and furthermore for each $R > 0$ there exist a constant $M_R > 0$ and a modulus μ_R such that for any multi-index $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, with $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} |D_p^\alpha f(p, \xi)| &\leq M_R \quad \text{for } (p, \xi) \in B(0, R) \times I, R > 0, \\ |D_p^\alpha f(p, \xi) - D_p^\alpha f(q, \xi)| &\leq \mu_R(|p - q|) \quad \text{for } p, q \in B(0, R), \xi \in I, R > 0. \end{aligned}$$

In addition to (D2) and (H1), we assume that $H \in C^1(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ and that H satisfies (2.8) with $m = 1$. We define $A : \mathbf{R}^n \times I \rightarrow \mathcal{S}^n$ and $\bar{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ by

$$(2.10) \quad \begin{aligned} A(p, \xi) &= \frac{1}{2} (D_p H(p, \xi) \otimes D_p a(p, \xi) + D_p a(p, \xi) \otimes D_p H(p, \xi)), \\ \bar{A}(p) &= \int_I r(\xi) A(p, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

The components of the matrix-valued function A belong to $C(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$. Also, in view of (2.9), we see that $\bar{A}$ is continuous on $\mathbf{R}^n$. We claim that $\bar{A}(p)$ is a non-negative definite matrix for any $p \in \mathbf{R}^n$. To see this, we first observe that

$$D_p H(p, \xi) = D_p a(p, \xi) - \int_I k(\xi, \eta) D_p a(p, \eta) d\eta \quad \text{for all } (p, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I.$$

Let $y \in \mathbf{R}^n$ and compute that for $p \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} &\langle \bar{A}(p)y, y \rangle \\ &= \int_I r(\xi) \langle D_p H(p, \xi), y \rangle \langle D_p a(p, \xi), y \rangle d\xi \\ &= \int_I r(\xi) \langle D_p a(p, \xi), y \rangle^2 d\xi - \int \int_{I \times I} r(\xi) k(\xi, \eta) \langle D_p a(p, \eta), y \rangle \langle D_p a(p, \xi), y \rangle d\xi d\eta \\ &\geq \int_I r(\xi) \langle D_p a(p, \xi), y \rangle^2 d\xi \\ &\quad - \left(\int \int_{I \times I} r(\xi) k(\xi, \eta) \langle D_p a(p, \eta), y \rangle^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \left(\int \int_{I \times I} r(\xi) k(\xi, \eta) \langle D_p a(p, \xi), y \rangle^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

which was to be proven. Here and henceforth we write $\langle p, q \rangle$ for the Euclidean inner product of $p, q \in \mathbf{R}^n$.

Let $\Omega \subset R_\infty$ and $(\nu, M) \in G_1$. We denote by $\mathcal{U}(\nu, M) \equiv \mathcal{U}(\Omega \times I; \nu, M)$ the set of functions $u \in C(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$ such that

$$\begin{aligned} |u(x, t, \xi) - u(y, s, \xi)| &\leq \nu(|x - y| + |t - s|) \\ |u(x, 0, \xi)| &\leq M \end{aligned}$$

for all $(x, t) \in \Omega$ and $\xi \in I$. We denote

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(\Omega \times I) = \bigcup \{ \mathcal{U}(\lambda) \mid \lambda \in G_1 \}.$$

We write

$$\mathcal{U}_c(\Omega \times I; \lambda) = \mathcal{U}(\Omega \times I; \lambda) \cap C(\Omega \times I), \quad \mathcal{U}_c(\Omega \times I) = \mathcal{U}(\Omega \times I) \cap C(\Omega \times I).$$

We denote by $\mathcal{U}^+(\Omega \times I)$ the set of those functions u on $\Omega \times I$ such that for each $(x, t) \in \Omega$ the function $u(x, t, \cdot)$ is Borel measurable and integrable in I and for each $\xi \in I$ the function $u(\cdot, \xi)$ is upper semicontinuous in Ω . We set $\mathcal{U}^-(\Omega \times I) = -\mathcal{U}^+(\Omega \times I)$.

Next, we give the definition of viscosity solutions of

$$(E) \quad \begin{aligned} u_t(x, t, \xi) &= H(Du(x, t, \xi), \xi) + \int_I k(\xi, \eta) [u(x, t, \eta) - u(x, t, \xi)] d\eta \\ &\quad \text{for } (x, t, \xi) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \times I, \end{aligned}$$

Definition. Let $\Omega \subset Q_\infty$ be an open subset and $(k, H) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_2$. (i) We call $u \in \mathcal{U}^+(\Omega \times I)$ a viscosity subsolution of (E) in $\Omega \times I$ if whenever $\varphi \in C^1(\Omega)$, $\xi \in I$, and $u(\cdot, \xi) - \varphi$ attains its local maximum at $(\hat{x}, \hat{t})$, then

$$\varphi_t(\hat{x}, \hat{t}) \leq H(D\varphi(\hat{x}, \hat{t}), \xi) + \int_I k(\xi, \eta)[u(\hat{x}, \hat{t}, \eta) - u(\hat{x}, \hat{t}, \xi)]d\eta.$$

(ii) Similarly we call $u \in \mathcal{U}^-(\Omega \times I)$ a viscosity supersolution of (E) in $\Omega \times I$ if whenever $\varphi \in C^1(\Omega)$, $\xi \in I$, and $u(\cdot, \xi) - \varphi$ attains its local minimum at $(\hat{x}, \hat{t})$, then

$$\varphi_t(\hat{x}, \hat{t}) \geq H(D\varphi(\hat{x}, \hat{t}), \xi) + \int_I k(\xi, \eta)[u(\hat{x}, \hat{t}, \eta) - u(\hat{x}, \hat{t}, \xi)]d\eta.$$

(iii) Finally, we call $u \in C(\Omega) \otimes \mathcal{B}(I)$ a viscosity solution of (E) in $\Omega \times I$ if it is both a viscosity sub- and supersolution of (E) in $\Omega \times I$.

For the definition of viscosity solutions of $(E)_0$, we use the standard definition, for which we refer to [1].

3. Main results

Theorem 3.1. Let $(k, g, H) \in \mathcal{D}$. Then there is a unique viscosity solution $u \in \mathcal{U}(R_\infty \times I)$ of $(CP)_\varepsilon$.

If k is continuous on $I \times I$, then the proof of Theorem 3.1 is standard. (See [4].) In case that k is Borel measurable on $I \times I$, we use an argument based on monotone classes of functions. (See [5].)

Of course, $u \in \mathcal{U}(R_\infty \times I)$ is defined to be a viscosity solution of $(CP)_\varepsilon$ if it is a viscosity solution of $(E)_\varepsilon$ in $Q_\infty \times I$ and it satisfies the initial condition: $u^\varepsilon(x, 0, \xi) = g(x, \xi)$ for all $(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I$.

Theorem 3.2. Let $k \in \mathcal{D}_0$, $g \in \text{BUC}(\mathbf{R}^n)$, and $H \in C^1(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$. Assume that (K1) and (H1) hold and that (2.8), with $m = 1$, hold for some $(\{\omega_R\}, \{C_R\}) \in G_2$. Then there is a unique viscosity solution $u \in \text{BUC}(R_\infty)$ of

$$(CP)_0 \quad \begin{cases} (E)_0 & u_t(x, t) = \text{tr}[\bar{A}(Du(x, t))D^2u(x, t)] \\ & \text{for } (x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) & = g(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

See [1] for the proof of Theorem.

The assumptions on k and H in the above theorem are made just to make sure that the function $\bar{A}$ is continuous on $\mathbf{R}^n$.

Theorem 3.3. Let $(k, g, H) \in \mathcal{D}$. Assume that (K1) and (H1) hold and that H satisfies (2.8), with $m = 1$, for some $(\{\omega_R\}, \{C_R\}) \in G_2$. Set

$$\bar{g}(x) = \int_I r(\xi)g(x, \xi)d\xi \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n.$$

Let $u^\varepsilon \in \mathcal{U}(R_\infty \times I)$ be the viscosity solution of $(\text{CP})_\varepsilon$. Let $u \in \text{BUC}(R_\infty)$ be the viscosity solution of $(\text{CP})_0$ with $\bar{g}$ in place of g . Then, for each $\delta \in (0, 1)$,

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \{|u^\varepsilon(x, t, \xi) - u(x, t)| \mid (x, t, \xi) \in \mathbf{R}^n \times [\delta, \delta^{-1}] \times I\} = 0.$$

In addition, if $g(x, \xi)$ is independent of ξ , then for each $T > 0$

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \{|u^\varepsilon(x, t, \xi) - u(x, t)| \mid (x, t, \xi) \in \mathbf{R}^n \times [0, T] \times I\} = 0.$$

We introduce only the proof of Theorem 3.3.

Let $(k, g, H) \in \mathcal{D}$, $\bar{g}$, $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, 1)}$, and u be as in Theorem 3.3.

Note that, by (K1), $(\text{E})_\varepsilon$ reads

$$u_t^\varepsilon(x, t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon} H(Du^\varepsilon(x, t, \xi), \xi) + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\int_I k(\xi, \eta) u^\varepsilon(x, t, \eta) d\eta - u^\varepsilon(x, t, \xi) \right) \\ \text{for } (x, t, \xi) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \times I.$$

We set $h(x, \xi) = g(x, \xi) - \bar{g}(x)$ for $(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I$, and note that

$$\int_I r(\xi) h(x, \xi) d\xi = 0 \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^n.$$

To prove Theorem 3.3, we use the so-called relaxed limits. We define

$$u^+(x, t) = \lim_{r \searrow 0} \sup \{u^\varepsilon(y, s, \eta) \mid (y, s, \eta) \in R_\infty \times I, |y - x| + |s - t| < r\} \\ u^-(x, t) = \lim_{r \searrow 0} \inf \{u^\varepsilon(y, s, \eta) \mid (y, s, \eta) \in R_\infty \times I, |y - x| + |s - t| < r\}$$

for $(x, t) \in R_\infty \times I$.

Lemma 3.4. *There is a modulus μ such that*

$$\bar{g}(x) - \mu(t) \leq u^-(x, t) \leq u^+(x, t) \leq \bar{g}(x) + \mu(t) \quad \text{for } (x, t) \in Q_\infty.$$

In addition, if $h = 0$, then the above inequalities hold for all $(x, t) \in R_\infty$.

Lemma 3.5. *There are constants $\delta > 0$ and $C_0 > 0$ such that for any $h \in \{r\}^{\perp, \infty}$,*

$$\|e^{t(K-I)} h\|_\infty \leq C_0 e^{-\delta t} \|h\|_\infty \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Proof of Lemma 3.5. In this proof we regard $L^2(I)$, $\mathcal{B}^\infty(I)$, etc. as the vector spaces with complex scalar field.

We first prove that

$$(3.1) \quad \text{if } \mu \in \mathbf{C} \text{ is an eigenvalue of } \bar{K} \text{ and } |\mu| \geq 1, \text{ then } \mu = 1.$$

To show this, we fix $\mu \in \mathbf{C}$ and $\phi \in L^2(I)$ so that $|\mu| \geq 1$, $\phi \neq 0$, and $\bar{K}\phi = \mu\phi$.

Identifying ϕ with the function h defined by

$$h(\xi) = \mu^{-1} \int_I k(\xi, \eta) g(\eta) d\eta,$$

where g is a function in the equivalence class ϕ , we may regard ϕ as a function in $\mathcal{B}^\infty(I)$ and assume that

$$\mu\phi(\xi) = K\phi(\xi) \quad \text{for all } \xi \in I.$$

Set $M = \sup_I |\phi|$. We claim that $|\phi(\xi)| = M$ a.e. $\xi \in I$. In order to check this, we fix $\varepsilon > 0$ and $\gamma > \varepsilon$, and choose $\xi \in I$ so that $|\phi(\xi)| > M - \varepsilon$. Observing that $|\phi(\xi)| \leq \bar{K}|\phi|(\xi)$ and setting $B_\gamma = \{\xi \in I \mid |\phi(\xi)| \leq M - \gamma\}$, we calculate that

$$\begin{aligned} 0 &< \int_I k(\xi, \eta)(|\phi(\eta)| - M + \varepsilon) d\eta \\ &\leq \int_{B_\gamma} k(\xi, \eta)(\varepsilon - \gamma) d\eta + \int_I k(\xi, \eta) \varepsilon d\eta \leq -(\gamma - \varepsilon) \kappa_0 |B_\gamma| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sending $\varepsilon \rightarrow 0$, we see that $|B_\gamma| = 0$ for all $\gamma > 0$, which shows that $|\phi(\xi)| = M$ a.e. $\xi \in I$.

By multiplying ϕ by M^{-1} if necessary, we may assume that $M = 1$. We fix $\hat{\xi} \in I$ so that $|\phi(\hat{\xi})| = 1$. We may assume by multiplying ϕ by $\overline{\phi(\hat{\xi})}$, the complex conjugate of $\phi(\hat{\xi})$, that $\phi(\hat{\xi}) = 1$. Define $a \in \mathcal{B}(I)$ by $a(\xi) = \operatorname{Re} \phi(\xi)$. It follows that $a(\hat{\xi}) = 1$ and $|a(\xi)| \leq 1$ for all $\xi \in I$. Setting $B_\varepsilon = \{\xi \in I \mid a(\xi) \leq 1 - \varepsilon\}$ for $\varepsilon > 0$, we argue as before, to get

$$0 \leq -\varepsilon \int_{B_\varepsilon} k(\hat{\xi}, \eta) d\eta \leq -\varepsilon \kappa_0 |B_\varepsilon|,$$

which guarantees that $\phi(\xi) = 1$ a.e. $\xi \in I$. Thus we have

$$\mu\phi(\xi) = K\phi(\xi) = 1 \quad \text{for } \xi \in I,$$

and conclude that $\mu = 1$ and $\phi(\xi) = 1$ for all $\xi \in I$.

Next, we observe that for $\phi \in \{r\}^\perp$,

$$(3.2) \quad \int_I \bar{K}\phi(\xi)r(\xi)d\xi = \int_I \phi(\xi)\bar{K}^*r(\xi)d\xi = \int_I \phi(\xi)r(\xi)d\xi = 0.$$

This allows us to define the continuous linear operator $\bar{L} : \{r\}^\perp \rightarrow \{r\}^\perp$ by $\bar{L}\phi = \bar{K}\phi$.

Since $\bar{K}$ is a compact operator on $L^2(I)$, we see that $\bar{L}$ is a compact operator on $\{r\}^\perp$. By the Fredholm-Riesz-Schauder theory, we know that for each $\varepsilon > 0$, $\sigma(\bar{L}) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > \varepsilon\}$ is a finite set and consists of eigenvalues of $\bar{L}$. Here and henceforth, for any operator L , $\sigma(L)$ denotes the spectrum of L . Since $1 \notin \{r\}^\perp$, we see from (3.1) that $\sigma(\bar{L}) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Since $\sigma(\bar{L})$ is a closed subset of $\mathbf{C}$, we find a constant $\theta \in (0, 1)$ such that

$$(3.3) \quad \sigma(\bar{L}) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq \theta\}.$$

In view of (3.2), we may define the continuous operator $L : \{r\}^{\perp, \infty} \rightarrow \{r\}^{\perp, \infty}$ by $L\phi = K\phi$. We claim that

$$(3.4) \quad \sigma(L) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq \theta\}.$$

To show this, fix $\mu \in \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > \theta\}$. For $\phi \in \{r\}^{\perp, \infty}$ choose any

$$\psi \in (\mu I - \bar{L})^{-1}[\phi],$$

and set

$$f(\xi) = \mu^{-1}(K\psi(\xi) - \phi(\xi)) \quad \text{for } \xi \in I.$$

It is easily seen that $f \in \{r\}^{\perp, \infty}$ and that

$$\mu f(\xi) - Lf(\xi) = \phi(\xi) \quad \text{for all } \xi \in I.$$

Hence, $\mu I - L$ is surjective. Next we fix $\phi \in \{r\}^{\perp, \infty}$. Let $f, g \in \{r\}^{\perp, \infty}$ satisfy

$$(\mu I - L)f(\xi) = \phi(\xi) \quad \text{and} \quad (\mu I - L)g(\xi) = \phi(\xi) \quad \text{for } \xi \in I.$$

Then we see that $[f - g] \in \text{Ker}(\mu I - \bar{L})$, which yields in view of (3.3) that $f(\xi) = g(\xi)$ a.e. $\xi \in I$. Accordingly we have

$$\mu(f - g)(\xi) = L(f - g)(\xi) = 0 \quad \text{for } \xi \in I.$$

Thus $\mu I - L$ is injective. Invoking the open mapping theorem, we conclude that μ is in the resolvent set of L , proving (6.4).

Recall the definition of the spectral radius ρ of the operator L , i.e.,

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \|L^k\|^{1/k}.$$

(See [8].) We know that $\rho \leq \theta$. Fix any $\lambda \in (\theta, 1)$. Then there is a constant $C \geq 1$ such that

$$\|L^k\| \leq C\lambda^k \quad \text{for all } k \in \mathbf{N}.$$

This yields that for $t \geq 0$,

$$\|e^{tL}\| \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}_+} \frac{t^k \|L^k\|}{k!} \leq Ce^{\lambda t}.$$

Thus, for $h \in \{r\}^{\perp, \infty}$ and $t \geq 0$ we have

$$\|e^{t(K-I)}h\|_{\infty} = \|e^{t(L-I)}h\|_{\infty} \leq Ce^{-(1-\lambda)t}\|h\|_{\infty}.$$

This completes the proof. $\square$

Proof of Lemma 3.4. Using the standard mollification, for each $\gamma \in (0, 1)$ we may choose functions $\bar{g}_\gamma \in C^2(\mathbf{R}^n)$ and $h_\gamma, H_\gamma \in C^1(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ such that

$$\begin{aligned} |\bar{g}_\gamma(x)| \vee |h_\gamma(x, \xi)| &\leq C, & |D\bar{g}_\gamma(x)| \vee \|D^2\bar{g}_\gamma(x)\| \vee |Dh_\gamma(x, \xi)| &\leq C_\gamma, \\ |H_\gamma(p, \xi)| \vee |DH_\gamma(p, \xi)| &\leq L_R, \end{aligned}$$

for all $(x, p, \xi) \in \mathbf{R}^n \times B(0, R) \times I$ and $R > 0$ and for some constants $C > 0$, $C_\gamma > 0$, and $L_R > 0$. Here C does not depend on either γ or R , C_γ does not depend on R , but may depend on γ , etc. We may assume further that

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \int_I r(\xi) h_\gamma(x, \xi) d\xi &= 0 \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n, \\ \int_I r(\xi) H_\gamma(p, \xi) d\xi &= 0 \quad \text{for } p \in \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

and

$$g(x, \xi) \leq \bar{g}_\gamma(x) + h_\gamma(x, \xi) \quad \text{and} \quad \bar{g}_\gamma(x) \leq \bar{g}(x) + \sigma(\gamma) \quad \text{for all } (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I,$$

where $\sigma(\gamma) \rightarrow 0$ as $\gamma \searrow 0$,

Fix $\gamma \in (0, 1)$. In what follows we write $\bar{g}$ and h for $\bar{g}_\gamma$ and h_γ , respectively. This abuse of notation hopefully does not cause any confusion.

Fix $\varepsilon \in (0, 1)$, and we define $f_\varepsilon \in C^1(\mathbf{R}^{n+1}) \otimes \mathcal{B}(I)$ by

$$f_\varepsilon(x, t, \cdot) = e^{\frac{t}{\varepsilon^2}(K-I)} h(x, \cdot) \quad \text{for } (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

Of course, we have

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_\varepsilon(x, t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon^2} (K - I) f_\varepsilon(x, t, \cdot)(\xi) \\ f_\varepsilon(x, 0, \xi) = h(x, \xi) \end{cases}$$

for all $(x, t, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times I$. By Lemma 3.4, since (3.5) holds, we have

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon(x, t, \cdot)\|_\infty &\leq C_0 e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}} \|h(x, \cdot)\|_\infty \leq C C_0 e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}}, \\ \|Df_\varepsilon(x, t, \cdot)\|_\infty &\leq \sqrt{n} C_\gamma C_0 e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}} \end{aligned}$$

for all $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty)$, where δ and C_0 are positive constants from Lemma 3.5.

We set

$$\varphi_\varepsilon(x, \cdot) = S H_\varepsilon(D\bar{g}(x), \cdot)$$

in view of (3.5), and

$$(3.6) \quad w(x, t, \xi) = \bar{g}(x) + f_\varepsilon(x, t, \xi) + B_1 t + \varepsilon(\varphi_\varepsilon(x, \xi) + B_2) + \varepsilon B_3(1 - e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}})$$

for $(x, t, \xi) \in R_\infty \times I$, where B_1 , B_2 , and B_3 are positive constants to be fixed later. Recall that

$$(I - K)\varphi_\varepsilon(x, \cdot) = H_\varepsilon(D\bar{g}(x), \cdot) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n,$$

and

$$D\varphi_\varepsilon(x, \cdot) = S\left(D^2\bar{g}(x)D_p H_\varepsilon(D\bar{g}(x), \cdot)\right) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n.$$

The last identity guarantees that

$$|D\varphi_\varepsilon(x, \xi)| \leq C_1 \quad \text{for } (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I$$

for some constant $C_1 > 0$ independent of ε . We may assume as well that

$$|\varphi_\varepsilon(x, \xi)| \leq C_1 \quad \text{for } (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I.$$

We calculate that

$$\begin{aligned} J : &= w_t(x, t, \xi) - \frac{1}{\varepsilon} H(Dw(x, t, \xi), \xi) - \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left(\int_I k(\xi, \eta) w(x, t, \eta) d\eta - w(x, t, \xi) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} (K - I) f_\varepsilon(x, t, \cdot)(\xi) + B_1 + \frac{\delta}{\varepsilon} B_3 e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}} \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} H(D\bar{g}(x) + Df_\varepsilon(x, t, \xi) + \varepsilon D\varphi_\varepsilon(x, \xi), \xi) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^2} (K - I) (f_\varepsilon(x, t, \cdot) + \varepsilon \varphi_\varepsilon(x, \cdot))(\xi) \\ &= B_1 + \frac{\delta}{\varepsilon} B_3 e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}} - \frac{1}{\varepsilon} H(D\bar{g}(x) + Df_\varepsilon(x, t, \xi) + \varepsilon D\varphi_\varepsilon(x, \xi), \xi) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} H(D\bar{g}(x), \xi). \end{aligned}$$

Noting that as $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$H(D\bar{g}(x) + Df_\varepsilon(x, t, \xi) + \varepsilon D\varphi_\varepsilon(x, \xi), \xi) = H(D\bar{g}(x), \xi) + O(\varepsilon + e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}}),$$

we see that

$$J \geq B_1 + \frac{\delta B_3}{\varepsilon} e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}} - M \left(1 + \frac{\delta}{\varepsilon} e^{-\frac{\delta t}{\varepsilon^2}} \right)$$

for some constant $M > 0$ which does not depend on ε .

We fix $B_1 = B_3 = M$, so that w is a viscosity supersolution of $(E)_\varepsilon$. Moreover, we fix $B_2 = C_1$ so that

$$u^\varepsilon(x, 0, \xi) \leq w(x, 0, \xi) \quad \text{for } (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times I.$$

It is obvious that $w \in \mathcal{U}$. Thus, by a comparison theorem, we see that

$$u^\varepsilon(x, t, \xi) \leq w(x, t, \xi) \quad \text{for } (x, t, \xi) \in R_\infty \times I.$$

Sending $\varepsilon \searrow 0$, we see that

$$u^+(x, t) \leq \bar{g}_\gamma(x) + Mt \quad \text{for } (x, t) \in Q_\infty.$$

Writing $M(\gamma)$ for M in view of its dependence on γ and setting

$$\mu(t) = \inf\{\sigma(\gamma) + M(\gamma)t \mid \gamma \in (0, 1)\} \quad \text{for } t \geq 0,$$

we get a modulus μ such that

$$u^+(x, t) \leq \bar{g}(x) + \mu(t) \quad \text{for } (x, t) \in Q_\infty.$$

Similar arguments ensure that for some modulus μ ,

$$u^-(x, t) \geq \bar{g}(x) - \mu(t) \quad \text{for } (x, t) \in Q_\infty.$$

In case when $h = 0$, we use the same function w defined by (3.6) with $f_\varepsilon = 0$ and $B_2 = 0$ and argue in the same way as above, to conclude that

$$\bar{g}(x) - \mu(t) \leq u^-(x, t) \leq u^+(x, t) \leq \bar{g}(x) + \mu(t) \quad \text{for } (x, t) \in R_\infty$$

for some modulus μ . This completes the proof. $\square$

Lemma 3.6. *The functions u^+ and u^- are a viscosity subsolution and a viscosity supersolution of $(E)_0$ in Q_∞ , respectively.*

We need the following lemma in the proof of Lemma 3.6.

Lemma 3.7. *There are a collection $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)} \subset C^2(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ and a $(\{\omega_R\}_{R>0}, \{C_R\}_{R>0}) \in G_2$ such that for each $\varepsilon \in (0,1)$, H_ε satisfies (H1) and such that for all $(x, \xi) \in B(0, R) \times I$, $\varepsilon \in (0,1)$, and $R > 0$,*

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon(p, \xi) - H(p, \xi)| &\leq \omega_R(\varepsilon)\varepsilon, \quad |D_p H_\varepsilon(p, \xi) - D_p H(p, \xi)| \leq \omega_R(\varepsilon), \\ |H_\varepsilon(p, \xi)| \vee |D_p H_\varepsilon(p, \xi)| &\leq C_R, \quad \|D_p^2 H_\varepsilon(p, \xi)\| \leq \frac{\omega_R(\varepsilon)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Proof. By the standard mollification techniques, for each $\varepsilon > 0$ we find a function $H_\varepsilon \in \mathcal{D}_2 \cap C^2(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{B}(I)$ such that for all $(x, \xi) \in B(0, R) \times I$, $\varepsilon \in (0,1)$, and $R > 0$,

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon(p, \xi) - H(p, \xi)| &\leq C_R \varepsilon, \quad |D_p H_\varepsilon(p, \xi) - D_p H(p, \xi)| \leq \omega_R(\varepsilon), \\ |H_\varepsilon(p, \xi)| \vee |D_p H_\varepsilon(p, \xi)| &\leq C_R, \quad \|D_p^2 H_\varepsilon(p, \xi)\| \leq \frac{\omega_R(\varepsilon)}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

where ω_R is a modulus and $C_R > 0$ is a constant, which can be chosen independently of ε .

Fix $R > 0$ and fix such ω_R and C_R . Set

$$\sigma_R(r) = \inf\{(C_R s) \vee \omega_R(sr) \vee \frac{\omega_R(sr)}{s} \mid 0 < s < 1\} \quad \text{for } r \geq 0.$$

Then it is clear that σ_R is a non-decreasing, upper semicontinuous, real-valued function on $[0, \infty)$ and that $\sigma_R(0) = 0$.

By definition, for each $\varepsilon > 0$ there is an $s \equiv s(\varepsilon) \in (0,1)$ such that

$$\sigma_R(\varepsilon) + \varepsilon > (C_R s) \vee \omega_R(s\varepsilon) \vee \frac{\omega_R(s\varepsilon)}{s}.$$

Then the function $\widetilde{H}_\varepsilon(p, \xi) := H_{s\varepsilon}(p, \xi)$ and $\tilde{\sigma}_R(r) = \sigma_R(r) + r$ satisfy

$$\begin{aligned} |\widetilde{H}_\varepsilon(p, \xi) - H(p, \xi)| &\leq C_R s\varepsilon \leq \varepsilon \tilde{\sigma}_R(\varepsilon), \quad |D_p \widetilde{H}_\varepsilon(p, \xi) - D_p H(p, \xi)| \leq \omega_R(s\varepsilon) \leq \tilde{\sigma}_R(\varepsilon), \\ |\widetilde{H}_\varepsilon(p, \xi)| \vee |D_p \widetilde{H}_\varepsilon(p, \xi)| &\leq C_R, \quad \|D_p^2 \widetilde{H}_\varepsilon(p, \xi)\| \leq \frac{\omega_R(s\varepsilon)}{s\varepsilon} \leq \frac{\tilde{\sigma}_R(\varepsilon)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

for all $(x, \xi) \in B(0, R) \times I$ and $\varepsilon > 0$. In the above inequalities one may replace $\tilde{\sigma}_R$ by a modulus. Thus the collection $\{\widetilde{H}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ together with appropriate choice of collections of moduli and of positive constants has the required properties. $\square$

Proof of Lemma 3.6. We begin by showing that u^+ is a viscosity subsolution of $(E)_0$. Let $\varphi \in C^3(Q_\infty)$, and assume that $u^+ - \varphi$ attains a strict maximum at some point $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_\infty$.

Let $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ be a collection of functions from Lemma 3.7. For $\varepsilon \in (0, 1)$, we define the function $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ on $Q_\infty \times I$ by

$$\Phi(x, t, \xi, \varepsilon) = u^\varepsilon(x, t, \xi) - \varphi(x, t) - \varepsilon \varphi_1^\varepsilon(x, t, \xi) - \varepsilon^2 \varphi_2^\varepsilon(x, t, \xi),$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_1^\varepsilon(x, t, \cdot) &= SH_\varepsilon(D\varphi(x, t), \cdot), \\ b^\varepsilon(x, t, \cdot) &= \langle D_p H_\varepsilon(D\varphi(x, t), \cdot), D\varphi_1^\varepsilon(x, t, \cdot) \rangle, \\ \bar{b}^\varepsilon(x, t) &= \int_I r(\xi) b^\varepsilon(x, t, \xi) d\xi, \\ \varphi_2^\varepsilon(x, t, \cdot) &= S(b^\varepsilon(x, t, \cdot) - \bar{b}^\varepsilon(x, t)) \end{aligned}$$

for $(x, t) \in Q_\infty$.

Note that

$$\varphi_1^\varepsilon, b^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon \in C^1(Q_\infty) \otimes \mathcal{B}(I),$$

and

$$\begin{aligned} D\varphi_1^\varepsilon(x, t, \cdot) &= S[D^2\varphi(x, t)D_p H_\varepsilon(D\varphi(x, t), \cdot)], \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^\varepsilon(x, t, \cdot) &= S[\langle D\varphi_t(x, t), D_p H_\varepsilon(D\varphi(x, t), \cdot) \rangle] \end{aligned}$$

for $(x, t) \in Q_\infty$.

Fix a compact neighborhood $V \subset Q_\infty$ of $(\hat{x}, \hat{t})$. Using Lemma 3.7, we deduce that

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \varepsilon < 1} \sup_{V \times I} \left(|\varphi_1^\varepsilon| + |D\varphi_1^\varepsilon| + \left| \frac{\partial \varphi_1^\varepsilon}{\partial t} \right| + |b^\varepsilon| + |\varphi_2^\varepsilon| \right) &< \infty, \\ \sup_{V \times I} \left(|D\varphi_2| + \left| \frac{\partial \varphi_2^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) &\leq \frac{\omega_V(\varepsilon)}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

where ω_V is a modulus.

By the definition of u^+ , there is a sequence $\varepsilon_j \searrow 0$ such that

$$\theta_j := \sup\{\Phi(x, t, \xi, \varepsilon_j) \mid (x, t) \in V, \xi \in I\} \rightarrow (u^+ - \varphi)(\hat{x}, \hat{t}) \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

Then we choose a sequence of points $(x_j, t_j, \xi_j) \in V \times I$ such that for each $j \in \mathbb{N}$, the function $\Phi(x, t, \xi_j, \varepsilon_j)$ attains a maximum over V at $(x_j, t_j) \in V$ and

$$(3.7) \quad \Phi(x_j, t_j, \xi_j, \varepsilon_j) \geq \theta_j - \varepsilon_j^3.$$

It is easily seen that

$$(x_j, t_j) \rightarrow (\hat{x}, \hat{t}) \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

Since u^ε is a viscosity subsolution of $(E)_\varepsilon$ in $Q_\infty \times I$, we have

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \varphi_t(x_j, t_j) \leq & \frac{1}{\varepsilon_j} H(D\varphi(x_j, t_j) + \varepsilon_j D\varphi_1^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j)) \\ & + \varepsilon_j^2 D\varphi_2^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j), \xi_j) \\ & + \frac{1}{\varepsilon_j^2} \left(\int_I k(\xi_j, \eta) u^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \eta) d\eta - u^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) \right) \\ & + O(\varepsilon_j) \quad \text{as } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Note that as $j \rightarrow \infty$,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & H(D\varphi(x_j, t_j) + \varepsilon_j D\varphi_1^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) + \varepsilon_j^2 D\varphi_2^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j), \xi_j) \\ & = H_{\varepsilon_j}(D\varphi(x_j, t_j), \xi_j) + \varepsilon_j \langle D_p H_{\varepsilon_j}(D\varphi(x_j, t_j), \xi_j), D\varphi_1^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) \rangle + o(\varepsilon_j) \\ & = H_{\varepsilon_j}(D\varphi(x_j, t_j), \xi_j) + \varepsilon_j b^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) + o(\varepsilon_j). \end{aligned}$$

From (3.7), we have

$$\begin{aligned} & u^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi) - u^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) \\ & \leq \varepsilon_j^3 + \varepsilon_j \left[\varphi_1^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi) - \varphi_1^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) \right] + \varepsilon_j^2 \left[\varphi_2^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi) - \varphi_2^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) \right] \end{aligned}$$

for all $\xi \in I$, $j \in \mathbb{N}$. Hence, in view of the definition of the operator S , we have

$$\begin{aligned} & \int_I k(\xi_j, \eta) u^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \eta) d\eta - u^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) \\ & \leq \varepsilon_j^3 + \varepsilon_j (K - I) \varphi_1^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \cdot)(\xi_j) + \varepsilon_j^2 (K - I) \varphi_2^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \cdot)(\xi_j) \\ & = \varepsilon_j^3 - \varepsilon_j H_{\varepsilon_j}(D\varphi(x_j, t_j), \xi_j) - \varepsilon_j^2 \left[b^{\varepsilon_j}(x_j, t_j, \xi_j) - \bar{b}^{\varepsilon_j}(x_j, t_j) \right] \end{aligned}$$

Combining this with (3.8) and (3.9), we get

$$(3.10) \quad \varphi_t(x_j, t_j) \leq \bar{b}^{\varepsilon_j}(x_j, t_j) + o(1) \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

Since

$$\begin{aligned} \bar{b}^{\varepsilon_j}(x_j, t_j) &= \int_I r(\xi) \langle D_p H(D\varphi(x_j, t_j), \xi), D^2\varphi(x_j, t_j) D_p a(D\varphi(x_j, t_j), \xi) \rangle d\xi + o(1) \\ &= \text{tr} \left[\bar{A}(D\varphi(x_j, t_j)) D^2\varphi(x_j, t_j) \right] + o(1) \end{aligned}$$

as $j \rightarrow \infty$, we conclude from (3.10) that

$$\varphi_t(\hat{x}, \hat{t}) \leq \text{tr} [\bar{A}(D\varphi(\hat{x}, \hat{t})) D^2\varphi(\hat{x}, \hat{t})],$$

which shows that u^+ is a viscosity subsolution of $(E)_0$.

Arguments similar to the above prove that u^- is a viscosity supersolution of $(E)_0$. $\square$

Proof of Theorem 3.3. In view of Lemma 3.4, we see that

$$\limsup_{r \searrow 0} \{u^+(x, t) - u^-(y, s) \mid (x, t), (y, s) \in Q_r, |x - y| + |t - s| < r\} = 0.$$

By Lemma 3.6, we know that u^+ and u^- are a viscosity subsolution and a viscosity supersolution of $(E)_0$. Thus, by using a comparison theorem, we see that $u^+ \leq u \leq u^-$ in Q_∞ , from which we deduce easily that as $\varepsilon \searrow 0$,

$$u^\varepsilon(x, t, \xi) \rightarrow u(x, t) \quad \text{locally uniformly in } Q_\infty \times I.$$

Since $(E)_\varepsilon$ and $(E)_0$ are translation invariant in x , we conclude from the above that for any collection $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)} \subset \mathbf{R}^n$, as $\varepsilon \searrow 0$,

$$u^\varepsilon(x + y_\varepsilon, t, \xi) - u(x + y_\varepsilon, t) \rightarrow 0 \quad \text{locally uniformly in } Q_\infty \times I.$$

Now a simple argument by contradiction shows that, for any $\delta \in (0, 1)$, as $\varepsilon \searrow 0$,

$$(3.11) \quad u^\varepsilon(x, t, \xi) \rightarrow u(x, t) \quad \text{uniformly in } \mathbf{R}^n \times [\delta, \delta^{-1}] \times I.$$

Finally, if $g(x, \xi)$ is independent of ξ , then (3.11) and the last assertion of Lemma 3.4 yield the uniform convergence of $u^\varepsilon(x, t, \xi)$ to $u(x, t)$ in $R_T \times I$ for any $T \in (0, \infty)$ as $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

References

1. Crandall, M. G.; Ishii, H.; Lions, P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **1992**, 27 (1), 1-67.
2. Engler, H.; Lenhart, S. M. Viscosity solutions for weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations, *Proc. London Math. Soc. (3)* **1991**, 63 (1), 212-240.
3. Evans, L. C. The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **1989**, 111 (3-4), 359-375.
4. Ishii, H.; Koike, S. Viscosity solutions of functional-differential equations. *Adv. Math. Sci. Appl.* **1993/94**, 3, Special Issue, 191-218.
5. Ishii, H.; Shimano, K. Asymptotic analysis for a class of infinite systems of first order PDE : nonlinear parabolic PDE in the singular limit to appear in *Comm. Part. Diff. Eqs.*
6. Pinsky, M. Differential equations with a small parameter and the central limit theorem for functions defined on a finite Markov chain, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **1968**, 9, 101-111.
7. Pinsky, M. A. *Lectures on random evolution*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, **1991**.
8. Yosida, K. *Functional analysis. Fifth edition*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123. Springer-Verlag, Berlin-New York, **1978**.

Boussinesq 系の初期値問題に対する適切性

瀬片 純市 (九州大学大学院数理学府)
北 直泰 (九州大学大学院数理学研究院)

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULT

ここでは以下のような Boussinesq 系に対する初期値問題について考える。

$$(BQ) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x v + u \partial_x u = 0, & x, t \in \mathbf{R}, \\ \partial_t v - \partial_x^3 u + \partial_x u + \partial_x(uv) = 0, & x, t \in \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

この連立系は水面波の動きを記述する方程式で, u は流速, v は水面の高さを表している. このモデルの物理的背景については [1], [10] などを参照されたい. ここでは初期値問題 (BQ) の Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ での時間局所適切性 (時間局所解の存在, 一意性および初期値連続依存性) について考える. この問題に対し, Angulo [1] は $H^s \times H^{s-1}$, $s > 3/2$ において時間局所適切性を示した. そこで我々はさらに可微分性の低い Sobolev 空間, すなわち, $H^s \times H^{s-1}$, $s \leq 3/2$ における時間局所適切性について考え以下の定理を得た (初期データに smallness を課してい『ない』ことに注意).

Theorem 1.1. (Well-posedness for (BQ))

- (i) (存在と一意性) $(u_0, v_0) \in (H^{s,0} \times H^{s-1,0}) \cap (H^{s_1,\alpha_1} \times H^{s_1-1,\alpha_1}) \equiv X^s$, $s > s_1 + \alpha_1 > 1$, $s_1 > 1/2$, $\alpha_1 > 1/2$ とする. このとき $T > 0$ が存在し, $C([-T, T]; X^s) \cap \langle x \rangle^{-\alpha_1} L_x^2(\mathbf{R}; L_t^\infty(-T, T)) \equiv Y_T$ において (BQ) を満たす $(u(t), v(t))$ が一意に存在する.
- (ii) (平滑化効果) さらにこの $(u(t), v(t))$ は

$$(1.1) \quad \|D_x^{s-1/2} \partial_x u\|_{L_x^\infty(L_T^2)} + \|D_x^{s+1/2} \langle D_x \rangle^{-1} v\|_{L_x^\infty(L_T^2)} < +\infty.$$

を満たす.

- (iii) (初期値連続依存性) $(u'(t), v'(t))$ を初期データ $(u'_0, v'_0) \in B_\rho((u_0, v_0); X^s)$ に対する (BQ) の解とする. この時ある $T' = T'(\rho) \in (0, T)$ に対し, 次の意味で初期値連続依存性が成り立つ.

$$\begin{aligned} |||(u', v') - (u, v)|||_{Y_{T'}} &\leq C(T', \rho, u_0, v_0) |||(u'_0, v'_0) - (u_0, v_0)|||_{X^s}, \\ \|D_x^{s-1/2} \partial_x (u' - u)\|_{L_x^\infty(L_{T'}^2)} &\leq C(T', \rho, u_0, v_0) |||(u'_0, v'_0) - (u_0, v_0)|||_{X^s}, \\ \|D_x^{s+1/2} \langle D_x \rangle^{-1} (u' - u)\|_{L_x^\infty(L_{T'}^2)} &\leq C(T', \rho, u_0, v_0) |||(u'_0, v'_0) - (u_0, v_0)|||_{X^s}, \end{aligned}$$

ここで, 重み付き Sobolev 空間は次で定義される.

$$H^{s,\alpha} = \{f \in L^2; \|f\|_{H^{s,\alpha}} = \|\langle x \rangle^\alpha \langle D_x \rangle^s f\|_{L^2} < \infty\},$$

ここに, $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$, $\langle D_x \rangle = \mathcal{F}_\xi^{-1} \langle \xi \rangle \mathcal{F}_x$, $|D_x| = \mathcal{F}_\xi^{-1} |\xi| \mathcal{F}_x$. また $B_\rho((u_0, v_0); X^s) = \{(f, g) \in X^s; |||(f, g) - (u_0, v_0)|||_{X^s} < \rho\}$.

Remark 1.2. (i) Angulo [1] において初期データの可微分性は $s > 3/2$ であったが、われわれは $s > 1$ としているため [1] の結果よりも可微分性の弱いデータに対し適切性を示すことが出来た。

(ii) (1.1) は初期データの可微分性が s にもかかわらず解の可微分性が $s + 1/2$, すなわち、空間方向に $1/2$ 階微分だけ平滑化効果があるということを意味している。

次の節より Theorem の証明の概略について述べるが、その前にいくつかの記号及び関数空間を導入する。 $e^{it\partial_x^2}$ を線形 Schrödinger 方程式により生成される free Schrödinger group すなわち

$$e^{it\partial_x^2}\psi = C \int_{\mathbf{R}} e^{-it\xi^2 + ix\xi} \mathcal{F}_x \psi(\xi) d\xi,$$

とする。 $L_x^p L_T^q$ および $L_T^q L_x^p$ をそれぞれ Banach 空間 $L_x^p(\mathbf{R}; L^q(0, T))$, $L^q(0, T; L_x^p(\mathbf{R}))$ とする。 Banach 空間 $X \times X$ 上のベクトル値関数 $\vec{f}(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x))^t$ に対しそのノルムを $\|\vec{f}\|_X = \|f_1\|_X + \|f_2\|_X$ により定義する。

2. DIFFICULTY OF PROBLEM

この節ではこの問題を解く際に生ずる困難及びその克服方法について述べる。連立系 (BQ) は非線形項に導関数を含んでおり、線形項の持つ平滑化効果よりも非線形項の非線形性が強いために、通常の Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ で積分方程式を介して縮小写像の原理を用いることが出来なかった。実際、[1] では積分方程式を介さず、parabolic regularization を用いて適切性を示しているため初期データに大きな可微分性 $s > 3/2$ ($\|\partial_x u\|_{L_x^\infty} < \infty$ となる regularity) を課している。そこでわれわれは Kenig-Ponce-Vega [13] と同様に、以上のような困難を回避するため、以下のような Kato type smoothing effect とよばれる平滑化効果を用いる (4 節 (4.1)-(4.1) 参照)。

$$\text{(斉次型)} \quad \|D_x^{1/2} e^{it\partial_x^2} \psi\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C \|\psi\|_{L_x^2},$$

$$\text{(非斉次型)} \quad \|D_x^1 \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} F(t') dt'\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C \|F\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

この平滑化効果を用いると、非線形項を評価する際、

$$\begin{aligned} \|\partial_x \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} (u \partial_x u)(t') dt'\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq C \|u \partial_x u\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\leq C \|u\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2}, \end{aligned}$$

という不等式がでてきて、新たに $L_x^1 L_T^\infty$ -type の不等式 (maximal function 評価) が必要となる。そこでわれわれは次のような maximal function 評価を得た。

$$\|e^{it\partial_x^2} \psi\|_{L_x^1 L_T^\infty} \leq C (\|\psi\|_{H^{s,0}} + \|\psi\|_{H^{s_1, \alpha_1}}),$$

ここに $s > s_1 + \alpha_1 > 1$, $s_1 > 1/2$, $\alpha_1 > 1/2$ (この評価に関しては 4 節でふれることにする)。これらの不等式等によりわれわれは初期値問題を重み付き Sobolev 空間 $(H^{s,0} \times H^{s-1,0}) \cap (H^{s_1, \alpha_1} \times H^{s_1-1, \alpha_1})$ で考えより小さな可微分性のオーダー $s > 1$ に

対し適切性を示すことができた．ちなみに，本講の議論において，初期データに課すべき regularity は、上で述べた線形 Schrödinger 方程式の解の maximal function 評価から決まる．しかしこの方法で縮小写像の原理を用いる場合，方程式の形から初期データに smallness を課さなければならない．この smallness の条件をはずすためわれわれは Ozawa [18] をヒントにした議論を用いる．方程式 (BQ) を対角化しゲージ変換を施すことにより次の $\vec{u}^{(2)}$ の方程式 (Schrödinger 連立系) に帰着される．

$$\partial_t \vec{u}^{(2)} + i\partial_x^2 \vec{u}^{(2)} + A(u - \varphi)\partial_x \vec{u}^{(2)} + \vec{f}^{(2)}(u, w, \varphi, \vec{u}^{(2)}) = \vec{0},$$

ここに，

$$\vec{f}^{(2)}(u, w, \varphi, \vec{u}^{(2)}) = B(u, \varphi)\vec{u}^{(2)} + K(\varphi)\vec{f}^{(1)},$$

$$A(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad B(u, \varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi'}{2} + \frac{i\varphi^2}{4} + \frac{i\varphi}{2}u & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\varphi}'}{2} + \frac{i\bar{\varphi}^2}{4} + \frac{i\bar{\varphi}}{2}\bar{u} \end{pmatrix},$$

$$K(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\partial_x^{-1}\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\partial_x^{-1}\bar{\varphi}/2} \end{pmatrix},$$

$\vec{f}^{(1)}$ は低階の項を表し， φ は x のみの関数で $\vec{u}_0 = \vec{u}|_{t=0}$ の第一成分に初期データのクラスで十分近い関数とする．このように φ を選ぶことにより高階の項 $A(u - \varphi)\partial_x \vec{u}^{(2)}$ の効果を小さくし，smallness condition を取ることができる．次の3節では連立系 (BQ) の対角化及び gauge 変換について述べる．

3. DIAGONALIZATION AND GAUGE TRANSFORM OF SYSTEM

この節ではまず最初 (BQ) を対角化し Schrödinger 方程式連立系に書き直す．そのあと derivative loss を起こす非線形項の効果を小さくするように gauge 変換を施す．まず，(BQ) を対角化するために

$$w \equiv -\mathcal{H}_x \langle D_x \rangle^{-1} v, \quad \text{i.e., } v = \mathcal{H}_x \langle D_x \rangle w,$$

とおく．ここに $\mathcal{H}_x = -i\mathcal{F}_\xi^{-1} \text{sgn} \xi \mathcal{F}_x$ は Hilbert 変換を表す．すると (BQ) は次のような式に変形される．

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}_x \langle D_x \rangle \partial_x w + u \partial_x u = 0, \\ \partial_t w - \mathcal{H}_x \langle D_x \rangle \partial_x u - \mathcal{H}_x \langle D_x \rangle^{-1} \partial_x (u \mathcal{H}_x \langle D_x \rangle w) = 0. \end{cases}$$

ここで

$$\mathcal{H}_x \langle D_x \rangle \partial_x = \mathcal{F}_\xi^{-1} \xi^2 \mathcal{F}_x + \mathcal{F}_\xi^{-1} |\xi| (\langle \xi \rangle - |\xi|) \mathcal{F}_x.$$

に注意すると，

$$(3.2) \quad \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 w + u \partial_x u + f = 0, \\ \partial_t w + \partial_x^2 u + u \partial_x w + g = 0, \end{cases}$$

となる. ここに f と g は低階の項を表す. (3.2) に通常の対角化を施すと,

$$(3.3) \quad \partial_t \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +i\partial_x^2 & 0 \\ 0 & -i\partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix} + u\partial_x \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ただし

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \equiv R \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}.$$

便宜上,

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix} \equiv Q \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix}.$$

と置くことにすると,

$$(3.4) \quad \partial_t \vec{u}^{(1)} + i\partial_x^2 \vec{u}^{(1)} + \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \partial_x \vec{u}^{(1)} + \vec{f}^{(1)} = \vec{0}.$$

となる. 方程式 (3.4) は高階の項 (導関数を含む項) を含んでいるため, (3.4) に対し縮小写像の原理を適用すると, 初期データに smallness を課さなければならない. そこで gauge 変換を導入する. gauge 変換を有効に用いた結果として, Hayashi [6], Hayashi-Ozawa [7]-[8], T. Ozawa [16]-[18] などがある.

さて $\vec{u}^{(1)}$ に対し次のような gauge 変換を施す:

$$(3.5) \quad \vec{u}^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} e^{-i\partial_x^{-1}\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\partial_x^{-1}\bar{\varphi}/2} \end{pmatrix} \vec{u}^{(1)} \equiv K(\varphi) \vec{u}^{(1)},$$

ここに $\varphi = \varphi(x)$ は C_c^∞ 級で初期データのクラスで u_0 に十分近い関数とする. φ については4節でさらに制限が付く (4節参照). また $\partial_x^{-1}\varphi = \int_{-\infty}^x \varphi(y)dy$ とする.

このとき $\vec{u}^{(2)}$ は次の式を満たす:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \partial_t \vec{u}^{(2)} + i\partial_x^2 \vec{u}^{(2)} + \begin{pmatrix} u - \varphi & 0 \\ 0 & \bar{u} - \bar{\varphi} \end{pmatrix} \partial_x \vec{u}^{(2)} \\ & + \begin{pmatrix} -\frac{\varphi'}{2} + \frac{i\varphi^2}{4} + \frac{i\varphi}{2}u & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\varphi}'}{2} + \frac{i\bar{\varphi}^2}{4} + \frac{i\bar{\varphi}}{2}\bar{u} \end{pmatrix} \vec{u}^{(2)} + K(\varphi) \vec{f}^{(1)} = \vec{0}. \end{aligned}$$

ここで $\vec{u}^{(2)}$ と $(u, w)^t$ は次のような関係になっていることに注意する.

$$(3.7) \quad \vec{u}^{(2)} = K(\varphi)QR \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = R^{-1}Q^{-1}K(\varphi)^{-1} \vec{u}^{(2)}.$$

ゆえに $\vec{u}^{(2)}$ は次の方程式を満たす:

$$(3.8) \quad \partial_t \vec{u}^{(2)} + i\partial_x^2 \vec{u}^{(2)} + A(u - \varphi)\partial_x \vec{u}^{(2)} + \vec{f}^{(2)}(u, w, \varphi, \vec{u}^{(2)}) = \vec{0},$$

ここに

$$(3.9) \quad \vec{f}^{(2)}(u, w, \varphi, \vec{u}^{(2)}) = B(u, \varphi) \vec{u}^{(2)} + K(\varphi) \vec{f}^{(1)},$$

(3.10)

$$A(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad B(u, \varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi'}{2} + \frac{i\varphi^2}{4} + \frac{i\varphi}{2}u & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\varphi}'}{2} + \frac{i\bar{\varphi}^2}{4} + \frac{i\bar{\varphi}}{2}\bar{u} \end{pmatrix}.$$

以下では方程式 (3.8)-(3.10) の初期値問題について考えることにする.

4. PRELIMINARY ESTIMATES

この節では方程式 (3.8)-(3.10) に縮小写像の原理を適用する場合に必要な評価について述べる. 特にここではその中で本質的となる Kato type smoothing effect, Strichartz 評価, maximal function の評価について述べる.

まず最初に Kato type smoothing effect について述べる. この節以降 $U(t) = e^{it\partial_x^2}$ (free Schrödinger group) とする.

Lemma 4.1. (Kenig-Ponce-Vega [11,13]) $p \in [2, \infty]$ に対し次の不等式が成立する.

$$(4.1) \quad \|D_x^{1/2-1/p}U(t)\phi\|_{L_x^p L_T^2} \leq CT^{1/p}\|\phi\|_{L_x^2},$$

$$(4.2) \quad \|D_x^{1-1/p} \int_0^t U(t-t')F(t')dt'\|_{L_x^p L_T^2} \leq CT^{1/p}\|F\|_{L_x^1 L_T^2},$$

$$(4.3) \quad \|\partial_x \int_0^t U(t-t')F(t')dt'\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C\|F\|_{L_x^1 L_T^2},$$

$$(4.4) \quad \|D_x^{1/2} \int_0^t U(t-t')F(t')dt'\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq C\|F\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

Proof of Lemma 4.1. (4.1) および (4.2) の $p = \infty$ の場合は [13 Theorem 2.1, Theorem 2.3]において, (4.3) および (4.4) は [13 Theorem 2.3, Corollary 2.3] において得られている. (4.1) および (4.2) の $p \neq \infty$ の場合は $p = 2$ の場合との補間不等式により得られる ([2 Proposition 2.3] 参照). $\square$

つぎに, Strichartz 評価について述べる.

Lemma 4.2. $\sigma, \alpha \in (1/2, 1)$ かつ $0 \leq 2/r = 1/2 - 1/q \leq 1/2$ とする. このとき $T \in (0, 1)$ に対し次が成立する.

$$(4.5) \quad \|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha U(t)\phi\|_{L_T^r L_x^q} \leq CT^{1/2}(\|\phi\|_{H_x^{\sigma',0}} + \|\phi\|_{H_x^{\sigma,\alpha}}),$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha \int_0^t U(t-t')F(t')dt'\|_{L_T^r L_x^q} \\ & \leq CT^{1/2}(\|D_x^{\sigma'-1/2}F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,\alpha}}), \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & \|D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha \int_0^t U(t-t')F(t')dt'\|_{L_T^r L_x^q} \\ & \leq CT^{1/2}(\|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma',0}} + \|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma,\alpha}}), \end{aligned}$$

ここに σ' は $(\sigma + \alpha, \sigma + 1)$ における任意の実数.

Proof of Lemma 4.2. $f(x, t) = U(t)\phi(x)$ とする. このとき f は以下のような線形 Schrödinger 方程式を満たす:

$$(4.8) \quad \begin{cases} i\partial_t f = \partial_x^2 f, \\ f(x, 0) = \phi(x). \end{cases}$$

(4.8) の両辺に $\langle x \rangle^\alpha$ をかけると次を得る.

$$i\partial_t(\langle x \rangle^\alpha f) = \langle x \rangle^\alpha \partial_x^2 f = \partial_x^2(\langle x \rangle^\alpha f) - 2(\partial_x \langle x \rangle^\alpha)(\partial_x f) - (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) f.$$

さらに Duhamel の原理 により次のような積分方程式に直せる:

$$\langle x \rangle^\alpha U(t)\phi = \langle x \rangle^\alpha f = U(t)\langle x \rangle^\alpha \phi + i \int_0^t U(t-t') 2(\partial_x \langle x \rangle^\alpha)(\partial_x f) + (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) f dt',$$

さらに D_x^σ を作用させることにより, 次を得て

$$(4.9) \quad \begin{aligned} D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha U(t)\phi &= U(t) D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha \phi + 2i \int_0^t U(t-t') \{ D_x^\sigma (\partial_x \langle x \rangle^\alpha) (\partial_x U(t')\phi) \} dt' \\ &\quad + i \int_0^t U(t-t') \{ D_x^\sigma (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) U(t')\phi \} dt', \end{aligned}$$

あとはそれぞれの項を線形 Schrödinger 方程式に対する Strichartz 評価

$$(斉次型) \quad \|U(t)\phi\|_{L_T^{r_1} L_x^{q_1}} \leq C \|\phi\|_{L_x^2},$$

$$(非斉次型) \quad \left\| \int_0^t U(t-t') F(t') dt' \right\|_{L_T^{r_1} L_x^{q_1}} \leq C \|F\|_{L_T^{r'_2} L_x^{q'_2}},$$

(ここに $0 \leq 2/r_j = 1/2 - 1/q_j \leq 1/2$, ($j = 1, 2$), $1/r_2 + 1/r'_2 = 1/q_2 + 1/q'_2 = 1$.) 等を適用すればよい.

次に (4.6) についてであるが (4.8)-(4.9) と同様にして次を得る:

$$\begin{aligned} D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha \int_0^t U(t-t') F(t') dt' \\ &= \int_0^t U(t-t') \{ D_x^\sigma \langle x \rangle^\alpha F(t') \} dt' \\ &\quad + 2i \int_0^t U(t-t') \{ D_x^\sigma (\partial_x \langle x \rangle^\sigma) (\partial_x \int_0^{t'} U(t'-t'') F(t'') dt'') \} dt' \\ &\quad + i \int_0^t \{ D_x^\sigma (\partial_x^2 \langle x \rangle^\alpha) \int_0^{t'} U(t'-t'') F(t'') dt'' \} dt'. \end{aligned}$$

あとは (4.5) を得るのと同様の手続きで示すことが出来る. $\square$

次に maximal function の評価について述べる.

Lemma 4.3. $\sigma, \alpha \in (1/2, 1)$ とする. このとき $T \in (0, 1)$ に対し, 次を得る.

$$(4.7) \quad \|\langle x \rangle^\alpha U(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq C(\|\phi\|_{H_x^{\sigma', 0}} + \|\phi\|_{H_x^{\sigma, \alpha}}),$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^\alpha \int_0^t U(t-t') F(t') dt'\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ \leq CT^{1/2} (\|D_x^{\sigma'-1/2} F\|_{L_x^1 L_T^2} + \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma, \alpha}}), \end{aligned}$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^\alpha \int_0^t U(t-t') F(t') dt'\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ \leq CT^{1/2} (\|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma', 0}} + \|F\|_{L_T^\infty H_x^{\sigma, \alpha}}), \end{aligned}$$

ここに σ' は $(\sigma + \alpha, \sigma + 1)$ における任意の実数.

Proof of Lemma 4.3. 線形 Schrödinger 方程式に対しては次のような maximal function 評価が知られている.

$$(\text{斉次型}) \quad \|U(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq C \|\phi\|_{H_x^{\sigma,0}},$$

$$(\text{非斉次型}) \quad \left\| \int_0^t U(t-t')F(t')dt' \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq CT^{1/2} \|F\|_{L_T^2 H_x^{\sigma,0}}.$$

(ここに $\sigma > 1/2$, $T \in (0, 1)$) が知られている (Vega [23] 参照). あとは Lemma 4.2 の証明と同様の手続きで証明することができる. 詳細については [15] を参照されたい. $\square$

5 CONTRACTION MAPPING PRINCIPLE

まず最初に次のような関数空間を導入する.

$$\begin{aligned} X_0 &\equiv \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}); \|f\|_{X_0} < \infty\}, \\ |||f|||_{X_0} &\equiv \|f\|_{H_x^{1+\epsilon,0}} + \|f\|_{H_x^{1/2+\epsilon_1, 1/2+\epsilon_2}}, \\ Y_T &\equiv \{g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2); \|g\|_{Y_T} < \infty\}, \\ |||g|||_{Y_T} &\equiv |||g|||_{\text{initial}} + |||g|||_{\text{smooth}} + |||g|||_{\text{lower}} + |||g|||_{\text{maxim}}, \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} |||g|||_{\text{initial}} &\equiv \|D_x^{1+\epsilon} g\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|\langle D_x \rangle^{1/2+\epsilon_1} \langle x \rangle^{1/2+\epsilon_2} g\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ |||g|||_{\text{smooth}} &\equiv \|D_x^{1/2+\epsilon} \partial_x g\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sup_{\epsilon_1/2 \leq \sigma \leq \epsilon} \|D_x^{1/2+\epsilon-\sigma} \partial_x g\|_{L_x^{6/\sigma} L_T^{6/(3-2\sigma)}} \\ |||g|||_{\text{lower}} &\equiv \|D_x^{1/2+\epsilon} \langle x \rangle^{1/2-\nu_1} g\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|D_x^{1/2+\epsilon_1} \langle x \rangle^{1/2+\epsilon_2} g\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ |||g|||_{\text{maxim}} &\equiv \sup_{0 \leq \sigma \leq \epsilon_1/2} \|D_x^\sigma \langle x \rangle^{1/2+\epsilon_2} g\|_{L_x^2 L_T^\infty}, \end{aligned}$$

ここに $\nu_1 = \epsilon - \epsilon_1 - \epsilon_2/(1 + 2\epsilon - 2\epsilon_1)$. また次のような写像を定義する.

$$\Phi(\vec{u}^{(2)}) \equiv U(t)\vec{u}_0^{(2)} - i \int_0^t U(t-t') \{A(u-\varphi) \partial_x \vec{u}^{(2)} + \vec{f}^{(2)}(u, w, \varphi, \vec{u}^{(2)})\}(t') dt'.$$

Theorem 1.1 を示すために Φ が Y_T 上のある閉部分空間上で縮小写像であることを証明する. 従って縮小写像の原理より $C([0, T]; X^s) \cap \langle x \rangle^{-\alpha} L_x^2 L_T^\infty$ において積分方程式 (2.16) を満たす $\vec{u}^{(2)}$ が一意に存在し Theorem 1.1 を結論づけることが出来る. まず Φ が Y_T 上縮小写像であることを言うために必要となる命題について述べる. これらの評価は 3,4 節の Strichartz 評価, kato type smoothing effect 及び maximal function 評価を用いることにより得られるが詳細については [15] を参照されたい.

Proposition 5.1. $T \in (0, 1)$ とする. このときある $\beta \in (0, 1)$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad & |||\Phi(\vec{u}^{(2)})|||_{initial} \leq C |||\vec{u}_0^{(2)}|||_{X_0} \\
 & + C(1 + T^\beta) |||\vec{u}^{(2)} - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{maxim} |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T} \\
 & + C_\varphi T(1 + |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}) |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad & |||\Phi(\vec{u}^{(2)})|||_{smooth} \leq C |||\vec{u}_0^{(2)}|||_{X_0} \\
 & + C(1 + T^\beta) |||\vec{u}^{(2)} - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{maxim} |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T} \\
 & + C_\varphi T(1 + |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}) |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & |||\Phi(\vec{u}^{(2)})|||_{lower} \leq C |||\vec{u}_0^{(2)}|||_{X_0} \\
 & + CT^{1/2} |||\vec{u}^{(2)} - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{maxim} |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T} \\
 & + C_\varphi T(1 + |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}) |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad & |||\Phi(\vec{u}^{(2)})|||_{maxim} \leq C |||\vec{u}_0^{(2)}|||_{X_0} \\
 & + CT^\beta |||\vec{u}^{(2)} - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{maxim} |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T} \\
 & + C_\varphi T(1 + |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}) |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T},
 \end{aligned}$$

Proposition 5.2. 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad & |||(\Phi(\vec{u}^{(2)}) - \vec{\varphi}^{(2)})|||_{maxim} \\
 & \leq Ce^{C\|\varphi\|_{L^1_x}} (1 + \|\varphi\|_{H_x^{1+\epsilon,0}})^2 |||(u_0, w_0) - (\varphi, \psi)|||_{X_0} \\
 & + C_\varphi^* T \|(\varphi, \psi)\|_{H_x^{3,2}} \\
 & + C_\varphi^* T^{1/4} (1 + |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}) |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}.
 \end{aligned}$$

Proof of Theorem 1.1. (existence) $\delta_0 \equiv |||\vec{u}_0^{(2)}|||_{X_0}$ とおき,

$$\mathcal{B}_T(\delta_0) \equiv \{ \vec{u}^{(2)}; |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T} \leq 2C_{2\delta_0}\delta_0, |||\vec{u}^{(2)} - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{maxim} \leq \delta_1 \},$$

とおく. ここで最初 $2C_{2\delta_0}\delta_1 < 1/2$ となるように $\delta_1 > 0$ を選び次に (φ, ψ) を次の不等式を満たすように X_0 において十分 (u_0, w_0) の近くにとる:

$$C_{2\delta_0} |||(u_0, w_0) - (\varphi, \psi)|||_{X_0} < \frac{\delta_1}{3}.$$

Proposition 5.1 および Proposition 5.2 より,

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & |||\Phi(\vec{u}^{(2)})|||_{Y_T} \\
 & \leq |||(u_0, w_0)|||_{X_0} + C_\varphi |||\vec{u}^{(2)} - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{Y_T} |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T} \\
 & + C_\varphi^* T^\beta (1 + |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}) |||\vec{u}^{(2)}|||_{Y_T}, \\
 & \leq C_{2\delta_0}\delta_0 + 2C_{2\delta_0}^2\delta_0\delta_1 \\
 & + 2C_\varphi^* T^\beta (1 + 2C_{2\delta_0}\delta_0) C_{2\delta_0}\delta_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.7) \quad & |||\Phi(\vec{u}^{(2)}) - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{\max} \\
& \leq C_{2\delta_0} |||(u_0, w_0) - (\varphi, \psi)|||_{X_0} + C_\varphi^* T ||(\varphi, \psi)||_{H_x^{3,2}} \\
& \quad + 2C_\varphi^* T^{1/4} (1 + 2C_{2\delta_0} \delta_0) C_{2\delta_0} \delta_0.
\end{aligned}$$

つぎに $T > 0$ を次の不等式を満たすように十分小さくとる.

$$C_\varphi^* T ||(\varphi, \psi)||_{H^{3,2}} < \frac{\delta_1}{3}, \quad \text{かつ} \quad 2C_\varphi^* T^\beta (1 + 2C_{2\delta_0} \delta_0) C_{2\delta_0} \delta_0 < \frac{\delta_1}{3}.$$

すると,

$$|||\Phi(\vec{u}^{(2)}) - \vec{\varphi}^{(2)}|||_{\max} \leq \delta_1.$$

したがって,

$$|||\Phi(\vec{u}^{(2)})|||_{Y_T} \leq C_{2\delta_0} \delta_0 + \frac{1}{2} C_{2\delta_0} \delta_0 + \frac{1}{2} C_{2\delta_0} \delta_0 = 2C_{2\delta_0} \delta_0.$$

T をさらに次の不等式を満たすように十分小さくとる: $2C_\varphi^* T^\beta (1 + 2C_{2\delta_0} \delta_0) < 1/2$. すると Φ は $B_T(\delta)$ 上写像となる. 同様の手続きにより Φ が同空間上で縮小写像であることも示すことが出来る.

Remark 5.3. この方法は, 2次及び3次の非線形項を持つ derivative nonlinear Schrödinger 方程式にも適用することが出来る. 詳細については [14] 参照.

REFERENCES

- [1]. J. Angulo, *On the Cauchy problem for a Boussinesq-type system*, Adv. Diff. Eq., **4** (1999), 457-492.
- [2]. D. Bekiranov, T. Ogawa and G. Ponce, *On the well-posedness of Benny's interaction equation of short and long waves*, Advances in Diff. Eq., **6** (1996), 919-937.
- [3]. P. Constantin and J. C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), 413-439.
- [4]. S. Cohn, *Resonance and long time existence for the quadratic semilinear Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 973-1001.
- [5]. J. Ginibre and G. Velo, *On a class of Schrödinger equations, III. special theories in dimensions 1, 2 and 3*, Ann Inst Henri Poincaré **28** n° 3 (1978), 287-316.
- [6]. N. Hayashi, *The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equations*, Comm. in P.D.E., **18** (1993), 823-833.
- [7]. N. Hayashi and T. Ozawa, *On the nonlinear Schrödinger equation*, Phys. D., **55** (1992), 14-36.
- [8]. N. Hayashi and T. Ozawa, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Diff. and Integral Eq., **7** (1994), 453-461.
- [9]. T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré Physique Théorique., **46** (1987), 113-129.
- [10]. D. J. Kaup, *A higher-order water wave equation and the method for solving it*, Prog. Theor. Phys. **54** (1975), 396-408.
- [11]. C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. math J. **40** (1991), 33-69.
- [12]. C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction mapping principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527-620.

- [13]. C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Small solution to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **10** (1993), 255-288.
- [14]. 北直泰, 第 24 回発展方程式若手セミナー報告集, (2002).
- [15]. N. Kita and J. Segata, Well-posedness for the Boussinesq-type system related to the water waves preprint. Kyushu univ., 2002.
- [16]. T. Ozawa, *Remarks on quadratic nonlinear Schrödinger equations*, Funkcialaj Ekvacioj., **38** (1995), 217-232.
- [17]. T. Ozawa, *Nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, Indiana univ. math. J., **45** (1996), 137-163.
- [18]. T. Ozawa, *Finite energy solutions for the Schrödinger equations with quadratic nonlinearity in one space dimension*, Funkcialaj Ekvacioj., **41** (1998), 451-468.
- [19]. P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equations*, Duke Math., **55** (1987), 699-715.
- [20]. E. M. Stein, *"Singular integral and differentiability Properties of Functions"*, Princeton Univ. Press, Princeton Math. Series **30** (1970).
- [21]. R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of wave equation*, Duke Math. J. **44** (1977), 705-714.
- [22]. Y. Tsutsumi, *L^2 -solutions for Nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcialaj Ekvacioj. **30** (1987), 115-125.
- [23]. L. Vega, *Schrödinger equations: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** (1988), 874-878.
- [24]. K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415-426.

The inviscid limit for the complex Ginzburg-Landau equation

町原秀二 (島根大 総合理工)
machihara@math.shimane-u.ac.jp
中村能久¹ (熊本大 工)
hisa@math.sci.kumamoto-u.ac.jp

1 Introduction

In this paper we consider the inviscid limit for the complex Ginzburg-Landau equations. We introduce two nonlinear equations, complex Ginzburg-Landau equation (CGL) and nonlinear Schrödinger equation (NLS) :

$$\text{CGL: } \partial_t u = (a + i\nu)\Delta u - (b + i\mu)|u|^{p-1}u, \quad u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

$$\text{NLS: } \partial_t v = i\nu\Delta v - i\mu|v|^{p-1}v, \quad v(0) = v_0, \quad (1.2)$$

where u and v are complex valued functions of $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, the parameters $p > 1, a > 0, b > 0$ and ν, μ are real. We can take $\nu > 0$ without loss of generality.

We can see that if $a = b = 0$, CGL is equivalent to NLS. So we study how the solutions for CGL converge to the corresponding solutions for NLS when we take the limit as $a \rightarrow 0$ and $b \rightarrow 0$. We call this procedure *the inviscid limit*, in the sense that we make the *viscosity* a tend to zero. We give the convergence rate for difference of the solutions by making use of the fundamental solutions for CGL and NLS. Thus we can see the smoothing effect of the solutions directly. We consider only the $\mathbb{R}^n$ case.

CGL and NLS have been investigated by many authors (see, e.g., [5, 6, 12, 13] and references therein for CGL, e.g., [8, 9, 14] and references therein for NLS). We are interested especially in the case that the initial data for these equations are not smooth.

The problem on the inviscid limit have been considered for Navier-Stokes equation (see [7]), for Burgers' equation (see [3]), etc. There are a few results on this problem for CGL. In [17], L^2 convergence rate for H^1 data and L^{p+1} and H^1 convergence rates with stronger regular data were studied. In [1], weak H^1 convergence for H^1 data was shown. L^2 convergence rate with $H^s, s > n/2$ data were also studied. In these papers energy method was used for the proof. There are the related results obtained by using monotonicity method (see [12, 13]). In [15], he obtained the estimate using the fundamental solution, which is included in our results.

As mentioned above, in this paper, we study this problem by different way, namely we investigate the integral forms for CGL and NLS by using the Strichartz estimate. The Strichartz estimate for NLS, which displays the smoothing effect of the Schrödinger equation, is well known (see [8, 9, 10, 14] and references therein). We construct the similar one for CGL to study this problem in the uniform framework for the difference of solutions between two equations. Using this estimate, we derive the existence results for CGL which are corresponding to the one of NLS, and consider the inviscid limit problem in Section 3. In Section 4, We mention the relation to the nonlinear heat equation.

¹Supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

We use the following notation. For any $1 \leq r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, we denote L^r for Lebesgue space and $H^{s,r}$ for Sobolev space with the norm

$$\|u\|_{H^{s,r}} = \|(1 - \Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^r}.$$

We abbreviate $H^{s,2}$ to H^s . We use $\hat{\cdot}$ to denote the Fourier transform with respect to the space variable. $o(\cdot)$ and $O(\cdot)$ mean *small order* and *large order* respectively. We denote the dual exponent to p by p' , namely $1/p + 1/p' = 1$. Set $0 < a, b < 1$. Occasionally we abbreviate “ $\leq C$ ” to “ $\lesssim$ ”, where C is a positive constant independent of a and b .

2 Preliminaries and Results

Since we consider the convergence of the solutions of (1.1) to the solution of (1.2), we treat the solutions of (1.1) as the sequence depending on (a, b) .

Definition 1 We denote the initial data by $u_{0\varepsilon}$ and solution for (1.1) which is obtained above by u_ε where $\varepsilon = (a, b)$ and we promise that $\varepsilon \rightarrow 0$ means $a \rightarrow 0$ and $b \rightarrow 0$.

We set $f(w) = |w|^{p-1}w$ for simplicity. Then (1.1) and (1.2) can be rewritten in the form of integral equations respectively as follows,

$$\text{CGL}_{int} : \quad u_\varepsilon(t) = U_a(t)u_{0\varepsilon} - (b + i\mu) \int_0^t U_a(t-s)f(u_\varepsilon(s))ds \quad (2.1)$$

$$\text{with } U_a(t) = e^{(a+i\nu)\Delta t},$$

$$\text{NLS}_{int} : \quad v(t) = V(t)v_0 - i\mu \int_0^t V(t-s)f(v(s))ds \quad (2.2)$$

$$\text{with } V(t) = e^{i\nu\Delta t}.$$

We collect the existence results for NLS (see, e.g., [8, 9, 10, 14]). Especially, we introduce only the sub-critical case that the existence of the global solution in time to (1.2) is guaranteed.

Definition 2 The pair (q, r) of real numbers is said to be *admissible* if $1/r + 2/nq = 1/2$ with $2 \leq r \leq 2n/(n-2)$ when $n \geq 3$, $2 \leq r < \infty$ when $n = 2$, $2 \leq r \leq \infty$ when $n = 1$.

Proposition 3 Let $1 \leq p < 1 + 4/n$. Let $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Then there exists a unique solution v for (1.2) satisfying

$$v \in C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q_{loc}(0, \infty; L^{p+1}(\mathbb{R}^n)),$$

where $(q, p+1)$ with $q = 4(p+1)/(np-n)$ is an admissible pair. Moreover, for any $T < \infty$, there exists a constant $M = M(T) < \infty$ such that

$$\|v\|_{L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} < M$$

for any admissible pair (q, r) .

Furthermore, the solution v for (1.2) satisfies for $0 \leq t < \infty$,

$$Q(v(t)) = Q(v_0),$$

where $Q(w) = \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$.

Proposition 4 Let $\mu > 0$. Let $1 \leq p < \infty$ for $n = 1, 2$, $1 \leq p < (n+2)/(n-2)$ for $n \geq 3$. Let $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s = 1, 2$. Then there exists a unique solution v for (1.2) satisfying

$$v \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); H^{s-2}(\mathbb{R}^n)),$$

Moreover, for any $T < \infty$, there exists a constant $M = M(T) < \infty$ such that

$$\|v\|_{L^q(0,T;H^{s,r}(\mathbb{R}^n))} < M$$

for any admissible pair (q, r) . In addition, if $s = 2$, then there exists a constant $M' = M'(T) < \infty$ such that

$$\|\partial_t v\|_{L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} < M'.$$

Furthermore, the solution v for (1.2) satisfies for $0 \leq t < \infty$,

$$\begin{aligned} Q(v(t)) &= Q(v_0), \\ E(v(t)) &= E(v_0), \end{aligned}$$

where $Q(w)$ as above and $E(w) = \frac{\nu}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}$.

We have the well-posedness theorems of (1.1) corresponding to the above theorems for (1.2).

Theorem 5 Let ε be fixed. Let $1 \leq p < 1 + 4/n$. Let $u_{0\varepsilon} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Then there exists a unique solution u_ε for (1.1) satisfying

$$u_\varepsilon \in C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^q(0, \infty; L^{p+1}(\mathbb{R}^n)),$$

where $(q, p+1)$ as above. Moreover, for any $T < \infty$, there exists a constant $M = M(T) < \infty$ such that

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} < M$$

for any admissible pair (q, r) .

Furthermore, the solution u_ε for (1.1) satisfies for $0 \leq t < \infty$,

$$Q(u_\varepsilon(t)) \leq Q(u_{0\varepsilon}),$$

where $Q(w) = \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$.

Theorem 6 Let ε be fixed and $\mu > 0$. Let $1 \leq p < \infty$ for $n = 1, 2$, $1 \leq p < (n+2)/(n-2)$ for $n \geq 3$. Let $u_{0\varepsilon} \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s = 1, 2$. Then there exists a unique solution u_ε for (1.1) satisfying

$$u_\varepsilon \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); H^{s-2}(\mathbb{R}^n)),$$

Moreover, for any $T < \infty$, there exists a constant $M = M(T) < \infty$ such that

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q(0,T;H^{s,r}(\mathbb{R}^n))} < M$$

for any admissible pair (q, r) . In addition, if $s = 2$, then there exists a constant $M' = M'(T) < \infty$ such that

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} < M'.$$

Furthermore, the solution u_ε for (1.1) satisfies for $0 \leq t < \infty$,

$$\begin{aligned} Q(u_\varepsilon(t)) &\leq Q(u_{0\varepsilon}), \\ E(u_\varepsilon(t)) &\leq E(u_{0\varepsilon}), \end{aligned}$$

where $Q(w)$ and $E(w)$ as above.

Now we give the convergence theorems, which are main results in this paper. We set the initial data in L^2 , H^1 and H^2 , respectively.

Theorem 7 *Let assumptions as in Theorem 5 be satisfied. Let $u_{0\epsilon} = v_0 \in L^2$. Then, for any $T > 0$,*

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq o(1) + O(b)$$

for any admissible pair (q, r) . In particular,

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq o(1) + O(b). \quad (2.3)$$

Theorem 8 *Let assumptions as in Theorem 6 be satisfied. Let $u_{0\epsilon} = v_0 \in H^1$. Then, for any $T > 0$ and any admissible pair (q, r) ,*

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq \rho(a) + O(b),$$

where $\rho(a) = o(\sqrt{a})$, more precisely $\|\rho(a)/\sqrt{a}\|_{l^2L^\infty} < \infty$, where

$$\|g(a)\|_{l^2L^\infty}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sup_{2^{-j} \leq a \leq 2^{-j+1}} |g(a)|^2.$$

In particular,

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \rho(a) + O(b). \quad (2.4)$$

Combining the above two theorems, we obtain the strong convergence in H^1 .

Corollary 9 *Let assumptions as in Theorem 8 be satisfied. Then, for any $T > 0$,*

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq o(1) + O(b).$$

Remark The weak H^1 convergence of u_ϵ to v was proved in [1]. From this property, we can prove the strong H^1 convergence by using the conservation law of Q and E of the solution for NLS immediately, without the use of the fundamental solutions. In this case, we can obtain only the estimate

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq O(\sqrt{a}) + O(b).$$

Theorem 10 *Let assumptions as in Theorem 6 be satisfied. And let $u_{0\epsilon} = v_0 \in H^2$. Then, for any $T > 0$ and any admissible pair (q, r) .*

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq O(a) + O(b).$$

In particular,

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq O(a) + O(b). \quad (2.5)$$

3 Proof

Firstly in this section, we give the existence and the uniqueness of the solution for (1.1) using the integral form (2.1), Now we give the Strichartz type estimate for CGL.

Lemma 11 *Let $u \in L^2$ and $f \in L^{q'_3}(0, T; L^{r'_3})$ with some $0 < T \leq \infty$ and some admissible pair (q_3, r_3) . For any admissible pair (q_j, r_j) , $j = 1, 2$, the following estimates hold.*

$$\|U_a(t)u\|_{L^{q_1}(0, \infty; L^{r_1})} \lesssim \|u\|_{L^2}, \quad (3.1)$$

$$\left\| \int_0^t U_a(t-s)f(s)ds \right\|_{L^{q_2}(0, T; L^{r_2})} \lesssim \|f\|_{L^{q'_3}(0, T; L^{r'_3})}, \quad (3.2)$$

where the boundedness " $\lesssim$ " is independent of u , f , T and a .

Proof of Lemma 11

It is well known that for $2 < q_1 \leq \infty$, (3.1) holds. For the endpoint $(q_1, r_1) = (2, 2n/(n-2))$ with $n \geq 3$, we apply the result of Keel and Tao [10]. By the contraction properties of $e^{at\Delta}$, we have

$$\|e^{(a+i\nu)\Delta t}u_0\|_{2n/(n-2)} \leq \|e^{i\nu\Delta t}u_0\|_{2n/(n-2)}$$

for any $t > 0$ and $n \geq 3$. Hence we have

$$\|U_a(\cdot)u_0\|_{L^2(0, \infty; L^{2n/(n-2)})} \leq \|V(\cdot)u_0\|_{L^2(0, \infty; L^{2n/(n-2)})} \lesssim \|u_0\|_2,$$

by the endpoint Strichartz estimate for the free Schrödinger operator.

We prove (3.2) for any admissible pairs (q_j, r_j) , $j = 2, 3$. When $q_2 \neq q'_3$ or $r_2 \neq r'_3$, since it is clearly that $0 < 1/q'_3 - 1/q_2 = 1 - (n/2)(1/r'_3 - 1/r_2) < 1$, it is well known that (3.2) holds. When $q_2 = q'_3 = 2$, that is, $r_2 = 2n/(n-2)$ and $r'_3 = 2n/(n+2)$ following to the proof of the inhomogeneous endpoint Strichartz estimate in Keel and Tao [10], we can prove

$$\left\| \int_0^t U_a(t-s)f(s)ds \right\|_{L^2(0, T; L^{2n/(n-2)})} \leq C\|f\|_{L^2(0, T; L^{2n/(n+2)})}.$$

Note that $e^{a\Delta t}$, $t > 0$, is a contraction map on L^r , $1 \leq r < \infty$. When $r_2 = r'_3 = 2$, that is, $q_2 = \infty$ and $q'_3 = 1$ we have for any $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t U_a(t-s)f(s)ds \right\|_{L^2}^2 &= \left(\int_0^t e^{(a+i\nu)\Delta(t-s)}f(s)ds, \int_0^t e^{(a+i\nu)\Delta(t-s')}f(s')ds' \right) \\ &= \int_0^t \int_0^t (e^{a\Delta(2t-s-s')}f(s), e^{i\nu\Delta(s-s')}f(s'))dsds' \\ &\leq \int_0^t \int_0^t \|e^{a\Delta(2t-s-s')}f(s)\|_{L^2} \|e^{i\nu\Delta(s-s')}f(s')\|_{L^2}dsds' \\ &\lesssim \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} \left(\int_0^t \|f(s')\|_{L^2}ds' \right) ds \\ &\lesssim \|f\|_{L^1(0, T; L^2)}^2. \end{aligned}$$

We note $2t - s - s' \geq 0$.

Proof of Theorem 5

We employ the contraction mapping principle. The following arguments are well known for NLS. Let $\tau = p + 1$. We set the space $X_T^p = L^\infty(0, T; L^2) \cap L^q(0, T; L^\tau)$ with norm

$$\|w\|_{X_T^p} = \|w\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|w\|_{L^q(0, T; L^\tau)},$$

and the space $X_T^{p'} = L^1(0, T; L^2) + L^{q'}(0, T; L^\tau)$ with norm

$$\|w\|_{X_T^{p'}} = \inf\{\|w_1\|_{L_T^1(L^2)} + \|w_2\|_{L_T^{q'}(L^\tau)} : w = w_1 + w_2\}.$$

We start from (2.1). By (3.1) and (3.2), we have

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{X_T^p} &\lesssim \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \|f(u_\varepsilon)\|_{L^{q'}(0, T; L^\tau)} \\ &\leq \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + T^\theta \|u_\varepsilon\|_{L^q(0, T; L^\tau)}^p, \end{aligned}$$

where $\theta = 1 - n(p - 1)/4 > 0$. Similarly we have contraction properties as

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2\|_{X_T^p} &\lesssim \|f(u_\varepsilon^1) - f(u_\varepsilon^2)\|_{L^{q'}(0, T; L^\tau)} \\ &\leq T^\theta (\|u_\varepsilon^1\|_{L^q(0, T; L^\tau)} + \|u_\varepsilon^2\|_{L^q(0, T; L^\tau)})^{p-1} \|u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2\|_{L^q(0, T; L^\tau)}. \end{aligned}$$

Therefore we can close the contraction map for sufficiently small T which is independent of a and b , but depends only on $\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}$, and we obtain a unique time local solution for (1.1). Since we have $\|u_\varepsilon(t)\|_2 \leq \|u_{0\varepsilon}\|_2$ for any $t > 0$, we can continue this solution time globally.

Proof of Theorem 6

For H^1 -solutions, we employ the contraction mapping principle on the space $Y_T^p = \{u \in X_T^p \mid \nabla u \in X_T^p\}$ with norm

$$\|u\|_{Y_T^p} = \|u\|_{X_T^p} + \|\nabla u\|_{X_T^p}.$$

Similar to the proof of the wellposedness of the nonlinear Schrödinger equation with H^1 initial data, we can obtain the H^1 solution of (1.1). For H^2 -solutions, we may consider the contraction mapping principle on the space $Z_T^p = \{u \in L^\infty(0, T; H^2) \mid \partial u \in X_T^p\}$ with norm

$$\|u\|_{Z_T^p} = \|u\|_{X_T^p} + \|\partial u\|_{X_T^p} + \|\Delta u\|_{L^\infty(0, T; L^2)}.$$

Then we can obtain the H^2 solution of (1.1) (see [8, 9] for (1.2)).

When we investigate the difference between the solutions, the following proposition give us the important information.

Proposition 12 *Let $s_1 \geq s_2 \geq 0$ and $\phi \in H^{s_1}$. Then the following estimate holds, for any $T > 0$,*

$$\|(U_a(\cdot) - V(\cdot))\phi\|_{L^\infty(0, T; H^{s_2})} \leq \Theta_a^{s_1, s_2}, \quad (3.3)$$

where

$$\Theta_a^{s_1, s_2} = \begin{cases} o(a^{(s_1 - s_2)/2}) & \text{if } 0 \leq s_1 - s_2 < 2, \\ O(a) & \text{if } 2 \leq s_1 - s_2. \end{cases}$$

We note that, in the case of $s_1 = s_2$, $\Theta_a^{s_1, s_2} = o(1)$.

Proof

From Plancherel's theorem,

$$\begin{aligned}\|(U_a(t) - V(t))\phi\|_{H^{s_2}} &= \|(e^{-(a+i\nu)|\xi|^2 t} - e^{-i\nu|\xi|^2 t})(1 + |\xi|^2)^{s_2/2} \hat{\phi}\|_{L^2} \\ &= \|(e^{-a|\xi|^2 t} - 1)(1 + |\xi|^2)^{s_2/2} \hat{\phi}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

We estimate for $a > 0, t > 0$,

$$|e^{-a|\xi|^2 t} - 1| = \left| \int_0^t (-a|\xi|^2) e^{-a|\xi|^2 s} ds \right| \leq ta|\xi|^2.$$

Interpolating with $|e^{-a|\xi|^2 t} - 1| \leq 2$, we have

$$|e^{-a|\xi|^2 t} - 1| \lesssim (ta|\xi|^2)^\theta \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 1.$$

If the case $s_1 - s_2 \geq 2$, we have

$$\|(U_a(t) - V(t))\phi\|_{L^\infty(0,T;H^{s_2})} \leq a\|t|\xi|^2(1 + |\xi|^2)^{s_2/2} \hat{\phi}\|_{L^\infty(0,T;H^{s_2})} = O(a) \quad \text{as } a \rightarrow 0.$$

If the case $0 \leq s_1 - s_2 < 2$, we set $\theta = (s_1 - s_2)/2$ and apply the dominated convergence theorem to obtain

$$\|(U_a(t) - V(t))\phi\|_{L^\infty(0,T;H^{s_2})} = o(a^{(s_1-s_2)/2}) \quad \text{as } a \rightarrow 0.$$

Therefore we obtained (3.3).

We prove the main theorems.

Proof of Theorem 7

We now turn on investigation of the inviscid limit from CGL to NLS. Subtracting (2.2) from (2.1),

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(t) - v(t) &= (U_a(t) - V(t))v_0 \\ &\quad - i\mu \int_0^t (U_a(t-s) - V(t-s))f(v(s))ds \\ &\quad - b \int_0^t U_a(t-s)f(u_\varepsilon(s))ds \\ &\quad - i\mu \int_0^t U_a(t-s)(f(u_\varepsilon(s)) - f(v(s)))ds \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t).\end{aligned}$$

We investigate $\|I_j\|_{L^q(0,T;L^r)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ for any admissible pair (q, r) , respectively.

For the estimate of I_1 , we set the approximation $v_0^j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ of v_0 such that

$$\|v_0 - v_0^j\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

Then we have for any admissible (q, r)

$$\begin{aligned}\|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})v_0\|_{L^q(0,T;L^r)} &\leq \|e^{(a+i\nu)\Delta t}(v_0 - v_0^j)\|_{L^q(0,T;L^r)} \\ &\quad + \|e^{i\nu\Delta t}(v_0 - v_0^j)\|_{L^q(0,T;L^r)} \\ &\quad + \|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})v_0^j\|_{L^q(0,T;L^r)}.\end{aligned}$$

It is clear that the first and the second terms tend to 0 as $j \rightarrow \infty$. And for the third term, we have

$$\begin{aligned} \|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})v_0^j\|_{L^r} &= \left\| \int_0^t a\Delta e^{a\Delta s} e^{i\nu\Delta t} v_0^j ds \right\|_{L^r} \\ &\leq a \int_0^t \|e^{a\Delta s} e^{i\nu\Delta t} \Delta v_0^j\|_{L^r} ds \\ &\leq aT \|e^{i\nu\Delta t} \Delta v_0^j\|_{L^r}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

and

$$\|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})v_0^j\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq aT \|e^{i\nu\Delta t} \Delta v_0^j\|_{L^q(0,T;L^r)} \lesssim aT \|\Delta v_0^j\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

as $a \rightarrow 0$. Hence we have $\|I_1\|_{L^q(0,T;L^r)} \rightarrow 0$ as $a \rightarrow 0$. To consider I_2 , recall that $f(v) \in L^{q'}(0,T;L^{r'})$ (see [9]). Note that $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ is dense in $L^{q'}(0,T;L^{r'})$, so we have $\|I_2\|_{L^q(0,T;L^r)} \rightarrow 0$ as $a \rightarrow 0$ from the same manner on I_1 . We know

$$\|I_3\|_{L^q(0,T;L^r)} \lesssim b T^\theta \|u_\varepsilon\|_{L^q(0,T;L^r)}^p \lesssim b.$$

For the estimate of I_4 , we divide the proof into the two cases. When $2 \leq r \leq p+1$, we have

$$\begin{aligned} \|I_4\|_{L^q(0,T;L^r)} &\leq \|I_4\|_{X_T^p} \lesssim \|f(u_\varepsilon) - f(v)\|_{L^{q'}(0,T;L^{r'})} \\ &\leq T^\theta (\|u_\varepsilon\|_{L^q(0,T;L^r)} + \|v\|_{L^q(0,T;L^r)})^{p-1} \|u_\varepsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} \\ &\lesssim T^\theta \|u_\varepsilon - v\|_{X_T^p}. \end{aligned}$$

Collecting the above estimates, we have for some constant $C > 0$

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} &\leq \|u_\varepsilon - v\|_{X_T^p} \\ &\leq o(1) + O(b) + CT^\theta \|u_\varepsilon - v\|_{X_T^p}, \end{aligned}$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$. Therefore for sufficiently small T , we obtain the desired result and which is extended to any $T > 0$ by repeating the above arguments. For any $p+1 \leq r \leq 2n/(n-2)$, there exists some $2 \leq \gamma \leq 2n/(n-2)$ such that $1/2 \leq (p-1)/\gamma + 1/r \equiv 1/\alpha \leq 1/2 + 1/n$. And set $2/\beta = n(1/2 + 2/n - 1/\alpha)$, we have

$$\begin{aligned} \|I_4\|_{L^q(0,T;L^r)} &\lesssim \|f(u_\varepsilon) - f(v)\|_{L^\rho(0,T;L^\alpha)} \\ &\leq T^\theta (\|u_\varepsilon\|_{L^\rho(0,T;L^\gamma)} + \|v\|_{L^\rho(0,T;L^\gamma)})^{p-1} \|u_\varepsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} \\ &\lesssim T^\theta \|u_\varepsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)}, \end{aligned}$$

where $2/\rho = n(1/2 - 1/\gamma)$, note that $\theta = 1 - n(p-1)/4$. Using this estimate, we can obtain the desired result directly.

Proof of Theorem 8

It suffices to estimate only I_1 and I_2 . For I_1 , we estimate for any admissible pair (q, r) , see [2],

$$\|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})v_0\|_{L^q(0,T;L^r)} \lesssim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})\varphi_j * v_0\|_{L^q(0,T;L^r)}^2 \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

where $\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ is the Littlewood–Paley dyadic decomposition on $\mathbb{R}^n$, namely $\{\hat{\varphi}_j\} \subset C_0^\infty$, $\text{supp } \hat{\varphi}_j \subset \{\xi; 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$, $0 \leq \hat{\varphi}_j \leq 1$, and $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1$ on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. We rewrite φ_0 for ψ such that $\hat{\psi} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\varphi}_j$.

Using (3.1) on the summand in the right hand side of (3.6) directly and on the following form

$$(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})\varphi_j * v_0 = a \int_0^t e^{a\Delta s + i\nu\Delta t} \Delta \varphi_j * v_0 ds,$$

to gain

$$\|(e^{(a+i\nu)\Delta t} - e^{i\nu\Delta t})\varphi_j * v_0\|_{L^q(0,T;L^r)} \lesssim \min(1, a2^{2j}) \|\varphi_j * v_0\|_{L^2}.$$

We set $g(a) = (\sum_{j=0}^{\infty} \min(1, a2^{4j}) \|\varphi_j * v_0\|_{L^2}^2)^{1/2}$, which is estimated by

$$\begin{aligned} \|g(a)/\sqrt{a}\|_{L^\infty}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{2^{-k} \leq a \leq 2^{-k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \min(a^{-1}, a2^{4j}) \|\varphi_j * v_0\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \min(2^{k-2j}, 2^{-k+2j}) 2^{2j} \|\varphi_j * v_0\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j} \|\varphi_j * v_0\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \|v_0\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

So we may write $\|I_1\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq \rho(a)$, where $\rho(a) = o(\sqrt{a})$ as $a \rightarrow 0$. Since $f(v) \in L^{q'}(0,T;H^{1,r'})$ (see [9]), we have from the same manner on I_1 ,

$$\|I_2\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq \rho(a)$$

as $a \rightarrow 0$.

Proof of Corollary 9

From the arguments in the proof of Theorems 5 and 7, we have for any $T < \infty$

$$\|\nabla(u_\varepsilon - v)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq o(1) + O(b),$$

as $a \rightarrow 0$ (see the proof of Theorem II' in [9]). Therefore combining (2.4) with this, we obtain the strong convergence in H^1 .

Proof of Theorem 10

Since $v_0 \in H^2$, (3.4) and (3.5) imply $\|I_1\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq O(a)$ as $a \rightarrow 0$. Similarly we have $\|I_2\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq O(a)$ as $a \rightarrow 0$.

4 Remark on the nonlinear heat equation

Even if we regard the solutions of (1.1) as the sequence depending on (ν, μ) and consider the convergence to the solution of the nonlinear heat equation

$$\text{NLH: } \partial_t v = a\Delta v - b|v|^{p-1}v, \quad v(0) = v_0, \quad (4.1)$$

we also obtain the same convergence rate as in the theorems on (1.2). We consider only the case with the L^2 initial data. As above, (4.1) can be rewritten in the form of integral equations respectively as follows,

$$\begin{aligned} \text{NLH}_{int}: \quad v(t) &= T(t)v_0 - b \int_0^t T(t-s)f(v(s))ds \\ \text{with } T(t) &= e^{a\Delta t}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

Then, the following proposition holds as above.

Proposition 13 *Let $s_1 \geq s_2 \geq 0$ and $\phi \in H^{s_1}$. Then the following estimate holds, for any $T > 0$,*

$$\|(U_a(\cdot) - T(\cdot))\phi\|_{L^\infty(0,T;H^{s_2})} \leq \Theta_a^{s_1,s_2},$$

where

$$\Theta_a^{s_1,s_2} = \begin{cases} o(a^{(s_1-s_2)/2}) & \text{if } 0 \leq s_1 - s_2 < 2, \\ O(a) & \text{if } 2 \leq s_1 - s_2. \end{cases}$$

We note that, in the case of $s_1 = s_2$, $\Theta_a^{s_1,s_2} = o(1)$.

Proof

We can prove this from Plancherel's theorem as the proof of Proposition 12. Note that $\|(U_a(t) - V(t))\phi\|_{L^2} = \|(e^{-(a+i\nu)|\xi|^2 t} - e^{-a|\xi|^2 t})\hat{\phi}\|_{L^2}$.

The following wellposedness theorem is well known (see [4, 16]).

Proposition 14 *Let $1 \leq p < 1 + 4/n$. Let $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Then there exists a unique solution v for (4.1) satisfying*

$$v \in C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^q(0, \infty; L^{p+1}(\mathbb{R}^n)),$$

where $(q, p+1)$ as above. Moreover, for any $T < \infty$, there exists a constant $M = M(T) < \infty$ such that

$$\|v\|_{L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} < M$$

for any admissible pair (q, r) .

Furthermore, the solution v for (4.1) satisfies for $0 \leq t < \infty$,

$$Q(v(t)) \leq Q(v_0),$$

where $Q(w)$ as above.

Theorem 15 *Let assumptions as in Proposition 14 be satisfied. Let $u_{0\epsilon} = v_0 \in L^2$. Then, for any $T > 0$,*

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq o(1) + O(b)$$

for any admissible pair (q, r) . In particular,

$$\|u_\epsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq o(1) + O(b). \quad (4.3)$$

参考文献

- [1] P. BECHOUCHE, A. JÜNGEL, *Inviscid limits of the complex Ginzburg–Landau equation*, Commun. Math. Phys., **214** (2000) 201–226.
- [2] J. BERGH, J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1976).
- [3] H. A. BIAGIONI, M. OBERGUGGENBERGER, *Generalized Solutions to Burgers’ Equation*, J. Differential Equations, **97** (1992) 263–287.
- [4] Y. GIGA, *Solutions for Semilinear Parabolic Equations in L^p and Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes System*, J. Differential Equation **61** (1986) 186–212.
- [5] J. GINIBRE, G. VELO, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg–Landau equation I. Compactness methods*, Physica D **95** (1996) 191–228.
- [6] J. GINIBRE, G. VELO, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg–Landau equation II. Contraction methods*, Commun. Math. Phys. **187** (1997) 45–79.
- [7] T. KATO, *Nonstationary Flows of Viscous and Ideal Fluids in $\mathbf{R}^n$* , J. Functional Anal. **9** (1972) 296–305.
- [8] T. KATO, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **46** (1987) 113–129.
- [9] T. KATO, *Nonlinear Schrödinger equations*, in “Schrödinger operators”, (H. Holden and A. Jensen eds.) Lecture Notes in Physics, **345** Springer-Verlag, Berlin-New York (1989) 218–263.
- [10] M. KEEL, T. TAO *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., **120** (1998) 955–980.
- [11] S. MACHIHARA, K. NAKANISHI, T. OZAWA, *Nonrelativistic limit in the energy space for nonlinear Klein–Gordon equations*, Math. Ann., **322** (2002) 603–621.
- [12] N. OKAZAWA, T. YOKOTA, *Monotonicity method applied to the complex Ginzburg–Landau and related equations* J. Math. Anal. Appl. **267** (2002) 247–263.
- [13] N. OKAZAWA, T. YOKOTA, *Monotonicity method for the complex Ginzburg–Landau equation, including smoothing effect*, 3rd World Congress of Nonlinear Analysts (Catania, Sicily, 2000), Nonlinear Anal. **47** (2001) 79–88.
- [14] Y. TSUTSUMI, *L^2 -Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations and Nonlinear Groups*, Funkcialaj Ekvac. **30** (1987) 115–125.
- [15] B. WANG, *The Limit Behaviour of Solutions for the Cauchy Problem of the Complex Ginzburg–Landau Equation*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002) 481–408.
- [16] F. B. WEISSLER, *Existence and non existence of global solutions for a semiinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981) 29–40.
- [17] J. WU, *The inviscid limit of the complex Ginzburg–Landau equation*, J. Differential Equations **142** (1998) 413–433.

非線形 Dirac 方程式の初期値問題について

前田 梨絵 (九州大学大学院数理学府数理学専攻修士 2 年)

ma201022@math.kyushu-u.ac.jp

小川 卓克 (九州大学大学院数理学研究院)

ogawa@math.kyushu-u.ac.jp

1 序論

本研究では、相対論的なスピノール場の自己平均場近似を記述する非線形 Dirac 方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u + i c \alpha \nabla u - c^2 \beta u + 2a(\beta u | u) \beta u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、未知関数 u は $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}$ から $\mathbb{C}^4$ への関数である。つまり $u(t, x) = {}^t(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x), u_4(t, x))$ で各 $i = 1, 2, 3, 4$ で

$$u_i : \mathbb{R}^{1+3} \ni (t, x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

$(\cdot | \cdot)$ は $\mathbb{C}^4$ のエルミート内積を表す。つまり

$$(\psi | \phi) = \psi_1 \bar{\phi}_1 + \psi_2 \bar{\phi}_2 + \psi_3 \bar{\phi}_3 + \psi_4 \bar{\phi}_4,$$

$\bar{\phi}_i$ は ϕ_i の複素共役である。 $a \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$ は定数である。

$\alpha \cdot \nabla = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_j$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ とし、各 α_j と β は 4×4 のエルミート行列で次のような行列である。

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ はスピンを表す Pauli 行列、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、 α, β は次の反可換性をもつものとする。 $j, k = 1, 2, 3$ に対し

$$\begin{aligned} \alpha_j^2 &= \alpha_j \alpha_j = I, & \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 0 \quad (j \neq k), \\ \beta^2 &= \beta \beta = I, & \alpha_j \beta + \beta \alpha_j &= 0. \end{aligned}$$

これまでの結果は、まず、Dias-Figueira[3] や Reed[11] らの結果があり、証明に初めて Strichartz 評価を用いたのが Escobedo-Vega[4] である。Escobedo-Vega は $p > 3$ のときより一般的な非線形項の形 $a|(\beta u|u)|^{\frac{(p-1)}{2}}u$ で、時間局所、および小さい初期値に対する時間大域的解の存在と一意性、初期値連続依存性を示した。しかし、3 次の $2a(\beta u|u)u$ の形の非線形項での時間大域的解は示されなかった。これを証明したのが、Machihara-Nakanishi-Ozawa[8] の結果である。これは Strichartz 評価を改良して得られたものである。最近になって次元が $n \geq 4$ であれば、初期値 u_0 を Besov 空間 $B_{2,1}^s$ にとったときの時間大域的解が Machihara-Nakamura-Ozawa[10] によって証明されている。ここでの $B_{2,1}^s$ の s は尺度不変性より得られる臨界指数である。よって 4 次元以上では臨界正則度で時間大域解が得られているが 3 次元の臨界正則度での可解性は未解決である。

ここでは、初期値 u_0 を Besov 空間 $B_{2,\sigma}^s$ にとったときの、時間局所、および時間大域的解の存在定理を証明する。

Theorem 1

$n = 3, s > 1, u_0 \in B_{2,\sigma}^s, \sigma \in [1, \infty]$ とし $0 < \nu \leq 1$ に対して $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\nu}, \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\nu}$ であると仮定する。このときある時刻 $T > 0$ が存在して、(2) の解 $u(t, x)$ が $C([0, T]; B_{2,\sigma}^s) \cap L^\gamma(0, T; B_{p,\sigma}^{s-\mu})$ に存在する。さらに

- (1) 解は $L^\infty([0, T]; B_{2,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^\gamma(0, T; B_{p,\sigma}^{s-\mu})$ において一意的。
- (2) もし $\|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s}$ が十分小ならば、 $T = \infty$ 、すなわち、解は時間大域的に存在し $u \in C([0, \infty); B_{2,\sigma}^s) \cap L^2(0, \infty; B_{p,\sigma}^{s-\mu})$ である。

Remark

これまでの結果との違いは $s > 1$ に対して、 $\sigma > 2$ とすると

$$H^s \subsetneq B_{2,\sigma}^s$$

となり、より広い空間となるところである。

また、初期値を $u_0 \in B_{2,\sigma}^s$ とした時、解が同じ空間に入る（これを方程式の解の持続性 (persistence) という）ことが分かる。

(1.1) の解をデュアメルの原理により、線形方程式の解を与える発展群 $U(t)$ を用いて、次の積分方程式に書き換える。 $f(t) = 2a(\beta u|u)\beta u$ として

$$u(t) = U(t)u_0 + i \int_0^t U(t-t')f(u(t'))dt', \quad (1.2)$$

ただし

$$U(t) = I \cos t(1-\Delta)^{1/2} - (\alpha \cdot \nabla + \beta) \frac{\sin t(1-\Delta)^{1/2}}{(1-\Delta)^{1/2}}.$$

ここで

$$(1 - \nabla)^{\frac{1}{2}} f := \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{f}],$$

$$\cos t(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} := \mathcal{F}^{-1}[\cos t(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}], \quad \sin t(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} := \mathcal{F}^{-1}[\sin t(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}]$$

とする。

以下、次の記号を用いる。

$L^r = L^r(\mathbb{R}^n)$ を Lebesgue 空間, $L^\theta(I : X)$ を区間 I 上の X 値関数, $\mathcal{S}$ を Schwartz 空間, $\mathcal{F}$ を Fourier 変換, $\mathcal{F}^{-1}$ を Fourier 逆変換, $|\nabla|^s f := \mathcal{F}^{-1}|\xi|^s \hat{f}$, $\langle \cdot \rangle := (1 + |\cdot|)^{\frac{1}{2}}$, $\langle \nabla \rangle^s f := \mathcal{F}^{-1}\langle \xi \rangle^s \hat{f}$ とする。

Definition (Littlewood-Paley の 2 進単位分解)

$\hat{\phi}(\xi) \in C_0^\infty(B_2)$ s.t.

$$\begin{cases} \phi(\xi) \geq 0, & \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(\frac{\xi}{2^j}), \\ \hat{\phi}(\xi) \equiv 0, & B_2^c \cup B_1, \\ \hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(|\xi|) \quad \text{球対称}, & \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_j(\xi) = 1 \quad (\xi \neq 0). \end{cases}$$

また

$$\hat{\psi}(\xi) = 1 - \sum_{j \leq 0} \hat{\phi}_j(\xi) \text{ とおく。}$$

Definition (the Besov space)

$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, \sigma \leq \infty$ とする。 $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を Littlewood-Paley の 2 進単位分解とするととき 斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)$, 非斉次 Besov 空間 $B_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する。

$$f \in \dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n) \iff f \in \mathcal{S}^*, \quad \|f\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js\sigma} \|\phi_j * f\|_p^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} < \infty.$$

$$f \in B_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n) \iff f \in \mathcal{S}^*, \quad \|f\|_{B_{p,\sigma}^s} = \|\psi * f\|_p + \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{js\sigma} \|\phi_j * f\|_p^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} < \infty.$$

実補間空間の記号を定義する。

Definition

$$f \in (H_p^{s_0}, H_p^{s_1})_{\theta,\sigma} \iff \left(\int_0^\infty \left(\lambda^{-\theta} \inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{H_p^{s_0}} + \lambda \|f_1\|_{H_p^{s_1}}) \right)^\sigma \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\sigma}} < \infty.$$

Proposition 2

$1 \leq p, q \leq \infty, 0 < \theta \leq 1$ に対して

$$(H_p^{s_0}, H_p^{s_1})_{\theta, \sigma} = B_{p, \sigma}^s \quad (1.3)$$

が成り立つ。ここで $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, s \in \mathbb{R}$.

2 Strichartz 評価

Strichartz 評価とは、Schrödinger 発展群 $e^{it\Delta}$ に対する L^p-L^q 評価を元に Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を用いることによって時間と空間の変数についてのノルムによる基本解の評価が得られるものである。これらは、方程式の局所可解性や、大域的な挙動の研究においてもっとも基本的な道具のひとつである。 L_t^2 での Strichartz 評価はこれまでに波動方程式に対して、Lindblad-Sogge [7]、Ginibre-Velo [5]、また波動及び Schrödinger 方程式に対して Keel-Tao [6] などによって研究されている。

Definition

$s > 1$ を固定して $0 \leq \nu \leq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 + \nu}, \quad 2 \leq \theta, p \leq \infty, \\ \frac{2}{\theta} &= (n - 1 + \nu) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \\ 2s &= (n + 1 + \nu) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \end{aligned}$$

を満たす組 (θ, p) を s -admissible (s -適切) と呼ぶ。

$U(t)$ の主要部分である $K_{\pm}(t)$ を $K_{\pm}(t) = e^{\pm it(1-\Delta)^{1/2}}$ とおく。ここで $U(t)$ は $K_{\pm}(t)$ を用いて次のように表される。

$$U(t) = I \{ 1/2(K_+(t) + K_-(t)) \}^{1/2} - (\alpha \cdot \nabla + \beta) \{ 1/2(K_+(t) - K_-(t)) \}^{1/2} (1 - \Delta)^{-1/2}.$$

よって $K_{\pm}(t)$ についての評価をここでは与える。

Proposition 3 (Strichartz-Brenner estimate)

$s > 1$ に対して (θ, p) を s -admissible とする。このとき、以下の不等式が成り立つ。

$$\|K_{\pm}(t)u\|_{L_t^{\theta}(I;B_{p,\sigma}^{-s})} \leq C\|u\|_{B_{2,\sigma}^0}, \quad (2.1)$$

$$\left\| \int_{t' < t} K_{\pm}(t-t')f(t')dt' \right\|_{L_t^{\theta}(I;B_{p,\sigma}^{-s})} \leq C\|f\|_{L_t^1(I;B_{2,\sigma}^0)}, \quad (2.2)$$

$$\left\| \int_{t' < t} K_{\pm}(t-t')f(t')dt' \right\|_{L_t^{\infty}(I;B_{2,\sigma}^0)} \leq C\|f\|_{L_t^{\theta'}(I;B_{p',\sigma}^s)}, \quad (2.3)$$

$$\left\| \int_{t' < t} K_{\pm}(t-t')f(t')dt' \right\|_{L_t^{\theta}(I;B_{p,\sigma}^{-s})} \leq C\|f\|_{L_t^{\theta'}(I;B_{p',\sigma}^s)}. \quad (2.4)$$

Proof of Proposition 3.

簡単のため、 $K_{\pm}(t)$ を $K(t)$ と表す。

[1] (2.1) の証明。

$s > 1$, (θ, p) : s -admissible, $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ とする。このとき $D^{-s+r_0}K(t)u$, D^{-s+r_1} それぞれに対して、Strichartz 評価を用いると、

$$\|D^{-s+r_0}K(t)u\|_{L_t^{\theta}(I;L^p)} \leq C\|u\|_{H^{r_0}},$$

$$\|D^{-s+r_1}K(t)u\|_{L_t^{\theta}(I;L^p)} \leq C\|u\|_{H^{r_1}}.$$

となる。よって関数 $D^{-s}K$ は、

$$\begin{aligned} D^{-s}K : H^{r_0} &\rightarrow L^{\theta}(I;W^{r_0,p}), \quad \text{かつ} \\ H^{r_1} &\rightarrow L^{\theta}(I;W^{r_1,p}), \end{aligned}$$

となり、Proposition 2 を用いると、

$$D^{-s}K : (H_p^{r_0}, H_p^{r_1})_{\nu,\sigma} \rightarrow (L_t^{\theta}(W^{r_0,p}), L_t^{\theta}(W^{r_1,p}))_{\nu,\sigma} = L^{\theta}(I;B_{p,\sigma}^r)$$

となる。ここで r は $r = (1-\nu)r_0 + \nu r_1$, $(0 \leq \nu \leq 1)$ とする。

すなわち、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|D^{-s}K(t)u\|_{L^{\theta}(I;B_{p,\sigma}^r)} &= \|D^{-s}K(t)u\|_{(L_t^{\theta}(I;W^{r_0,p}), L_t^{\theta}(I;W^{r_1,p}))_{\nu,\sigma}} \\ &\leq C\|u\|_{(L^{\theta}(I;H_p^{r_0}), L^{\theta}(I;H_p^{r_1}))_{\nu,\sigma}} \\ &= C\|u\|_{B_{p,\sigma}^r} \end{aligned}$$

よって $r = 0$ とすると、求める不等式が得られる。

$$\|K(t)u\|_{L^{\theta}(I;B_{p,\sigma}^{-s})} \leq C\|u\|_{B_{2,\sigma}^0}.$$

[2] (2.2) の証明 … (2.1) を用いる。

$$\begin{aligned}
\| \int_0^T K(t-t')f(t')dt' \|_{L^q(I; B_{r,\sigma}^{-s})} &\leq \int_0^T \| K(t-t')f(t') \|_{L^q(I; B_{r,\sigma}^{-s})} dt' \\
&\leq C_0 \int_0^T \| K(-t')f(t') \|_{B_{2,\sigma}^0} dt' \\
&\leq C_0 \| f(t') \|_{L^1(I; B_{2,\sigma}^0)}.
\end{aligned}$$

[3] (2.3) の証明 … Hölder の不等式と (2.2) を用いる。

$$\begin{aligned}
&| \int_0^T (\int_0^t K(t-t')f(t')dt', g(t))_{L^2} dt| \\
&= | \int_0^T (f(t'), \int_{t'}^T K(t-t')g(t)dt) dt'| \\
&= | \int_0^T \sum_k (\phi_k * f(t'), \int_{t'}^T K(t-t')\tilde{\phi}_k * g(t)dt) dt'| \\
&\leq | \int_0^T \sum_k 2^{sk} \| \phi_k * f(t') \|_{L^{r'}}^{r'} 2^{-sk} \| \int_{t'}^T K(t-t')\tilde{\phi}_k * g(t)dt \|_{L^r} dt'| \\
&\leq | \int_0^T (\sum_k 2^{sk\sigma} \| \phi_k * f(t') \|_{L^{r'}}^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} (\sum_k 2^{-sk\sigma'} \| \int_{t'}^T K(t-t')\phi_k * g(t)dt \|_{L^{r'}}^{\sigma'})^{\frac{1}{\sigma'}} dt'| \\
&\leq \| f \|_{L^{q'}(I; B_{r',\sigma}^s)} \| \int K(t-t')g(t)dt \|_{L^q(I; B_{r,\sigma}^{-s})} \\
&\leq C \| f \|_{L^{q'}(I; B_{r',\sigma}^s)} \| g \|_{L^1(I; B_{2,\sigma}^0)}.
\end{aligned}$$

[4] (2.4) の証明 … Hölder の不等式と (2.3) を用いる。

$$\begin{aligned}
&| (\int_0^T K(-t)f(t)dt, \int_0^T K(-t')g(t')dt')_{L^2} | \\
&= | \sum_k (\int_0^T K(-t)\phi_k * f(t)dt, \int_0^T K(-t')\tilde{\phi}_k * g(t')dt')_{L^2} | \\
&\leq | \sum_k \| \int_0^T K(-t)\phi_k * f(t)dt \|_{L^2} \| \int_0^T K(-t')\tilde{\phi}_k * g(t')dt' \|_{L^2} | \\
&\leq | (\sum_k \| \int_0^T K(-t)\phi_k * f(t)dt \|_{L^2}^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} (\sum_k \| \int_0^T K(-t')\tilde{\phi}_k * g(t')dt' \|_{L^2}^{\sigma'})^{\frac{1}{\sigma'}} | \\
&\leq \| \int_0^T K(-t)\phi_k * f(t)dt \|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^0)} \| \int_0^T K(-t')\phi_k * g(t')dt' \|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^0)} \\
&\leq C \| f \|_{L^{q'}(I; B_{r',\sigma}^s)} \| g \|_{L^{q'}(I; B_{r',\sigma'}^s)}. \quad \square
\end{aligned}$$

3 主定理の証明

まず、定理の非線形項の証明に用いる不等式を紹介する。

Proposition 4

$s > 0$, $1 \leq p, \leq \infty$, $0 < \sigma \leq \infty$ とする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$\|f \cdot g\|_{B_{p,\sigma}^s} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B_{p,\sigma}^s} + \|f\|_{B_{p,\sigma}^s} \|g\|_{L^\infty} \quad (3.1)$$

Proof of Theorem 1.

$s > 1$, $M = 2C\|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s}$ として、完備距離空間 X_M を

$$X_M = \{v \in X; \|v\|_X \leq M\}$$

と定義する。ここで $X, \|\cdot\|_X$ は、

$$X = C(I; B_{2,\sigma}^s) \cap L^2(I; B_{p,\sigma}^{s-\mu}), \quad \|u\|_X = \|u\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} + \|u\|_{L^2(I; B_{p,\sigma}^{s-\mu})}$$

とする。また、関数 Φ, f を、

$$\Phi(u) \equiv K(t)u_0 + \int_0^t K(t-t')f(u(t'))dt', \quad f(u) = 2a(\beta u|u)\beta u$$

とする。

ここでは縮小写像の原理を用いて解を得る。

[$I = \mathbb{R}$ のとき]

関数 Φ が縮小写像であることを示す。

$$\|\Phi(u)\|_X = \|\Phi(u)\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} + \|\Phi(u)\|_{L^2(I; B_{p,\sigma}^{s-\mu})}. \quad (3.2)$$

となる。まず、(3.2) の最初の項を計算すると、

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} &= \|K(t)u_0 + \int_0^t K(t-t')f(u)dt'\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} \\ &\leq \|K(t)u_0\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} + \left\| \int_0^t K(t-t')f(u)dt' \right\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

となるので、(3.3) の始めの項は (2.1) を用いて、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bullet \|K(t)u_0\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} &= \|K(t)(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^0)} \\ &\leq C\|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0\|_{B_{2,\sigma}^0} \\ &= C\|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

また、(3.3) は、(2.2)、Proposition 4、埋め込み ($L^\infty \hookrightarrow B_{p,\sigma}^{s-\mu}[0 > \frac{3}{p} - (s - \mu)]$) を用いることにより次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\bullet \left\| \int_0^t K(t-t')f(u)dt' \right\|_{L^\infty(I;B_{2,\sigma}^s)} &= \left\| \int_0^t K(t-t')(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}f(u)dt' \right\|_{L^\infty(I;B_{2,\sigma}^0)} \\
&\leq C \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_{L^1(I;B_{2,\sigma}^0)} = C\|f\|_{L^1(I;B_{2,\sigma}^s)} \\
&\leq C \int \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{B_{2,\sigma}^s} dt \\
&\leq C \sup_t \|u\|_{B_{2,\sigma}^s} \int \|u\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq C \|u\|_{L^\infty(I;B_{2,\sigma}^s)} \|u\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})}^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

次に $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\theta}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\theta}$ のとき、(3.2) の 2 項目は、

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} &= \|K(t)u_0 + \int_0^t K(t-t')f(u)dt'\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} \\
&\leq \|K(t)u_0\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} + \left\| \int_0^t K(t-t')f(u)dt' \right\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。よって (3.6) の最初の項は、(2.1) を用いて次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\bullet \|K(t)u_0\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} &= \|K(t)(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} \\
&\leq C \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0\|_{B_{2,\sigma}^0} \\
&= \|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

また、(3.6) は、(2.2)、Proposition 4 より、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\bullet \left\| \int_0^t K(t-t')f(u)dt' \right\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} &= \left\| \int_0^t K(t-t')(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}f(u)dt' \right\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})} \\
&\leq C \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}f(u)\|_{L^1(I;B_{2,\sigma}^0)} = C\|f\|_{L^1(I;B_{2,\sigma}^s)} \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(I;B_{2,\sigma}^s)} \|u\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})}^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_X &\leq C_1 \|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s} + C_2 \|u\|_{L^\infty(I;B_{2,\sigma}^s)} \|u\|_{L^2(I;B_{p,\sigma}^{s-\mu})}^2 \\
&\leq C_1 \|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s} + C_2 \|u\|_X^3 \\
&\leq C_1 \|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s} + C_2 M^3.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

となり、非線形項は次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^1(I;B_{2,\sigma}^s)} &\leq (\|u_1\|_X + \|u_2\|_X) \|u_1 - u_2\|_X \\
&\leq CM^2 \|u_1 - u_2\|_X.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

よって (3.3)~(3.10) より、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_X &\leq \|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} + \|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{L^2(I; B_{p,\sigma}^{s-\mu})}, \\
&\leq \left\| \int_0^\infty K(t-t')(f(u_1) - f(u_2)) dt' \right\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} \\
&\quad + \left\| \int_0^\infty K(t-t')(f(u_1) - f(u_2)) dt' \right\|_{L^2(I; B_{p,\sigma}^{s-\mu})}, \\
&\leq C \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^1(I; B_{2,\sigma}^s)}, \\
&\leq C_3 M^2 \|u_1 - u_2\|_X.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

よって、以上より

$$\begin{aligned}
C_1 \|u_0\|_{B_{2,\sigma}^s} + C_2 M^3 &\leq M \\
C_3 M^2 &\leq 1.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

とすると、 Φ は X_M 上で縮小写像となる。□

[$I = (0, T)$ のとき]

$X = C(I; B_{2,\sigma}^s) \cap L^\gamma(I; B_{p,\sigma}^{s-\mu})$, $\gamma > 2$ とすれば、 $I = \mathbb{R}$ と同じ計算で (3.5) 式を

$$\begin{aligned}
\sup_t \|u\|_{B_{2,\sigma}^s} \int_0^T \|u\|_{L^\infty}^2 dt &\leq \sup_t \|u\|_{B_{2,\sigma}^s} T^{1-\frac{2}{\gamma}} \|u\|_{L^\gamma(I; L^\infty)}^2 \\
&\leq T^{1-\frac{2}{\gamma}} \|u\|_{L^\infty(I; B_{2,\sigma}^s)} \|u\|_{L^\gamma(I; L^\infty)}^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

として、以下同様に結果が得られる。

参考文献

- [1] J. BERGH AND J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces*, Springer, Berlin / Heiderberg / New York (1976).
- [2] P. BRENNER AND V. THOMEE, L. B. WAHLBIN, *Besov spaces and applications to difference methods for initial value problems (Lecture notes in mathematics ; 434)*, Springer-Verlag, Berlin / New York (1975)
- [3] J. P. DIAS AND M. FIGUEIRA, *Global existence of solutions with small initial data in H^s for the massive nonlinear Dirac equations in three space dimensions*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7), 1 (1987), 861–874.

- [4] M. ESCOBEDO AND L. VEGA, *A semilinear Dirac equation in $H^s(\mathbb{R}^3)$ for $s > 1$* , SIAM J. Math. Anal., **2** (1997), 338–362.
- [5] J. GINIBRE, G. VELO, *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*, J. Funct. Anal. **133** (1995), 50–68.
- [6] M. KEEL AND T. TAO, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., **120** (1998), 955–980.
- [7] H. LINDBLAD AND C. D. SOGGE, *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations*, J. Funct. Anal. **130** (1995), 357–426.
- [8] S. MACHIHARA, K. NAKANISHI, AND T. OZAWA, *Small global solutions and the nonrelativistic limit for the nonlinear Dirac equation*, to appear in Rev. Mat. Iberoamericana.
- [9] S. MACHIHARA AND T. OZAWA, *Interpolation Inequalities in Besov spaces*, to appear in Proc. in AMS.
- [10] S. MACHIHARA, M. NAKAMURA AND T. OZAWA, *Small global solutions for the nonlinear Dirac equation*, in prepalation.
- [11] M. REED, *Abstract Non-Linear Wave Equations*, (Lecture notes in mathematics ; **507**), Springer-Verlag, Berlin (1976)

ある超伝導状態を記述する巨視的モデルについて

赤木 剛朗 (早稲田大学大学院理工学研究科)

akagi@otani.phys.wased.ac.jp

1 導入

1964 年, C.P. Bean [10] によって第 2 種超電導体中に於ける電流密度と電場の関係が現象論的に与えられた. Bean による電流密度 $\mathbf{j}$ と電圧 $\mathbf{E}$ の関係は, 以下の通りである. (ここでは, 臨界電流密度 j_c を 1 に規格化する.)

$$(B) \quad \mathbf{E} \parallel \mathbf{j}, \quad |\mathbf{E}| \in \begin{cases} \{0\} & \text{if } |\mathbf{j}| < 1, \\ [0, \infty) & \text{if } |\mathbf{j}| = 1, \\ \emptyset & \text{if } |\mathbf{j}| > 1. \end{cases}$$

この Bean の提唱したモデル (以後, Bean モデルと呼ぶ.) によって, Bean は第 2 種超電導体特有のマイスナー効果を説明した. しかし, Bean モデルは多価性のある強い非線形性を有するため, 次のような巾近似 (以後, 巾近似モデルと呼ぶ.) がしばしば用いられる. p を十分大きい数とすると,

$$(B)_p \quad \mathbf{E} \parallel \mathbf{j}, \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{j}|^{p-1}.$$

これらのモデルと Maxwell の方程式を用いることによって, 超伝導体中の電場, 磁場の振る舞いを理論的に解析することができる. Maxwell の方程式は以下のように記述される.

$$(ME) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, & \mathbf{E}: \text{電場} \quad \mathbf{D}: \text{電束密度} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \mathbf{H}: \text{磁場} \quad \mathbf{B}: \text{磁束密度} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{j}, & \mathbf{j}: \text{電流密度} \quad \rho: \text{電荷密度} \\ -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \end{array} \right.$$

1996 年, L. Prigozhin [21] は Bean モデル (B) と Maxwell 方程式 (ME) を用いて, 印加磁場と垂直な断面 Ω を持つ柱状領域 (又は, 印加磁場と垂直な表面 Ω を持つ 2 次元領域) の第 2 種超電導体中における内部磁場の様子を記述する発展変分不等式を提唱し, 次の弱形式 (P) の取り扱いについて議論している. Ω は, $\mathbf{R}^2$ 上の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし, h は超電導体中に於ける内部磁場 (又は, 超電導体表面の電流面密度に対する流れ関数) とし, Dirichlet 境界条件を満たすものとする. $\partial_t h_e$ は, 時間変化する印加磁場 h_e の時

間偏微分を表す.

$$(P) \begin{cases} b\left(\frac{dh}{dt}(t), v(t) - h(t)\right) + \int_{\Omega} \partial_t h_e(x, t)(v(x, t) - h(x, t))dx \geq 0, & \forall v \in K^t, \\ h(t) \in K^t, & \forall t \in [0, T], \\ h(0) = h_0. \end{cases}$$

ここで, $K^t = \{u \in H_0^1(\Omega) ; |\nabla u + \nabla h_e(t)|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}$ とする. また, $b(\cdot, \cdot)$ は, $L^2(\Omega)$ もしくはその部分空間である W_0 上で定義される双線形形式とする. $u, v \in W_0$ とすると,

$$b(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} u(x)v(x)dx & (\text{柱状領域の場合}), \\ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\nabla u(x) \cdot \nabla v(x')}{4\pi|x - x'|} dx dx' & (2 \text{次元領域の場合}). \end{cases}$$

上の定義より, $b(\cdot, \cdot)$ が W_0 上で定義された双線形連続強圧的形式になることが分かる. また, W_0 は次のように定義される.

$$W_0 := \begin{cases} L^2(\Omega) & (\text{柱状領域の場合}), \\ H_{00}^{1/2}(\Omega) & (2 \text{次元領域の場合}), \end{cases}$$

ただし,

$$H_{00}^{1/2}(\Omega) := \left\{ \chi \in H^{1/2}(\Omega); \tilde{\chi} := \begin{cases} \chi & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \setminus \Omega \end{cases} \in H^{1/2}(\mathbf{R}^2) \right\},$$

とし, W_0 のノルムは次のように与えられる.

$$|u|_{W_0} := \begin{cases} |u|_{L^2(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2} & (\text{柱状領域の場合}), \\ |u|_{H_{00}^{1/2}(\Omega)} := \left\{ |u|_{H^{1/2}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} dx \right\}^{1/2} & (2 \text{次元領域の場合}). \end{cases}$$

また, 巾近似モデル $(B)_p$ と Maxwell 方程式 (ME) を用いると次のような弱形式を考えることができる.

$$(P)_p \begin{cases} b\left(\frac{dh_p}{dt}(t), v\right) - \langle \Delta_p(h_p(\cdot, t) + h_e(\cdot, t)), v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} = - \int_{\Omega} \partial_t h_e(x, t)v(x)dx, & \forall t \in [0, T], \\ h_p(0) = h_0, & \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

ここで, $\Delta_p u(x) = \text{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x))$ とする.

さらに, Prigozhin [21] は (P) や $(P)_p$ の解を解析することによって, 時間変化する印加磁場が超電導体内に侵食する様子を説明した. また, J. W. Barrett と Prigozhin [15] は, 印加磁

場 h_e が Ω 上で一様であると仮定した上で, $(P)_p$ と (P) の解の存在, 一意性, さらに $p \rightarrow +\infty$ とした時, $(P)_p$ の解 h_p が (P) の解 h に収束することを証明している. また, G. Aronsson, L. C. Evans, Y. Wu [6] は [15] とは別の立場から, $\Omega = \mathbb{R}^N$, $h_e \equiv 0$, $b(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ の場合に, $p \rightarrow +\infty$ とした時の解の収束を研究している.

h_e が Ω 上で一様な場合, $(P)_p$ 及び (P) が自励系であるのに対し, h_e の Ω 上での一様性を仮定しないと, $(P)_p$ 及び (P) が非自励系となるため, 数学的には取り扱いの難しい問題となる. また, 物理的にも空間に関して非一様な外部磁場を印加する場合を考察することは, 有意義である. そこで, Akagi-Ôtani [2] は, h_e が Ω 上で非一様な場合を研究し, 以下の結果を得ている.

(結果 1) 印加磁場 h_e が Ω 上で一様でない場合に, (P) と $(P)_p$ の解の存在, 一意性, 及び $p \rightarrow +\infty$ とした時, $(P)_p$ の解 h_p が (P) の解 h に収束することを証明した.

(結果 2) 冪近似 $(B)_p$ と異なる Bean モデル (B) の近似モデルを導入し, そのモデルから導かれる方程式の解が (P) の解の近似になっていることを証明した.

更に赤木-大谷 [3] では, 同じく h_e が空間に関して非一様な場合に $(P)_p$ と (P) の周期問題について, 初期値境界値問題の時と同様の視点から研究をしている. $(P)_p$ や (P) の周期問題に関する研究は, $h_e \equiv 0$, $b(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ の場合ですら, これまででない.

(結果 3) (P) と $(P)_p$ の周期解について, (結果 1) と同様の結果を証明した.

一方, Bossavit [11] は Bean モデルを用いて, 断面 $\Omega (\subset \mathbb{R}^2)$ に垂直に電流が流れている柱状領域の第 2 種超電導体中における電場の様子を放物型非線形偏微分方程式を用いて記述した. $\mathbf{e} = (0, 0, u)$ を超電導体中に於ける電場とし, $\mathbf{j} = (0, 0, j)$ を内部電流とする. ここで, 変位電流を無視すると, Maxwell 方程式 (ME) より以下の偏微分方程式が導出される. (取り扱い易くするため, 現れる物理定数を 1 とする.)

$$\frac{\partial}{\partial t} j(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (1)$$

これに以下のような境界条件と初期条件を与える.

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = |u|^{q-2}u(x, t) + k(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$j(x, 0) = j_0(x) \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

ここで, 初期値境界値問題 (1)-(3) に電流-電場の関係を導入する. Bean モデル (B) を用いれば,

$$\mathbf{e} \parallel \mathbf{j}, \quad |\mathbf{j}| \in \begin{cases} 1 & \text{if } |\mathbf{e}| > 0, \\ [0, 1] & \text{if } |\mathbf{e}| = 0. \end{cases} \quad (4)$$

つまり「 $j \in \partial_{\mathbb{R}}|u|$ 」となる. また, 冪近似 $(B)_p$ を用いれば,

$$\mathbf{e} \parallel \mathbf{j}, \quad |\mathbf{j}| = |\mathbf{e}|^{p'-1}. \quad (5)$$

従って「 $j = |u|^{p'-2}u$ 」となる.

以上のことを踏まえて, 筆者は次の結果を得た. ([4] 参照)

(結果 4) 冪近似を用いた場合の初期値境界値問題 (1)-(3) の解 u_p の存在, そして $p \rightarrow +\infty$ とした時に, u_p が Bean モデルを用いた場合の (1)-(3) の解に収束することを証明した.

この小論では, (結果 1)-(結果 2) の詳細とその証明の方針を述べる. また, [2] では紙面の都合上載せることのできなかつた補題の証明を, 補遺として紹介する.

記号と劣微分関係のまとめ

X を回帰的 Banach 空間とする. $|\cdot|_X$ は X のノルムを, X^* は X の共役空間を, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ は X と X^* の双対性内積を表す. また, X が Hilbert 空間の場合は, $(\cdot, \cdot)_X$ で内積を表す. 間違えを引き起こす恐れが少ない場合は, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ や $(\cdot, \cdot)_X$ をそれぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ や $(\cdot, \cdot)$ として略記する.

さらに,

$$\Phi(X) := \{\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]; \text{ lower semicontinuous, convex, } \varphi \not\equiv +\infty\}$$

とする. $\varphi \in \Phi(X)$ に対して, φ の有効領域 (effective domain) $D(\varphi)$, 劣微分 (subdifferential) $\partial_X \varphi : X \rightarrow X^*$, 及びその定義域 $D(\partial_X \varphi)$ は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} D(\varphi) &:= \{u \in X; \varphi(u) < +\infty\}, \\ \partial_X \varphi(u) &:= \left\{ \xi \in X^*; \langle \xi, v - u \rangle_X \leq \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall v \in D(\varphi) \right\}, \\ D(\partial_X \varphi) &:= \{u \in D(\varphi); \partial_X \varphi(u) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

また, 任意の $u \in X$ に対して, 以下の方程式の一意解 v_λ を対応させる一価写像 $J_\lambda : X \rightarrow X$ ($J_\lambda u := v_\lambda$), を $\partial_X \varphi$ の resolvent と呼ぶ.

$$F_X(v_\lambda - u) + \lambda \partial_X \varphi(v_\lambda) \ni 0,$$

ここで, F_X は X の duality mapping を表す. 特に, X が X^* と同一視されている Hilbert 空間の場合は, $F_X = I$ (I は X 上の恒等写像) とすることができる. さらに, $\partial_X \varphi$ の Yosida 近似 $(\partial_X \varphi)_\lambda$ は, 以下のように定義される.

$$(\partial_X \varphi)_\lambda(u) := \frac{F_X(u - J_\lambda u)}{\lambda}.$$

また, φ の Moreau-Yosida 近似 φ_λ は, 以下のように定義される.

$$\varphi_\lambda(u) := \inf_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |v - u|_X^2 + \varphi(v) \right\}.$$

ここで, φ_λ に関する有用な補題を一つ挙げておく.

補題 1.1 *Let $\varphi \in \Phi(X)$. Then φ_λ is finite, Gâteaux differentiable and convex in X such that*

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |u - v|_X^2 + \varphi(v) \right\} = \frac{\lambda}{2} |(\partial_X \varphi)_\lambda(u)|_{X^*}^2 + \varphi(J_\lambda u).$$

Moreover we have

- (1) $\partial_X(\varphi_\lambda) = (\partial_X \varphi)_\lambda$, where $\partial_X(\varphi_\lambda)$ is the subdifferential (Gâteaux derivative) of φ_λ ,
- (2) $\varphi(J_\lambda u) \leq \varphi_\lambda(u) \leq \varphi(u)$ for all $u \in X$, $\lambda > 0$,
- (3) $\varphi_\lambda(u) \rightarrow \varphi(u)$ as $\lambda \rightarrow 0$ for all $u \in D(\varphi)$.

その他, $\partial_X \varphi$, J_λ , φ_λ , に関する性質は [8] を参照せよ.

2 結果 1 の詳細

はじめに (P) , 及び $(P)_p$ の解を, 次のように定義する.

定義 2.1 A function $u \in W^{1,2}(0, T; W_0)$ is said to be a solution of $(P)_p$ (respectively, (P)) on $[0, T]$, if the following conditions are satisfied:

- (i) $u(+0) = h_0$,
- (ii) $u(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, (respectively, $u(t) \in K^t$) for a.e. $t \in (0, T)$,
- (iii) $u(t)$ satisfies $(P)_p$ (respectively, (P)) for a.e. $t \in (0, T)$,

where $K^t := \{u \in H_0^1(\Omega); |\nabla u(x) + \nabla h_e(x, t)| \leq 1 \text{ for a.e. } x \in \Omega\}$.

次に, $(P)_p$ 及び (P) の解の一意存在について述べる.

定理 2.2 $((P)_p$ の解の存在・一意性) Let $p \in [2, +\infty)$ and suppose that

$$\begin{aligned} h_e &\in W^{1,2}(0, T; W_0) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)), \\ \text{and } h_e(t) - h_e(s) &\in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{for all } t, s \in [0, T]. \end{aligned}$$

Then for any $h_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $(P)_p$ has a unique solution h_p .

定理 2.3 $((P)$ の解の存在・一意性) Suppose that

$$\begin{aligned} h_e &\in W^{1,2}(0, T; W_0) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)), \\ \text{and } h_e(t) - h_e(s) &\in H_0^1(\Omega) \quad \text{for all } t, s \in [0, T]. \end{aligned}$$

Then for any $h_0 \in K^0 = \{u \in H_0^1(\Omega); |\nabla u(x) + \nabla h_e(x, 0)| \leq 1 \text{ for a.e. } x \in \Omega\}$, (P) has a unique solution h .

さらに $p \rightarrow +\infty$ とすると, $(P)_p$ の解 u_p の収束について以下の結果を得た.

定理 2.4 Suppose that

$$\begin{aligned} h_e &\in W^{1,2}(0, T; W_0) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)), \\ \text{and } h_e(t) - h_e(s) &\in H_0^1(\Omega) \quad \text{for all } t, s \in [0, T]. \end{aligned}$$

Then for any $h_0 \in K^0$, the solution h_p of $(P)_p$ converges to the solution h of (P) as $p \rightarrow +\infty$ in the following sense:

$$\begin{aligned} h_p &\rightarrow h && \text{strongly in } C([0, T]; W_0), \\ &&& \text{weakly star in } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ &&& \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; W_0). \end{aligned}$$

Moreover the following estimate holds true.

$$\sup_{t \in [0, T]} |h_p(t) - h(t)|_{W_0} \leq C \left\{ \frac{1}{p} + \inf_{v \in \mathcal{K}} \|h_p - v\|_{L^2(0, T; W_0)} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

where $\mathcal{K} := \{v \in L^2(0, T; W_0); v(t) \in K^t \text{ for a.e. } t \in (0, T)\}$.

3 結果 1 の証明の概要

ここでは, $(P)_p$ と (P) がそれぞれ, 劣微分を含む発展方程式に書き換えられるところに注目する.

はじめに, $(P)_p$ について考える. $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $W = W_0$, $H = L^2(\Omega)$ とし, それぞれのノルムを $|u|_V := (\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx)^{1/p}$, $|u|_W := |u|_{W_0}$, $|u|_H := |u|_{L^2(\Omega)}$ とする. その時, 以下の埋め込みが連続かつ稠密に成り立つことが分かる. ([9] 参照)

$$V \subset W \subset H \equiv H^* \subset W^* \subset V^*. \quad (7)$$

さらに, $V \subset W$ と $W^* \subset V^*$ はコンパクトな埋め込みとなる.

また, 汎関数 φ_p^t と ψ を以下のように定義する:

$$\varphi_p^t(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u(x) + \nabla h_e(x, t)|^p dx \quad \text{for all } u \in V, \quad (8)$$

$$\psi(u) := \frac{1}{2} b(u, u) \quad \text{for all } u \in W. \quad (9)$$

この時, 次のことが成立する.

$$\begin{aligned} \varphi_p^t &\in \Phi(V), \quad \psi \in \Phi(W), \quad D(\partial_V \varphi_p^t) = V, \quad D(\partial_W \psi) = W \quad \forall t \in [0, T], \\ \partial_V \varphi_p^t(u) &= -\Delta_p(u + h_e(t)) := -\operatorname{div}\{|\nabla u(\cdot) + \nabla h_e(\cdot, t)|^{p-2}(\nabla u(\cdot) + \nabla h_e(\cdot, t))\} \text{ in } \mathcal{D}', \\ \langle \partial_W \psi(u), v \rangle &= b(u, v) \quad \forall u, v \in W. \end{aligned} \quad (10)$$

従って, $(P)_p$ は次の発展方程式 $(E)_p$ に書き換えられることが分かる.

$$(E)_p \begin{cases} \partial_W \psi \left(\frac{dh_p}{dt}(t) \right) + \partial_V \varphi_p^t(h_p(t)) = f(t) & \text{in } V^*, \quad 0 < t < T, \\ h_p(0) = h_0, \end{cases}$$

ここで, $f(t) := -\partial_t h_e(\cdot, t)$.

次に, (P) について考える. $V = H_0^1(\Omega)$ とし, W, H, ψ を $(P)_p$ と同じく定義すると, (7) が成立することが分かる. また, 汎関数 φ_∞ を次のように定義する.

$$\varphi_\infty^t(u) := \begin{cases} 0 & \text{if } u \in K^t, \\ +\infty & \text{if } u \in V \setminus K^t. \end{cases}$$

すると, 以下のことが成立する.

$$\varphi_\infty^t \in \Phi(V), \quad D(\partial_V \varphi_\infty^t) = K^t, \quad \partial_V \varphi_\infty^t = \partial_V I_{K^t} \quad \forall t \in [0, T],$$

ただし, I_{K^t} は K^t の指示関数 (Indicator function) とする. 更に, (P) は次の発展方程式 (E) に等しくなることが分かる.

$$(E) \begin{cases} \partial_W \psi \left(\frac{dh}{dt}(t) \right) + \partial_V \varphi_\infty^t(h(t)) \ni f(t) & \text{in } V^*, \quad 0 < t < T, \\ h(0) = h_0, \end{cases}$$

ただし $f(t) := -\partial_t h_e(\cdot, t)$.

従って, 発展方程式 $(E)_p$ や (E) の解の存在, 一意性を示すことができれば $(P)_p$ や (P) の解の存在, 一意性を示すことができる. $(E)_p$ や (E) の解の存在, 一意性は Akagi-Ôtani [2][Theorem 2.2, 2.3] にて証明されている.

$p \rightarrow +\infty$ とした時の h_p の収束の証明は, 以下の手順を踏む. 最初に $(P)_p$ の解 h_p について, 以下の評価を得る.

補題 3.1 *There exists a constant C such that*

$$\int_0^T \left| \frac{dh_p}{d\tau}(\tau) \right|_{W_0}^2 d\tau \leq C, \quad (11)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla(h_p(x, t) + h_e(x, t))|^p dx \right\} \leq C. \quad (12)$$

上の補題より, 次の収束を得る.

補題 3.2 *Let $p \rightarrow +\infty$. Then there exists a subsequence $\{p_n\}$ of $\{p\}$ such that the strong solution h_{p_n} of $(E)_{p_n}$ converges to the strong solution h of (E) in the following sense:*

$$\left. \begin{aligned} h_{p_n} &\rightarrow h && \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; W_0), \\ &&& \text{weakly star in } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ &&& \text{strongly in } C([0, T]; W_0). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

補題 3.2 の証明の概略 はじめに, 補題 3.1, 及び埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset W_0$ のコンパクト性と Aubin のコンパクト定理より, $\{p\}$ の部分列 $\{p_n\}$ が存在し (13) を得る. よって, h_{p_n} の極限 h が (P) の解になっていることを示せば十分であるが, そのためには $h(t) \in K^t$

for a.e. $t \in (0, T)$, すなわち $|\nabla h(x, t) + \nabla h_e(x, t)| \leq 1$ for a.e. $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ が成立することを証明することが必要である.

$\delta > 0$ とし, 集合 M_δ を以下のように定義する.

$$M_\delta := \{(x, t) \in \Omega \times [0, T]; |\nabla h(x, t) + \nabla h_e(x, t)| > 1 + \delta\}.$$

ここで, $|M_\delta| > 0$ と仮定すると, (12) より以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} (1 + \delta)|M_\delta| &< \int \int_{M_\delta} |\nabla h(x, t) + \nabla h_e(x, t)| dx dt \\ &\leq \liminf_{p_n \rightarrow +\infty} \int \int_{M_\delta} |\nabla h_{p_n}(x, t) + \nabla h_e(x, t)| dx dt \\ &\leq \liminf_{p_n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla h_{p_n}(x, t) + \nabla h_e(x, t)|^{p_n} dx dt \right)^{1/p_n} |M_\delta|^{1/p_n'} \\ &\leq \lim_{p_n \rightarrow +\infty} (Tp_n C)^{1/p_n} |M_\delta|^{1/p_n'} = |M_\delta|. \end{aligned}$$

よって, 仮定「 $|M_\delta| > 0$ 」は矛盾を引き起こす. 従って, $|M_\delta| = 0$. 更に, δ の任意性から, $h(t) \in K^t$ for a.e. $t \in (0, T)$ が得られる.

次に, $v \in \mathcal{K} := \{u \in L^2(0, T; W_0); u(\cdot, t) \in K^t \text{ for a.e. } t \in (0, T)\}$ として,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T b \left(\frac{dh_{p_n}}{dt}(t), v(t) - h_{p_n}(t) \right) dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \partial_t h_e(x, t) (v(x, t) - h_{p_n}(x, t)) dx dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega |\nabla \{h_{p_n}(x, t) + h_e(x, t)\}|^{p_n-2} \\ & \quad \nabla \{h_{p_n}(x, t) + h_e(x, t)\} \cdot \nabla \{v(x, t) - h_{p_n}(x, t)\} dx dt \\ & \leq \frac{1}{p_n} \int_0^T \int_\Omega |\nabla \{v(x, t) + h_e(x, t)\}|^{p_n} dx dt \\ & \quad - \frac{1}{p_n} \int_0^T \int_\Omega |\nabla \{h_{p_n}(x, t) + h_e(x, t)\}|^{p_n} dx dt \\ & \leq \frac{T}{p_n} |\Omega|. \end{aligned} \tag{14}$$

従って, $p_n \rightarrow +\infty$ とすると, (13) より以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & - \int_0^T b \left(\frac{dh}{dt}(t), v(t) - h(t) \right) dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \partial_t h_e(x, t) (v(x, t) - h(x, t)) dx dt \leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

よって, [18, Proposition 1.1] より, h は (P) の解になることが分かる.

最後に, 評価式 (6) を導く. (14) において, $v = h$, $T = t$, $t = \tau$ とすると,

$$\begin{aligned} & - \int_0^t b \left(\frac{dh_p}{d\tau}(\tau), h(\tau) - h_p(\tau) \right) d\tau \\ & - \int_0^t \int_\Omega \partial_\tau h_e(x, \tau) (h(x, \tau) - h_p(x, \tau)) dx d\tau \leq \frac{t}{p} |\Omega| \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{15}$$

$(P)_p$ と $(E)_p$, (P) と (E) が同値であることから

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\langle \partial_W \psi \left(\frac{dh_p}{d\tau}(\tau) \right) - f(\tau), h_p(\tau) - h(\tau) \right\rangle d\tau \\
& \geq \frac{C}{2} |h_p(t) - h(t)|_W^2 + \int_0^t \left\langle \partial_W \psi \left(\frac{dh}{d\tau}(\tau) \right) - f(\tau), h_p(\tau) - h(\tau) \right\rangle d\tau \\
& = \frac{C}{2} |h_p(t) - h(t)|_W^2 - \int_0^t \langle g_\infty(\tau), h_p(\tau) - w(\tau) \rangle d\tau \\
& \quad + \int_0^t \langle g_\infty(\tau), h(\tau) - w(\tau) \rangle d\tau \\
& \geq \frac{C}{2} |h_p(t) - h(t)|_W^2 - \int_0^T |g_\infty(\tau)|_{W^*} |h_p(\tau) - w(\tau)|_W d\tau \quad \forall w \in \mathcal{K},
\end{aligned}$$

ただし, $g_\infty(t) \in \partial_V \varphi_\infty^t(h(t))$ とする. ここでは, $b(\cdot, \cdot)$ は双線形連続強圧的形式であることから以下の関係に注目し, さらに, (10) を用いた.

$$C|u|_{W_0}^2 \leq b(u, u) \leq C'|u|_{W_0}^2 \quad \forall u \in W_0.$$

以上のことから,

$$\begin{aligned}
& \frac{C}{2} |h_p(t) - h(t)|_{W_0}^2 \\
& \leq \frac{T}{p} |\Omega| + \sup_{w \in \mathcal{K}} \left\{ \int_0^T |g_\infty(\tau)|_{W_0^*} |h_p(\tau) - w(\tau)|_{W_0} d\tau \right\} \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

従って, (6) が導かれる. ■

4 結果 2 の詳細

Bean モデル (B) の近似として冪近似 $(B)_p$ を用いた場合, $(P)_p$ の解 h_p が (P) の解 h に収束することは分かるが, その収束のオーダーの評価をすることは困難である. 実際, Barret-Prigozhin [15], 本小論の定理 2.4 も不完全な $h_p - h$ の評価しか得ることができていない.

一方, 極大単調作用素論や凸解析の分野では劣微分の近似として, 汎関数の Moreau-Yosida 近似を導入し, その劣微分をもとの劣微分の近似として用いる. また, その時得られる Moreau-Yosida 近似の劣微分は, もとの劣微分の Yosida 近似になることが知られている. (補題 1.1 参照).

極大単調作用素論や凸解析の立場から考えると, $\partial_V \varphi_\infty^t$ の近似として $\partial_V \varphi_p^t$ が良い性質をもっているとは言いがたい. 一方, Yosida 近似は, 近似として十分よい性質を持っていることが知られている. (補題 1.1 参照). そこで, この節では (E) の新しい近似として φ_∞^t の Moreau-Yosida 近似を用いた近似問題を導入し, その近似問題の解の存在, 一意性, 収束を示すばかりでなく, さらに収束のオーダーの評価をすることを目標とする.

実際に, 汎関数 φ_∞^t の $H_0^1(\Omega)$ における Moreau-Yosida 近似は, 次のように定義される:

$$\varphi_\lambda^t(u) := \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |\nabla u - \nabla v|_{L^2(\Omega)}^2 + \varphi_\infty^t(v) \right\} \quad \text{for all } u \in H_0^1(\Omega).$$

また, (E) の場合と同じように V, W, H を決めると, $\varphi_\lambda^t \in \Phi(V)$ かつ $D(\partial_V \varphi_\lambda^t) = V$ for all $t \in [0, T]$. さらに, $\partial_V \varphi_\lambda^t = (\partial_V \varphi^t)_\lambda$ が成立する.

ここで, (E) の近似問題 $(E)_\lambda$ を考える:

$$(E)_\lambda \begin{cases} \partial_W \psi \left(\frac{dh_\lambda}{dt}(t) \right) + \partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t)) = f(t) & \text{in } V^*, \quad 0 < t < T, \\ h_\lambda(0) = h_0, \end{cases}$$

ただし, $f(t) := -\partial_t h_e(\cdot, t)$.

はじめに, $(E)_\lambda$ の解の存在, 一意性を次のように得る.

定理 4.1 ((E) $_\lambda$ の解の存在・一意性) *Let $\lambda \in (0, +\infty)$ and suppose that*

$$\begin{aligned} h_e &\in W^{1,2}(0, T; W_0) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)), \\ \text{and } h_e(t) - h_e(s) &\in H_0^1(\Omega) \quad \text{for all } t, s \in [0, T]. \end{aligned}$$

Then for any $h_0 \in H_0^1(\Omega)$, $(E)_\lambda$ has a unique solution h_λ .

さらに, $\lambda \rightarrow 0$ とした時の h_λ の収束を得る.

定理 4.2 *Suppose that*

$$\begin{aligned} h_e &\in W^{1,2}(0, T; W_0) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)), \\ \text{and } h_e(t) - h_e(s) &\in H_0^1(\Omega) \quad \text{for all } t, s \in [0, T]. \end{aligned}$$

Then for any $h_0 \in K^0$, the strong solution h_λ of $(E)_\lambda$ converges to the strong solution h of (E) as $\lambda \rightarrow 0$ in the following sense:

$$\begin{aligned} h_\lambda &\rightarrow h && \text{strongly in } C([0, T]; W_0), \\ &&& \text{weakly star in } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ &&& \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; W_0). \end{aligned}$$

Moreover the following estimate holds.

$$\sup_{t \in [0, T]} |h_\lambda(t) - h(t)|_{W_0} \leq C\sqrt{\lambda}. \quad (16)$$

注意 4.3 (16) により, $(E)_\lambda$ の解 h_λ が (E) の解 h に収束するオーダーの評価を行うことができる.

5 結果 2 の証明の概要

$(E)_\lambda$ の解の存在, 一意性は, 結果 1 と同様にして示せる (詳しくは Akagi-Ôtani [2] を参照). また, h_λ の収束のオーダーの評価は次のようにして得られる. $(E)_\lambda - (E)$ に $h_\lambda(t) - h(t)$ をかけることによって, 次の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial_W \psi \left(\frac{dh_\lambda}{dt}(t) \right) - \partial_W \psi \left(\frac{dh}{dt}(t) \right), h_\lambda(t) - h(t) \right\rangle \\ & + \left\langle \partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t)) - g_\infty(t), h_\lambda(t) - h(t) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

ただし, $g_\infty(t) \in \partial_V \varphi_\infty^t(h(t))$. ここで劣微分の単調性から, 以下のことが言える.

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t)) - g_\infty(t), h_\lambda(t) - h(t) \right\rangle \\ & = \left\langle \partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t)) - g_\infty(t), h_\lambda(t) - J_{V,\lambda}^t h_\lambda(t) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle \partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t)) - g_\infty(t), J_{V,\lambda}^t h_\lambda(t) - h(t) \right\rangle \\ & \geq \lambda |\partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t))|_{V^*}^2 - \left\langle g_\infty(t), h_\lambda(t) - J_{V,\lambda}^t h_\lambda(t) \right\rangle \\ & \geq \frac{\lambda}{2} |\partial_V \varphi_\lambda^t(h_\lambda(t))|_{V^*}^2 - \frac{\lambda}{2} |g_\infty(t)|_{V^*}^2, \end{aligned}$$

ただし, $J_{V,\lambda}^t$ は $\partial_V \varphi_\infty^t$ の resolvent を表す. さらに, (10) より

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} b(h_\lambda(t) - h(t), h_\lambda(t) - h(t)) \leq \frac{\lambda}{2} |g_\infty(t)|_{V^*}^2 \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

これを $(0, t)$ 上で積分すると, 次の評価を得ることができる.

$$\frac{C}{2} |h_\lambda(t) - h(t)|_W^2 \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^t |g_\infty(\tau)|_{V^*}^2 d\tau \quad \text{for all } t \in [0, T].$$

注意 5.1 定理 2.4 の証明では, 埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset W_0$ のコンパクト性を利用するため, 証明は Ω が有界領域の場合に限られる. しかし, ここでの $(E)_\lambda$ の解 h_λ が (E) の解 h に収束することの証明には, 埋め込みのコンパクト性を利用しない. 従って, 非有界領域 Ω に対しても, 同様の議論が可能である.

A 補遺

ここでは, 時間依存する劣微分の連鎖律に関する補題とその証明を述べる. (Akagi-Ôtani [2] にも以下の補題の一部は載っているが, 紙面の都合で証明は省略している. それぞれの補題の証明は, 既存の研究の証明を若干変更したに過ぎないが, 今回のセミナー講究録の作成ポリシーに従い, [2] で省略した証明を載せることにした.)

Hilbert 空間上での時間依存する劣微分の連鎖律については, 既に多くの研究が存在する (例えば [18], [19], [27], [20] など). しかし, 非 Hilbert 空間における時間依存する劣微分の連鎖律についての結果を明記した論文は, 見当たらない.

この章では、回帰的 Banach 空間 W 上での、時間依存する劣微分の連鎖律に関する補題を紹介する。はじめに、仮定 $(A\varphi^t)_W^r$ を以下のように定める。

$$(A\varphi^t)_W^r \quad \exists \delta > 0; \quad \forall t_0 \in [0, T], \quad \forall x_0 \in D(\varphi^{t_0}), \quad \exists x : I_\delta(t_0) \rightarrow W;$$

$$|x(t) - x_0|_W \leq |\alpha(t) - \alpha(t_0)| \{\varphi^{t_0}(x_0) + 1\}^{1/r},$$

$$\varphi^t(x(t)) \leq \varphi^{t_0}(x_0) + |\beta(t) - \beta(t_0)| \{\varphi^{t_0}(x_0) + 1\} \quad \forall t \in I_\delta(t_0).$$

ただし、 $\alpha \in W^{1,r}(0, T)$, $\beta \in W^{1,1}(0, T)$, $I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, T]$ とする。

補題 A.1 *Let $\varphi^t \in \Phi(W)$ for all $t \in [0, T]$ and let $(A\varphi^t)_W^r$ be satisfied. Assume that $u(t)$ is a W -valued absolutely continuous function on $[0, T]$, $\varphi^t(u(t))$ is differentiable and $u(t) \in D(\partial_W \varphi^t)$ for a.e. $t \in (0, T)$. Then we have*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \varphi^t(u(t)) - \left\langle g(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle \right| \\ & \leq |\dot{\alpha}(t)| |g(t)|_{W^*} \{\varphi^t(u(t)) + 1\}^{1/r} + |\dot{\beta}(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\} \end{aligned} \quad (17)$$

for all $g \in L^r(0, T; W^*)$ satisfying $g(t) \in \partial_W \varphi^t(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$, where $\dot{\alpha}(\cdot) := d\alpha(\cdot)/dt$ and $\dot{\beta}(\cdot) := d\beta(\cdot)/dt$.

補題 A.1 の証明 $I_h(t) := \varphi^{t+h}(u(t+h)) - \varphi^t(u(t)) - \langle g(t+h), u(t+h) - u(t) \rangle$ とする。 $(A\varphi^t)_W^r$ により、 $0 < h < \delta$ を満たす h に対して、 $x_h \in D(\varphi^{t+h})$ が存在し、次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} |x_h - u(t)|_W & \leq |\alpha(t+h) - \alpha(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\}^{1/r}, \\ \varphi^{t+h}(x_h) & \leq \varphi^t(u(t)) + |\beta(t+h) - \beta(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\}. \end{aligned}$$

さらに、 $\partial_W \varphi^{t+h}$ の定義より、

$$\begin{aligned} I_h(t) & := \varphi^{t+h}(u(t+h)) - \varphi^{t+h}(x_h) - \langle g(t+h), u(t+h) - x_h \rangle \\ & \quad + \varphi^{t+h}(x_h) - \varphi^t(u(t)) - \langle g(t+h), x_h - u(t) \rangle \\ & \leq \langle g(t+h), u(t+h) - x_h \rangle - \langle g(t+h), u(t+h) - x_h \rangle \\ & \quad + \varphi^{t+h}(x_h) - \varphi^{t+h}(x_h) \\ & \quad + |\beta(t+h) - \beta(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\} + |g(t+h)|_{W^*} |x_h - u(t)|_W \\ & \leq |\beta(t+h) - \beta(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\} \\ & \quad + |g(t+h)|_{W^*} |\alpha(t+h) - \alpha(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\}^{1/r}. \end{aligned}$$

ここで、 $g \in L^1(0, T; W^*)$ より、 $g(\cdot + h) \rightarrow g(\cdot)$ strongly in $L^1(0, T; W^*)$ as $h \rightarrow 0$. 従って、 $\{h\}$ の部分列 $\{h_n\}$ が存在し、 $g(t+h_n) \rightarrow g(t)$ strongly in W^* as $h_n \rightarrow 0$ for a.e. $t \in (0, T)$. よって、

$$\limsup_{h_n \rightarrow 0} \frac{I_{h_n}(t)}{h_n} \leq |\dot{\beta}(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\} + |g(t)|_{W^*} |\dot{\alpha}(t)| \{\varphi^t(u(t)) + 1\}^{1/r}$$

for a.e. $t \in (0, T)$. さらに, $-\delta < h < 0$ の場合について, 同様の議論を繰り返すと以下の不等式を得る.

$$\liminf_{h_n \rightarrow 0} \frac{I_{h_n}(t)}{h_n} \geq -|\dot{\beta}(t)| \left\{ \varphi^t(u(t)) + 1 \right\} - |g(t)|_{W^*} |\dot{\alpha}(t)| \left\{ \varphi^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r}$$

for a.e. $t \in (0, T)$. 従って, $u(t)$ と $\varphi^t(u(t))$ の微分可能性から $h_n \rightarrow 0$ とすると, (17) が得られる. ■

次に, $t \mapsto \varphi^t(u(t))$ の微分可能性に対する十分条件を考える. その為に, $\varphi^t \in \Phi(W)$ の Moreau-Yosida 近似 φ_λ^t について, $t \mapsto \varphi_\lambda(u(t))$ の微分可能性に対する十分条件を調べる.

補題 A.2 *Let $\varphi^t \in \Phi(W)$ for all $t \in [0, T]$ and let $(A\varphi^t)_W^r$ be satisfied. Assume that $u(t)$ is a W -valued absolutely continuous function on $[0, T]$ and $u(t) \in D(\partial_W \varphi^t)$ for a.e. $t \in (0, T)$. Then $\varphi_\lambda^t(u(t))$ is differentiable for a.e. $t \in (0, T)$ and the following inequality holds true.*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u(t)) - \left\langle \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle \right| \\ & \leq |\dot{\alpha}(t)| |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r} + |\dot{\beta}(t)| \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

for a.e. $t \in (0, T)$, where $\dot{\alpha}(\cdot) := d\alpha(\cdot)/dt$ and $\dot{\beta}(\cdot) := d\beta(\cdot)/dt$.

補題 A.2 の証明 $(A\varphi^t)_W^r$ より, 以下を満たす $z : [0, T] \rightarrow W$ が存在する.

$$|z(t)|_W \leq C \quad \text{and} \quad \varphi^t(z(t)) \leq C \quad \forall t \in [0, T].$$

さらに

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^t(u(t)) &= \min_{v \in W} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |u(t) - v|_W^2 + \varphi^t(v) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} |u(t) - z(t)|_W^2 + \varphi^t(z(t)) \leq C_\lambda \left\{ |u(t)|_W^2 + 1 \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

ただし, C_λ は λ に依存する定数とする. また,

$$\frac{1}{2\lambda} |u(t) - J_\lambda^t u(t)|_W^2 \leq \varphi_\lambda^t(u(t)) \leq C_\lambda \left\{ |u(t)|_W^2 + 1 \right\},$$

ただし, J_λ^t は $\partial_W \varphi^t$ の resolvent を表す. 従って,

$$|\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} \leq \sqrt{\frac{2C_\lambda}{\lambda}} \left\{ |u(t)|_W^2 + 1 \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

一方, **補題 1.1** を用いると,

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda^t(u(t)) - \varphi_\lambda^s(u(s)) - \langle \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)), u(t) - u(s) \rangle \\ &= \frac{\lambda}{2} |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*}^2 + \varphi^t(J_\lambda^t u(t)) - \frac{\lambda}{2} |\partial_W \varphi_\lambda^s(u(s))|_{W^*}^2 - \varphi^s(J_\lambda^s u(s)) \\ & \quad - \langle \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)), J_\lambda^t u(t) - J_\lambda^s u(s) \rangle - \lambda |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*}^2 \\ & \quad + \lambda \langle \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)), F_W^{-1} \partial_W \varphi_\lambda^s(u(s)) \rangle \\ &\leq \varphi^t(J_\lambda^t u(t)) - \varphi^s(J_\lambda^s u(s)) - \langle \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)), J_\lambda^t u(t) - J_\lambda^s u(s) \rangle. \end{aligned}$$

ただし, F_W^{-1} は W の duality mapping を表す.

補題 A.1 の証明と同様に $(A\varphi^t)_W^r$ を適用すると, 以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned}
& \varphi_\lambda^t(u(t)) - \varphi_\lambda^s(u(s)) - \langle \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)), u(t) - u(s) \rangle \\
& \leq |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ \varphi_\lambda^t(J_\lambda^t u(t)) + 1 \right\}^{1/r} \\
& \quad + |\beta(t) - \beta(s)| \left\{ \varphi_\lambda^t(J_\lambda^t u(t)) + 1 \right\} \\
& \leq |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r} \\
& \quad + |\beta(t) - \beta(s)| \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

よって, $t > s$ とすると,

$$\begin{aligned}
& \varphi_\lambda^t(u(t)) - \varphi_\lambda^s(u(s)) \\
& \leq |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} |u(t) - u(s)|_W \\
& \quad + |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r} \\
& \quad + |\beta(t) - \beta(s)| \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\} \\
& \leq C_{\lambda,u} \{ |\alpha(t) - \alpha(s)| + |\beta(t) - \beta(s)| + |u(t) - u(s)|_W \} \\
& \leq C_{\lambda,u} \int_s^t \left\{ |\dot{\alpha}(\tau)| + |\dot{\beta}(\tau)| + \left| \frac{du}{d\tau}(\tau) \right|_W \right\} d\tau,
\end{aligned}$$

ただし, $C_{\lambda,u}$ は $\lambda, \sup_{t \in [0,T]} |u(t)|_W$ に依存する定数を表す. 以上のことから, $t \mapsto \psi(t) := \varphi_\lambda^t(u(t)) - C_{\lambda,u} \int_0^t \left\{ |\dot{\alpha}(\tau)| + |\dot{\beta}(\tau)| + \left| \frac{du}{d\tau}(\tau) \right|_W \right\} d\tau$ は $[0, T]$ 上で単調減少関数となる. 従って, $\psi(\cdot)$ は $(0, T)$ 上のほとんど至る所で微分可能となる. よって, (21) の t を $s + h_n$ に置き換え, **補題 A.1** の証明と同様に考えれば, (18) を得る. ■

補題 A.2 を用いて, $t \mapsto \varphi^t(u(t))$ の微分可能性に対する十分条件を与える.

補題 A.3 *Let $\varphi^t \in \Phi(W)$ for all $t \in [0, T]$ and let $(A\varphi^t)_W^r$ be satisfied. Suppose that $u \in W^{1,r}(0, T; W)$ and there exists a function $g \in L^r(0, T; W^*)$ such that $g(t) \in \partial_W \varphi^t(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$. Then $t \mapsto \varphi^t(u(t))$ is differentiable for a.e. $t \in (0, T)$.*

補題 A.3 の証明 **補題 A.2** より, 不等式 (18) を得る. よって,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u(t)) & \leq \left| \partial_W \varphi_\lambda^t(u(t)) \right|_{W^*} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_W \\
& \quad + |\dot{\alpha}(t)| |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r} \\
& \quad + |\dot{\beta}(t)| \left\{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \right\}
\end{aligned} \tag{22}$$

for a.e. $t \in (0, T)$. (22) の両辺を (τ, s) 区間で積分すると,

$$\varphi_\lambda^\tau(u(\tau)) - \varphi_\lambda^s(u(s)) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_s^\tau |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_W dt \\
&\quad + \int_s^\tau |\dot{\alpha}(t)| |\partial_W \varphi_\lambda^t(u(t))|_{W^*} \{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \}^{1/r} dt \\
&\quad + \int_s^\tau |\dot{\beta}(t)| \{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \} dt \\
&\leq \int_s^\tau |g(t)|_{W^*} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_W dt + \int_s^\tau |\dot{\alpha}(t)| |g(t)|_{W^*} \{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \}^{1/r} dt \\
&\quad + \int_s^\tau |\dot{\beta}(t)| \{ \varphi_\lambda^t(u(t)) + 1 \} dt
\end{aligned}$$

for all τ, s satisfying $\tau > s$.

ここで, (23) に $s = 0$ として, Gronwall の不等式を用いると以下を得る.

$$\sup_{t \in [0, T]} \varphi_\lambda^t(u(t)) \leq C,$$

ただし, C は λ に依存しない定数とする. 従って, $\varphi_\lambda^t(u(t)) \rightarrow \varphi^t(u(t))$ for each $t \in [0, T]$ より,

$$\begin{aligned}
&\varphi^\tau(u(\tau)) - \varphi^s(u(s)) \\
&\leq \int_s^\tau |g(t)|_{W^*} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_W dt + \{C + 1\}^{1/r} \int_s^\tau |\dot{\alpha}(t)| |g(t)|_{W^*} dt \\
&\quad + \{C + 1\} \int_s^\tau |\dot{\beta}(t)| dt
\end{aligned} \tag{24}$$

for all τ, s satisfying $\tau > s$.

(24) より, $\tau \mapsto \varphi^\tau(u(\tau)) - \int_0^\tau |g(t)|_{W^*} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_W dt - \{C + 1\}^{1/r} \int_0^\tau |\dot{\alpha}(t)| |g(t)|_{W^*} dt - \{C + 1\} \int_0^\tau |\dot{\beta}(t)| dt$ は, $(0, T)$ 上のほとんど至る所で微分可能であることが分かる. 従って, $t \mapsto \varphi^t(u(t))$ も, $(0, T)$ 上のほとんど至る所で微分可能である. ■

次に, 以下の埋め込みを連続かつ稠密に満たす Hilbert 空間 H の存在を仮定する:

$$W \subset H \equiv H^* \subset W^*.$$

さらに, W 上で定義された適正下半連続凸関数 φ^t の H 上への拡張 $\varphi_H^t : H \rightarrow [0, +\infty]$ を考える. 拡張 φ_H^t を, 次のように定義する.

$$\varphi_H^t(u) := \begin{cases} \varphi^t(u) & \text{if } u \in W, \\ +\infty & \text{if } u \in H \setminus W. \end{cases} \tag{25}$$

この時, φ^t が W 上で強圧的 (coercive) になっていれば, 以下のことが成立する (詳しい証明は [1] を参照).

$$\begin{aligned}
&\varphi_H^t \in \Phi^t(H), \quad D(\varphi_H^t) = D(\varphi^t), \quad D(\partial_H \varphi_H^t) \subset D(\partial_W \varphi^t) \\
&\text{and } \partial_H \varphi_H^t(u) \subset \partial_W \varphi^t(u) \text{ for all } u \in D(\partial_H \varphi_H^t).
\end{aligned}$$

次に, φ_H^t の Moreau-Yosida 近似 $\varphi_{H,\lambda}^t$ の劣微分について, 連鎖律を考える.

補題 A.4 For all $t \in [0, T]$, let $\varphi^t \in \varphi^t(W)$ be coercive. Let $(A\varphi^t)_W^r$ be satisfied. Assume that $u(t)$ is a W -valued absolutely continuous function on $[0, T]$ and $u(t) \in D(\partial_W \varphi^t)$ for a.e. $t \in (0, T)$. Then $\varphi_{H,\lambda}^t(u(t))$ is differentiable for a.e. $t \in (0, T)$ and the following inequality holds true.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) - \left\langle \partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_W \right| \\ & \leq |\dot{\alpha}(t)| |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u(t))|_{W^*} \left\{ \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r} + |\dot{\beta}(t)| \left\{ \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) + 1 \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

for a.e. $t \in (0, T)$, where $\dot{\alpha}(\cdot) := d\alpha(\cdot)/dt$ and $\dot{\beta}(\cdot) := d\beta(\cdot)/dt$.

補題 A.4 の証明 φ^t が仮定 $(A\varphi^t)_W^r$ を満たす時, 埋め込みにより, 直ちに φ_H^t が $(A\varphi^t)_H^r$ を満たすことが分かる. 更に, $u \in W^{1,r}(0, T; W)$ であるから, u は H 上で値をとる絶対連続関数になる. 従って, 補題 A.2 により, $t \mapsto \varphi_{H,\lambda}^t(u(t))$ が $[0, T]$ 上で絶対連続になることが保証される. また, 補題 A.2 の証明と同様に, 以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)) - \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) - \langle \partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)), u(t+h) - u(t) \rangle_W \\ & \leq \frac{\lambda}{2} |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h))|_H^2 + \varphi_H^{t+h}(J_{H,\lambda}^{t+h} u(t+h)) \\ & \quad - \frac{\lambda}{2} |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u(t))|_H^2 - \varphi_H^t(J_{H,\lambda}^t u(t)) \\ & \quad - \langle \partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)), J_{H,\lambda}^{t+h} u(t+h) - J_{H,\lambda}^t u(t) \rangle_W - \lambda |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h))|_H^2 \\ & \quad + \lambda (\partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)), \partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)))_H \\ & \leq \varphi_H^{t+h}(J_{H,\lambda}^{t+h} u(t+h)) - \varphi_H^t(J_{H,\lambda}^t u(t)) \\ & \quad - \langle \partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)), J_{H,\lambda}^{t+h} u(t+h) - J_{H,\lambda}^t u(t) \rangle_W. \end{aligned}$$

さらに, $\varphi_H^r(J_{H,\lambda}^r u(\tau)) = \varphi^r(J_{H,\lambda}^r u(\tau))$ ($\tau = t, t+h$), $\partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)) \in \partial_H \varphi_H^{t+h}(J_{H,\lambda}^{t+h} u(t+h)) \subset \partial_W \varphi^{t+h}(J_{H,\lambda}^{t+h} u(t+h))$ であることに注意すれば, 補題 A.1 の証明と同様に, $(A\varphi^t)_W^r$ を適用すると, 以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)) - \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) - \langle \partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h)), u(t+h) - u(t) \rangle_W \\ & \leq |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h))|_{W^*} |\alpha(t+h) - \alpha(t)| \left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u(t)) + 1 \right\}^{1/r} \\ & \quad + |\beta(t+h) - \beta(t)| \left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u(t)) + 1 \right\} \\ & \leq |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^{t+h}(u(t+h))|_{W^*} |\alpha(t+h) - \alpha(t)| \left\{ \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) + 1 \right\}^{1/r} \\ & \quad + |\beta(t+h) - \beta(t)| \left\{ \varphi_{H,\lambda}^t(u(t)) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

従って, 補題 A.1 と同様に, 両辺を $h > 0$ ($h < 0$) で割り, $h \rightarrow 0+$ ($h \rightarrow 0-$) とすれば, (26) を得る. ■

最後に, $\partial_H \varphi_H^t$ の resolvent $J_{H,\lambda}^t$ の t に関する連続性についての補題を紹介する.

補題 A.5 For all $t \in [0, T]$, let $\varphi^t \in \Phi(W)$ be coercive. Let $(A\varphi^t)_W^r$ be satisfied. Let $u \in H$ and let $t, s \in [0, T]$. Then the following inequality holds.

$$\begin{aligned} & |J_{H,\lambda}^t u - J_{H,\lambda}^s u|_H^2 \\ & \leq |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ |u - J_{H,\lambda}^t u|_{W^*} + |u - J_{H,\lambda}^s u|_{W^*} \right\} \\ & \quad \times \left[\left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + 1 \right\}^{1/r} + \left\{ \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1 \right\}^{1/r} \right] \\ & \quad + \lambda |\beta(t) - \beta(s)| \left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 2 \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

where $J_{H,\lambda}^t$ denotes the resolvent of $\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t$.

補題 A.5 の証明 $(A\varphi^t)_W^r$ を用いると, 各 $t \in I_\delta(s)$ に対し, 以下を満たす $x(t) \in D(\varphi^t)$ が存在する.

$$\begin{aligned} |x(t) - J_{H,\lambda}^s u|_W & \leq |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1 \right\}^{1/r}, \\ \varphi^t(x(t)) & \leq \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + |\beta(t) - \beta(s)| \left\{ \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

よって, 以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & (u - J_{H,\lambda}^t u, J_{H,\lambda}^s u - J_{H,\lambda}^t u)_H \\ & = \lambda (\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u), J_{H,\lambda}^s u - J_{H,\lambda}^t u)_H \\ & = \lambda (\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u), x(t) - J_{H,\lambda}^t u)_H + \lambda (\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u), J_{H,\lambda}^s u - x(t))_H \\ & \leq \lambda \left\{ \varphi^t(x(t)) - \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u)|_{W^*} |J_{H,\lambda}^s u - x(t)|_W \right\} \\ & \leq \lambda \left\{ \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) - \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + |\beta(t) - \beta(s)| (\varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1) \right. \\ & \quad \left. + |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u)|_{W^*} |\alpha(t) - \alpha(s)| (\varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1)^{1/r} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

t と s を入れ替えて, 同様の操作を行えば,

$$\begin{aligned} & (u - J_{H,\lambda}^s u, J_{H,\lambda}^t u - J_{H,\lambda}^s u)_H \\ & \leq \lambda \left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) - \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) \right. \\ & \quad \left. + |\beta(t) - \beta(s)| (\varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + 1) \right. \\ & \quad \left. + |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^s(u)|_{W^*} |\alpha(t) - \alpha(s)| (\varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + 1)^{1/r} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

従って, (28) と (29) の両辺をそれぞれ加えると,

$$\begin{aligned} & |J_{H,\lambda}^s u - J_{H,\lambda}^t u|_H^2 \\ & \leq \lambda \left[|\beta(t) - \beta(s)| (\varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + 2) \right. \\ & \quad \left. + \lambda |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^s(u)|_{W^*} (\varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + 1) \right\}^{1/r} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\partial_H \varphi_{H,\lambda}^t(u)|_{W^*} \left(\varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1 \right)^{1/r} \Big\} \\
\leq & |\alpha(t) - \alpha(s)| \left\{ |u - J_{H,\lambda}^t u|_{W^*} + |u - J_{H,\lambda}^s u|_{W^*} \right\} \\
& \times \left[\left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + 1 \right\}^{1/r} + \left\{ \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 1 \right\}^{1/r} \right] \\
& + \lambda |\beta(t) - \beta(s)| \left\{ \varphi^t(J_{H,\lambda}^t u) + \varphi^s(J_{H,\lambda}^s u) + 2 \right\}. \blacksquare
\end{aligned}$$

注意 A.6 この小論では, 議論の見通しを良くするために, 対象となる汎関数 φ^t は正の値をとるものに限定した ($\Phi(W)$ の定義を参照). しかし, [20] と同様に証明を精密化することで, φ^t が負の値をとる場合にも, この章と同じ結果が得られる. すなわち, それぞれの補題の $\Phi(W)$ を $\tilde{\Phi}(W) := \{\varphi : W \rightarrow (-\infty, +\infty]; \text{proper, lower semicontinuous, convex}\}$ に置き換えることができる.

また, 仮定 $(A\varphi^t)_{W^*}^r$ を次の $(A\varphi^t)_{W, \text{Sum}}^r$ まで一般化して, それぞれの補題と同様の結果を得ることができる.

$$\begin{aligned}
& (A\varphi^t)_{W, \text{Sum}}^r \quad \exists \delta > 0; \quad \forall t_0 \in [0, T], \quad \forall x_0 \in D(\varphi^{t_0}), \quad \exists x : I_\delta(t_0) \rightarrow W; \\
& \left\{ \begin{array}{l} |x(t) - x_0|_W \leq \sum_{j=1}^J l_1(|x_0|_W) |\alpha_j(t) - \alpha_j(t_0)| l_{1,j}(\varphi^s(x_0) + l_3(|x_0|_W)) \\ \quad \times \left\{ \min_{g \in \partial_W \varphi^{t_0}(x_0)} |g|_{W^*}^{p_j} + 1 \right\}, \\ \varphi^t(x(t)) \leq \varphi^{t_0}(x_0) + \sum_{j=1}^J l_2(|x_0|_W) |\beta_j(t) - \beta_j(t_0)| l_{2,j}(\varphi^s(x_0) + l_3(|x_0|_W)) \\ \quad \times \left\{ \min_{g \in \partial_W \varphi^{t_0}(x_0)} |g|_{W^*}^{q_j} + 1 \right\}, \end{array} \right.
\end{aligned}$$

ここで, $l_i, l_{i,j}$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, J$) は $[0, +\infty)$ 上の単調増加関数とする.

参考文献

- [1] Akagi, G. and Ôtani, M., Evolution inclusions governed by subdifferentials in reflexive Banach spaces. preprint.
- [2] Akagi, G. and Ôtani, M., Bean model and its approximations, 2001 年京大数理解析研講究録, to appear.
- [3] 赤木 剛朗, 大谷 光春, The limit of solution to periodic problems for parabolic equations associated with p -Laplacian as $p \rightarrow +\infty$, 日本数学会 2002 年度年会関数方程式論分科会アブストラクト.
- [4] 赤木 剛朗, 大谷 光春, An approximation of macroscopic model for superconducting phenomena, 日本数学会 2003 年度年会実関数論分科会アブストラクトに投稿中.

- [5] Arai, T., On the existence of the solution for $\partial\varphi(u'(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math., **26** (1979), 75-96.
- [6] Aronsson, G., Evans, L. C., and Wu, Y., Fast/slow diffusion and growing sandpiles, J. Differential Equations, **131** (1996), 304-335.
- [7] Aronsson, G., Evans, L. C., An asymptotic model for compression molding, Indiana Univ. Math. J., **51** (2002), 1-36
- [8] Barbu, V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach spaces*, Nordhoff (1976).
- [9] Barrett, J. W. and Prigozhin, L., Bean's critical-state model as the $p \rightarrow \infty$ limit of an evolutionary p -Laplacian equation, Nonlinear analysis **42** (2000), 977-993.
- [10] Bean, C. P., Magnetization of high-field superconductor, Rev. Mod. Phys. **36** (1964), 31-39.
- [11] Bossavit, A., Modelling superconductors with Bean's model, in dimension 2: Stefan's problem again
- [12] Brézis, H., *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, Math Studies, Vol.5 North-Holland, Amsterdam/New York, (1973).
- [13] Brézis, H., Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl. **51** (1972), 1-168.
- [14] Brézis, H., Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. Zarantonello, E., Academic Press, New York-London (1971), 101-156.
- [15] Browder, F.E. and Petryshyn, W.V., The solution by iteration of nonlinear function equation in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 571-575.
- [16] Qihong C., A nonlinear parabolic system arising from eddy currents problem, Nonlinear Anal. **42** (2000), 759-770.
- [17] Colli, P., On some doubly nonlinear evolution equations in Banach spaces, Japan J. Indust. Appl. Math. **9** (1992), 181-203.
- [18] Kenmochi, N., Some nonlinear parabolic variational inequalities, Israel J. Math. **22** (1975), 304-331.
- [19] Kenmochi, N., Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ. **30** (1981), 1-87.

- [20] Ôtani, M., Nonlinear evolution equations with time-dependent constraints, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **3** (1993-94), 383-399.
- [21] Prigozhin, L., On the Bean critical-state model in superconductivity, *Euro. J. Appl. Math.* **7** (1996), 237-247.
- [22] Prigozhin, L., The Bean model in superconductivity: variational formulation and numerical solution, *J. Comp. Phys.* **129** (1996), 190-200.
- [23] Prigozhin, L., Analysis of critical-state problems in type-II superconductivity, *IEEE Trans. Appl. Superconductivity* **7** (1997), 3866-3873.
- [24] Prigozhin, L., Solution of thin film magnetization problem in type-II superconductivity, *J. Comp. Phys.* **143** (1998)
- [25] Senba, T., On some nonlinear evolution equation, *Funkcial Ekvac* **29** (1986), 243-257.
- [26] Simon, J., Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Math. Pura. Appl.* **146** (1987), 65-96.
- [27] Yamada, Y., On evolution equations generated by subdifferential operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **23** (1976), 491-515.

赤木 剛朗 (Goro Akagi)

早稲田大学大学院理工学研究科

物理学及び応用物理学専攻

〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 55N-03-08

Damped Wave Equations の解について

細野 敬史 (九州大学大学院数理学府・修士2年)

ma2201021@math.kyushu-u.ac.jp

小川 卓克 (九州大学大学院数理学府・修士2年)

ogawa@math.kyushu-u.ac.jp

1 Introduction

次の消散項を持つ波動方程式である Damped Wave Equations に関する初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^\alpha u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.2)$$

について考える。(1.1) は線形の Damped Wave Equations に関する初期値問題、(1.2) は半線形の Damped Wave Equations に関する初期値問題で非線形項の α は $\alpha > 0$ である。ここでは線形の問題 (1.1) について考える。Damped Wave Equations に関する初期値問題については A. Matsumura [4] をはじめ、Kawashima-M. Nakao-Ono [2], Todorova-Yordanov [7], Ikehata-Ohta [1], Nishihara [6] など様々な結果が得られており、 L^p 評価が知られている。Nishihara [6] は $n = 3$ の場合に (1.1) の解が $t \rightarrow \infty$ のとき線形の熱方程式と波動方程式に収束することを示し、 $L^p - L^q$ 評価を与えた。この結果は $n = 3$ のときの (1.1) の解の Bessel 関数による表現を精密に評価することにより得られた。さらにここでの結果を得た後に、Narazaki [5] がこの結果を一般次元に拡張した結果を得たことを知った。Narazaki [5] の結果は Fourier 変換を用いるものであったが、引き去る部分の波動方程式の表現が Klein-Gordon 方程式との Mix になっている。我々は Nishihara [6] と同様の $L^p - L^q$ 評価を空間 2 次元で求めた。

2 Main Theorem

Theorem. $n = 2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ とする。 $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in L^q(\mathbb{R}^2)$ とし、 $u(t, x)$ を線形の Damped Wave Equations に関する初期値問題 (1.1) の解とする。また $v(t, x)$, $w(t, x)$,

$\tilde{w}(t, x)$ をそれぞれ次の初期値問題 (2.3), (2.4), (2.5) の解とする。

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ v(0, x) = u_0(x) + u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ w(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \\ w_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt} - \Delta \tilde{w} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \tilde{w}(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \tilde{w}_t(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.5)$$

このとき 次の評価式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \left\| u(t) - v(t) - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} \\ & \leq C t^{-\gamma-1} (\|u_0(x)\|_{L^q} + \|u_1(x)\|_{L^q}), \quad \text{for } t \geq 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここに $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ である。

Remark 先に述べたように Narazaki [5] は我々の結果と類似のもので一般次元に拡張されている。引き去っている項は (2.5) で初期値を $\frac{\sin(t|\nabla|)}{(\nabla)} u_0$ としたものであるが、低周波部分では (2.3) の解が結果に影響し、高周波部分では我々のものと同一とみなせるので、本質的に変わらない。

3 Preliminaries

Definition. (i) α を multi-index とする。関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する。

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha, \sup_x |\langle x \rangle^n \partial_x^\alpha f(x)| \leq C_{|\alpha|, n} \right\}.$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする。 f のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ 、逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ を次で定義する。

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) := c_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) := c_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi.$$

ここで $c_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ 。

(ii) $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は有界な可測関数、 $f \in L^2 \cap L^p$ 、 $1 \leq p \leq \infty$ とする。線形作用素 T_m を

$$\mathcal{F}[T_m f](\xi) := m(\xi) \hat{f}(\xi),$$

すなわち

$$T_m f := \mathcal{F}^{-1}[m \hat{f}](x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} m(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

で定義し、 T_m を Fourier multiplier operator、また $m(\xi)$ を Fourier multiplier と呼ぶ。 $1 \leq p \leq \infty$ 、 $m(\xi)$ を Fourier multiplier とする。集合 M_p と $M_p(m)$ を次で定義する。

$$M_p := \{m : \|T_m f\|_{L^p} \leq \exists A_p \|f\|_{L^p}\}.$$

$$M_p(m) := \sup_f \frac{\|T_m f\|_p}{\|f\|_{L^p}}, \quad m \in M_p$$

線形の Damped Wave Equations の初期値問題 (1.1) は Fourier 変換を用いて以下のよう表されることはよく知られている (cf. A.Matsumura [4])。

$$\begin{aligned} u(t, x) &:= K(u_0, u_1) = K_0 * u_0 + K_1 * u_1 \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \left\{ \left(\cos\{t\alpha(|\nabla|)\} + \frac{1}{2} \frac{\sin\{t\alpha(|\nabla|)\}}{\tilde{\alpha}(|\nabla|)} \right) u_0 + \frac{\sin\{t\alpha(|\nabla|)\}}{\tilde{\alpha}(|\nabla|)} u_1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha(|\nabla|)](\xi) &= \alpha(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} & |\xi| > \frac{1}{2}, \\ i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} & |\xi| \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \\ \mathcal{F}[\tilde{\alpha}(|\nabla|)](\xi) &= \tilde{\alpha}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} & |\xi| > \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2} & |\xi| \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

(3.7) は次のように書き直すことができる。

$$u(t, x) = e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} + V_0(t)(u_0 + u_1) + V_1(t)u_0. \quad (3.8)$$

ここで

$$\mathcal{F}[V_0(t)f](\xi) = e^{-\frac{t}{2}} \left\{ \frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{l(\xi)} - \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right\} f(\hat{\xi}). \quad (3.9)$$

$$\mathcal{F}[V_1(t)f](\xi) = e^{-\frac{t}{2}} \left\{ \cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t \sin(t|\xi|)}{8|\xi|} \right\} \hat{f}(\xi) - \frac{1}{2} \mathcal{F}[V_0(t)f](\xi). \quad (3.10)$$

4 Proof of Theorem

定理は次の命題を証明することによってただちに導かれる。

Proposition 4.1. $1 \leq q \leq p \leq \infty$ とし、 $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$ とする。このときすべての $t \in \mathbb{R}_+$ に対して以下の評価式が成り立つ。

$$\|V_0(t)g\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\gamma}(\|g\|_{L^q}). \quad (4.11)$$

$$\|V_1(t)g\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\gamma-1}(\|g\|_{L^q}). \quad (4.12)$$

Proposition 4.2. $1 \leq q \leq p \leq \infty$ とし、 $u_i \in L^q(\mathbb{R}^2)$ 、 $i = 0, 1$ とする。また $v(t, x)$ を線形の熱方程式の初期値問題 (2.3) の解とする。このとき以下の評価式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \|V_0(t)(u_0 + u_1) - v(t)\|_{L^p} \\ & \leq Ct^{-\gamma-1}(\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}), \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Proof of Proposition 4.1, 4.2.

証明にはフーリエ変換を用いる。cut-off 関数 χ_i , $i = 1, 2$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} \chi_1(\xi) &= \begin{cases} 1, & |\xi| > 1, \\ 0, & |\xi| \leq 1, \end{cases} \\ \chi_2(\xi) &= \begin{cases} 0, & |\xi| > \frac{1}{4}, \\ 1, & |\xi| \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

次の Lemma 4.3 を示せば十分である。

Lemma 4.3. $1 \leq q \leq p \leq \infty$ 、 $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$ とする。このとき次の評価式が成り立つ。ただし δ は正の定数、 $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ とする。

$$\begin{aligned}
(1) & \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(\xi) \hat{V}_l(t) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^p} \leq C e^{-\delta t} \|g\|_{L^q}, \quad l = 0, 1. \\
(2) & \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_2(\xi) \hat{V}_l(t) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\gamma-l} \|g\|_{L^q}, \quad l = 0, 1. \\
(3) & \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(\xi) (\hat{V}_0(t) - e^{-t|\xi|^2}) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^p} \leq C t^{-(1-\frac{1}{p})} e^{-\delta t} \|g\|_{L^q}, \\
(4) & \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_2(\xi) (\hat{V}_0(t) - e^{-t|\xi|^2}) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\gamma-1} \|g\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Proof of Lemma 4.3

(1) を示す。(3.9) より $|\xi| > 1$ ならば $\alpha(\xi) = \tilde{\alpha}(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}$ であるので

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(\xi) \hat{V}_0(t) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^\infty} \leq e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{\alpha(\xi)} - \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}. \quad (4.14)$$

$|\xi| - \alpha(\xi) = \frac{1}{8|\xi|} + O(|\xi|^{-3})$ に注意すると

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{\alpha(\xi)} - \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \\
&= \int_0^t (\cos\{\tau\alpha(\xi)\} - \cos(\tau|\xi|)) d\tau \\
&= \int_0^t (|\xi| - \alpha(\xi)) \tau \sin\{\tau(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} d\tau \\
&= (|\xi| - \alpha(\xi)) t \int_{\theta't}^t \sin\{\tau(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} d\tau \\
&= \frac{t}{8|\xi|} \int_{\theta't}^t \sin\{\tau(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} d\tau + O(t|\xi|^{-3}) \int_{\theta't}^t \sin\{\tau(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} d\tau \\
&= \frac{1}{1 + \theta \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4|\xi|^2}} - 1 \right)} \frac{t}{|\xi|^2} \left\{ \cos\{\theta't(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} - \cos\{t(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} \right\} \\
&+ O(t^2|\xi|^{-3})
\end{aligned}$$

よって

$$\left| \frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{\alpha(\xi)} - \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} - t \frac{\cos\{\theta't|\xi|\}}{|\xi|^2} + t \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right| = O(t^2|\xi|^{-3}). \quad (4.15)$$

(4.14), (4.15) より

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(\xi) \hat{V}_0(t) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^\infty} \\
& \leq e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{\alpha(\xi)} - \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} - t \frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} + t \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \\
& \quad + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1} \\
& \leq e^{-\frac{t}{2}} \left\| \frac{\sin\{t\alpha(\xi)\}}{\alpha(\xi)} - \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} - t \frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} + t \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \\
& \quad + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1} \\
& \leq Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \|g\|_{L^1} + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

同様に (3.10), (4.16) より

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(\xi) \hat{V}_1(t) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^\infty} \\
& \leq e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t \sin(t|\xi|)}{8|\xi|} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \\
& \quad + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \|g\|_{L^1} + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8|\xi|} \sin(t|\xi|) \\
& = t(|\xi| - \alpha(\xi)) \sin\{t(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} - \frac{t}{8|\xi|} \sin(t|\xi|) \\
& = \frac{t}{8|\xi|} \sin\{t(|\xi| + \theta(\alpha(\xi) - |\xi|))\} - \frac{t}{8|\xi|} \sin(t|\xi|) + O(t|\xi|^{-3}) \\
& = \frac{t}{8|\xi|} t\theta(\alpha(\xi) - |\xi|) \cos\{t(|\xi| + \theta'(\alpha(\xi) - |\xi|))\} + O(t|\xi|^{-3}) \\
& = Ct^2 \frac{1}{|\xi|^2} \cos\{t(|\xi| + \theta'(\alpha(\xi) - |\xi|))\} + O(t|\xi|^{-3}) + O(t^2|\xi|^{-4}) \\
& = Ct^2 \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} + Ct^2 \frac{1}{|\xi|^2} \left\{ \cos\{t(|\xi| + \theta'(\alpha(\xi) - |\xi|))\} - \cos t|\xi| \right\} + O(t|\xi|^{-3}) + O(t^2|\xi|^{-4})
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} & \left| \cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8|\xi|} \sin(t|\xi|) - Ct^2 \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right| \\ &= O(t^2|\xi|^{-4}) + O(t^\delta|\xi|^{-3}), \quad \delta > 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

(4.17), (4.18) より

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(\xi) \hat{V}_1(t) \hat{g}(\xi) \right] \right\|_{L^\infty} \\ & \leq e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8|\xi|} \sin(t|\xi|) - Ct^2 \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \\ & \quad + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \|g\|_{L^1} \\ & \quad + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1} \\ & \leq e^{-\frac{t}{2}} \left\| \cos\{t\alpha(\xi)\} - \cos(t|\xi|) - \frac{t}{8|\xi|} \sin(t|\xi|) - Ct^2 \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \\ & \quad + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \|g\|_{L^1} \\ & \quad + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1} \\ & \leq Ce^{-\delta t} \|g\|_{L^1} + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} + Ct^2 e^{-\frac{t}{2}} \|g\|_{L^1} \\ & \quad + Cte^{-\frac{t}{2}} \left(\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos\{\theta' t|\xi|\}}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_{L^\infty} \right) \|g\|_{L^1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(|\xi|) \frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} \right] \right\|_\infty \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(|\xi|) \left(\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|^2} - \frac{\cos(t\sqrt{1+|\xi|^2})}{1+|\xi|^2} \right) \right] \right\|_\infty + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(|\xi|) \frac{\cos(t\sqrt{1+|\xi|^2})}{1+|\xi|^2} \right] \right\|_\infty \end{aligned}$$

と変形すれば、(4.16), (4.19) より (1), (2) は次の Claim を示すことにより証明される。

Claim.

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\chi_1(|\xi|) \frac{\cos(t\sqrt{1+|\xi|^2})}{1+|\xi|^2} \right] \right\|_\infty \leq Ct^{-\frac{2}{3}}$$

Claim の証明には球対称関数に関するフーリエ変換を用いる。すなわち Claim の左辺は

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_1(|\xi|)\frac{\cos(t\sqrt{1+|\xi|^2})}{1+|\xi|^2}\right](x) = \int_0^\infty \chi_1(r)\frac{r}{1+r^2}\cos(t\sqrt{1+r^2})J_0(Rr)dr \quad R = |x|$$

となる。ここで J_0 は Bessel 関数である。これを評価していく。(cf. B.Mar shall, W.Strauss and S.Wainger[3])。 $\square$

参考文献

- [1] R.Ikehata, M.Ohta, 日本数学会 2001 秋季講演アブストラクト, 94-95, (2001), Hiroshima univ.
- [2] S.Kawashima, M.Nakao, K.Ono, *On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term*, J. Math. Soc. Japan. **47** (1995), 617-653.
- [3] B.Marshall, W.Strauss, S.Wainger, *$L^p - L^q$ estimates for the Klein-Gordon equations*, J. Math. Pures Appl. **59** (1980), 417-440.
- [4] A.Matsumura, *On the asymptotic behavior of solution of semi-linear wave equation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 169-189.
- [5] T. Narazaki, resume for lecture at Ropponmatsu Function Equation Seminar, (2002)
- [6] K.Nishihara, *$L^p - L^q$ Estimates of Solutions to the Damped Wave Equation in 3-Dimensional Space and their Application*, preprint, Waseda univ.
- [7] G.Todorova, B.Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J.Differential Equations, **174** (2000), 464-489.

相転移モデルのための微分方程式系とその数値計算

岡崎 貴宣 (千葉大・自然)

Emil Minchev (千葉大・自然)

E-mail: okazaki@math.e.chiba-u.ac.jp

1. 序

次のような偏微分方程式系 (P) を考える.

$$aw' + bu' - \kappa w_{xx} + \partial I_u(w) \ni F(u, w) \text{ in } (0, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$cw' + du' - u_{xx} = h(u, w) \text{ in } (0, 1) \times (0, T), \quad (2)$$

$$(P) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in (0, 1). \quad (5)$$

ここに, a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たすような $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ の定数, κ は非負な微小定数とする. $F, h: R \times R \rightarrow R$ はリップシッツ連続関数, $f_*, f^*: R \rightarrow R (f_* \leq f^*)$ は非減少で有界なリップシッツ関数とする. また, I_u は閉区間 $[f_*(u), f^*(u)]$ の指示関数を表し, ∂I_u はその劣微分であり, 次のように定義される.

$$\partial I_u(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } w > f^*(u) \text{ or } w < f_*(u) \\ [0, +\infty) & \text{if } w = f^*(u) > f_*(u) \\ \{0\} & \text{if } f_*(u) < w < f^*(u) \\ (-\infty, 0] & \text{if } w = f_*(u) < f^*(u) \\ R & \text{if } w = f^*(u) = f_*(u). \end{cases}$$

第1の方程式は, 例えば空間について一様な $f_*(u), f^*(u)$ を Fig. 1 のように与えた場合, u をインプット, w をアウトプットとするようなヒステリシスを表している. 具体的に図を用いて説明すると,

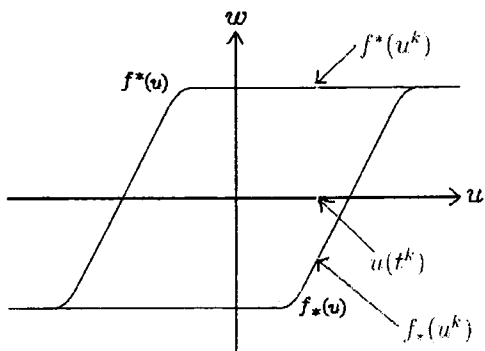


Fig. 1

ある時刻 t^k において $u(t^k)$ が定まると, それに対応する $f_*(u(t^k)), f^*(u(t^k))$ が左のように定まる.

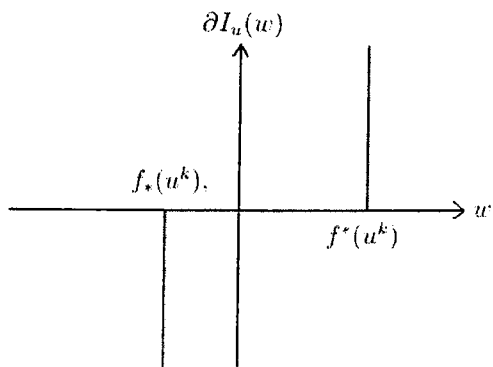


Fig. 2

これにより $\partial I_u(w)$ はこのような多寡関数になる。閉区間 $[f_*(u), f^*(u)]$ 以外では値は定義されない。これにより w の値は閉区間 $[f_*(u), f^*(u)]$ に制限される。

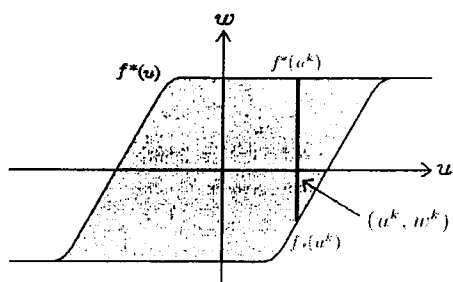
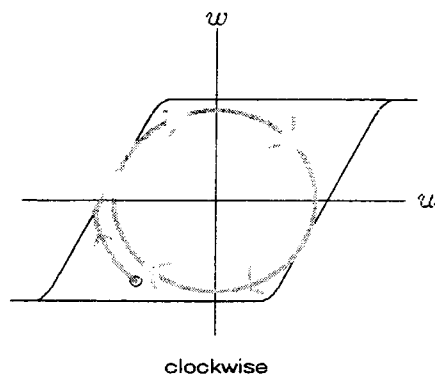


Fig. 3

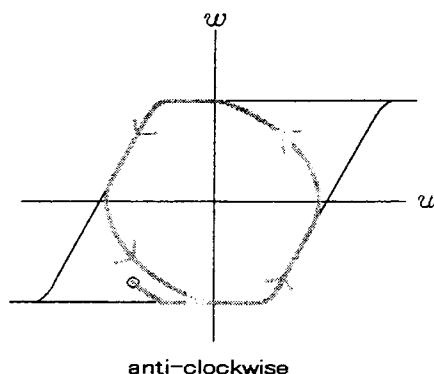
u が増減をするに従い, w は常に $[f_*(u), f^*(u)]$ に制限されることから, (u, w) の解は f^*, f_* に囲まれた領域に存在することになる。

これまで論文 [3] において, (P) における拡散項を含まない常微分方程式系について解の数値計算が行われてきた。そこでは, Fig. 4, Fig. 5 のような clockwise, anti-clockwise の挙動を表現できることがわかっている。



clockwise

Fig. 4



anti-clockwise

Fig. 5

相転移現象において, clockwise の挙動は液体-固体相転移問題における温度と物質の相状態との関係の中に現れるヒステリシスループとして観察され, また anti-clockwise では形状記憶合金問題における stress, strain の関係を観察する場合に現れる。最近それを踏ま

えて (P) における $\kappa = 0$ の場合において数値計算を行い、常微分方程式系との比較を行った。それについての数値計算の詳しい結果は後に述べる。今回は、 $\kappa = 0$ と $\kappa > 0$ とした場合の挙動の変化を比較し、この偏微分方程式系が相転移現象を表現することに対してどの程度適用することができるか、数値計算の立場から検証する。

2. これまでの数値計算結果

(計算結果 1)

論文 [3] においては、次のような常微分方程式系についての数値計算が行われた。

$$(E) \begin{cases} aw' + bu' + \partial I_u(w) \ni F(u, w) \text{ in } (0, T), \\ cw' + du' = h(u, w) \text{ in } (0, T), \\ u(0) = u_0, w(0) = w_0. \end{cases}$$

これは先の偏微分方程式系の拡散項を含まないケースである。この数値計算では特に $F(u, w)$, $h(u, w)$ を制御することによって、同じ初期値でも Fig. 4, Fig. 5 のような clockwise, anti-clockwise の周期解を表現できることがわかった。

これらの数値計算では $f_*(u)$, $f^*(u)$ に接する形で周期解になっているもの (case A とする), $f_*(u)$, $f^*(u)$ 上を軌道の一部に含む周期解 (case B), また原点に収束するような解 (case C) などが見られた。

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	u_0, w_0	behaviour	case
Fig. 6	1	-1	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7, w_0 = -0.8$	clockwise	A
Fig. 7	1	-1	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7, w_0 = -0.8$	anti-clockwise	A
Fig. 8	1	-3	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7, w_0 = -0.8$	clockwise	B
Fig. 9	1	-0.5	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7, w_0 = -0.8$	anti-clockwise	B
Fig. 10	1	-0.5	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7, w_0 = -0.8$	clockwise	C
Fig. 11	1	-3	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7, w_0 = -0.8$	anti-clockwise	C

ただし $f_*(u)$, $f^*(u)$ は次のように与えてある。

$$f^*(u) := \begin{cases} -1, & \text{if } u < -1.6, \\ 5u^2 + 16u + 11.8, & \text{if } -1.6 \leq u < -1.4, \\ 2u + 2, & \text{if } -1.4 \leq u < -0.6, \\ -5u^2 - 4u + 0.2, & \text{if } -0.6 \leq u < -0.4, \\ 1, & \text{if } -0.4 \leq u \end{cases} \quad (6)$$

$$f_*(u) := \begin{cases} -1, & \text{if } u < 0.4, \\ 5u^2 - 4u - 0.2, & \text{if } 0.4 \leq u < 0.6, \\ 2u - 2, & \text{if } 0.6 \leq u < 1.4, \\ -5u^2 + 16u - 11.8, & \text{if } 1.4 \leq u < 1.6, \\ 1, & \text{if } 1.6 \leq u. \end{cases} \quad (7)$$

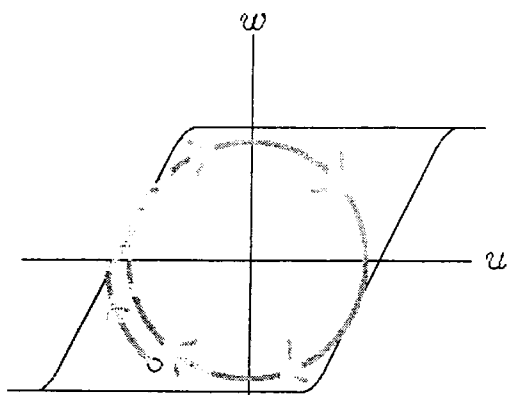


Fig 6

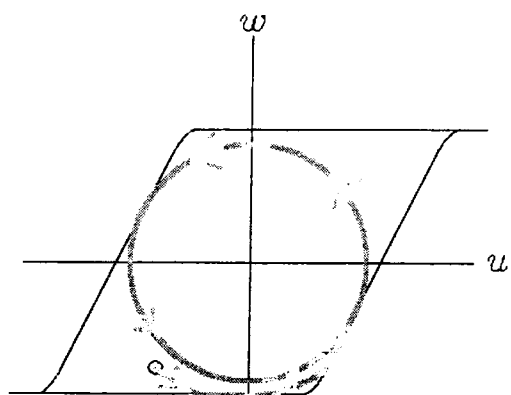


Fig 7

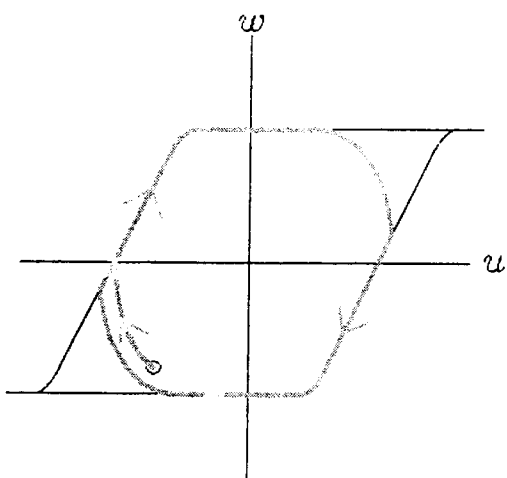


Fig 8

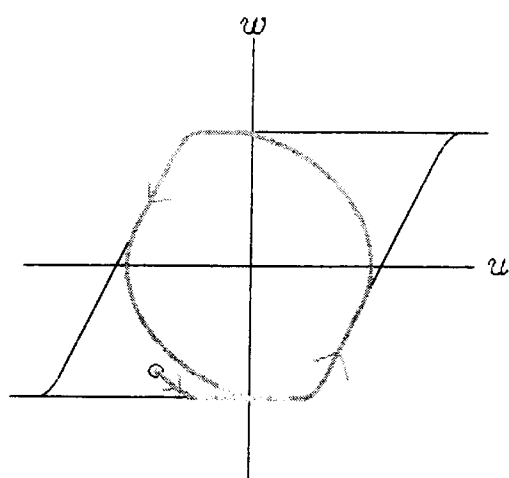


Fig 9

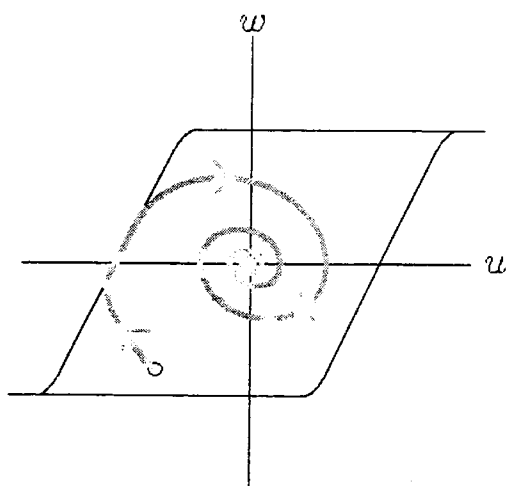


Fig 10

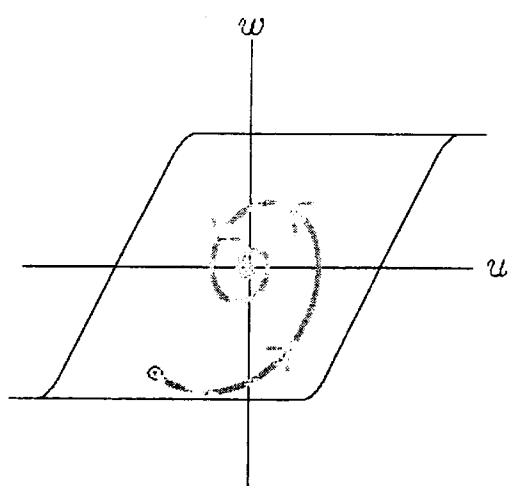


Fig 11

(計算結果 2)

次に先の方程式系 (P) において, $\kappa = 0$ の場合における数値計算が行なった. すなわち

$$(P') \begin{cases} aw' + bu' + \partial I_u(w) \ni F(u, w) \text{ in } (0, 1) \times (0, T), \\ cw' + du' - u_{xx} = h(u, w) \text{ in } (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

ここでは, 空間に関して異なる初期値を与えた場合, 解の挙動がどのように変化するかということについて数値計算を行った. $f_*(u)$, $f^*(u)$ については (6), (7) と同様に与えた. その結果, clockwise, anti-clockwise のそれぞれの場合において, 次のような傾向が見られた.

- ・ (clockwise case) 初期値が空間に異なる場合でも, 時間が経過すると空間に関して一様になり, 常微分方程式系の結果に一致する傾向がある.

- ・ (anti-clockwise case) case B のような場合は時間が経過すると空間に関して一様になり, 常微分方程式のケースと同じ周期解になる. しかし, case A の場合は, 時間が経過すると, 空間の各点ごとに見ると周期解になるものの一様にはならない傾向にある. さらに case C の場合はある程度時間が経過しても解は収束しない傾向にある.

(計算結果 2 については後の $\kappa = 0$ の場合で詳しく述べる.)

今回はこれらの結果を踏まえて, $k > 0$ の場合の数値計算を行い, $k = 0$ の場合との比較を行う.

3. 計算方法と離散化

まず第 1 の方程式 (1) を次のように変形する.

$$w' + \frac{b}{a}u' - \frac{\kappa}{a}w_{xx} + \partial I_u(w) \ni \frac{1}{a}F(u, w) \quad (8)$$

(8) を用いて計算する場合, ∂I_u を計算する必要がある. これは多寡関数であるため数値計算が難しいため, I_u を吉田近似して用いることにした. 吉田近似した関数を I_u^λ (Fig. 12) とすると, ∂I_u は Fig. 13 のような一価関数となる.

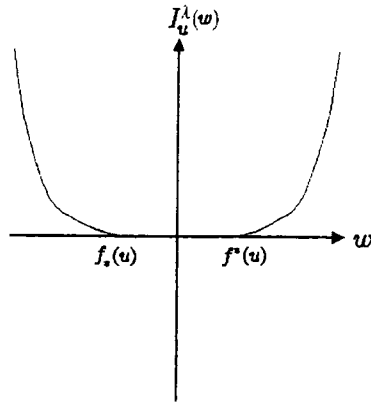


Fig. 12

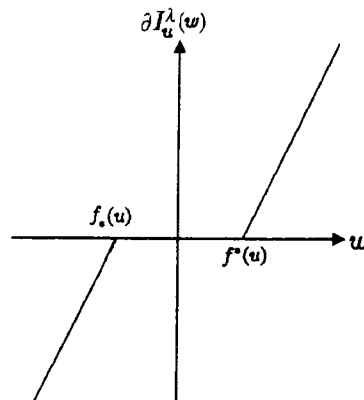


Fig. 13

ここに

$$\partial I_u^\lambda(w) = \frac{[w - f^*(u)]^+}{\lambda} - \frac{[f_*(u) - w]^+}{\lambda}, \quad \lambda > 0$$

実際にはこの ∂I_u^λ を用いた

$$w' + \frac{b}{a}u' - \frac{\kappa}{a}w_{xx} + \partial I_u^\lambda(w) = \frac{1}{a}F(u, w) \quad (9)$$

と (2) について数値計算を行った.

離散化

$\Delta t > 0$ を微小時間とし, 初期時刻 $t_0 = 0$ 及び時刻 t_k を $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ と定める. 空間に対して閉区間 $[0, 1]$ を $n + 1$ 個の分点に等分割し $x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \dots, x_i = i\Delta x, x_n = 1$ ($\Delta x = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$) とする. 各時刻 t_k 及び空間 x_i における $u(t_k, x_i), w(t_k, x_i)$ をそれぞれ u_i^k, w_i^k と表記する. 差分法を用いることにより, (9) において u_i^k, w_i^k が与えられた時の u_i^{k+1}, w_i^{k+1} を求める離散化方程式は次のようになる.

$$\frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{\Delta t} + \frac{b(u_i^{k+1} - u_i^k)}{a\Delta t} + \partial I_{u_i}^\lambda(w_i^k) - \frac{\kappa}{a\Delta x^2}(w_{i+1}^{k+1} - 2w_i^{k+1} + w_{i-1}^{k+1}) = \frac{1}{a}F(u_i^k, w_i^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, i = 0, 1, \dots, n)$$

$$\text{ただし, } \partial I_{u_i}^\lambda(w_i^k) = \frac{[w_i^k - f^*(u_i^k)]^+}{\lambda} - \frac{[f_*(u_i^k) - w_i^k]^+}{\lambda}$$

左辺に w^{k+1} の項を集めて整理すると

$$-\frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}w_{i+1}^{k+1} + \left(1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}\right)w_i^{k+1} - \frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}w_{i-1}^{k+1} = \frac{\Delta t}{a}F(u, w) - \frac{b}{a}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \Delta t\partial I_{u_i}^\lambda(w_i^k) + w_i^k$$

この場合, $i = 0, n$ において $w_{-1}^{k+1}, w_{n+1}^{k+1}$ の値が出てくる. そのため x_{-1}, x_{n+1} の仮想点を閉区間 $[0, 1]$ の外側に設け, 境界条件 (4) を離散化した次の式を利用する.

$$\frac{w_1^{k+1} - w_{-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0, \quad \frac{w_{n+1}^{k+1} - w_{n-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0$$

これにより各 i について整理すると,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}w_1^{k+1} + \left(1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}\right)w_0^{k+1} = \frac{1}{a}\Delta tF(u_0^k, w_0^k) - \frac{b}{a}(u_0^{k+1} - u_0^k) - \Delta t\partial I_{u_0}^\lambda(w_0^k) + w_0^k, \\ \hspace{25em} \text{if } i = 0, \\ \\ -\frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}w_{i-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}\right)w_i^{k+1} - \frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}w_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{a}\Delta tF(u_i^k, w_i^k) - \frac{b}{a}(u_i^{k+1} - u_i^k) \\ \hspace{15em} - \Delta t\partial I_{u_i}^\lambda(w_i^k) + w_i^k, \\ \hspace{25em} \text{if } 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ -\frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}w_{n-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2}\right)w_n^{k+1} = \frac{1}{a}\Delta tF(u_n^k, w_n^k) - \frac{b}{a}(u_n^{k+1} - u_n^k) - \Delta t\partial I_{u_n}^\lambda(w_n^k) + w_n^k, \\ \hspace{25em} \text{if } i = n. \end{array} \right. \quad (10)$$

これはマトリックス $\mathbf{A}$ 及びベクトル $\mathbf{w}^k$, $\mathbf{u}^k$ を用いて次のように書くことができる.

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{L} + \mathbf{w}^k - \frac{b}{a}\mathbf{u}^{k+1} \quad (11)$$

ここに

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & -2\frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & 0 \\ -\frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & 1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & -\frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & 1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & -\frac{\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} \\ 0 & & & -\frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} & 1 + \frac{2\kappa\Delta t}{a\Delta x^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\Delta t F(u_0^k, w_0^k) + \frac{b}{a}u_0^k - \Delta t \partial I_{u_0^k}^\lambda(w_0^k) \\ \vdots \\ \frac{1}{a}\Delta t F(u_n^k, w_n^k) + \frac{b}{a}u_n^k - \Delta t \partial I_{u_n^k}^\lambda(w_n^k) \end{pmatrix}$$

同様に (2) を離散化する.

$$\frac{c(w_i^{k+1} - w_i^k)}{\Delta t} + \frac{d(u_i^{k+1} - u_i^k)}{\Delta t} - \frac{(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1})}{\Delta x^2} = h(u_i^k, w_i^k)$$

先ほどと同様に境界条件 (5) を離散化することで, $\frac{u_1^{k+1} - u_{-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0$, $\frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0$ を得ることから, 各 u_i^{k+1} に対してマトリックス $\mathbf{B}$ とベクトル $\mathbf{w}^k$, $\mathbf{u}^k$ を用いると次のようになる.

$$\mathbf{B}\mathbf{u}^{k+1} + c\mathbf{w}^{k+1} = c\mathbf{w}^k + d\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{h}(\mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$$

ここに

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} d + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} & 0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & d + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & d + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ 0 & & & -\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} & d + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$$

両辺に先の $\mathbf{A}$ を施すと

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{k+1} + c\mathbf{A}\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{A}(c\mathbf{w}^k + d\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{h}(\mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k))$$

$\mathbf{A}\mathbf{w}^{k+1}$ を (11) により書き直して

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{k+1} + c\mathbf{L} + c\mathbf{w}^k - \frac{bc}{a}\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{A}(c\mathbf{w}^k + d\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{h}(\mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k))$$

$\mathbf{u}^{k+1}$ で整理すると

$$\left(\mathbf{AB} - \frac{bc}{a}\mathbf{I}\right)\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{A}(c\mathbf{w}^k + d\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{h}(\mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)) - c\mathbf{w}^k - c\mathbf{L}$$

最終的にこの連立方程式を解けば u_i^{k+1} が求まる. その u_i^{k+1} を用いて (11) に適用すれば, 同じように連立方程式を解くことで w_i^{k+1} を求めることができる. これを繰り返せば良い.

4. 数値実験

今回は先の計算結果 1, 2 と比較するために, $f_*(u)$, $f^*(u)$ は (6), (7) と同じものを与えた. また微小時間 $\Delta t = 10^{-4}$, 空間における分割は 20 等分, 吉田近似における正定数 $\lambda = 10^{-4}$ とした.

数値実験では大きく分けて二つのケース, すなわち常微分方程式系での結果が clockwise の場合と anti-clockwise の場合で行った. それぞれにおいて, 次のような点において検証する.

- 初期値を変化させた時の挙動の変化
- κ の値を変化させた時の挙動の変化

紙面に時間変化を伴う数値実験を示すため, 同一データに対して状況に応じた 2 種類の 3 D グラフを提示する. 1 つ目は軸を u , w , x として時間を固定した時の Fig. 12 のような形, 2 つ目は軸を u , x , t または w , x , t として連続的に時間を含めて表現した Fig. 14 のような形である.

clockwise case

- 初期値を変化させた場合

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	$u_0(i), w_0(i)$	κ
data 1	1	-3	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0
data 2	1	-3	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = \sin((i - 1)0.4)$	0

これは常微分方程式系の数値計算では Fig. 8 のように $f_*(u)$, $f^*(u)$ の一部を含む周期解になっていたケースである. data1 と data2 では初期値のみを変えて他の係数はすべて同じになっている.

(data1)

空間における初期値を data1 では Fig. 12 のような形で与えた.

$$t=0 \quad a=1, \quad b=-3, \quad c=1, \quad d=1, \quad f(u,w)=-u-w, \quad h(u,w)=-u+w$$

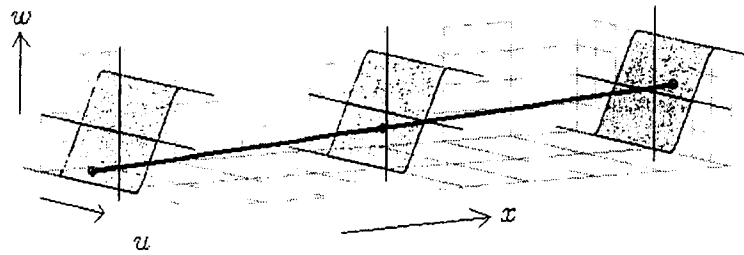


Fig. 12

この初期値を用いた数値実験結果は Fig. 13 のようになる.

$$t=30 \quad a=1, \quad b=-3, \quad c=1, \quad d=1, \quad f(u,w)=-u-w, \quad h(u,w)=-u+w$$

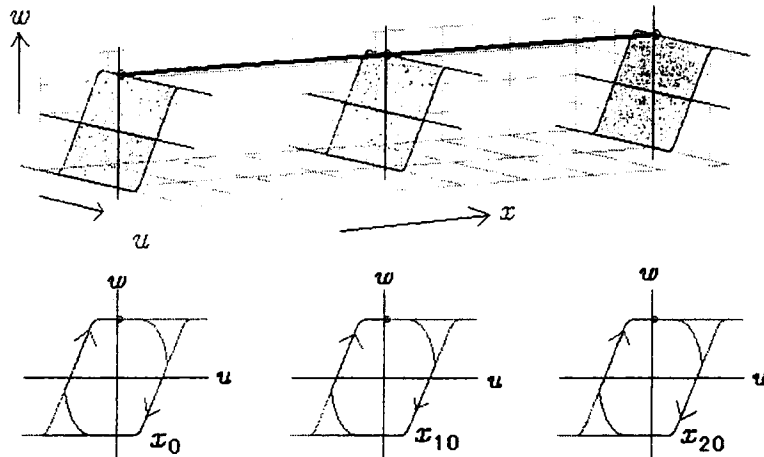


Fig. 13

Fig. 13 は 3 次元の図と 2 次元の図の 2 種類から構成されているが、上の 3 次元の図は $t = 30$ の時の (u, x, w) を表している。下の 3 つの 2 次元の図はそれぞれ x_0, x_{10}, x_{20} における (u, w) の値の軌跡をプロットしたものである。これをみるとわかるように、時間が経過すると $f_*(u), f^*(u)$ 上の一部を通りながら周期解となっており、これは常微分方程式の結果と同じ周期解に一致していることがわかる。

Fig. 14, Fig. 15 はそれぞれ $(u, x, t), (w, x, t)$ を軸にしてプロットしたものである。これを見るとわかるように、時間が経過すると u, w 共に空間に関して一様になり、時間に関して周期解になっていることがわかる。

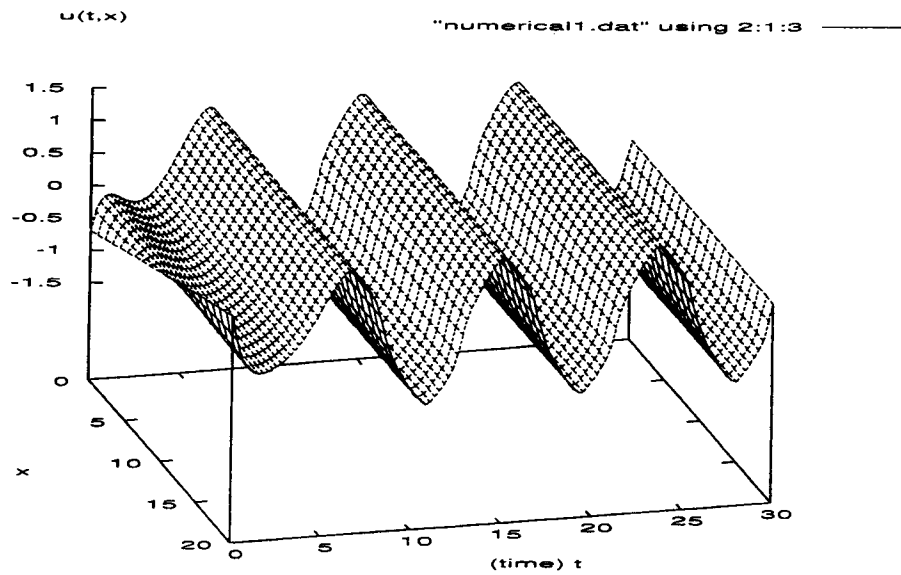


Fig. 14

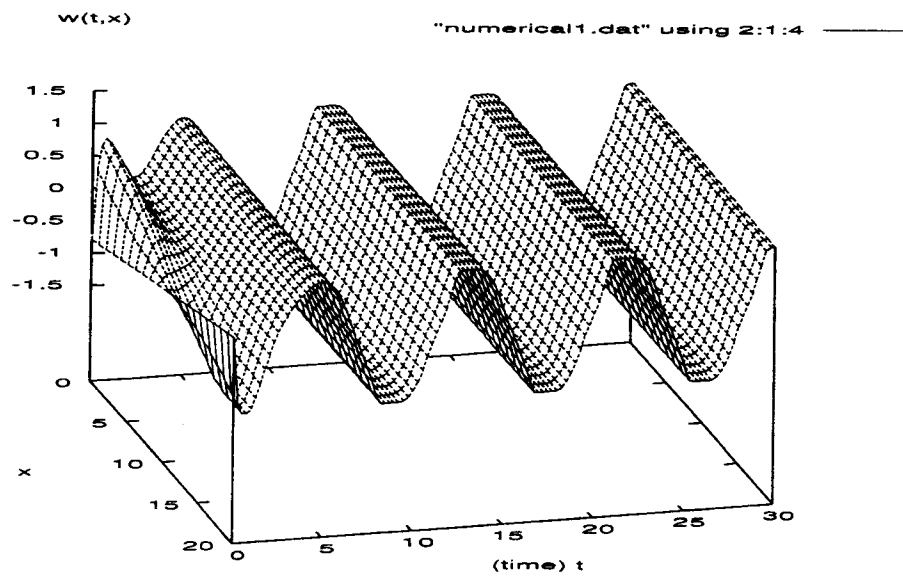


Fig. 15

(data2)

初期値を Fig. 16 のように Fig. 12 の場合と異なった形で与えた.

$$t=0 \quad a=1, \quad b=-3, \quad c=1, \quad d=1, \quad f(u,w)=-u-w, \quad h(u,w)=-u+w$$

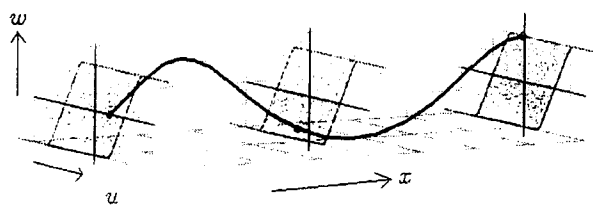


Fig. 16

この場合の数値計算結果は次のようになる。

$$t=30 \quad a=1, \quad b=-3, \quad c=1, \quad d=1, \quad f(u,w)=-u-w, \quad h(u,w)=-u+w$$

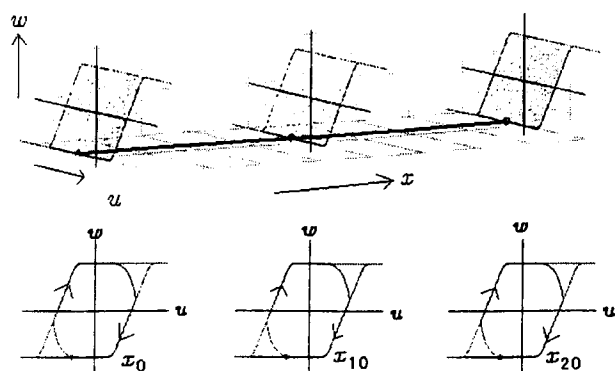


Fig. 17

"numerical5.dat" using 1:2:3

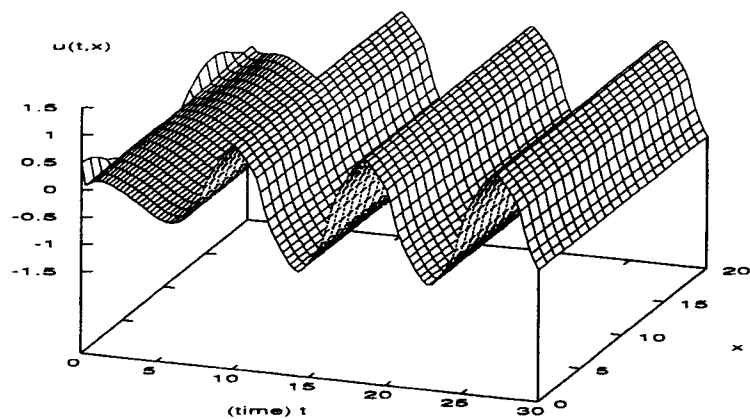


Fig. 18

"numerical5.dat" using 1:2:4

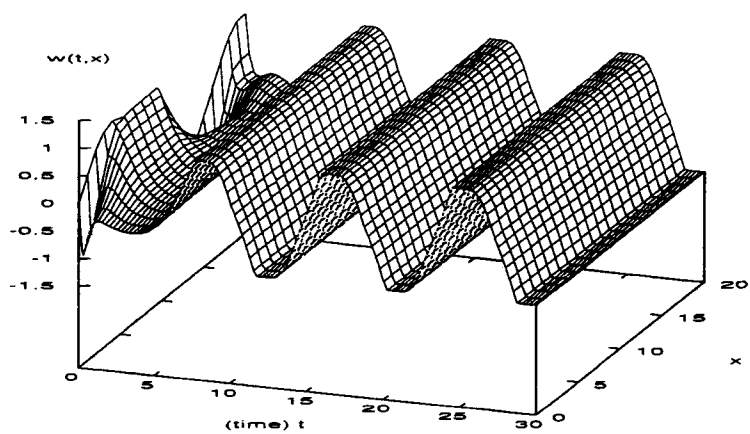


Fig. 19

これを見るとわかるように、初期値が異なってもある程度時間が経過すると、data 1 の場合と同じように周期解になっていることがわかる。

● κ を変化させた場合

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	$u_0(i), w_0(i)$	κ
data 3	1	-3	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0.001
data 4	1	-3	1	1	$-u - w$	$-u + w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = \sin((i - 1)0.4)$	0.001

data3, data4 ではさらに κ の値を変化させたが、いずれも時間が経過すると data1, data2 の場合と同じ挙動を示す結果が得られた。

anti-clockwise case

● 初期値を変化させた場合 (その 1)

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	$u_0(i), w_0(i)$	κ
data 5	1	-0.5	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0
data 6	1	-0.5	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = \sin((i - 1)0.4)$	0

常微分方程式系での数値計算では Fig. 9 のように $f_*(u)$, $f^*(u)$ にぶつかるような軌道を持つ周期解になっていたものである。初期値はそれぞれ、data5 は Fig. 12, data6 は Fig. 16 と同様に与えた。data5 の実験結果は次のようになる。

$t=30$ $a=1, b=-0.5, c=1, d=1, F(u,w)=u+w, h(u,w)=u-w$

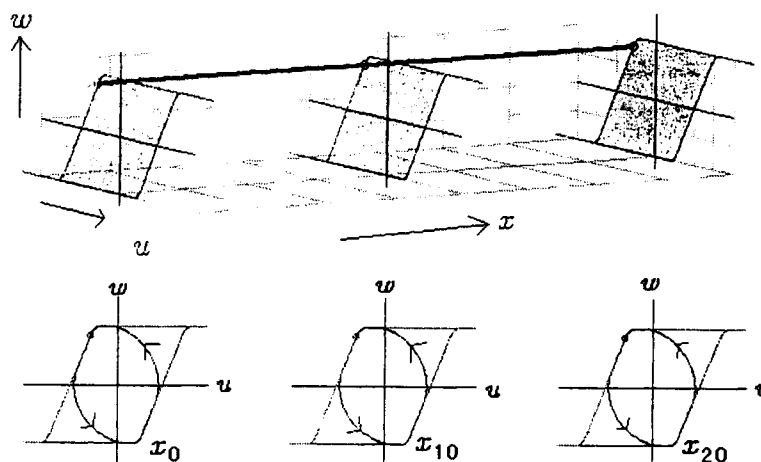


Fig. 20

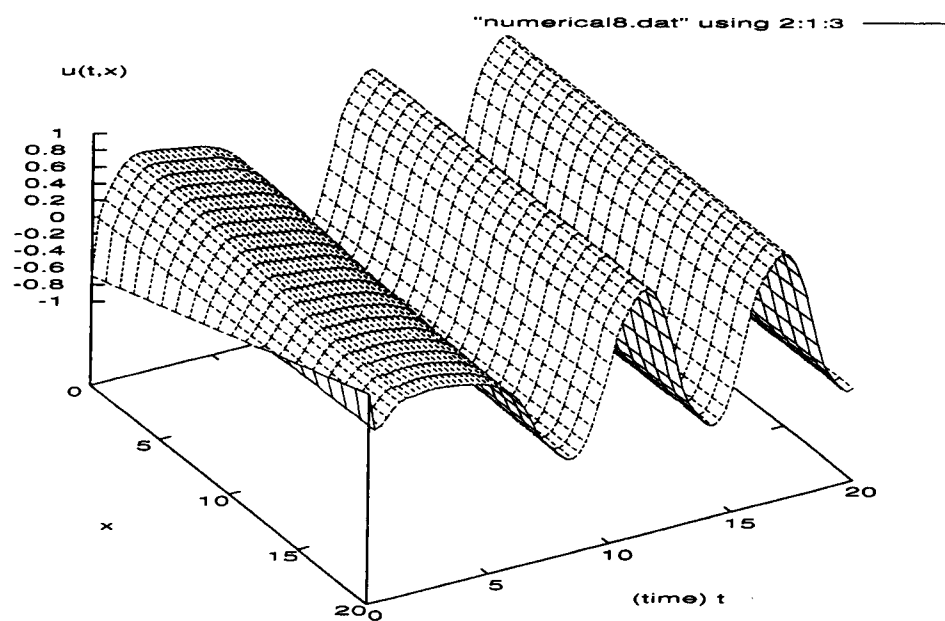


Fig. 21

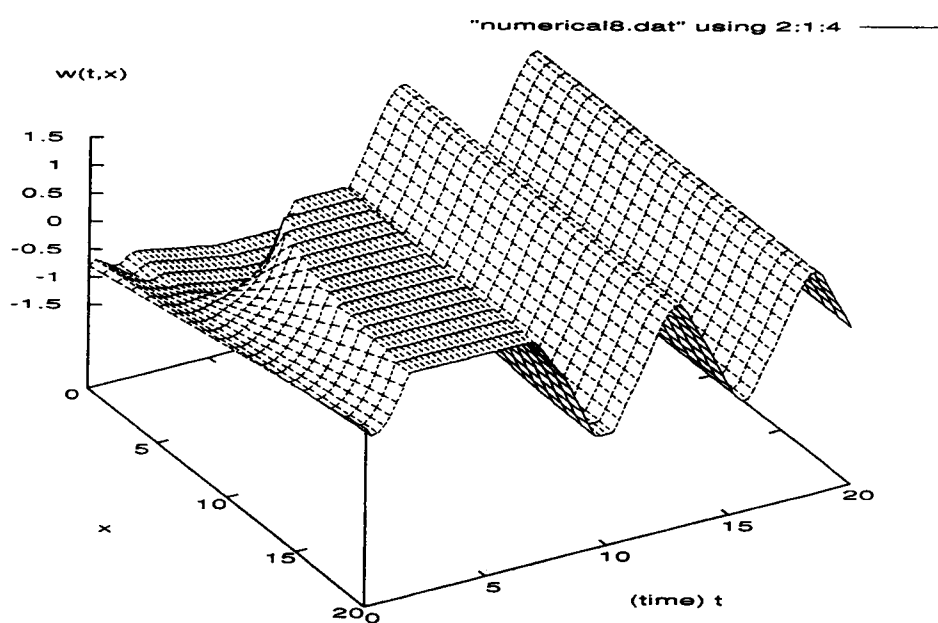


Fig. 22

これを見るとわかるように、先の clockwise の場合と同様、時間が経過すると空間における値が一様に等しくなり、その軌道は常微分方程式の場合と一致していることが Fig. 21, Fig. 22 よりわかる。このケースでは $\kappa = 0$ として計算を行ったが、 $\kappa > 0$ の場合も時間が経過すると同じような結果になった。

● 初期値を変化させた場合 (その 2)

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	$u_0(i), w_0(i)$	κ
data 6	1	-1	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0
data 7	1	-1	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = \sin((i - 1)0.4)$	0

常微分方程式系の数値計算では Fig. 7 のように $f_*(u)$, $f^*(u)$ に接する点を持ちながら周期解になっていた場合である. data 5 の初期値は Fig. 12 と同じもの, また data 6 の初期値は Fig. 16 と同じ物で与えた. この場合の数値実験はそれぞれ次のようになる.

(data6)

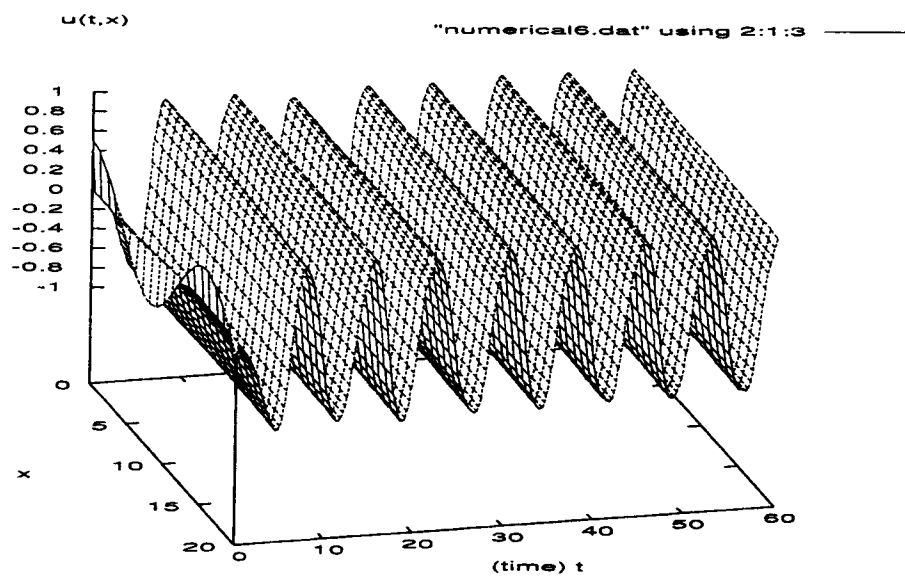


Fig. 23

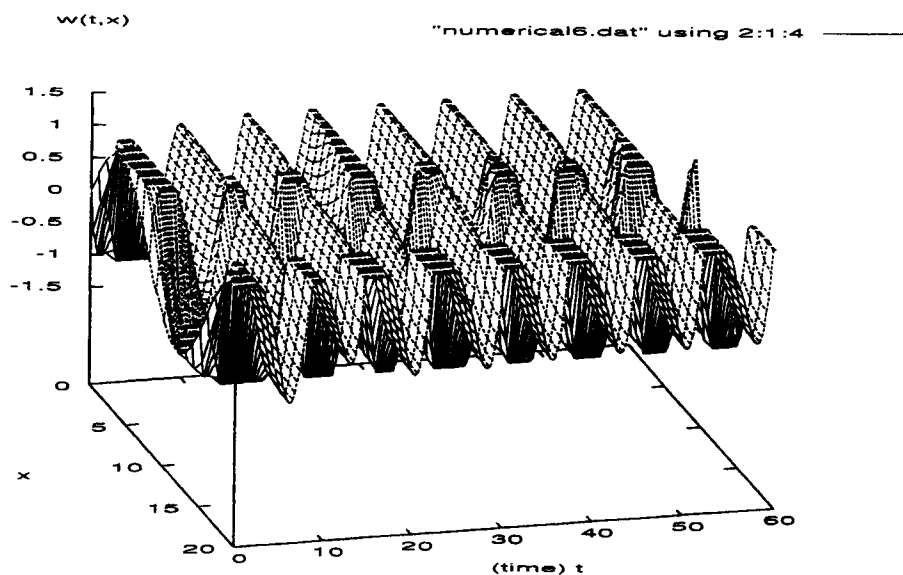


Fig. 24

これを見ると明らかに先ほどまでの結果と異なっていることがわかる。 $u(x, t)$ に関しては、時間が経過すると空間に関してほぼ一様になっていることが見て取れるが、 $w(x, t)$ においては一様な値になっていない。しかし、各 x で時間について見た場合、 $(t > 40)$ 辺りから各点ごとに見ると周期軌道になっていることがわかる。

(data7)

data 7では初期値を Fig. 16 のように与え、data6 とは異なるもので計算を行った。その結果が次の通りである。

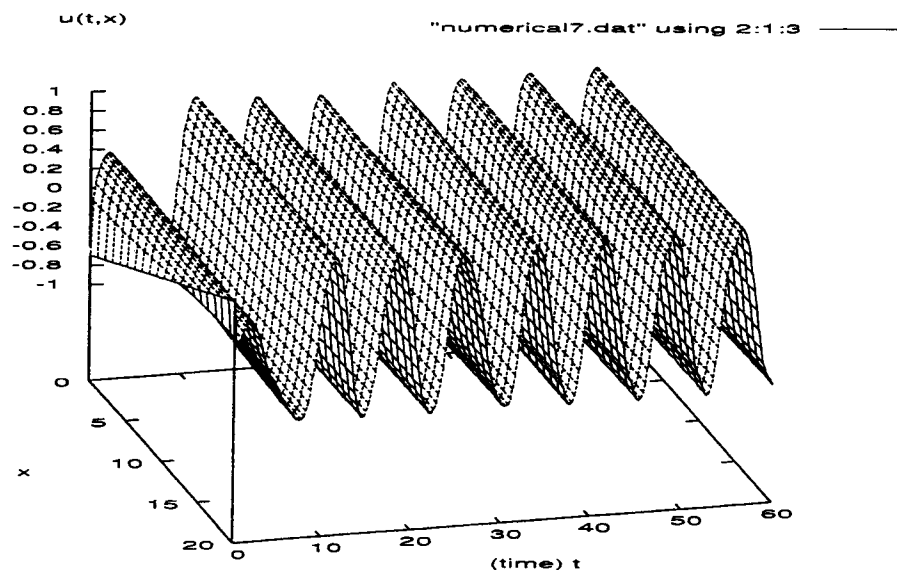


Fig. 25

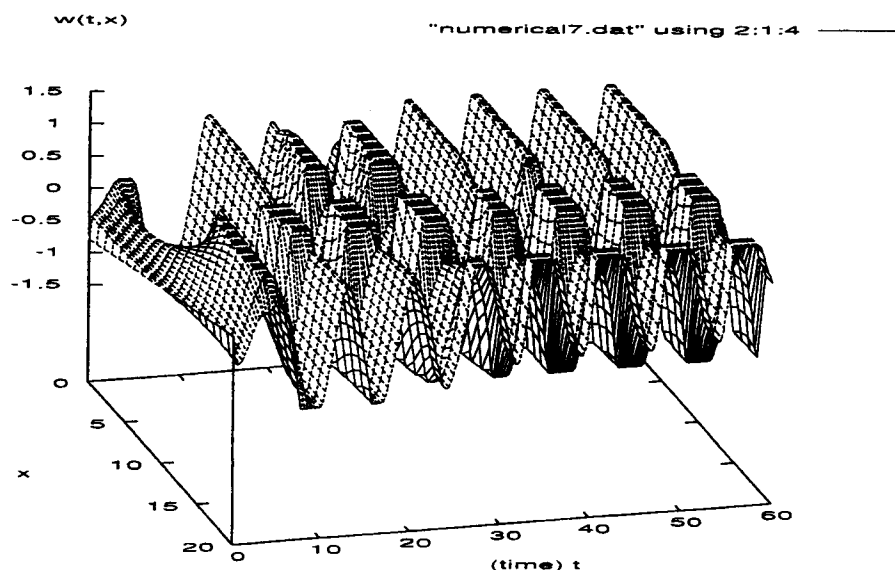


Fig. 26

data6 の場合と同じように、 $w(x, t)$ に関しては、時間が経過しても空間に対し一様にはなっていない。時間が経過すると、各 x において周期軌道になっているが、data6 とはまた別な軌道になっていることもわかる。このことから、anti-clockwise の場合は初期値が空間に

関して異なると、常微分方程式系の場合とは別な周期軌道になることがあり、その軌道は初期値に依存する傾向があることがわかる。

● κ を変化させた場合

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	$u_0(i), w_0(i)$	κ
data 8	1	-1	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0.001
data 9	1	-1	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0.01
data 10	1	-1	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0.1

data 6 の状況で κ の値を変化させた場合の数値計算を行った。それぞれ、 $\kappa = 0.001, 0.01, 0.1$ としてある。

(data 8)

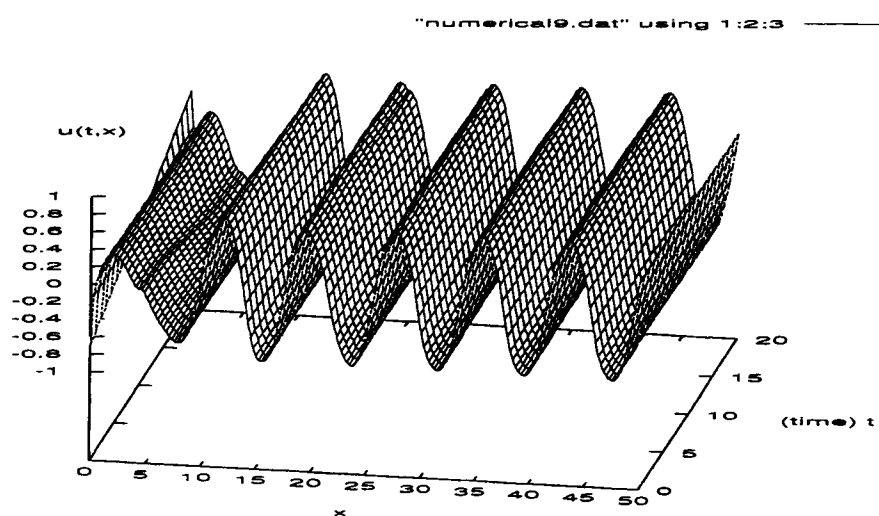


Fig. 27

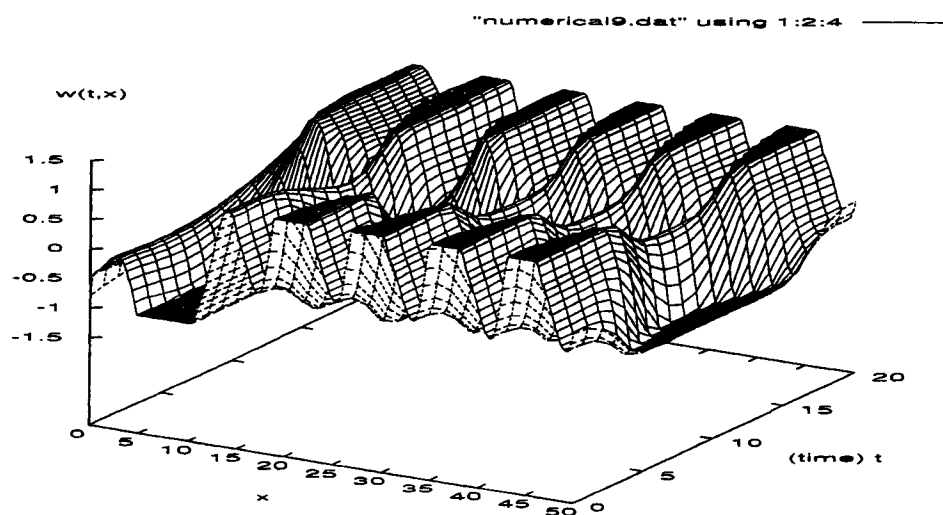


Fig. 28

(data 9)

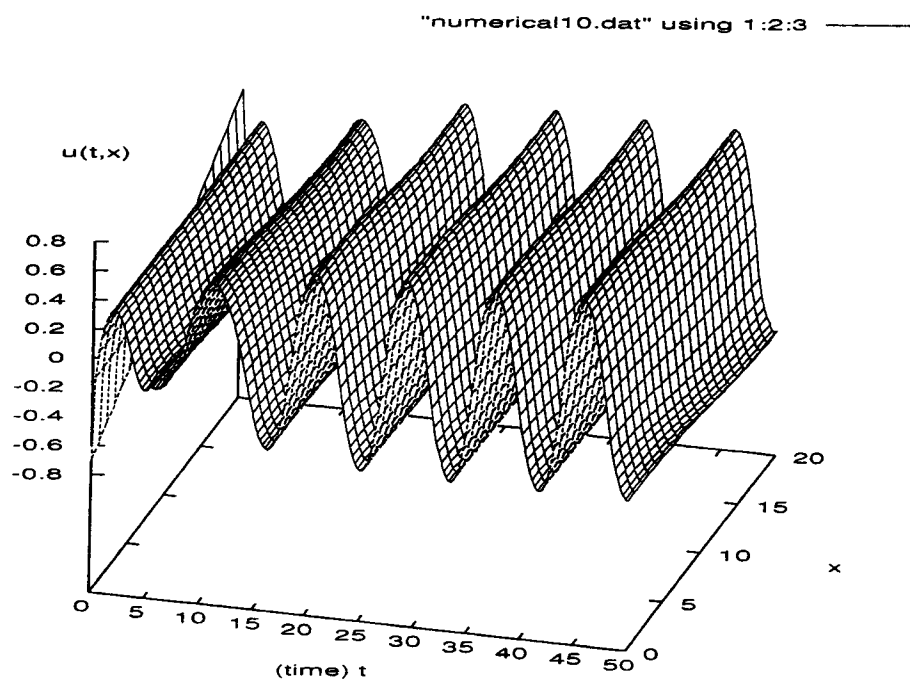


Fig. 29

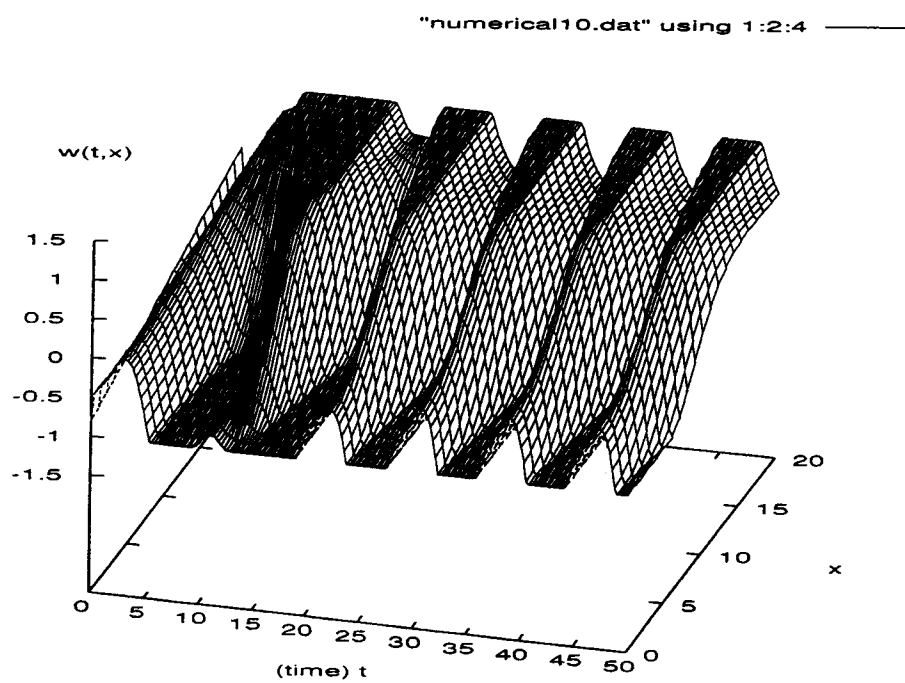


Fig. 30

κ の値が大きくなるにつれ, $w(x,t)$ が空間に関して滑らかになってきていることが見て取れる.

(data 10)

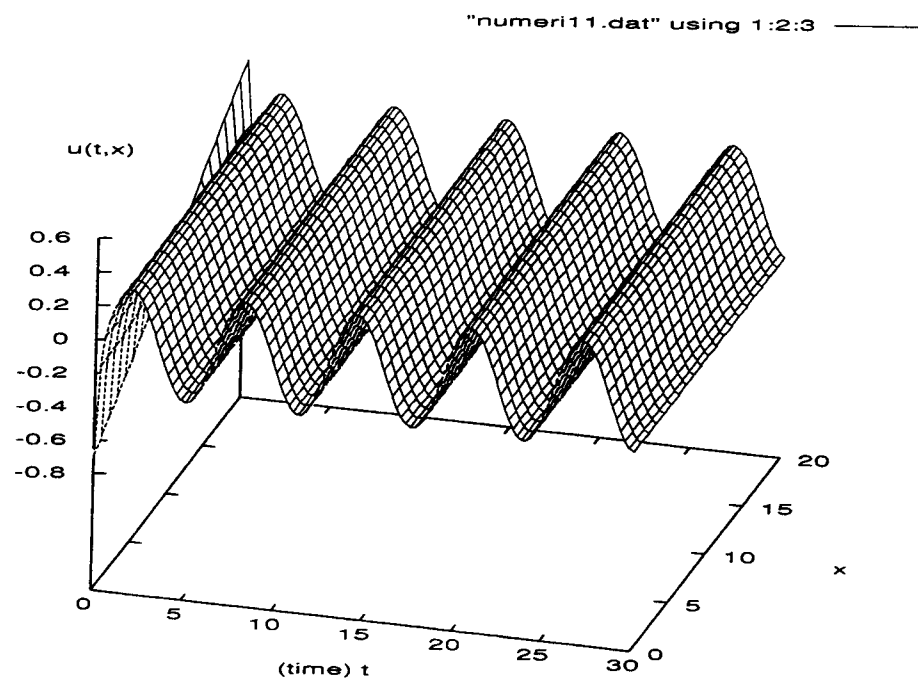


Fig. 31

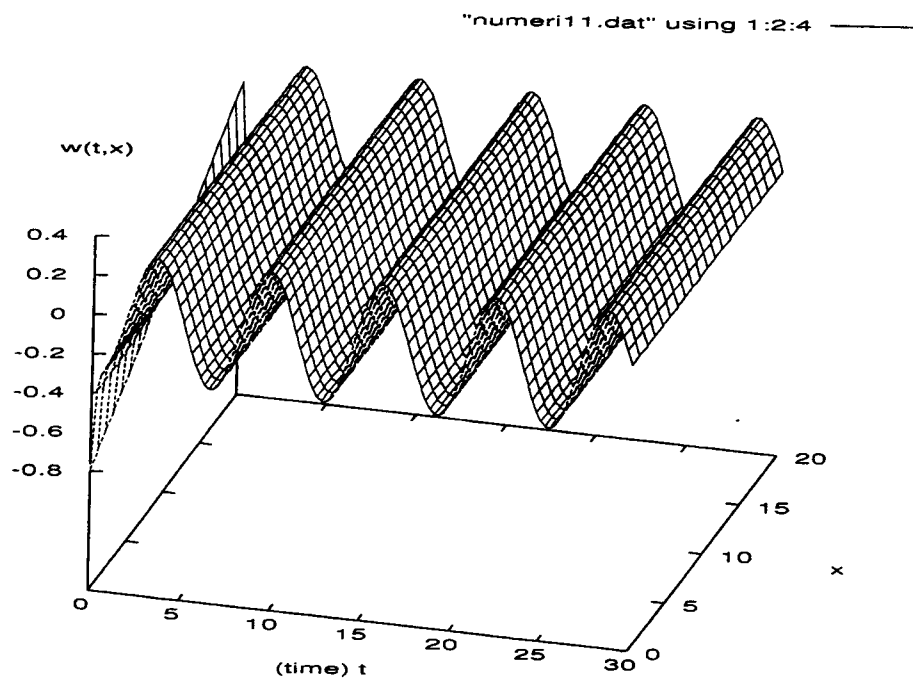


Fig. 32

$\kappa = 0.1$ になると, (w, x) に関しても空間において一様になる. しかも, この時常微分方程

式系の場合の周期解に一致している.

● 特殊なケース

data table	a	b	c	d	$F(u, w)$	$h(u, w)$	$u_0(i), w_0(i)$	κ
data 11	1	-3	1	1	$u + w$	$u - w$	$u_0 = -0.7 + 0.06i, w_0 = -0.8 + 0.05i$	0.01

これは常微分方程式系の数値計算では Fig. 11 のように anti-clockwise の軌道で原点に収束したケースである. $\kappa = 0.01$ の場合, 次のような結果になった.

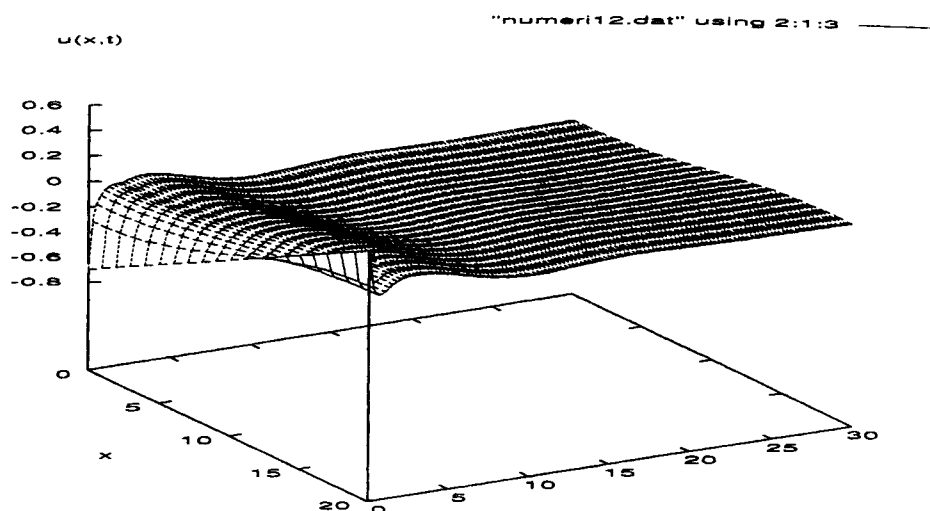


Fig. 33

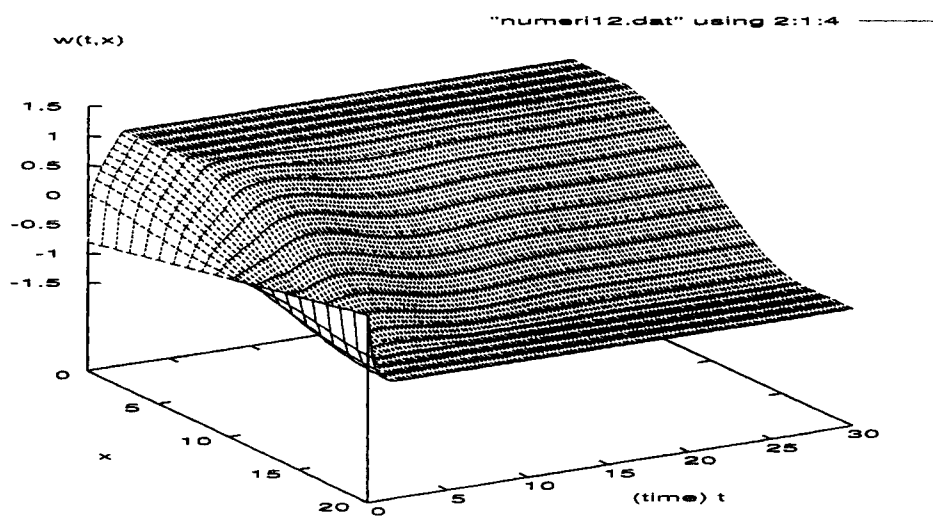


Fig. 34

これを見ると, これまでのどのケースとも異なることがわかる. 時間が経過すると, 解はある値に収束してしまう. しかも Fig. 35 を見るとわかるように, 時間を固定して見ると, 対称な形状になっている.

$$t=30 \quad a=1, \quad b=-3, \quad c=1, \quad d=1, \quad f(u,w)=u+w, \quad h(u,w)=u-w$$

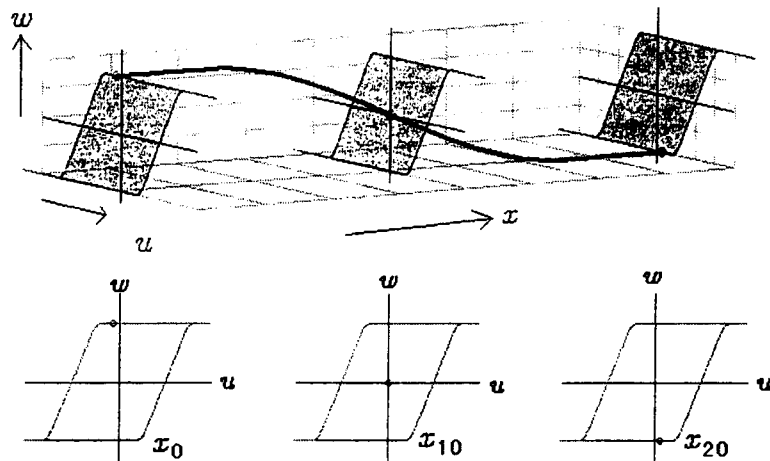


Fig. 35

5. 今後の課題

今回の数値実験は近似問題の数値計算であるため、元々の方程式系の解との直接な関係を保証するまでには至らなかったため、それを示して行くことが今後の課題である。

参考文献

- 1 P. Colli, N. Kenmochi, M. Kubo, *A Phase Field Model with Temperature Dependent Constraint* J. Math. Anal. Appl., **256** (2001), 668-685
- 2 A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Springer, Berlin, 1994
- 3 N. Kenmochi, E. Minchev, T. Okazaki, *On a system of nonlinear ODE with dependent constraint*, in preparation
- 4 N. Kenmochi, E. Minchev, T. Okazaki, *Ordinary Differential systems describing hysteresis effects and numerical simulations*, Abst. Appl. Anal., to appear
- 5 N. Kenmochi, E. Minchev, T. Okazaki, *On a system of nonlinear PDE's with diffusion and hysteresis effects* in preparation
- 6 T. Aiki, N. Kenmochi, *Some models for shape memory alloys*, pp.144-162 *Gakuto Intern. Math. Sci. Appl.*, Vol. **17**, Gakkōtōsho, Tokyo, 2002

参加者名簿（敬称略）

参加者名	所属	E-mail address
愛木豊彦	岐阜大学教育学部	aiki@cc.gifu-u.ac.jp
赤木剛朗	早稲田大学メディアネットワークセンター	akagi@otani.phys.waseda.ac.jp
浅川秀一	岐阜大学工学部	asakawa@cc.gifu-u.ac.jp
阿曾雅泰	千葉大学大学院自然科学研究科	aso@math.e.chiba-u.ac.jp
五十嵐威文	日本大学大学院理工学研究科	igarashi@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp
石井克幸	神戸商船大学	ishii@cc.kshosen.ac.jp
伊藤昭夫	近畿大学工学部	aito@hiro.kindai.ac.jp
伊藤直子	東京理科大学大学院理学研究科	j1102701@ed.kagu.tus.ac.jp
井上弘	足利工業大学	hinoue@ashitech.ac.jp
岩田順敬	大阪大学大学院情報科学研究科	junkei@galois.ap.eng.osaka-u.ac.jp
浦野道雄	早稲田大学理工学部数理科学科	
Emil Minchev	千葉大学大学院自然科学研究科	minchev@math.e.chiba-u.ac.jp
大崎浩一	宇部工業高等専門学校	osaki@ube-k.ac.jp
大崎稔	広島大学大学院理学研究科	
大谷光春	早稲田大学理工学部応用物理学科	otani@otani.phys.waseda.ac.jp
大屋博一	早稲田大学理工学部数理科学科	ooya@fuji.waseda.jp
岡崎貴宣	千葉大学大学院自然科学研究科	okazaki@math.e.chiba-u.ac.jp
岡田浩嗣	広島大学大学院理学研究科	
岡本竜太郎	九州大学大学院数理学府	
門田智仁	早稲田大学理工学部数理科学科	t-kadota@ruri.waseda.jp
角谷敦	広島修道大学	kadoya@syudo-u.ac.jp
北直泰	九州大学大学院数理学研究院	nkita@math.kyusyu-u.ac.jp
木村佳織	早稲田大学大学院理工学研究科	601m0113@mn.waseda.ac.jp
工藤賢一	九州大学大学院数理学府	ma202007@math.kyusyu-u.ac.jp
久藤衡介	早稲田大学理工学部数理科学科	kuto@toki.waseda.jp
工藤稔	広島大学大学院理学研究科	
久保隆徹	早稲田大学理工学部数理科学科	taraco@toki.waseda.ac.jp
剣持信幸	千葉大学教育学部	kenmochi@math.e.chiba-u.ac.jp
小山哲也	広島工業大学工学部	
坂元国望	広島大学理学部	kuni@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
佐久間淳一	千葉大学大学院教育学研究科	sakuma@math.e.chiba-u.ac.jp
佐藤典弘	早稲田大学理工学部数理科学科	sato norihiro@ruri.waseda.jp
嶋野和史	東京都立大学大学院理学研究科	kshimano@comp.metro-u.ac.jp
白川健	東京電機大学	shirakawa@sie.dendai.ac.jp
瀬片純市	九州大学大学院数理学府	ma200021@math.kyusyu-u.ac.jp

高市恭治	早稲田大学理工学部応用物理学科	takaichi@otani.phys.waseda.ac.jp
武井康浩	大阪大学大学院工学研究科	takei@galois.ap.eng.osaka-u.ac.jp
竹内慎吾	学習院大学理学部	shingo.takeuchi@gakusyuin.ac.jp
田中孝明	早稲田大学大学院理工学研究科	koumei@asagi.waseda.jp
永井敏隆	広島大学理学部	
中村武史	神戸商船大学	cp005010@cc.kshosen.ac.jp
中村能久	熊本大学工学部	hisa@math.sci.kumamoto-u.ac.jp
橋本貴宏	愛媛大学理学部	taka@math.sci.ehime-u.ac.jp
細野敬史	九州大学大学院数理学府	
前田梨絵	九州大学大学院数理学府	
松浦啓	早稲田大学大学院理工学研究科	kino@otani.phys.waseda.ac.jp
松金克弥	東海大学大学院理学研究科	2asrm016@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp
松澤寛	東京都立大学大学院理学研究科	
村本直己	広島大学理学部	mura@mis.hiroshima-u.ac.jp
森山繁	早稲田大学理工学部	
山口範和	早稲田大学理工学部数理科学科	norikazu@gm.math.waseda.ac.jp
山崎教昭	室蘭工業大学共通講座	noriki@mmm.muroran-it.ac.jp
山本篤	早稲田大学理工学部数理科学科	atsushi-yamamoto@ruri.waseda.jp
横田智巳	東京理科大学理学部第一部数学科	yokota@rs.kagu.tus.ac.jp
若狭徹	早稲田大学理工学部数理科学科	

