第２１回
発展方程式若手セミナー
報告集

１９９９年１２月

序

発展方程式若手セミナーは「発展方程式及びその周辺分野の将来の方向を探るための若手研究者の討論と情報交換の場」という主旨で 1979 年の夏に始まりました．第 21 回を迎えた今年は平成 11 年度文部省科学研究費*の援助のもと，8 月 10 日から 12 日まで京都市左京区の関西セミナーハウスで開催されました．

今回は特別講演者として東北大学理学研究科の小薗英雄先生をお招きし，「Navier-Stokes 方程式の適切性について 」という題目で講演して頂いた他，21 件の一般講演及び大学院生による short communications が行われ，連日活発な討論・研究交流が行われました．また今回は例年にもまして若い大学院生の方の参加が目立っていたように思います．

この報告集は本セミナーにおける特別講演及び一般講演の内容をもとに，講演者の皆さんに書き下ろして頂いたものです．この冊子がセミナーに参加された方々や関連分野の研究者の皆様のお役に立てば幸いです．

本セミナーを開催するにあたり，多くの方々に協力して頂きました．特に東京大学谷島賢二先生，九州大学小川卓克先生，静岡大学太田雅人先生を始めとする幹事経験者の方々，及び色々とお手伝い頂いた大阪大学の皆様に厚く御礼申し上げます．また小薗先生は御多忙の中で大変興味深い講演をして下さったばかりでなく，詳細な原稿を作成して下さいました．この場をお借りして深く感謝申し上げる次第です．

1999 年 12 月

第 21 回発展方程式若手セミナー幹事
大阪大学理学研究科　和田 健志

---

* 基盤研究 A「微分方程式の総合的研究」課題番号 11304006（研究代表者：谷島賢二教授）ならびに　基盤研究 B「非線形偏微分方程式の解の特異点に対する漸近解析」課題番号 11440057（研究代表者：小川卓克助教授）

参加者名簿　(敬称略)

清水康之（北海道大）
高坂 良史（北海道大）
町原秀二（北海道大）
小薗英雄（東北大）
佐藤得志（東北大）
中村誠（東北大）
中島徹（東北大）
山崎満（筑波大）
菊地洋介（筑波大）
剣持信幸（千葉大）
山崎 教昭（千葉大）
白川健（千葉大）
高橋 正人（千葉大）
阿部浩（千葉大）
岡崎貴宣（千葉大）
廣瀬宗光（東京大）
中西賢次（東京大）
清水巨（東京工業大）
中原将威（東京工業大）
横田智巳（東京理科大）
橋本哲（早稲田大）
竹内慎吾（早稲田大）
秋山高宏（早稲田大）
足達慎二（早稲田大）
赤木剛朗（早稲田大）
内田正樹（早稲田大）
久藤衡介（早稲田大）
高市恭治（早稲田大）
廣瀬健文（早稲田大）
阿部孝之（早稲田大）
石川由一（早稲田大）
大屋博一（早稲田大）
川合 仁（早稲田大）
田中孝明（早稲田大）
佐藤直紀（長岡高専）
谷阪 裕興（名古屋大）
浅川秀一（岐阜大）
深尾武史（岐阜大）
茗ヶ原仁（龍谷大）
森岡達史（大阪大）
和田健志（大阪大）
中口悦史（大阪大）
大崎浩一（大阪大）
Ryu Sank-Uk（大阪大）
相田征史（大阪大）
田中 由美（奈良女子大）
藤垣佳子（神戸大）
森田豪士（神戸大）
渡辺一巨（神戸大）
丸尾健二（神戸商船大）
石井克幸（神戸商船大）
大村裕久（神戸商船大）
角谷敦（広島修道大）
橋本貴宏（愛媛大）
小川卓克（九州大）
新國淑子（九州大）
北直泰（九州大）
中村能久（熊本大）

目　次

Navier-Stokes 方程式 の適切性について

小薗　英雄
東北大学 ·大学院理学研究科数学専攻
e-mail:kozono@math.tohoku.ac.jp

この論説は２部からなる。第１部は非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の研究のサーベイからなる。第２部においては同方程式をひとつの典型的な例として、最近の調和解析学における成果が、一般の非線形発展方程式に対する適切性の研究に有益であることを解説する。

Part I
Navier-Stokes 方程式

序

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における縮まない流体の運動は速度ベクトル $u(x,t) = (u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))$ と圧力 $p(x,t)$ により記述される。ここに、$x=(x_1,\cdots,x_n)$ は$\mathbb{R}^n$の座標、$t\geq 0$ は時刻を表す。$\{u(x,t),p(x,t)\}$ は次の Navier-Stokes 方程式に支配される。

$$\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, & \text{(運動量保存)} \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{(質量保存)} \end{cases}$$

ここで、記号の説明をしておこう。

$$u\cdot\nabla u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j},$$

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial p}{\partial x_n}\right),$$

$$\operatorname{div}\, u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

本来、流体力学の基礎方程式としては、粘性係数 ν、密度 ρ が物理定数として現れるが、適当なスケール変換を施し、新たに速度ベクトル u, 圧力 p を取り替えることにより上式が得られる。数学的には、初期データー $a(x) = (a_1(x), \cdots, a_n(x))$ を与え $t = 0$ において、

(0.1) $$u(x,0) = a(x) \quad (\text{初期条件})$$

を満たす (N-S)-(0.1) の解 $\{u,p\}$ を見いだすことが問題 (Cauchy 問題) となる。より詳しくは、

(I) 初期条件 $a = a(x)$ に対して、解 $\{u,p\}$ は時間大域的に存在するか ?

(II) その様な解は唯一つか ? また、変数 (x,t) で何回でも微分可能か ?

(III) ある時刻 T_* が存在して、解 $\{u,p\}$ は時間 $0 < t < T_*$ では微分可能な滑らかな関数であるが、$t \geq T_*$ ではその滑らかさを失うことがあり得るか ?

(I), (II) については、増田久弥氏 [24] による優れた解説がある。Part I ではその後に発展したNavier-Stokes 方程式の偏微分方程式論的研究について、上記の問題を中心に解説を試みたい。

1 弱解の大域的存在と一意性

まずいくつかの関数空間を導入しよう。$C_{0,\sigma}^\infty$ はR^n 上で定義されたコンパクトな台をもつ C^∞ 級ベクトル値関数 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$ であって、div $\phi = 0$ であるもの全体とする。L_σ^r、$H_\sigma^{1,r}$ をそれぞれ、$C_{0,\sigma}^\infty$ の L^r-ノルム $\|\phi\|_r = \left(\int_{R^n} |\phi(x)|^r dx\right)^{1/r}$, $H^{1,r}$-ノルム $\|\phi\|_{H^{1,r}} = \left(\int_{R^n} |\phi(x)|^r dx\right)^{1/r} + \left(\int_{R^n} |\nabla\phi(x)|^r dx\right)^{1/r}$ による完備化*とする。ここに、$\nabla\phi = (\partial\phi_i/\partial x_j)_{i,j=1,\cdots,n}$. 一般に Banach 空間 Xに対して、そのノルムを $\|\cdot\|_X$ と書くとき、$L^r(t_1,t_2;X)$ を X に値をとる (t_1,t_2) 上の関数 $\phi = \phi(t)$ であって、$\|\phi\|_{L^r(t_1,t_2;X)} = \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\phi(t)\|_X^r dt\right)^{1/r} < \infty$ なるもの全体とする。

定義 1.1 $a \in L_\sigma^2$ とする。 $R^n \times (0,T)$ 上の可測関数 $u = u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots u_n(x,t))$ が、(N-S)-(0.1) の弱解であるとは、次の 3 つ条件を満たすときをいう。

(i) $u \in L^\infty(0,T;L_\sigma^2)$;

(ii) $u \in L^2(0,T';H_\sigma^{1,2})$ がすべての $T' < T$ について成り立つ。

(iii) 等式

$$\int_0^T \{-(u(t), \partial_t\Phi(t)) + (\nabla u(t), \nabla\Phi(t)) + (u \cdot \nabla u(t), \Phi(t))\} dt = (a, \Phi(0))$$

*藤田宏 ·黒田成俊 ·伊藤清三著 :関数解析 (岩波基礎数学選書) p. 142 を参照

がすべての$\Phi(x,t)=\lambda(t)\phi(x)$ にたいして成り立つ。ここに、$\phi\in C_{0,\sigma}^{\infty}$, $\lambda\in C^1([0,T])$ かつ $\lambda(T)=0$ である。　$(\cdot,\cdot)$ は$\boldsymbol{R}^n$ における L^2-内積を表す：

$$(u,v)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\sum_{j=1}^{n}u_j(x)v_j(x)dx$$

上の等式 (iii) は、(N-S) の第一式の両辺とベクトル値関数 Φとの L^2-内積をとり、部分積分 $(-\Delta u,\Phi)=(\nabla u,\nabla\Phi)$ を行った後、時間変数に関して $(0,T)$ 上積分する事によって得られる。この様に、未知関数 u に作用する微分を部分積分によって、カップルする滑らかな関数 Φ （これを試験関数という）に転嫁して得られる積分の形式を "弱形式" といい、弱形式を満たす解を**弱解**、または**超関数解**という。尚、上の弱形式において圧力 p が現れない理由は、

$$(\nabla p,\phi)=-(p,\operatorname{div}\phi)=0$$

であることによる。

弱解の存在については次ぎの定理が知られている。

定理 1.1 (大域解の存在) 任意の $a\in L_\sigma^2$ に対して、$(0,\infty)$ における (N-S)-(0.1) の弱解 u で次の性質を満たすものが少なくとも一つ存在する。

(i) (エネルギー不等式)

$$\|u(t)\|_2^2+2\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_2^2d\tau\le\|a\|_2^2,\quad 0\le t<\infty, \tag{1.1}$$

(ii)

$$\|u(t)-a\|_2\to 0\quad t\to+0 \text{ のとき}$$

現在までのところ、 定理 1.1 で得られた弱解が一意的であるかどうかは、未解決である。Foias-Serrin-Masuda [9], [30], [23] は一意性が成り立つクラスとして、空間 $L^s(0,T;L^q)$ を導入し、次の結果を得た。

定理 1.2　$a\in L_\sigma^2$ とする。

(i)　(一意性) u,v を $(0,T)$ における (N-S)-(0.1) の弱解とする。u は条件

$$u\in L^s(0,T;L^q),\quad s,q \text{ は } 2/s+n/q=1 \text{ かつ } n<q<\infty \text{ なる指数} \tag{1.2}$$

を満たし、v はエネルギー不等式 (1.1) を $0\le t\le T$ で満たすとする。このとき、$\boldsymbol{R}^n\times(0,T)$ において　$u=v$　である。

(ii)　(正則性) (1.2) に属する弱解 u に対して、

$$\frac{\partial u}{\partial t},\quad\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\in C(\boldsymbol{R}^n\times(0,T))$$

が成り立つ。　ここに、$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は任意の多重指数である。

注意　(1) 上の定理 1.2 において、v は (1.2) を満たす必要はない。一方、クラス (1.2) に属する弱解 u はエネルギー等式

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau = \|a\|_2^2, \quad 0 \le t \le T \tag{1.3}$$

を満たす。

(2) 指数 s, q が大きい程、クラス (1.2) に属する弱解 u は滑らかであると見なせる。定義 1.1 により定められた、一般の弱解 u に対しては

$$u \in L^{s_0}(0, T; L^{q_0}), \quad 2/s_0 + n/q_0 = n/2 \tag{1.4}$$

が示せる。特に、$n = 2$ のときは $u \in H^{1,2}(\boldsymbol{R}^2)$ に対しての不等式

$$\|u\|_{q_0} \le C\|u\|_2^{q_0/2}\|\nabla u\|_2^{1-q_0/2} \quad (C\text{は定数})$$

により $q_0 > 2$ ととれる。従って、定理 1.2 より平面 $\boldsymbol{R}^2$ において問題 (I)、(II) は肯定的に解決されている。この定理に関連して、一般の弱解がエネルギー不等式 (1.1) を常に満たすかどうかは、興味ある問題と思われる。

クラス (1.2) は"スケール不変"という観点からも重要である。λ を正のパラメーターとして、関数族 $\{u_\lambda, p_\lambda\}$ を

$$u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad p_\lambda(x,t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$$

で定める。　簡単な計算により、$\{u, p\}$ が (N-S) の解であれば、すべての $\lambda > 0$ にたいして、$\{u_\lambda, p_\lambda\}$ も同様に解であることが示せる。u_λ の定義により、

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_{L^s(0,\infty;L^q)} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_{\boldsymbol{R}^n} |u_\lambda(x,t)|^q dx\right)^{\frac{s}{q}} dt\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \lambda^{1-\frac{n}{q}-\frac{2}{s}} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{s}{q}} dt\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \lambda^{1-\frac{n}{q}-\frac{2}{s}} \|u\|_{L^s(0,\infty;L^q)}
\end{aligned}$$

である。　従って、$\|u_\lambda\|_{L^s(0,\infty;L^q)} = \|u\|_{L^s(0,\infty;L^q)}$ がすべての $\lambda > 0$ に対して成り立つ為には、上式のλ の指数がゼロ、すなわち s, q は (1.2) の条件 $2/s + n/q = 1$ を満たすことが必要十分である。　言い換えれば、スケール変換 $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ に関して、クラス (1.2) は不変な空間である。Navier-Stokes 方程式を初め、非線形 Schrödinger 方程式、調和写像の方程式などの"由緒正しい"非線形偏微分方程式には上記の様なスケール変換測がある。この場合、スケール変換に関して不変な関数空間で、解を発見することの重要性が経験的に知られている。　これを藤田・加藤の原理という (Ozawa [28, p.345, 5 節])。特に、

$u_\lambda(x,t)=u(x,t)$、$p_\lambda(x,t)=p(x,t)$ がすべての$\lambda>0$ について成り立つような解 $\{u,p\}$ を**自己相似解**という。Navier-Stokes 方程式の場合、

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}U(\frac{x}{\sqrt{t}}),\quad p(x,t)=\frac{1}{t}P(\frac{x}{\sqrt{t}})$$

なる形の解 $\{u,p\}$ は自己相似解であることが分かる。ここに、$U=U(y)$、$P=P(y)$ は $y=(y_1,\cdots,y_n)\in \boldsymbol{R}^n$ の関数である。

クラス (1.2) の臨界ケース、すなわち $s=\infty$、$q=n$ の場合については、次のような結果が得られている。

定理 1.3 (Kozono-Sohr [17]) $a\in L^2_\sigma$ とする。

(i) （一意性）u, v は $(0,T)$ 上の (N-S)-(0.1) の弱解で、u は

$$u\in L^\infty(0,T;L^n) \tag{1.5}$$

であり、v はエネルギー不等式 (1.1) を満たすならば、$u\equiv v$ が $\boldsymbol{R}^n\times[0,T)$ で成り立つ。

(ii) （正則性）ある正定数 ε_0 が存在して、クラス (1.5) に属する弱解 u が条件

$$\limsup_{t\to t_*-0}\|u(t)\|_n^n\le\|u(t_*)\|_n^n+\varepsilon_0 \tag{1.6}$$

をすべての $t_*\in(0,T)$ で満たすならば、 u は定理 1.1 (ii) と同様な正則性を有する。

注意 条件 (1.6) は時刻t_* における弱解 u の L^n- ノルム $\|u(t_*)\|_n$ と左極限 $\lim_{t\to t_*+0}\|u(t)\|_n$ の跳びの量が小さいことを要求している。 これより特に、$u\in C([0,T);L^n)$ であれあば、一意かつ正則であることが従う。

残念ながら、現在までのところクラス (1.5) に属するすべての弱解が、正則かどうかは未解決な問題である。これは、後述の自己相似解による爆発解の非存在と密接な関係がある。

2 強解の存在定理

前節の定理 1.2 でクラス (1.2) に属する弱解の一意性及び正則性を示したが、その存在については、次の強解の概念が有効である。

定義 2.1 $1<r\le n$ とし、$a\in L^n_\sigma\cap L^r_\sigma$ とする。$u=u(x,t)$ がクラス $S_r(0,T)$ に属する (N-S)-(0.1) の強解であるとは、

(i)

$$u\in C([0,T);L^n_\sigma\cap L^r_\sigma); \tag{2.1}$$

(ii)

$$\partial_t u, \quad Au \in C((0,T); L^n_\sigma); \tag{2.2}$$

(iii) u は L^n_σ において、等式

$$\begin{cases} \partial_t u + Au + P(u \cdot \nabla u) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = a \end{cases} \tag{2.3}$$

を満たす。

ここで、記号の説明をしよう。Pはすべての $1 < q < \infty$ に対して、L^q から L^q_σ の上への射影作用素であり、具体的には $P = \{P_{jk}\}_{j,k=1,\cdots,n}$ とするとき、$P_{jk} = \delta_{jk} + R_j R_k$ とかける。ここに、δ_{jk} は Kronecker の表象であり、$R_j = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sqrt{-1}\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F})$, $j = 1, \cdots, n$ は Riesz 変換を表す ($\mathcal{F}$ はフーリエ変換)。とくに、$P(\nabla p) = 0$ に注意されたい。A は Stokes 作用素と呼ばれ、$A = -P\Delta$ で定義される。

強解の存在と一意性については次の定理が知られている。

定理 2.1 (Kato [15], Giga-Miyakawa [13], Brezis [5])

(i) (時間局所解の存在) $a \in L^n_\sigma \cap L^r_\sigma$、$1 < r \le n$ に対して、$T > 0$ と $S_r(0,T)$ に属する (N-S)-(0.1) の強解 u が一意的に存在する。

(ii) (時間大域解の存在) $1 < r \le n$ に対して、$\delta = \delta(n,r)$ が存在して、$a \in L^n_\sigma \cap L^r_\sigma$ かつ $\|a\|_n \le \delta$ を満たす初期データーに対して、$S_r(0,\infty)$ に属する (N-S)-(0.1) の強解 u が一意的に存在する。

注意 上の定理において $r = 2$ とすれば、$u \in S_2(0,T)$ は定義 1.1 における弱解にもなっている。(i) において、さらに $a \in L^q_\sigma$ $(n < q < \infty)$ とするとき、存在時間 T は $T = C/\|a\|_q^{\frac{2q}{q-n}}$ と特徴付けられる。 ここに、C は n, q のみに依存する定数である。

定理 2.1 の証明の概略

以下において C は種々の正定数をあらわすとし、とくに $C = C(*, \cdots, *)$ と書くときは、括弧内の量にのみ依存する正定数を表すとする。Kato [15] による方法を紹介しよう。(2.3) の解を見いだすことは、Duhamel の原理†により、つぎの積分方程式を解くことに帰着される。

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(u)(\tau)d\tau, \quad 0 < t < T \tag{2.4}$$

ここに、$F(u) = -P(u \cdot \nabla u)$。 Stokes 半群 $\{e^{-tA}\}_{t \ge 0}$ は、Gauss 核 $G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ を用いて $e^{-tA}a = G_t * a$ と合成積の形でかける。従って、Hausdorff-Young の不等式‡により、次の $L^p - L^q$ 評価が成り立つ。

$$\begin{cases} \|e^{-tA}a\|_q \le Ct^{-\frac{n}{2}(1/p-1/q)}\|a\|_p, & 1 \le p \le q \le \infty, \\ \|\nabla e^{-tA}a\|_q \le Ct^{-\frac{n}{2}(1/p-1/q)-1/2}\|a\|_p, & 1 \le p \le q < \infty \end{cases} \tag{2.5}$$

† 同書 :関数解析 p. 256 補題 7.11 を参照

‡ 同 p.119 命題 4.5

がすべての $a \in L^p_\sigma$、$t>0$ についてなりたつ。ここに $C=C(n,p,q)$ 。(2.4) の解を逐次近似法で求めよう。

$$
(2.6)\qquad \begin{cases} u_0(t)=e^{-tA}a, \\ u_{j+1}(t)=u_0(t)+\displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(u_j)(\tau)d\tau, \quad j=0,1,\cdots, \end{cases}
$$

今、$n<q<\infty$ なる q をひとつとり固定する。

$$
K_j=\sup_{0<t<T} t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|u_j(t)\|_q, \quad K'_j=\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_j(t)\|_n
$$

とするとき、各 $j=0,1,\cdots$ に対して、K_j, K'_j は有限な数である。実際、$j=0$ のときは、$a\in L^n_\sigma$ より、(2.5) から従う。いま、$K_j, K'_j<\infty$ と仮定する。再び (2.5) と Hölder の不等式[§]から、

$$
\begin{aligned}
\|u_{j+1}(t)\|_q &\le \|u_0(t)\|_q+\int_0^t\|e^{-(t-\tau)A}F(u_j)(\tau)\|_q d\tau \\
&\le t^{-\frac{n}{2}(1/n-1/q)}K_0+C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(1/q+1/n-1/q)}\|u_j(\tau)\|_q\|\nabla u_j(\tau)\|_n d\tau \\
&\le t^{-\frac{n}{2}(1/n-1/q)}K_0+CK_jK'_j\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}\tau^{n/2q-1}d\tau \\
&= (K_0+CB(1/2,n/2q)K_jK'_j)t^{-\frac{n}{2}(1/n-1/q)}
\end{aligned}
$$

ここに $B(\cdot,\cdot)$ は beta 関数を表す。導関数の評価についても (2.5) より、

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u_{j+1}(t)\|_n &\le \|\nabla u_0(t)\|_n+\int_0^t\|\nabla e^{-(t-\tau)A}F(u_j)(\tau)\|_n d\tau \\
&\le t^{-\frac{1}{2}}K'_0+C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(1/q+1/n-1/n)-1/2}\|u_j(\tau)\|_q\|\nabla u_j(\tau)\|_n d\tau \\
&\le t^{-\frac{n}{2}(1/n-1/q)}K'_0+CK_jK'_j\int_0^t(t-\tau)^{-n/2q-1/2}\tau^{n/2q-1}d\tau \\
&= (K'_0+CB(1/2-n/2q,n/2q)K_jK'_j)t^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

故に、K_{j+1}、K'_{j+1} を

$$
(2.7)\qquad K_{j+1}\equiv K_0+C\beta K_jK'_j, \quad K'_{j+1}\equiv K'_0+C\beta K_jK'_j
$$

とおけば、すべての j について K_j、K'_j が有限の数であることがわかる。(ここに、$\beta=B(1/2-n/2q,n/2q)>B(1/2,n/2q)$) 特に、$L_j=\max.\{K_j,K'_j\}$ と定めれば (2.7) より、

$$
L_{j+1}\le L_0+C\beta L_j^2, \quad j=0,1,\cdots
$$

を得る。 もし、

$$
(2.8)\qquad L_0\le 1/4C\beta
$$

[§] 同書 :関数解析 p. 15 補題 1.1 を参照

ならば、

$$L_j \le \frac{1-\sqrt{1-4C\beta L_0}}{2C\beta}, \quad j=0,1,\cdots$$

となり、数列 $\{L_j\}_{j=0}^{\infty}$ は有界列である。この様な有界性は、(2.6) で定めた関数列 $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ の極限関数 u で次の性質を満たすものの存在を保証する。すなわち、

(2.9) $$t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}u(\cdot) \in BC([0,T);L^q_\sigma), \quad t^{\frac{1}{2}}\nabla u(\cdot) \in BC([0,T);L^n)$$

($BC([0,T);X)$ は $[0,T)$ 上の X-値有界連続関数全体のなす集合)、かつ、

(2.10) $$\sup_{0<t<T} t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|u_j(t)-u(t)\|_q \to 0, \quad \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_j(t)-\nabla u(t)\|_n \to 0$$

故に (2.6) において両辺 $j\to\infty$ とすれば、(2.10) により極限関数 u は積分方程式 (2.4) の解であることが分かる。

同様な方法で、$a\in L^r_\sigma$ であれば、

$$\sup_{0<t<T}\|u_j(t)-u(t)\|_r \to 0, \quad \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_j(t)-\nabla u(t)\|_r \to 0$$

なる収束が示せる。更に (2.9) に基づいて、積分方程式 (2.4) の右辺を (2.5) を用いて評価すれば、$n\le l<q$ なる l について $t^{\frac{n}{2}(1/n-1/l)+\frac{1}{2}}\nabla u(\cdot)\in BC([0,T);L^l)$ が従う。これらの計算結果を用いれば、単なる連続性のみならず、u および ∇u は、それぞれ、$L^r\cap L^\infty$、$L^r\cap L^l$ に値をとる $(0,T)$ 上の Hölder 連続関数であることが分かる。 従って、非線形項 $Fu(t)$ は L^n_σ-値の Hölder 連続関数であり、評価式 $\|Ae^{-tA}a\|_n \le Ct^{-1}\|a\|_n$ を考慮すれば、u は (2.2) を満たし、さらに微分方程式 (2.3) の解にもなっていることが示せる¶。これより、u はクラス $S_r(0,T)$ に属する (N-S)-(0.1) の強解であることが従う。

最後に、条件式 (2.8) の検証が残っている。これは時刻 T か、または初期データ a の L^n-ノルム $\|a\|_n$ のいずれか一方を十分小さく取ることにより保証される。 実際、$C^\infty_{0,\sigma}$ は L^n_σ で稠密であることをにより、ある $\tilde{a}\in C^\infty_{0,\sigma}$ がとれて、$\|a-\tilde{a}\|_n < 1/8C^2\beta$ とすることができる。 故に、(2.5) から $0<t<T$ において、

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|e^{-tA}a\|_q &\le t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|e^{-tA}(a-\tilde{a})\|_q + t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|e^{-tA}\tilde{a}\|_q \\ &\le C\|a-\tilde{a}\|_n + Ct^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|\tilde{a}\|_q \\ &\le 1/8C\beta + CT^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|\tilde{a}\|_q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla e^{-tA}a\|_n &\le t^{\frac{1}{2}}\|\nabla e^{-tA}(a-\tilde{a})\|_n + t^{\frac{1}{2}}\|\nabla e^{-tA}\tilde{a}\|_n \\ &\le 1/8C\beta + CT^{\frac{1}{2}}\|\nabla\tilde{a}\|_n \end{aligned}$$

故に、勝手に与えた $a\in L^n_\sigma$ に対して、T を

$$T = \frac{1}{8C^2\beta}\min.\left(\frac{1}{\|\tilde{a}\|_n}, \frac{1}{\|\nabla\tilde{a}\|_n}\right)$$

¶同書 :関数解析 p. 258 定理 7.20 を参照

と選べば、(2.8) が成り立つ。また (2.5) により、

$$t^{\frac{n}{2}(1/n-1/q)}\|e^{-tA}a\|_q \le C\|a\|_n, \quad t^{\frac{1}{2}}\|\nabla e^{-tA}a\|_q \le C\|a\|_n$$

がすべての $t \ge 0$ に対して成り立つから、$\|a\|_n$ が十分小さい場合は、$T=\infty$ として条件 (2.8) が満たされることが分かる。

3 自己相似解による爆発解の非存在

前々節の最後で自己相似解について触れたが、ここでは Leray [22] の提案した自己相似解が存在しないことを見よう。Leray は 3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$における (N-S)-(0.1) の $(0,\infty)$ 上の弱解 u であって、時刻 Tで爆発するものを自己相似解の形で構成しようと試みた。解 $u(x,t)$, $p(x,t)$ として、次ぎの様な関数を考えよう。

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{T-t}}U(\dfrac{x}{\sqrt{T-t}}) & 0<t<T, \\ 0 & T \le t < \infty \end{cases}$$

$$p(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T-t}P(\dfrac{x}{\sqrt{T-t}}) & 0<t<T, \\ 0 & T \le t < \infty \end{cases}$$

ここに、$U(y) = (U_1(y), U_2(y), U_3(y))$, $P(y)$ $(y=(y_1,y_2,y_3) \in \boldsymbol{R}^3)$ は次の定常方程式の解であるとする。

$$\begin{cases} -\Delta U + U\cdot\nabla U + \dfrac{1}{2}y\cdot\nabla U + \dfrac{1}{2}U + \nabla P = 0, & y \in \boldsymbol{R}^3, \\ \operatorname{div} U = 0, & y \in \boldsymbol{R}^3 \end{cases} \tag{3.1}$$

この様な u が定義 1.1 による弱解である為の必要十分条件は (3.1) の解 U が $H^{1,2}$に属すること、すなわち、$U, \nabla U \in L^2$ であることが容易に確かめられる。

Leray の問題 $H^{1,2}$ に属し、$U \ne 0$ なる (3.1) の非自明解 U は存在するか？

この問題はエネルギー不等式 (1.1) を満たすクラスにおける爆発解の存在として興味あるだけでなく、一意正則性の臨界ケースである定理 1.3 と密接な関係にある。実際、$q \ge 3$ のとき、

$$\|u(t)\|_q = \begin{cases} (T-t)^{\frac{3-q}{2q}}\|U\|_q & 0<t<T, \\ 0 & T \le t < \infty \end{cases}$$

である。 従って、$u \in L^\infty(0,\infty;L^3)$ ではあるが、$2/s+3/q=1$、$q>3$ なる指数 s,q に対しては、$u \notin L^s(0,T;L^q)$ である。これは、定理 1.2 に矛盾しない。実際、u は $t=T$

で滑らかさを失うが、クラス (1.2) には属していないからからである。尚、定理 1.3 (i) により、u は一意的であることに注意されたい。

上の Leray の問題は否定的に解決された。

定理 3.1 (Nečas-Ružička-Šverák [25]) (3.1) の解 U で L^3 に属するものは $U \equiv 0$ なるものに限る。

埋め込み $H^{1,2} \subset L^2 \cap L^6 \subset L^3$ により、この定理から Navier-Stokes 方程式の自己相似解による爆発する弱解は存在しないことが分かる。このことに関連して、次の問題は興味深い。

問題. (N-S)-(0.1) の弱解 u で、$L^\infty(0,\infty;L^n)$ に属するものは正則か ?

定理 1.3 (ii) によれば、付加条件 (1.6) のもとで、上の問題は正しいことが分かっているが、一般の $u \in L^\infty(0,\infty;L^n)$ に関しては今のところ未解決である。もしこの問題が肯定的に解決されれば、自己相似な爆発解に対してより広い見地からその非存在を証明できる。

更に、上記の問題に関連して弱解の特異点の大きさと除去可能性について考察した最近の論文を紹介しておこう。以下、次元を $n = 3$ とする。

定理 3.2 (Neustupa [26]) (N-S)-(0.1) の弱解 u に対してその特異点の集合 $S(u)$ を

$$S(u) \equiv \{(x,t) \in \mathbf{R}^3 \times (0,T); u \notin L^\infty(B_\rho(x,t)) \quad \text{for } \forall \rho > 0\}$$

で定義する。ここに、$B_\rho(x,t) = \{(y,s) \in \mathbf{R}^3 \times (0,T); |y-x| < \rho, |s-t| < \rho\}$. 各 $t \in (0,T)$ に対して $S_t(u) = \{x \in \mathbf{R}^3; (x,t) \in S(u)\}$ と定める。　次ぎの主張が成り立つ。

ある正数 ε_0 が存在して、$u \in L^\infty(0,T;L^3)$ なる (N-S)-(0.1) の任意の弱解 u に対して

$$\sharp S_t(u) \le \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sup_{0<\tau<T} \|u(\tau)\|_3 \right)^3$$

がすべての $t \in (0,T)$ について成り立つ。

上記の定理によって、3 次元においては $L^\infty(0,T;L^3)$ に属する弱解の各時刻 $t \in (0,T)$ における空間的な特異点の個数は高々有限個であることが分かる。弱解の局所的な振る舞いに注目したものしては次ぎの定理がある。

定理 3.3 (Kozono [18]) 次ぎの性質を満たす正数 ε_0 が存在する。(N-S)-(0.1) の弱解 u が、$(x_0,t_0) \in \mathbf{R}^3 \times (0,T)$ において条件

$$\limsup_{x \to x_0, t \to t_0} |x - x_0||u(x,t)| \le \varepsilon_0$$

を満たすならば、ある $\rho > 0$ が存在して $u \in C^2(B_\rho(x_0, t_0))$ が成り立つ。特に

$$u(x,t) = o\left(\frac{1}{|x - x_0|}\right), \quad x \to x_0 \tag{3.2}$$

が $t \in (0,T)$ にたいして一様に成り立つならば、ある $\rho > 0$ に対して $u \in C^2(B_\rho(x_0, t_0))$ が従う。

注意 定理 3.2, 3.3 は弱解 u の局所的な性質を考察したものである。(1.2) や $u \in L^\infty(0,T;L^3)$ などに対応して、(3.2) などの様なある点の近傍での u の局所的挙動の仮定の元で、u がその点の近傍で更により良い性質を持つか ?という問題は (N-S) の場合、見かけほど簡単ではない。その理由は、方程式に現れるいまひとつの未知関数 p (圧力) の局所的な振る舞いを解析することが困難であることにある。実際、p は Riesz 変換 $R_j(j = 1, \cdots, n)$ を用いて $u = (u_1, \cdots, u_n)$ によって

$$p = \sum_{j,k=1}^{n} R_j R_k u_k u_j$$

と表されるが、たとえ p の局所的な性質だけを欲しても、u の $\boldsymbol{R}^n$ における大域的な情報が必要である。この様な困難さを克服し、p の局所的な振る舞いを考察した論文として Taniuchi [32] がある。定理 3.2, 3.3 の証明は [32] の結果に強く依存している。

Part II

BMO, Hardy 空間 と非線形発展方程式

序

Banach 空間 X における次ぎの抽象的非線形発展方程式を考える。

$$
\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au + Fu = 0, & \text{in } X,\ 0 < t < \infty\,, \\ u(0) = a. \end{cases}
$$

ここに、$u = u(t)$ は 時間 $t \in [0, \infty)$ を変数とする X-値な未知関数であり、a は X の元で与えられた初期データである。A は定義域 $D(A) \subset X$ をもつ X 上の線形作用素であるが、一般には非有界作用素である。 Fu は非線形項を表す。

例 0.1(球面 S^N に値をとる調和写像流 (HHF))

$u = u(x,,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_N(x,t), u_{N+1}(x,t))$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $t > 0$. ただし、$|u|^2 = \sum_{k=1}^{N+1} u_k^2 \equiv 1$. A は Laplcace 作用素、すなわち $A = -\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. 非線形項 Fu は

$$
Fu = -u|\nabla u|^2 = -u \sum_{k=1}^{N+1} \nabla u_k \cdot \nabla u_k = -u \sum_{k=1}^{N+1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}^2 \right)
$$

である。

例 0.2 (非線形 Schrödinger 方程式 (NLS))

$u = u(x,,t) : (x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$. $A = -i\Delta$ 非線形項 Fu は

$$
Fu = -i|u|^{p-1}u
$$

である。 ここに p は実数である。

例 0.3 (Navier-Stokes 方程式 (N-S)、(2.3) 参照)

$u = u(x,,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $t > 0$. A は Stokes 作用素と呼ばれ、$A = -P\Delta$で 定義される。ここに、P は射影作用素であり、具体的には Riesz 変換 $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-1/2} (j = 1, \cdots, n)$ を用いて

$$
P = I + R \otimes R = (\delta_{jk} + R_j R_k)_{1 \le j,k \le n}
$$

と表せる。 非線形項 Fu は

$$
Fu = P(u \cdot \nabla u) = P\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)
$$

である。

例 0.4 (Euler 方程式 (Eu))

$u = u(x,,t) = (u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))$, $x = (x_1,\cdots,x^n)$, $t>0$. $A\equiv 0$. 非線形項 Fu は (N-S) と同様である：

$$Fu = P(u\cdot\nabla u).$$

その他、多くの非線形偏微分方程式は抽象的に (E) の形にかけるものが多い。方程式 (E) に関しては次ぎの2つの定理を導くことがまず最初のアプローチである。

定理 0.1 (強解の局所存在定理) 与えられた任意の初期データー $a\in X$ に対して、$T = T(\|a\|_X)>0$ ($\|\cdot\|_X$ は X のノルムを表す) が存在し、$u\in C^1((0,T);X)\cap C((0,T);D(A))$ なる (E) の解で $\lim_{t\to+0}\|u(t)-a\|_X = 0$ を満たすものが一意的に存在する。

注意 上に挙げた例に関しては、(HHF), (NLS) に対しては $X = W^{1,2}$、(N-S) に対しては $X = L^p, p>n$、(Eu) に対しては $X = W^{s,p}$, $s>n/p+1$ のとき、定理 0.1 の形の時間局所解の存在が知られている。

定理 0.1 によって得られた解はその基礎となる空間 X で微分出来るなどの良い性質を持っている。ところが、X の位相を弱めて、より広い空間 Yを考えると時間大域的な解が得られることがある。それが次ぎの定理である。

定理 0.2 (弱解の大域存在定理) 与えられた任意の初期データー $a\in Y(X\subset Y)$ に対して、$u\in C_w([0,\infty);Y)$ の元であって、方程式 (E) を次ぎの意味で満たすものが少なくとも一つ存在する:

$$(u(t),\Phi(t)) = (a,\Phi(0)) + \int_0^t\{-(u,\partial_\tau\Phi)+(u,A^*\Phi)+(Fu,\Phi)\}d\tau \quad 0,t<\infty$$

がすべての $\Phi\in C^\infty([0,\infty);D(A^*))$ に対して成り立つ。ここに、$(\cdot,\cdot)$ は Y とその共役空間 Y^* における双対を表し、A^* は A の共役作用素である。また、$C_w([0,\infty);Y)$ は Yの弱位相に関して $[0,\infty)$ 上連続な Y-値関数全体の集合である。

注意 (1) 上に挙げた例に関しては、(HHF), (NLS) に対しては $Y = W^{1,2}$、(N-S) に対しては $Y = L^2$ に対して定理 0.2 の形の時間大域的弱解の存在が知られている。(Eu) に対しては、現在までのところ $n\ge 3$ のとき空間 Yは得られていない。

(2) 時間大域解の存在証明にはあり得る解 $u(t)$ に関するある種の時間普遍的な保存量の導出が重要な役割を演ずる。ここでは例に挙げたものについて示しておく。

(i) (HHF) の場合

$$\int_0^t\int_{\mathbf{R}^n}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u(x,t)|^2dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla a(x)|^2dx, \quad 0<\forall t<\infty.$$

(ii) (NLS) の場合

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x,t)|^2 dx + \int_{\boldsymbol{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx$$
$$\leq \int_{\boldsymbol{R}^n} |a(x)|^2 dx + \int_{\boldsymbol{R}^n} |\nabla a(x)|^2 dx + \int_{\boldsymbol{R}^n} |a(x)|^p dx, \quad 0 < \forall t < \infty.$$

(iii) (N-S) の場合

$$\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x,t)|^2\, dx + \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^n} |\nabla u(x,\tau)|^2 dx d\tau = \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{R}^n} |a(x)|^2 dx, \quad 0 < \forall t < \infty.$$

(Eu) に関しては保存量は

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x,t)|^2\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^n} |a(x)|^2 dx, \quad 0 < \forall t < \infty.$$

であるが、この L^2-保存のみでは非線形型項を制御できず、大域的弱解は得られていない。

以上、例を中心に方程式 (E) の可解性を考察したが、Part I 序の問題 (I), (II), (III) に対応して、より一般的な次ぎの問題が基本的である。

問題 (I) 定理 0.1, 0.2 における空間 X, Y をそれぞれ個々の方程式ごとに見出すこと。

(II) (弱解の一意正則性) 定理 0.2 によって得られた解 $u(t)$ は一意か？ またそれはもっと良い空間 (例えば X) に属したり、t で微分することができるか？

(III) (強解の接続) 定理 0.1 によって得られた $[0,T)$ 上の解 $u(t)$ を延長できるか？ すなわち、ある $T' > T$ が存在して $u(t)$ を $[0,T')$ 上の解とすることが可能か？ また $T' = \infty$ とすることが出来るか？

Part II では上記の問題を (N-S) を中心に例に挙げた方程式に関して言及する。 その際、Part I と異なる点は、非線形項 Fu の X や Y におけるノルムを評価する様々な不等式を Hardy 空間、BMO 関数の諸定理から導くことである。この方法は調和解析学や Fourier 変換の諸結果に強く依存し、実関数論的手法が (E) の解法に有効であることが分かる。

注意 (線形方程式の場合) $Fu \equiv 0$ のとき、(E) は線形方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, & \text{in } X, 0 < t < \infty\ , \\ u(0) = a. \end{cases}$$

となる。このとき解 $u(t)$ は形式的に $u(t) = e^{-tA}a (0 \leq t \leq \infty)$ とかける。すなわち、線形方程式の場合、(E) の可解性は $-A$ が X で C^0-半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ の生成作用素になるか？という問題に帰着される。これに関しては有名な Hille-Yosida の定理[†]がある。C^0-半群より

[†]藤田宏 ·黒田成俊 ·伊藤清三著 ：関数解析 (岩波基礎数学選書) p.224 定理 7.6, p.228 定理 7.7 を参照

も良いクラスとして、解析的半群‡というものがある。領域に境界などがある場合、$-A$ が解析的半群の生成作用素になるか ?という問題を個々の方程式に関して考察すると結構厄介である。特に、(N-S) の考察に重要な Stokes 作用素 $-A = P\Delta$ が有界領域で解析的半群を生成することが示されたのは比較的最近である (Giga [12])。

4 Hardy 空間とその応用

Hardy 空間、BMO-空間を導入する前に、空間 L^p、$W^{s,p}$ について復習しておこう。

$$
\begin{aligned}
L^p &\equiv \{f : x \in \boldsymbol{R}^n \to f(x) \in \boldsymbol{C}; \|f\|_p \equiv \left(\int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|dx\right)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \le p < \infty, \\
L^\infty &\equiv \{f : x \in \boldsymbol{R}^n \to f(x) \in \boldsymbol{C}; \|f\|_\infty \equiv \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} |f(x)| < \infty\}.
\end{aligned}
$$

L^p の共役空間 $(L^p)^*$ については次の関係式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&(4.1) & \left(L^1\right)^* &= L^\infty, \\
&(4.2) & (L^p)^* &= L^{p'}, \quad 1 < p < \infty, \quad p' \equiv p/(p-1).
\end{aligned}
$$

この双対関係は次の Hölder の不等式が基礎となってる ：

$$
(4.3) \qquad |(f,g)| \equiv \left|\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\bar{g}(x)dx\right| \le \|f\|_p \|g\|_{p'}
$$

がすべての $f \in L^p, g \in L^{p'}$ に対して成立する。ここで次の事実に注目しよう。

注意 $g \in L^1_{loc}$† とする。

$$
(4.4) \qquad f \cdot g \in L^p \quad \text{が全ての } f \in L^p \text{ に対して成り立つ}
$$

ための必要十分条件は $g \in L^\infty$ である。

上の注意から、関数空間の族 $L^p, 1 \le p \le \infty$ において、各点の積に関して閉じている (すなわち、"代数" となる) ものは、L^∞ に限る。このことから、非線形偏微分方程式の解の L^∞ 評価を得ることが、前節の問題 を解く最初のアプローチとなる。 一方、例 で見たように、(E) における線形作用素 A は Laplace 作用素などの高階の微分作用素である。その 定義域として、必然的に Sobolev 空間 $W^{s,p}$ が導入される。

$$
W^{s,p} = \{f : x \in \boldsymbol{R}^n \to f(x) \in \boldsymbol{C}; \|f\|_{W^{s,p}} \equiv \sum_{|\alpha| \le s} \|D^\alpha f\|_p < \infty\},
$$

‡同関数解析 p.246 定理 7.13, 7.14 を参照

†任意のコンパクト集合 K にたいして$\int_K |g(x)|dx < \infty$.

ここで、$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は多重指数、$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ である。[†]$W^{s,p}$ については、次の埋め込み (Sobblev の埋蔵定理) が知られている。

$$W^{s,p} \subset \begin{cases} L^\infty \cap C^{s-\frac{n}{p}} & s > n/p \text{ のとき} \\ L^{\frac{np}{n-sp}} & 0 < s < n/p \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.5}$$

ここに、C^αは指数 α の Hölder 連続関数の全体を表す。上の埋め込み定理で $s = n/p$ 場合を空間 $W^{s,p}$ における臨界指数という。このとき、$W^{s,p}$ は任意の $p \le r < \infty$ に対して L^r に埋め込まれるが、$r = \infty$ とすることはできない。臨界指数の場合の埋め込みに関しては、新たな空間 BMO (bounded mean oscillation) を導入する必要がある :

定義 4.1 $f \in L^1_{loc}$ が BMO に属するとは、

$$\|f\|_{BMO} \equiv \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx < \infty$$

を満たすことである。ここに、B は $\boldsymbol{R}^n$ における開球を表し、$f_B = \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B f(y)dy$ である。$|B|$ は B の体積。定義式において上限は $\boldsymbol{R}^n$ の全ての開球 B において取る。

定義から明らかに $BMO \subset L^\infty$ である。逆の包含関係は成り立たない。 実際、$f(x) = \log|x|$ は L^∞ には属さないが、BMO の元であることが確かめられる。

さて 双対関係 (4.1) を考慮すれば、BMO の前双対空間は L^1 よりも狭いものであることが分かる。

定義 4.2 (Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$) $\phi \in \mathcal{S}$ [‡], $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\phi(x)dx = 1$ とする。$t > 0$ に対して、$\phi_t(x) = \dfrac{1}{t^n}\phi(x/t)$ と定める。

$$\mathcal{H}^1 \equiv \{f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}; \|f\|_{\mathcal{H}^1} \equiv \int_{\boldsymbol{R}^n}\sup_{t>0}|\phi_t * f(x)|dx < \infty\}$$

により、Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$を定義する。 ここに、$\phi_t * f$ は合成積を表す。

定義から明らかに、$\mathcal{H}^1 \subset L^1$ である。

注意 定義 4.2 は $\phi \in \mathcal{S}$ の取り方に依存しているが、ひつの$\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\phi(x)dx = 1$ なる $\phi \in \mathcal{S}$ に対して、$\|f\|_{\mathcal{H}^1} < \infty$ が成り立てば、実は他の同じ性質をもつ ψ に対しても $\|f\|_{\mathcal{H}^1} < \infty$ が示せ、かつこれらは同値なノルムとなることが知られている。詳細は、Stein [31, Chapter III] を参照されたい。定義式の被積分関数

$$M_\phi f(x) = \sup_{t>0}|\phi_t * f(x)|, \quad x \in \boldsymbol{R}^n$$

[†]非整数 s に対する $W^{s,p}$ の定義に関しては6節で述べる。

[‡]$\mathcal{S}$ は$\boldsymbol{R}^n$ 上の急減少関数全体を表す

を f の最大関数という。

次に BMO, $\mathcal{H}^1$ および Riesz 変換 $R_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-1/2}(j=1,\cdots,n)$ についての諸定理を紹介する。

定理 4.1 (Fefferman-Stein [8])

$$\left(\mathcal{H}^1\right)^* = BMO, \quad (VMO)^* = \mathcal{H}^1$$

ここに、

$$VMO = \left\{ f \in BMO; \lim_{|B|\to\infty} \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx = 0 \right\}.$$

注意 C_0^∞ の BMO-ノルムにおける閉包は VMO に一致する。

定理 4.2 (1)

$$R_j : \begin{cases} \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^1, \\ L^p \to L^p, \quad 1 < p < \infty, \\ BMO \to BMO \end{cases} \tag{4.6}$$

はそれぞれ有界線形作用素である。

(2) (Coifman-Rochberg-Weiss [7]) R_j と関数 b の交換子作用素 $[R_j, b]$ を $[R_j, b]f \equiv R_j(bf) - bR_jf$ で定義する。$1 < p < \infty$ に対して、$[R_j, b]$ が L^p 上の有界線形作用素となるための必要十分条件は $b \in BMO$ である。このとき、

$$C^{-1}\|b\|_{BMO} \le \|[R_j, b]\|_{L^p\to L^p} \le C\|b\|_{BMO}$$

である。ここに、$\|\cdot\|_{L^p\to L^p}$ は作用素ノルムを表す。

(3) $f \in \mathcal{H}^1$ に対して、定義 4.2 のノルム $\|f\|_{\mathcal{H}^1}$ と次式の右辺のノルムは同値である。

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} \cong \|f\|_1 + \sum_{j=1}^n \|R_jf\|_1 \tag{4.7}$$

(3) $f \in \mathcal{H}^1$ のとき、

(i) $\int_B |f|\log(1+|f|)dx < \infty$ がすべての開球 $B \subset \mathbf{R}^n$ に対して成り立つ。

(ii) f の平均はゼロである $: \int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = 0$

(iii) f の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$ に対して、不等式

$$\int_{\mathbf{R}^n_\xi} |\hat{f}(\xi)||\xi|^{-n}d\xi \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

が成り立つ。ここに、C は f に無関係な正定数である。

Hölder の不等式 (4.3) から、$f \in L^p, g \in L^{p'}$ に対して、$f \cdot g \in L^1$ が成り立つ。問題は f, g のどの様な条件下で、$f \cdot g \in \mathcal{H}^1$ となるかである。それに関しては次の定理がある。

定理 4.3 (Coifman-Lions-Meyer-Semmes [6]) $1 < p < \infty$, $B = (B_1, \cdots, B_n) \in L^p$, $E = (E_1, \cdots, E_n) \in L^{p'}$ とする。

$$\operatorname{div} B = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0, \quad \operatorname{rot} E = \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_{1 \le j,k \le n} = 0$$

ならば、$B \cdot E = \sum_{j=1}^{n} B_j \cdot E_j \in \mathcal{H}^1$ であり、

$$\|B \cdot E\|_{\mathcal{H}^1} \le C \|B\|_p \|E\|_{p'}$$

が成り立つ。ここに、$C = C(n, p)$ は B, E に無関係な正定数である。

証明 まず、$f \in L^p, g \in L^{p'}, 1 < p < \infty$ に関して

(4.8) $f \cdot R_j g + (R_j f) \cdot g \in \mathcal{H}^1, \quad \|f \cdot R_j g + (R_j f) \cdot g\|_{\mathcal{H}^1} \le C \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad j = 1, \cdots, n$

が成り立つことを示す。実際、$b, f, g \in C_0^\infty$ に対して部分積分により、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} [R_j, b] f \cdot g dx &= \int_{\mathbf{R}^n} (R_j(bf) - bR_j f) \cdot g dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta)^{-1/2} (bf) - bR_j f \right) \cdot g dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} (-bf \cdot R_j g - b(R_j f) \cdot g) \, dx
\end{aligned}$$

が成り立つ。　故に、Hölder の不等式と定理 4.2 (2) より、

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbf{R}^n} b (f \cdot R_j g + (R_j f) \cdot g) \, dx \right| &\le \|[R_j, b] f\|_p \|g\|_{p'} \\
&\le C \|b\|_{BMO} \|f\|_p \|g\|_{p'}
\end{aligned}$$

C_0^∞ は VMO で dense であり、定理 4.1 より $(VMO)^* = \mathcal{H}^1$ であるから、上式より

$$f \cdot R_j g + (R_j f) \cdot g \in \mathcal{H}^1 \quad \text{かつ} \quad \|f \cdot R_j g + (R_j f) \cdot g\|_{\mathcal{H}^1} \le C \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

がすべての $f, g \in C_0^\infty$ に対して成り立つ。　C_0^∞ はそれぞれ $L^p, L^{p'}$ で dense であるから、結局 (4.8) を得る。

さて、仮定より超関数の意味で $\operatorname{div} B = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$ であるから、部分積分により

$$\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{j=1}^{n} R_j B_j \cdot \phi dx = - \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta)^{-1/2} \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty.$$

従って、

$$\sum_{j=1}^{n} R_j B_j = 0. \tag{4.9}$$

一方、$E \in L^{p'}$, rot $E = 0$ より、$E = \nabla h = \nabla(-\Delta)^{-1/2}(-\Delta)^{1/2} h$ と書ける。ここに、$h \in L^1_{loc}$, $\nabla h \in L^{p'}$. そこで、$f \equiv (-\Delta)^{1/2} h$ と定めれば、$f \in L^{p'}$ かつ $E = (R_1 f, \cdots, R_n f)$ である。更に (4.9) から等式

$$B \cdot E = \sum_{j=1}^{n} B_j \cdot E_j = \sum_{j=1}^{n} B_j R_j f = \sum_{j=1}^{n} (B_j R_j f + f R_j B_j)$$

が成り立つ。上式の右辺に (4.8) を適用すれば結論を得る。 (証明おわり)

定理 4.3 の系 (1) $u = (u_1, \cdots, u_n) \in L^2$, div $u = 0$ であり、$v \in W^{1,2}$ とする。このとき $u \cdot \nabla v \in \mathcal{H}^1$ が成り立つ。

(2) $u = u(x) = (u_1(x), \cdots, u_N(x), u_{N+1}(x)) : \mathbf{R}^n \to S^N$ を $W^{1,2}$ に属する定常調和写像の方程式の弱解とする。すなわち、u は方程式 $-\Delta u = u|\nabla u|^2$ を超関数の意味で満たすとする (前節 例 0.1 参照)。このとき、$-\Delta u \in \mathcal{H}^1$ が成り立つ。

証明 (1) 恒等式 rot $(\nabla v) \equiv 0$ より定理 4.3 よりただちに従う。

(2)

$$-\Delta u_j = u_j \sum_{k=1}^{N+1} \nabla u_k \cdot \nabla u_k, \quad j = 1, \cdots N, N+1 \tag{4.10}$$

である。ここに、$\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $\cdot$ は$\mathbf{R}^n$ の内積を表す。$|u|^2 = \sum_{k=1}^{N+1} u_k^2 = 1$ より、

$$\left(\sum_{k=1}^{N+1} u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \cdots, \sum_{k=1}^{N+1} u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right) = 0$$

これと (4.10) より

$$\begin{aligned} -\Delta u_j &= \sum_{k=1}^{N+1} u_j \nabla u_k \cdot \nabla u_k - \left(\sum_{k=1}^{N+1} u_k \nabla u_k \right) \cdot \nabla u_j \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} (u_j \nabla u_k - u_k \nabla u_j) \cdot \nabla u_k \end{aligned} \tag{4.11}$$

$j = 1, \cdots, N, N+1$ を得る。上式の右辺について さらに調和写像の方程式を用いれば、

$$\begin{aligned} \text{div } (u_j \nabla u_k - u_k \nabla u_j) &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + u_j \Delta u_k - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - u_k \Delta u_j \\ &= u_j \left(u_k |\nabla u|^2 \right) - u_k \left(u_j |\nabla u|^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$|u| = 1$ かつ $\nabla u \in L^2$ より

(4.13) $$u_j \nabla u_k - u_k \nabla u_j \in L^2, \quad j,k = 1,\cdots,N,N+1$$

である。(4.11), (4.12), (4.13) より この定理の (1) の結果を適用すれば、$-\Delta u_j \in \mathcal{H}^1$, $j = 1,\cdots,N,N+1$ を得る。(証明おわり)

上の定理 4.3 の系の応用として、つぎの 2 次元定常調和写像の弱解に関する正則性定理がある。

定理 4.4 (Hélein [14]) $u : \boldsymbol{R}^2 \to S^N$ が $W^{1,2}$ に属する定常調和写像の弱解ならば、$u \in C^\infty$ である。

証明 定常調和写像の方程式は $-\Delta u$ を主要項とし、∇u に関して 2 次の非線形オーダーである半線形楕円型偏微分方程式であるから、$u \in W^{1,2}$ なる弱解が C^∞ であるためには、$u \in C^0(\boldsymbol{R}^n)$ であれば十分である。このことについては、例えば Giaquinta [10, p. 190, Theorem 2.2] を参照されたい。

一方、定理 4.3 の系 (2) より $-\Delta u \in \mathcal{H}^1$ が従う。　故に、定理 4.2 (3)-(iii) を用いれば

$$\hat{u} = \frac{1}{|\xi|^2}\widehat{-\Delta u} \in L^1(\boldsymbol{R}^2_\xi).$$

これより、$u \in C^0(\boldsymbol{R}^2)$ を得る。(証明おわり)

5 BMO 空間における二次形式と Navier-Stokes 方程式

前節の注意において考察した様に、任意の $f \in L^p$ に対して $f \cdot g \in L^p$ なるためには $g \in L^\infty$ なることが必要十分である。　そこで、$g \in BMO$ のときこの性質がどうなるかが問題となる。定理 4.3 による関数積の属する空間 $\mathcal{H}^1$の双対問題として、次の補題があある。

補題 5.1(Kozono-Taniuchi [19]) (1) $f,g \in L^p \cap BMO$, $1 < p < \infty$ とする。このとき $f \cdot g \in L^p$　であり、

(5.1) $$\|f \cdot g\|_p \leq C(\|f\|_p \|g\|_{BMO} + \|f\|_{BMO}\|g\|_p)$$

が成り立つ。

(2) $f,g \in L^p$, $1 < p < \infty$ かつ、$\nabla f, \nabla g \in BMO$ とする。このとき $f \cdot \nabla g \in L^p$ であり、

(5.2) $$\|f \cdot \nabla g\|_p \leq C(\|f\|_p \|\nabla g\|_{BMO} + \|\nabla f\|_{BMO}\|g\|_p)$$

が成り立つ。

(3) $f, g \in W^{m,p} \cap BMO$, $1 < p < \infty$, $m \geq 2$ とする。このとき、多重指数$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ で $|\alpha| = \alpha_1 + \cdot + \alpha_n \geq 1$, $|\beta| = \beta_1 + \cdot + \beta_n \geq 1$ $|\alpha| + |\beta| = m$ なるものに対して、$D^\alpha f \cdot D^\beta g \in L^p$ であり、

$$\|D^\alpha f \cdot D^\beta g\|_p \leq (\|f\|_{BMO} \|(-\Delta)^{\frac{m}{2}} g\|_p + \|(-\Delta)^{\frac{m}{2}} f\|_p \|g\|_{BMO}) \tag{5.3}$$

が成り立つ。

上の補題の応用として Navier-Stokes 方程式 (N-S) の弱解の一意正則性および、時間局所正則解の接続定理が得られる。

定理 5.1(Kozono-Taniuchi [19]) (1) $a \in PL^2$、u を $L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;W^{1,2})$ に属する (N-S) の弱解とする。もし $u \in L^2(0,T;BMO)$ ならば、u は一意であり、かつ $C^\infty(\mathbf{R}^n \times (0,T))$ に属する。

(2) $a \in L^p, p > n$、u を $u \in C([0,T);L^p) \cap C^1((0,T);W^{2,p})$ なる (N-S) の強解とする。もし、

$$\int_0^T \|\text{rot } u(t)\|_{BMO} dt < \infty \tag{5.4}$$

ならば、ある $T' > T$ が存在して u は $C([0,T');L^p) \cap C^1((0,T');W^{2,p})$ に属する (N-S) の強解となる。

定理 5.1(2) の系 (強解の爆発) $a \in L^p$, $p > n$ とする。u を $u \in C([0,T);L^p) \cap C^1((0,T);W^{2,p})$ なる (N-S) の強解とする。T が最大存在時間とすれば、

$$\int_0^T \|\text{rot } u(t)\|_{BMO} dt = \infty \tag{5.5}$$

である。とくに、

$$\limsup_{t \uparrow T} \|\text{rot } (t)\|_{BMO} = \infty$$

である。

定理 5.1 の注意 (1) 定理 5.1 (1) については、定理 1.2 によって $u \in L^s(0,T;L^p)$, $s/2 + n/p = 1$, $n < p \leq \infty$ ならば、弱解 u は一意かつ正則であることが示されている。上の結果は $s = 2$, $p = \infty$ の場合の拡張になっている。

(2) Beale-Kato-Majda [1] は定理 5.1 (2) の形の強解の接続を (N-S) 及び Euler 方程式 (Eu) の両方に関して、条件

$$\int_0^T \|\text{rot } u(t)\|_\infty dt < \infty$$

の下で示している。 その証明の鍵となるのはソレノイダル ・ベクトル場 u に関する次の臨界指数における対数型 Sobolev 不等式である :

$$\|\nabla u\|_\infty \leq C \left(1 + \|\text{rot } u\|_\infty (1 + \log^+ \|u\|_{W^{s+1,p}}) + \|\text{rot } u\|_{L^2}\right), \quad sp > n, \tag{5.6}$$

が $\mathrm{div}\, u = 0$ であるすべての $u \in W^{s+1,p}$, $s > n/p$ に対して成り立つ。ここに、$\log^+ t = \log t$, $t \geq 1$ のとき, $= 0$, $0 < t < 1$ のとき。

定理 5.1 (1) の証明 は定理 4.1 および補題 5.1 (3) を用い、少し長いので原論文 [19] を参照されたい。ここでは、(2) について言及する。

定理 5.1 (2) の証明の概略 (N-S) の場合、初期値 $a \in L^p$, $p > n$ に対する、定理 0.1 の形の強解の局所存在時間 Tは、$T = C/\|a\|_p^{2p/(p-n)}$ と特徴づけられている (Giga [11] および Part I 定理 2.1 の注意参照)。ここに、$C = C(n,p)$ は a に依らない正定数。故に、$[0,T)$ 上の強解 $u(t)$ に対して、$\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_p$ が $\|a\|_p$ および、$\int_0^T \|\mathrm{rot}\ u(\tau)\|_{BMO} d\tau$ で評価できればよい。Duhamel の原理により、$u(t)$ は次の積分方程式を満たす。

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P(u \cdot \nabla u)(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t < T.$$

$\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ は PL^p における縮小半群であり、さらに射影作用素 P は L^p での有界線形作用素であるから、補題 5.1 (2) を適用して

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_p &\leq \|e^{-tA}a\|_p + \int_0^t \|e^{-(t-\tau)A} P(u \cdot \nabla u)(\tau)\|_p d\tau \\ &\leq \|a\|_p + C\int_0^t \|u \cdot \nabla u(\tau)\|_p d\tau \\ &\leq \|a\|_p + C\int_0^t \|u(\tau)\|_p \|\nabla u(\tau)\|_{BMO} d\tau, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

上式に Gronwall の不等式を適用すれば、

$$\|u(t)\|_p \leq \|a\|_p \exp\left(C\int_0^T \|\nabla u(\tau)\|_{BMO} d\tau\right), \quad 0 \leq \forall t < T. \tag{5.7}$$

一方、Biot-Savard の法則より

$$\nabla u = R(R \wedge \mathrm{rot}\ u), \tag{5.8}$$

とかける。ここに、 $R = (R_1, \cdots, R_n)$, $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-1/2}$, $j = 1, \cdots, n$. 故に、Riesz 変換の BMO における有界性 (定理 4.2 (1)) から

$$\|\nabla u\|_{BMO} \leq C\|\mathrm{rot}\ u\|_{BMO} \tag{5.9}$$

が従う。(5.7), (5.9) より、

$$\sup_{0 \leq t < T} \|u(t)\|_p \leq \|a\|_p \exp\left(C\int_0^T \|\mathrm{rot}\ u(\tau)\|_{BMO} d\tau\right)$$

を得る。 (証明の概略おわり)

6 Besov 空間における対数型 Sobolev の不等式

Besov 空間 $B^s_{p,q}$, $s \in \boldsymbol{R}$, $1 \le p, q \le \infty$ および、斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ は斉次 Besov 空間を導入しよう。詳細は Bergh-Löfström [2] を参照されたい。そのためにまず、Littlewood-Paley 分解 $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を想起する。次ぎの性質を満たす関数 $\phi = \phi(\xi) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n_\xi)$ を取る :

$$(6.1) \qquad \mathrm{supp}\phi \subset \{\xi \in \boldsymbol{R}^n; 1/2 \le |\xi| \le 2\}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) \equiv 1 \quad \text{for } \xi \neq 0.$$

証明は Bergh-Löfström [2, Lemma 6.7.1] を見よ。

$\varphi_k = \varphi_k(x), \psi = \psi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n_x)$ を

$$\hat{\varphi}_k(\xi) = \phi(2^{-k}\xi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \quad \hat{\psi}(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)$$

でそれぞれ定義する。明らかに、$\varphi \in \mathcal{S}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \psi \in \mathcal{S}$ であり、$\mathrm{supp}\psi \in \{|\xi| \le 2\}$. (6.1) よりすべての $f \in \mathcal{S}$ にたいして、$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k * f$ が成り立つ。

そこで、$s \in \boldsymbol{R}$, $1 \le p, q \le \infty$ に対して斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ および Besov 空間 $B^s_{p,q}$ を次ぎで定義する。

$$\dot{B}^s_{p,q} \equiv \{f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}; \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^{ks}\|\varphi_k * f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\},$$

$$B^s_{p,q} \equiv \{f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}; \|f\|_{B^s_{p,q}} = \|\psi * f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{ks}\|\varphi_k * f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\}$$

注意 6.1 (1) 大まかに言って、s は f の微分可能性を表す。実際、$1 \le p \le \infty$, $s \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\|(-\Delta)^s \varphi_k * f\|_p \le C 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

が成り立つ。ここに、C は s, k には無関係な正定数である。

(2) $1 < p < \infty$, $s = 0, 1, \cdots$, に対して Sobolev 空間 $W^{s,p}$ を第一節 で定義したが、非整数 $s > 0$ に対しては、$W^{s,p} \equiv B^s_{p,p}$ †と定める。

(3) $s > 0$, $1 \le p, q \le \infty$ のとき、$B^s_{p,q} = L^p \cap \dot{B}^s_{p,q}$ であり、ノルムに関して同値関係

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \cong \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$$

が成り立つ。

---

† 非整数 $s > 0$ に対して、$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{W^{[s],p}} + \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\iint_{R^n \times R^n} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{(s-[s])p+n}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$ とし、$W^{s,p} \equiv \{f : R^n \to C; \|f\|_{W^{s,p}} < \infty\}$ と定義すれば、実は $W^{s,p} = B^s_{p,p}$ が成り立つ。

命題 6.1 (1) $s_1 < s_2$, $1 \le p, q \le \infty$ のとき、$B^{s_2}_{p,q} \subset B^{s_1}_{p,q}$ が成り立つ。

(2) $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$, $s \in \boldsymbol{R}$, $1 \le p \le \infty$ のとき、$B^{s}_{p,q_1} \subset B^{s}_{q,q_2}$ が成り立つ。

(3) $1 \le p \le p_1 \le \infty$, $1 \le q \le q_1 \le \infty$, $s - n/p = s_1 - n/p_1$ のとき、$B^{s}_{p,q} \subset B^{s_1}_{p_1,q_1}$ が成り立つ。

定理 6.1 (Kozono-Ogawa-Taniuchi [21]) $1 < p < \infty$, $s > n/p$, $1 \le q \le \infty$ に対して正定数 $C = C(n,p,s,q)$ が存在して、不等式

$$\|f\|_\infty \le C\left\{1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,r}}\left(1 + \log^+ \|f\|_{B^s_{p,q}}\right)^{\frac{r-1}{r}}\right\} \tag{6.2}$$

がすべての $f \in B^s_{p,q} \cap \dot{B}^0_{\infty,r}$ に対して成り立つ。ここに、$1 \le r \le \infty$ である。

注意 (6.2) において定数 C は r に無関係にとれる。特に、$r = 1$ においてはよく知られた不等式

$$\|f\|_\infty \le C\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}$$

が成り立つ。また、$r = \infty$ のときは、

$$\|f\|_\infty \le C\left\{1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\left(1 + \log^+ \|f\|_{B^s_{p,q}}\right)\right\}$$

が成り立つ。

定理 6.1 の証明 (6.1) より任意の自然数 N に対して恒等式

$$1 = \hat{\psi}(2^{N+1}\xi) + \sum_{k=-N}^{N} \phi(2^{-k}\xi) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi), \quad \xi \neq 0$$

が成り立つ。そこで f を次のように分解する :

$$\begin{aligned} f &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}(2^{N+1}\cdot)) * f + \sum_{k=-N}^{k=N} \varphi_k * f + \sum_{k=N+1}^{\infty} \varphi_k * f \\ &\equiv f_1 + f_2 + f_3 \end{aligned} \tag{6.3}$$

f_1, f_2, f_3 の L^∞- ノルムを評価しよう。先ず f_1 に関しては Hölder の不等式により、

$$\begin{aligned} \|f_1\|_\infty &\le \|\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}(2^{N+1}\cdot)\right)\|_{p'}\|f\|_p \\ &= \left(2^{N+1}\right)^{-\frac{n}{p}}\|\psi\|_{p'}\|f\|_p \\ &= C2^{-\frac{n}{p}\cdot N}\|f\|_p \end{aligned} \tag{6.4}$$

が成り立つ。† ここに $C = C(n,p)$. つぎに、f_2 に関しては、和に対する Hölder の不等式により

$$\|f_2\|_\infty \le \left(\sum_{k=-N}^{k=N} \|\varphi_k * f\|^r_\infty\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=-N}^{k=N}\right)^{\frac{1}{r'}} \le 2N^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,r}} \tag{6.5}$$

† $g \in \mathcal{S}$, $\lambda > 0$ に対して $\|\mathcal{F}^{-1}(g(\lambda\cdot))\|_r = \lambda^{-n(1-\frac{1}{r})}\|\mathcal{F}^{-1}g\|_r$

f_3 の評価に対しては、次の等式に注意する：

$$\varphi_k * f = (\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * \varphi_k * f, \quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

これは $\mathrm{supp}\phi(2^{-k}\cdot) \subset \{\xi \in \boldsymbol{R}^n; 2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}\}$ および (6.1) より従う。 故に $s > n/p$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\|f_3\|_\infty &\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\varphi_k * f\|_\infty \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \|(\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * \varphi_k * f\|_\infty \\
&\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}\|_{p'} \|\varphi_k * f\|_p \\
&\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=-1}^{1} \|\mathcal{F}^{-1}\left(\phi(2^{-(k+l)}\cdot)\right)\|_{p'} \|\varphi_k * f\|_p \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{l=-1}^{1} 2^{(k+l)\frac{n}{p}} \|\mathcal{F}^{-1}\phi\|_{p'}\right) \|\varphi_k * f\|_p \\
&\le C \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{\frac{n}{p}k} \|\varphi_k * f\|_p \\
&\le C \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (2^{\frac{n}{p}k} \cdot 2^{-ks})^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (2^{ks}\|\varphi_k * f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C 2^{(s-\frac{n}{p})N} \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}. \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

ここに $C = C(n, s, p, q)$ である[†]。 (6.4), (6.5)、(6.6) から注意 6.1 (3) を考慮すれば、正定数 $C = C(n, p, s, q)$ が存在して不等式

$$\|f\|_\infty \le C(2^{-\gamma N}\|f\|_{B^s_{p,q}} + N^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,r}}) \tag{6.7}$$

がすべての $f \in B^s_{p,q} \cap \dot{B}^0_{\infty,r}$, $1 \le r \le \infty$ とすべての自然数 N に対して成り立つことが分かる。ここに、$\gamma = \mathrm{Min.}\{n/p, s - n/p\}$ である。上式において 右辺の定数 C は r に無関係にとれることに注意されたい。

$\|f\|_{B^s_{p,q}} \le 1$ のときは (6.7) において $N = 1$ とおけば、

$$\|f\|_\infty \le C(1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,r}}) \tag{6.8}$$

を得る。$\|f\|_{B^s_{p,q}} > 1$ のときは (6.7) の右辺第一項が 1 より小さくなる様に N を選ぶ。すなわち

$$N = \left[\frac{\gamma}{\log 2} \log \|f\|_{B^s_{p,q}}\right] + 1$$

[†]前ページ脚注参照

f_3 の評価に対しては、次の等式に注意する：

$$\varphi_k * f = (\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * \varphi_k * f, \quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

これは $\mathrm{supp}\phi(2^{-k}\cdot) \subset \{\xi \in \boldsymbol{R}^n; 2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}\}$ および (6.1) より従う。 故に $s > n/p$ のとき、

$$\begin{aligned}
\|f_3\|_\infty &\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\varphi_k * f\|_\infty \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \|(\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * \varphi_k * f\|_\infty \\
&\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}\|_{p'} \|\varphi_k * f\|_p \\
&\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=-1}^{1} \|\mathcal{F}^{-1}\left(\phi(2^{-(k+l)}\cdot)\right)\|_{p'} \|\varphi_k * f\|_p \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{l=-1}^{1} 2^{(k+l)\frac{n}{p}} \|\mathcal{F}^{-1}\phi\|_{p'} \right) \|\varphi_k * f\|_p \\
&\le C \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{\frac{n}{p}k} \|\varphi_k * f\|_p \\
&\le C \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (2^{\frac{n}{p}k} \cdot 2^{-ks})^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (2^{ks}\|\varphi_k * f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C 2^{(s-\frac{n}{p})N} \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

ここに $C = C(n,s,p,q)$ である†。 (6.4), (6.5)、(6.6) から注意 6.1 (3) を考慮すれば、正定数 $C = C(n,p,s,q)$ が存在して不等式

$$\|f\|_\infty \le C(2^{-\gamma N}\|f\|_{B^s_{p,q}} + N^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,r}}) \tag{6.7}$$

がすべての $f \in B^s_{p,q} \cap \dot{B}^0_{\infty,r}$, $1 \le r \le \infty$ とすべての自然数 N に対して成り立つことが分かる。ここに、$\gamma = \mathrm{Min.}\{n/p, s - n/p\}$ である。上式において 右辺の定数 C は r に無関係にとれることに注意されたい。

$\|f\|_{B^s_{p,q}} \le 1$ のときは (6.7) において $N = 1$ とおけば、

$$\|f\|_\infty \le C(1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,r}}) \tag{6.8}$$

を得る。$\|f\|_{B^s_{p,q}} > 1$ のときは (6.7) の右辺第一項が 1 より小さくなる様に N を選ぶ。すなわち

$$N = \left[\frac{\gamma}{\log 2} \log \|f\|_{B^s_{p,q}}\right] + 1$$

---

†前ページ脚注参照

さらに定理 6.1 の応用として、Beale-Kato-Majda [1] の結果を含む Euler 方程式 (Eu) の強解の接続定理が得られる。

定理 6.2 $a \in H^{s,p}$, $s > n/p+1$, $u \in C([0,T);H^{s,p}) \cap C^1([0,T);H^{s-1,p})$ を (Eu) の $[0,T)$ 上の解とする。もし

$$\int_0^T \|\mathrm{rot}\ u(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} d\tau < \infty$$

ならば、$T' > T$ が存在して、u は $C([0,T');H^{s,p}) \cap C^1([0,T');H^{s-1,p})$ に属する $[0,T')$ 上の (Eu) の解である。

定理 6.2 の証明の概略 簡単のため、$p=2$, s を $s \geq [n/2]+2$ なる整数として証明する。$1 < p < \infty$, $s > n/p+1$ なる一般の p, s については後述の注意を参照されたい。

$H^s = H^{s,2}$ とおく。定理 0.1 により、解 u の初期値 $a \in H^s$ に対する局所存在時間 T は $\|a\|_{H^s}$ で表すことが出来るから

$$\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_{H^s} \leq C(\|a\|_{H^s}, \int_0^T \|\mathrm{rot}\ u(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} d\tau) \tag{6.14}$$

なる評価を示せば十分である。(Eu) よりあるスカラー関数 η が存在して等式

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla \eta = 0, \quad 0 < t < T$$

が成り立つ。上式の両辺に微分作用素 D^α ($|\alpha| \leq s$) を施せば、

$$\partial_t(D^\alpha u) + u \cdot \nabla D^\alpha u + \nabla D^\alpha \eta = -F_\alpha \tag{6.15}$$

を得る。ここに、$F_\alpha = D^\alpha(u \cdot \nabla u) - u \cdot \nabla D^\alpha u$ である。一方、$s \geq [n/2]+2$ であるから、$H^{s-1} \subset L^\infty$ に注意して、交換子の評価

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_2 \leq C\|f\|_{H^s}\|g\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty \|g\|_{H^{s-1}}, \quad |\alpha| \leq s \tag{6.16}$$

が $f \in H^s$, $g \in H^{s-1}$ に対して成り立つ。(6.16) に $f = u$, $g = \nabla u$ を代入すれば、

$$\|F_\alpha\|_2 \leq C\|u\|_{H^s}\|\nabla u\|_\infty \tag{6.17}$$

が従う。そこで、(6.15) と $D^\alpha u$ との L^2-内積をとれば、Schwarz の不等式と (6.17) より

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D^\alpha u\|_2^2 \leq |(F_\alpha, D^\alpha u)| \leq \|F_\alpha\|_2 \|D^\alpha u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_\infty \|u\|_{H^s}\|D^\alpha u\|_2 \tag{6.18}$$

を得る。ここで、$\mathrm{div}\ u = \mathrm{div}\ v = 0$ なる $u, v \in H^s$ に対する恒等式

$$(u \cdot \nabla v, v) = -(u \cdot \nabla v, v) = 0, \quad (\nabla h, v) = 0$$

を用いた。(6.18) の両辺を $|\alpha| \le s$ に関して和をとれば

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^s} \le C\|\nabla u(t)\|_\infty \|u(t)\|_{H^s}, \quad 0 < t < T$$

が従う。Gronwall の不等式から

$$\|u(t)\|_{H^s} \le \|a\|_{H^s} \exp\left(C\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau\right), \quad 0 < t < T \tag{6.19}$$

を得る。$s-1 > n/2$ であるから $p = q = 2$, $r = \infty$ として定理 6.1 を $\|\nabla u\|_\infty$ の評価に適用すれば、上式より

$$\|u(t)\|_{H^s} \le \|a\|_{H^s} \exp\left\{C\int_0^t \left(1 + \|\nabla u(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \log(e + \|u(\tau)\|_{H^s})\right) d\tau\right\}$$

が成り立つ。$y(t) \equiv \log(e + \|u(t)\|_{H^s})$ とおけば、これより

$$y(t) \le y(0) + C\int_0^t \left(1 + \|\nabla u(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} y(\tau)\right) d\tau, \quad 0 < t < T$$

が従う。再び Gronwall の不等式から

$$y(t) \le y(0) \exp\left\{C\int_0^T \left(1 + \|\nabla u(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\right) d\tau\right\} \tag{6.20}$$

がすべての $t \in [0, T)$ に対して成り立つ。一方、Riesz 変換は $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ 上の有界作用素であるから (Bergh-Löfström [2, p.165, 19], Triebel [33, p.241, Theorem 5.2.2] を参照)、Biot-Sarard の法則による等式 (5.8) より

$$\|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \le C\|\mathrm{rot}\ u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \tag{6.21}$$

である。故に (6.20), (6.21) より

$$y(t) \le y(0) \exp\left\{C\int_0^T \left(1 + \|\mathrm{rot}\ u(\tau)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\right) d\tau\right\} \tag{6.22}$$

がすべての $t \in [0, T)$ に対して成り立つ。 これより (6.14) が従う。（定理 6.2 の証明の概略おわり）

注意 $1 < p < \infty$, $s > n/p + 1$ なる一般の p, s についての定理 6.2 の証明について述べる。(6.19) に対応するものとして Kato-Ponce [16, Proposition 4.2] によって

$$\|u(t)\|_{H^{s,p}} \le \|a\|_{H^{s,p}} \exp\left(C\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau\right), \quad 0 < t < T \tag{6.23}$$

が得られている。これは、分数階の微分における交換子の評価 (6.16) を L^p 空間で確立することにより示される。 次ぎに $\|\nabla u\|_\infty$ の $\|u\|_{H^{s,p}}$ による対数型評価式について考察し

よう。$1 < p \le 2$ のときは 定理 6.1 において $q = 2, r = \infty$ とおく。このとき、埋め込み $H^{s,p} \subset B^s_{p,2}$ により、

$$\|\nabla u\|_\infty \le C\left\{1 + \|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \log(e + \|u\|_{H^{s,p}})\right\} \tag{6.24}$$

が成り立つ。$2 \le p < \infty$ のときは、定理 6.1 において $q = p, r = \infty$ とおく。このときは埋め込み $H^{s,p} \subset B^s_{p,p}$ が成り立ち、やはり (6.24) が正しいことが分かる。以上から上記の証明と同様にして、(6.23), (6.24) 及び (6.21) より (6.22) を得ることができる。

参考文献

[1] Beale, J.T., Kato, T., Majda, A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the $3-D$ Euler equations.* Commu. Math. Phys. **94**, 61–66 (1984).

[2] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation spaces, An introduction.* Berlin-New York-Heidelberg: Springer-Verlag 1976.

[3] Brezis, H., Gallouet, T., *Nonlinear Schrödinger evolution equations.* Nonlinear Anal. TMA 4, 677–681 (1980).

[4] Brezis, H., Wainger, S., *A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities.* Comm. Partial Differential Equations **5**, 773–789 (1980).

[5] Brezis, H., *Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi, "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations".* Arch. Rational Mech. Anal. **128**, 359–360 (1994).

[6] Coifman, R.R., Lions, P.L., Meyer, Y., Semmes, S., *Compensated compactness and Hardy spaces* J. Math. Pures Appl. **72**, 247–286 (1993).

[7] Coifman, R.R., Rochberg, R., Weiss, G., *Factorization theorem for Hardy spaces in several variables.* Ann. Math. **103**, 611–635 (1976).

[8] Fefferman, C., Stein, E.M., *H^p spaces of several variables.* Acta. Math. **129**, 137–193 (1972).

[9] Foias, C., Une remarque sur l'unicité des solutions des equations de Navier-Stokes en dimension n. Bull. Soc. Math. France **89**, 1–8 (1961)

[10] Giaquinta, M., *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Ann. Math. Study **105**, Princeton Univ. Press 1983.

[11] Giga, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system.* J. Differential Eq. **62**, 182–212 (1986).

[12] Giga, Y., *Analyticity of the semigroups generated by the Stokes operator in L_r spaces.* Math. Z. **178**, 297-329 (1981).

[13] Giga, Y., Miyakawa, T., *Solution in L_r of the Navier-Stokes initial value problem.* Arch. Rational Mech. Anal. **89**, 267–281 (1985).

[14] Hélein, F., *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphére.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311**, 519–524 (1990) .

[15] Kato, T., *Strong L^p-solution of the Navier-Stokes equation in $\boldsymbol{R}^m$, with applications to weak solutions.* Math. Z. **187**, 471–480 (1984).

[16] Kato, T., Ponce, G., *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. **41**, 891–907 (1988).

[17] Kozono, H., Sohr, H., *Regularity criterion on weak solutions to the Navier-Stokes equations.* Advances in Differential Equations **2**, 535–554 (1997).

[18] Kozono, H., *Removable singularities of weak solutions to the Navier-Stokes equations.* Communications in Partial Differential Equations **23**, 949–966 (1998).

[19] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations.* Preprint.

[20] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Limiting case of the Sobolev inequality in BMO, with application to the Euler equations.* Preprint.

[21] Kozono, H., Ogawa, T., Taniuchi, Y., *Critical Sobolev inequalities and applications to the semilinear evolution equations.* Preprint.

[22] Leray, J., *Sur le mouvement d'un liquids visqeux emplissant l'espace.* Acta. Math. **63**, 193–248 (1994).

[23] Masuda, K., *Weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Tohoku Math. J. **36**, 623–646 (1984).

[24] 増田 久弥, 非圧縮性粘性流. 数理科学 NO. 263, May ナビエ ·ストークス方程式, 21–24 (1985)

[25] Nečas, J., Ružička, M., Šverák, V., *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations.* Acta Math. **176**, 283–294 (1996)

[26] Neustupa, J., *Partial regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations in the class* $L^\infty(0,T;L^3(\Omega))$. Preprint.

[27] Ozawa, T., *On critical cases of Sobolev's inequalities.* J. Func. Anal. **127**, 259–269 (1995).

[28] 小澤 徹, 非線型シュレディンガー方程式の散乱理論ー故岩崎敷久教授に献ぐー. 数学 **50** 巻, 337–349 (1998)

[29] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **9**, 187–195 (1962).

[30] Serrin, J., *The initial value problem for the Navier-Stokes equations.* Nonlinear Problems, R. E. Langer ed., Madison: University of Wisconsin Press, 69-98 (1963).

[31] Stein, E. M., *Harmonic Analysis.* Princeton University Press 1993.

[32] Taniuchi, Y., *On generalized energy equality of the Navier-Stokes equations.* Manuscripta Math. **94**, 365–384 (1997).

[33] Triebel, H., *Theory of Function Spaces.* Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäser-Verlag 1983.

Classification of the structure of positive radial solutions to a semiliner elliptic equation in the ball and its applications

Hitoshi Myogahara

Graduate School of Science and Technology,

Ryukoku University

In this paper we consider the structure of positive radial solutions to the semilinear elliptic equations

$$\Delta u + Q(|x|)u^p = 0 \ \text{ in } \ B,$$
$$\Delta u + Q(|x|)u^p = 0 \ \text{ in } \ B \setminus \{0\},$$
$$\Delta u + Q(|x|)u^p = 0 \ \text{ in } \ R^n \setminus B,$$

where $B = \{x \in R^n; |x| < 1\}$, $n > 2$, $p > 1$ and $Q(r)$ is a given nonnegative function.

First we treat the first equation in B. Since we are interested in the structure of positive radial solutions, we will study the structure of solutions to the initial value problem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^{n-1}}\{r^{n-1}u_r\}_r + Q(r)u^p = 0, \ r \in (0,1), \\ u(0) = \alpha > 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $r = |x|$.

Under the conditions $Q(r) \in C^1((0,1))$ and $Q(r) \geq 0$ on $(0, 1)$, it is known from the result of [3] that the initial value problem (1) is solvable if and only if $rQ(r) \in L^1(0,1/2)$ (see (i) of Theorem 1). We denote the unique solution by $u(r;\alpha)$. We can classify the solutions according to the following three types. We say that

(i) $u(r;\alpha)$ is a *crossing solution* if $u(r;\alpha)$ has a zero on $(0,1)$,

(ii) $u(r;\alpha)$ is a *singular solution* at $r = 1$ if $u(r;\alpha)$ is positive on $[0,1)$ and $\lim_{r\to 1} u(r;\alpha)/(1-r) = \infty$,

(iii) $u(r;\alpha)$ is a *regular solution* at $r = 1$ if $u(r;\alpha)$ is positive on $[0,1)$ and $\lim_{r\to 1} u(r;\alpha)/(1-r)$ exists and is positive.

Under the conditions

$$\begin{cases} Q(r) \text{ is continuous on } (0,1); \\ Q(r) \geq 0 \text{ and } Q(r) \not\equiv 0 \text{ on } (0,1); \\ rQ(r) \in L^1(0,1/2); \\ (1-r)^p Q(r) \in L^1(1/2,1), \end{cases}$$

we can introduce the functions $G(r)$ and $H(r)$ by

$$G(r) := \frac{1}{p+1}(1-r^{n-2})r^n Q(r) - \frac{n-2}{2}\int_0^r \rho^{n-1}Q(\rho)\,d\rho\ ,$$

$$H(r) := \frac{1}{p+1}(1-r^{n-2})^{p+2} r^{2-(n-2)p} Q(r) - \frac{n-2}{2}\int_r^1 (1-\rho^{n-2})^{p+1} \rho^{1-(n-2)p} Q(\rho)\, d\rho\ .$$

Moreover we define

$$r_G := inf\ \{r \in (0,1);\ G(r) < 0\},$$
$$r_H := sup\ \{r \in (0,1);\ H(r) < 0\}.$$

Here we put $r_G = 1$ if $G(r) \geq 0$ on (0, 1), and $r_H = 0$ if $H(r) \geq 0$ on (0, 1). Thus we note that $0 \leq r_H, r_G \leq 1$ by the definition.

Now we state a structure theorem to (1).

Theorem 1 *Suppose that $Q(r) \in C^1((0,1))$ and $Q(r) \geq 0$ on* (0, 1).

(i) *If $rQ(r) \notin L^1(0,1/2)$, then* (1) *has no solutions with $u \in C^2((0,\delta)) \cap C([0,\delta])$ for some $\delta > 0$.*

(ii) *If $rQ(r) \in L^1(0,1/2)$ and $(1-r)^p Q(r) \notin L^1(1/2,1)$, then structure of solutions of* (1) *is of Type C : $u(r;\alpha)$ is a crossing solution for every $\alpha > 0$.*

(iii) *If*

$$Q(r) = c \cdot r^{\frac{(n-2)p-(n+2)}{2}} (1-r^{n-2})^{-\frac{p+3}{2}}$$

for some $c > 0$, which is equivalent to $G(r) = H(r) \equiv 0$ on (0, 1), *then the structure of solutions of* (1) *is of Type R : $u(r;\alpha)$ is a regular solution at $r = 1$ for every $\alpha > 0$. In fact, the solution is represented by*

$$u(r;\alpha) = \alpha \left\{ 1 + \frac{2\ c\ \alpha^{p-1}}{(p+1)(n-2)^2} \left(\frac{r^{n-2}}{1-r^{n-2}} \right)^{\frac{p-1}{2}} \right\}^{-\frac{2}{p-1}}.$$

(iv) *If $rQ(r) \in L^1(0,1/2)$, $(1-r)^p Q(r) \in L^1(1/2,1)$, $G(r) \not\equiv 0$ on* (0, 1) *and $r_H \leq r_G$, then the structure of solutions of* (1) *is completely classified as follows.*

  (a) *Let $r_G = 1$. Then the structure of solutions is of Type C.*

  (b) *Let $0 = r_H \leq r_G < 1$. Then the structure of solutions is of Type S : $u(r;\alpha)$ is a singular solution at $r = 1$ for every $\alpha > 0$.*

  (c) *Let $0 < r_H \leq r_G < 1$. Then the structure of solutions is of Type M : There exists a positive number α_* such that $u(r;\alpha)$ is a crossing solution for every $\alpha \in (\alpha_*, \infty)$, $u(r;\alpha)$ is a regular solution at $r = 1$ if $\alpha = \alpha_*$, and $u(r;\alpha)$ is a singular solution at $r = 1$ for every $\alpha \in (0,\alpha_*)$.*

(v) *Let a and b be any given numbers with $0 \leq a < b \leq 1$. Then there exists $Q(r)$ with $rQ(r) \in L^1(0,1/2)$, $(1-r)^p Q(r) \in (1/2,1)$, $r_G = a$ and $r_H = b$ such that the structure of solutions of* (1) *is not of Type C, Type S, Type M or Type R.*

Next we investigate the equation in $B \setminus \{0\}$. We will study the structure of solutions to the initial value problem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^{n-1}}\{r^{n-1}u_r\}_r + Q(r)u^p = 0,\ r \in (0,1), \\ u(1) = 0,\ u_r(1) = -\alpha < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Now we state a structure theorem to (2)

Theorem 2 *Suppose that $Q(r) \in C^1((0,1))$ and $Q(r) \geq 0$ on $(0, 1)$.*

(i) *If $(1-r)^p Q(r) \notin L^1(1/2,1)$, then (2) has no solutions with $u \in C^2((\delta,1)) \cap C([\delta,1])$ for some $\delta > 0$.*

(ii) *If $(1-r)^p Q(r) \in L^1(1/2,1)$ and $rQ(r) \notin L^1(0,1/2)$, then structure of solutions of (2) is of Type C : $u(r;\alpha)$ has a zero on $(0, 1)$ for every $\alpha > 0$.*

(iii) *If*

$$Q(r) = c \cdot r^{\frac{(n-2)p-(n+2)}{2}}(1-r^{n-2})^{-\frac{p+3}{2}}$$

for some $c > 0$, which is equivalent to $G(r) = H(r) \equiv 0$ on $(0, 1)$, then the structure of solutions of (2) is of Type R : $u(r;\alpha)$ is positive on $(0, 1]$ and $\lim_{r\to 0} u(r;\alpha) < \infty$ for every $\alpha > 0$.

(iv) *If $rQ(r) \in L^1(0,1/2)$, $(1-r)^p Q(r) \in L^1(1/2,1)$, $G(r) \not\equiv 0$ on $(0,1)$ and $r_H \leq r_G$, then the structure of solutions of (2) is completely classified as follows.*

  (a) *Let $r_G = 0$. Then the structure of solutions is of Type C.*

  (b) *Let $0 < r_H \leq r_G = 1$. Then the structure of solutions is of Type S : $u(r;\alpha)$ is positive on $(0, 1]$ and $\lim_{r\to 0} u(r;\alpha) = \infty$ for every $\alpha > 0$.*

  (c) *Let $0 < r_H \leq r_G < 1$. Then the structure of solutions is of Type M : There exists a positive number α_* such that $u(r;\alpha)$ has a zero on $(0, 1)$ for every $\alpha \in (\alpha_*,\infty)$, $u(r;\alpha)$ is positive on $(0, 1]$ and $\lim_{r\to 0} u(r;\alpha) < \infty$ if $\alpha = \alpha_*$, and $u(r;\alpha)$ is positive on $(0, 1]$ and $\lim_{r\to 0} u(r;\alpha) = \infty$ for every $\alpha \in (0,\alpha_*)$.*

(v) *Let a and b be any given numbers with $0 \leq a < b \leq 1$. Then there exists $Q(r)$ with $rQ(r) \in L^1(0,1/2)$, $(1-r)^p Q(r) \in (1/2,1)$, $r_G = a$ and $r_H = b$ such that the structure of solutions of (2) is not of Type C, Type S, Type M or Type R.*

Finally we investigate the equation in $R^n \setminus B$. We will study the structure of solutions to the initial value problem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^{n-1}}\{r^{n-1}u_r\}_r + Q(r)u^p = 0, \ r \in (1,\infty), \\ u(1) = 0, \ u_r(1) = \alpha > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Under the conditions

$$\begin{cases} Q(r) \text{ is continuous on } (1,\infty); \\ Q(r) \geq 0 \text{ and } Q(r) \not\equiv 0 \text{ on } (1,\infty); \\ (r-1)^p Q(r) \in L^1(1,2); \\ r^{n-1-(n-2)p}Q(r) \in L^1(2,\infty), \end{cases}$$

we can introduce the functions $G^e(r)$ and $H^e(r)$ by

$$G^e(r) := \frac{1}{p+1}(r^{n-2}-1)^{p+2}r^{-n+4-(n-2)p}Q(r) - \frac{n-2}{2}\int_1^r (\rho^{n-2}-1)^{p+1}\rho^{1-(n-2)p}Q(\rho)\,d\rho\,,$$

$$H^e(r) := \frac{1}{p+1}(r^{n-2}-1)r^{-n+4-(n-2)p}Q(r) - \frac{n-2}{2}\int_r^\infty \rho^{1-(n-2)p}Q(\rho)\,d\rho\,.$$

Moreover we define

$$r_{G^e} := inf\ \{r \in (1,\infty);\ G^e(r) < 0\},$$

$$r_{H^e} := sup\ \{r \in (1,\infty);\ H^e(r) < 0\}.$$

Here we put $r_{G^e} = \infty$ if $G^e(r) \geq 0$ on $(1,\infty)$, and $r_{H^e} = 1$ if $H^e(r) \geq 0$ on $(1,\infty)$.

Theorem 3 *Suppose that $Q(r) \in C^1((1,\infty))$ and $Q(r) \geq 0$ on $(1,\infty)$.*

(i) *If $(r-1)^pQ(r) \notin L^1(1,2)$, then (3) has no solutions with $u \in C^2((1,\delta)) \cap C([1,\delta])$ for some $\delta > 0$.*

(ii) *If $(r-1)^pQ(r) \in L^1(1,2)$ and $r^{n-1-(n-2)p}Q(r) \notin L^1(2,\infty)$, then structure of solutions of (3) is of Type C^e : $u(r;\alpha)$ has a zero on $(1,\infty)$ for every $\alpha > 0$.*

(iii) *If*

$$Q(r) = c\cdot r^{n-4+(n-2)p}(r^{n-2}-1)^{-\frac{p+3}{2}}$$

for some $c > 0$, which is equivalent to $G^e = H^e \equiv 0$ on $(1,\infty)$, then the structure of solutions of (3) is of Type R^e : $u(r;\alpha)$ is a rapidly decaying solution, i,e, $u(r;\alpha) > 0$ on $[1,\infty)$ and $\lim_{r\to\infty} r^{n-2}u(r;\alpha) < \infty$, for every $\alpha > 0$.

(iv) *If $(r-1)^pQ(r) \in L^1(1,2)$, $r^{n-1-(n-2)p}Q(r) \in L^1(2,\infty)$, $G^e(r) \not\equiv 0$ on $(1,\infty)$ and $r_{H^e} \leq r_{G^e}$, then the structure of solutions of (3) is completely classified as follows.*

   (a) *Let $r_{G^e} = \infty$. Then the structure of solutions is of Type C^e.*

   (b) *Let $1 = r_{H^e} \leq r_{G^e} < \infty$. Then the structure of solutions is of Type S^e: $u(r;\alpha)$ is a slowly decaying solution, i,e, $u(r;\alpha) > 0$ on $[1,\infty)$ and $\lim_{r\to\infty} r^{n-2}u(r;\alpha) = \infty$, for every $\alpha > 0$.*

   (c) *Let $1 < r_{H^e} \leq r_{G^e} < \infty$. Then the structure of solutions is of Type M^e: There exists a positive number α_* such that $u(r;\alpha)$ has a zero on $(1,\infty)$ for every $\alpha \in (\alpha_*,\infty)$, $u(r;\alpha)$ is positive on $[1,\infty)$ and $\lim_{r\to\infty} r^{n-2}u(r;\alpha) < \infty$ if $\alpha = \alpha_*$, and $u(r;\alpha)$ is positive on $[1,\infty)$ and $\lim_{r\to\infty} r^{n-2}u(r;\alpha) = \infty$ for every $\alpha \in (0,\alpha_*)$.*

(v) *Let a and b be any given numbers with $1 \leq a < b \leq \infty$. Then there exists $Q(r)$ with $(r-1)^pQ(r) \in L^1(1,2)$, $r^{n-1-(n-2)p}Q(r) \notin L^1(2,\infty)$, $r_{G^e} = a$ and $r_{H^e} = b$ such that the structure of solutions of (3) is not of Type C^e, Type S^e, Type M^e or Type R^e.*

As applications, we investigate the structure of solutions to (1) and (3) with the coefficient $Q(r) = r^\sigma|1-r^{n-2}|^{-\tau}$.

First we treat (1). If $\sigma \leq -2$, the initial value problem (1) is not solvable, since $rQ(r) \notin L^1(0,1/2)$. Now we state a structure theorem.

Theorem 4 *Let $Q(r) := r^{\sigma}|1-r^{n-2}|^{-\tau}$. Suppose that $\sigma > -2$, then the structure of solutions of* (1) *is as follows.*
Case 1 : $1 < p < (n+2+2\sigma)/(n-2)$.

(*i*) *If $\tau \geq (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type C.*

(*ii*) *If $\tau < (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type M.*

Case 2 : $p = (n+2+2\sigma)/(n-2)$.

(*i*) *If $\tau > (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type C.*

(*ii*) *If $\tau = (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type R. Moreover the solution is written as*

$$u(r;\alpha) = \alpha\left\{1 + \frac{\alpha^{\frac{2(\sigma+2)}{n-2}}}{(n+\sigma)(n-2)}\left(\frac{r^{n-2}}{1-r^{n-2}}\right)^{\frac{\sigma+2}{n-2}}\right\}^{-\frac{n-2}{\sigma+2}}.$$

(*iii*) *If $\tau < (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type S.*

Case 3 : $p > (n+2+2\sigma)/(n-2)$.

(*i*) *If $\tau \geq p+1$, then $u(r;\alpha)$ is of TypeIf$\tau \leq (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type*

Remark 1. If $\sigma > -2$, $p > (n+2+2\sigma)/(n-2)$ and $(p+3)/2 < \tau < p+1$, then it is hard to determine the structure of soluitons. However, we suspect that the structure of solutions would be of *Type C* by numerical experiments.

For $n = 3$, [1] has obtained existence and non-existence results concerning this equation. We can know that precise information by Theorem 4. Especially, we can know the uniqueness of regular solutions at $r = 1$.

Finally we treat (3). Now we state a structure theorem.

(*ii*) **Theorem 5** *Let $Q(r) := r^{\sigma}|r^{n-2}-1|^{-\tau}$, Then the structure of solutions of* (3) *is as follows.*
Case 1 : $\sigma \leq 2(n-3)$.

(*i*) *If $\tau \geq p+1$, then the initial value problem* (3) *is not solvable.*

(*ii*) *If $(p+3)/2 \leq \tau < p+1$, then $u(r;\alpha)$ is of Type S^e.*

(*iii*) *If $(n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2) < \tau < (p+3)/2$, then $u(r;\alpha)$ is of Type M^e.*

(*iv*) *If $\tau \leq (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, then $u(r;\alpha)$ is of Type C^e.*

Case 2 : $\sigma > 2(n-3)$ *and $\tau \geq p+1$. The initial value problem* (3) *is not solvable.*
Case 3 : $\sigma > 2(n-3)$ *and $(p+3)/2 < \tau < p+1$.*

(*i*) *If $\tau \geq (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, then $u(r;\alpha)$ is of Type S^e.*

(*ii*) *If* $\tau \le (n+\sigma-(n-2)p)/(n-2)$, *then* $u(r;\alpha)$ *is of Type* C^e.

Case 4 : $\sigma > 2(n-3)$ *and* $\tau = (p+3)/2$.

(*i*) *If* $\tau > (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, *then* $u(r;\alpha)$ *is of Type* S^e.

(*ii*) *If* $\tau = (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, *then* $u(r;\alpha)$ *is of Type* R^e. *Moreover the solution is written as*

$$u(r;\alpha) = \frac{\alpha(r^{n-2}-1)}{r^{n-2}}\left\{1+\frac{2\alpha^{\frac{\sigma-2(n-3)}{n-2}}}{(\sigma+2)(n-2)}\left(r^{n-2}-1\right)^{\frac{\sigma-2(n-3)}{2(n-2)}}\right\}^{-\frac{2(n-2)}{\sigma-2(n-3)}}.$$

(*iii*) *If* $\tau < (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, *then* $u(r;\alpha)$ *is of Type* C^e.

Case 5 : $\sigma > 2(n-3)$ *and* $\tau < (p+3)/2$.

(*i*) *If* $\tau > (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, *then* $u(r;\alpha)$ *is of Type* M^e.

(*ii*) *If* $\tau \le (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, *then* $u(r;\alpha)$ *is of Type* C^e.

Remark 2. If $\sigma > 2(n-3)$, $(p+3)/2 < \tau < p+1$ and $(n+\sigma-(n-2)p)/(n-2) < \tau < (n+2+2\sigma-(n-2)p)/2(n-2)$, then it is hard to determine the structure of soluitons. However, we suspect that the structure of solutions would be of *Type* C^e by numerical experiments.

For $\sigma = 0$ or $\tau = 0$ with $Q(r) = r^{\sigma}|r-1|^{-\tau}$, Hashimoto-Otani has obtained some existences and non-existence results concerning this equation.

We have omitted the application of Theorem 2. For details, see Myogahara-Yanagida-Yotsutani [2].

References

[1] S.Hashimoto and M.Otani, Elliptic equations with singularity on the boundary, preprint.

[2] H.Myogahara, E.Yanagida and S.Yotsutani, Classification of the structure of positive radial solutions to a semilinear elliptic equation in the ball and its applications, preprint.

[3] E.Yanagida and S.Yotsutani, Classification of the structure of positive radial solutions to $\Delta u + K(|x|)u^p = 0$ in R^n, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, **24**, (1993), 239-259.

ある退化楕円型方程式の正値解の形状と多重性について*

竹内 慎吾（早大理工）†

1 はじめに

Ω を $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ の有界領域とし，$\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ をその境界とする．次の退化楕円型方程式の境界値問題を考える：

$$(\mathrm{P})_\lambda \begin{cases} \lambda\Delta_p u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0, \not\equiv 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで λ は正のパラメータ，拡散項 Δ_p は p-Laplace 作用素 $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$，反応項 f はロジスティック型：

$$f(u) = u^{q-1}(1 - u^r)$$

とし，定数 p, q, r は $p > 2$, $q \geq 2$, $r > 0$ を満たすものとする．本稿の目的は，退化拡散とロジスティック型の反応との相互作用が解構造にどのような影響を及ぼすかを見ることにある．なお，本稿の諸結果についての詳細は筆者 [15, 16] を，$(\mathrm{P})_\lambda$ を定常問題として持つ放物型方程式については筆者と Yamada [18]，筆者 [13, 14] を，また $(\mathrm{P})_\lambda$ に関連した未解決問題は筆者 [13, 17] を参照されたい．

$(\mathrm{P})_\lambda$ については，$p = q$ のときの研究がいくつかなされている．

$$\lambda_0 = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p dx \Big/ \int_\Omega |u|^p dx \;\Big|\; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$$

---

*This work was partially supported by JSPS Research Fellowships for Japanese Young Scientists.

†E-mail: 697m5041@mn.waseda.ac.jp

とおく．λ_0 はよく知られているように $-\Delta_p$ の Dirichlet 条件下での第一固有値である．$(\mathrm{P})_\lambda$ は $\lambda \geq 1/\lambda_0$ のときは解をもたず，$\lambda < 1/\lambda_0$ のときは解 u_λ を唯一つもつ（例えば Diaz & Saa [2]）．$N=1$ のときは，Guedda & Veron [5] が phase-plane method により u_λ の形状や layer の評価を精密に調べている．特に，十分小さい λ に対しては，解 u_λ に対して flat core とよばれる集合

$$\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(u_\lambda) = \{x \in \Omega; u_\lambda(x) = 1\}$$

が空でないという結果を得ており，線型拡散の場合には見られない現象として興味深い．また Kamin & Veron [6] は [5] の結果を拡張し，一般の N においても λ が十分小さければ $\mathcal{O}_\lambda$ は空でないこと，およびある定数 $C>0$ が存在して，layer は $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq C\lambda^{1/p}$ と評価されることを示している．彼らの証明では，$-\Delta_p$ の λ_0 に対する固有関数を利用して上手い lower solution を構成し，λ に関して解が $u \equiv 1$ にコンパクト一様収束すること（実は有限の λ で $u \equiv 1$ に接着している）が重要である．さらに García-Melián & Sabina de Lis は，Ω が凸の場合（[3]），そして最近，一般の Ω の場合（[4]）において $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim \lambda^{1/p}$ であることを示して [6] の結果をより精密にした．彼らもまた上手い比較関数を構成してこれらのことを証明したわけだが，[6] とは違い一次元での方程式の解を利用して構成しているところが興味深い．

次に $p>q$ の場合だが，$p=q$ の場合とほとんど同様の考察により，任意の $\lambda>0$ に対して解 u_λ が一意に存在し，十分 λ が小さいならば $\mathcal{O}_\lambda$ は空でないこと，および $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim \lambda^{1/p}$ であることが一般の N に対して示される（[3, 4, 18] を参照）．

それでは $p<q$ の場合はどうなっているのであろうか．このときは上で述べた $p \geq q$ の場合とはちと解構造が異なる．次章でそれを見ていこう．

2　$p<q$ の場合

以下では $2<p<q$, $r>0$ とする．

線型拡散 $p=2$ について，Rabinowitz [12] は $N \geq 1$ の場合に，変分法と Leray-Schauder degree との併用により以下の結果を得た：ある $\Lambda>0$ が存在して，$(\mathrm{P})_\lambda$ は $\lambda>\Lambda$ ならば解なし；$\lambda<\Lambda$ ならば少なくとも二つの解をもつ．この結果は，$p \geq q$ の場合に解が一意的であることとは対照的で，反応項の source term u^{q-1} の superlinearity が解の個数にどのような影響を与えるかを知る上で興味深い．なお，$\lambda<\Lambda$ のときのこれら複数の解については，Merle & Peletier [8, 9] によってその λ に関する漸近挙動が調べられている．また Ω が特に球の場合，Ouyang & Shi [10]

は $(P)_\lambda$ の解集合の分岐構造を完全に決定した：ある $\Lambda > 0$ が存在して，$(P)_\lambda$ は $\lambda > \Lambda$ ならば解なし；$\lambda = \Lambda$ ならば一意解；$\lambda < \Lambda$ ならばちょうど二つの解をもつ．このように，線型拡散の場合には様々なことがわかっている．

退化拡散 $p > 2$ については，$N = 1$ の場合に筆者と Yamada [18] が phase-plane analysis を行い，上の Ouyang & Shi のところで述べたものと同じ分岐構造を持つことがわかっている．そして $\lambda > 0$ が十分小さいときの最大解 $\overline{u}_\lambda$ には flat core $\mathcal{O}_\lambda(\overline{u}_\lambda)$ が存在することを示した．続いて $N \geq 2$ のときは筆者 [15] が，[18] で得られた解を基に構成した lower solution を用いて，$p \geq q$ のときの [4] の結果を $p < q$ の場合へと拡張した．内容は以下のようである：

Theorem 2.1 ([15] 最大解の存在). *Let* $2 < p < q$ *and* $r > 0$. *Then there exists* $\Lambda > 0$ *such that*
(i) *if* $\lambda > \Lambda$, *then* $(P)_\lambda$ *has no solution*;
(ii) *if* $\lambda \leq \Lambda$, *then* $(P)_\lambda$ *has a maximal solution* $\overline{u}_\lambda$;
(iii) *if* $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \Lambda$, *then* $\overline{u}_{\lambda_2} \leq \overline{u}_{\lambda_1}$;
(iv) *the mapping* $\lambda \mapsto \overline{u}_\lambda$ *is left-continuous on* $(0, \Lambda]$ *in* $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ *for some* $\beta \in (0, 1)$.

Theorem 2.2 ([15] 最大解の形状). *Let* $2 < p < q$ *and* $r > 0$. *Then there exists* $\lambda^* \in (0, \Lambda]$ *such that*
(i) *if* $\lambda \leq \lambda^*$, *then* $\mathcal{O}_\lambda$ *is nonempty*;
(ii) *if* $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda^*$, *then* $\mathcal{O}_{\lambda_2} \subset \mathcal{O}_{\lambda_1}$;
(iii) *for sufficiently small* $\varepsilon > 0$, *there exists* $\lambda \leq \lambda^*$ *such that* $\{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \varepsilon\} \subset \mathcal{O}_\lambda$.
Furthermore, $\mathcal{O}_\lambda$ *satisfies*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1/p} \mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_0^1 (F(1) - F(s))^{-1/p} ds,$$

where $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

次に $(P)_\lambda$ の解の多重存在について述べたい．[15] では $\overline{u}_\lambda$ 以外の解の存在が区間 $(0, \eta)$（$\eta < \Lambda$ はある定数）において示されており，対応する汎関数

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{p}\|\nabla u\|_p^p - \int_\Omega \overline{F}(u)dx$$

（ここで $\overline{F}(u) := \int_0^u \overline{f}(s)ds$ かつ $\overline{f}(s) := f(s)$ in $[0, \xi]$；$= 0$ in $(-\infty, 0)$；$= f(\xi)$ in $(\xi, +\infty)$，$\xi > 1$ は勝手な定数[1]）に対して通常の Mountain pass theorem を適用し

[1] [15] では $\xi = 1$ としてあるが，本稿では便宜上 $\xi > 1$ としておく．

ている．その際，十分小さい $\lambda > 0$ に対して $0 = \Phi(0) > \Phi(\overline{u}_\lambda)$（すなわち $u = 0$ を基点としている）となることを用いているが，ここで 0 を基点としたことが，証明可能な存在範囲を狭めてしまっていた．[10, 12, 18] の結果から推測されるように実際は恐らく $\eta = \Lambda$ であり，それを示すためには $\overline{u}_\lambda$ を基点とするのが自然である．しかしながら，$\overline{u}_\lambda$ が Φ の（$W_0^{1,p}$ での）local minimizer になることを示すのは（少なくとも私には）困難であった．

今回，Brézis & Nirenberg [1] のアイデアと Lieberman [7] の正則性の結果に基づき，区間 $(0, \Lambda)$（これは Theorem 2.1 (i) により解の最大存在範囲である）における二つ目の解の存在を証明することが出来た．証明の方針は，$\overline{u}_\lambda$ が C^1 で孤立した解である場合のみを考えればよいことに注意し[2]，まずその場合には $\overline{u}_\lambda$ が C^1 における Φ の local minimizer になっていること，次に実はそれが $W^{1,p}$ においても local minimizer になっていることを示し，Pucci & Serrin によって拡張された Mountain pass theorem [11] を用いる．なお，証明の後半は [1] の $W^{1,p}$ への部分的な拡張になっている．

Theorem 2.3 (**[16] 最大解とは異なる解の存在**)**.** *Let* $2 < p < q$ *and* $r > 0$*. For any* $\lambda \in (0, \Lambda)$*,* $(\mathrm{P})_\lambda$ *has another solution* $u_\lambda \le \overline{u}_\lambda$*,* $\not\equiv \overline{u}_\lambda$*.*

参考文献

[1] H. Brézis and L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), 465–472.

[2] J. I. Diaz and J. E. Saa, *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 521–524.

[3] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, *The behaviour of stationary solutions to some nonlinear diffusion problems*, Nonlinear Anal. (Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts) **30:8** (1997), 5499–5504.

[4] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, *Stationary profiles of degenerate problems when a parameter is large*, Differential Integral Equations (to appear).

[2] そうでなければ，それはもうひとつ解が存在するということになる．

[5] M. Guedda and L. Véron, *Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 419–431.

[6] S. Kamin and L. Véron, *Flat core properties associated to the p-Laplace operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 1079–1085.

[7] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1203–1219.

[8] F. Merle and L. A. Peletier, *Asymptotic behaviour of positive solutions of elliptic equations with critical and supercritical growth I. The radial case*, Arch. Rational Mech. Anal. **112** (1990), 1–19.

[9] F. Merle and L. A. Peletier, *Asymptotic behaviour of positive solutions of elliptic equations with critical and supercritical growth II. The nonradial case*, J. Funct. Anal. **105** (1992), 1–41.

[10] T. Ouyang and J. Shi, *Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problems*, J. Differential Equations **146** (1998), 121–156.

[11] P. Pucci and J. Serrin, *Extensions of the mountain pass theorem*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 185–210.

[12] P. H. Rabinowitz, *Pairs of positive solutions of nonlinear elliptic partial differential equations*, Indiana Math. J. **23** (1973), 172–185.

[13] S. Takeuchi, *Remarks on a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian*, 非線形発展方程式とその応用, 京都大学数理解析研究所講究録 **1061** (1998), 27–42.

[14] S. Takeuchi, *Behavior of solutions near the flat hats of stationary solutions for a degenerate parabolic equation*, SIAM J. Math. Anal. (to appear).

[15] S. Takeuchi, *Positive solutions of a degenerate elliptic equation with logistic reaction*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[16] S. Takeuchi, *Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction*, submitted.

[17] S. Takeuchi, *Degenerate elliptic equation with logistic reaction*, 変分問題とその周辺, 京都大学数理解析研究所講究録 (to appear).

[18] S. Takeuchi and Y. Yamada, *Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian*, Nonlinear Anal. (to appear).

劣微分作用素に支配された非線形発展方程式の時間依存アトラクターについて

山崎教昭　(千葉大・教育)

§1. 序

実ヒルベルト空間 H 上の適正下半連続凸関数 φ^t の劣微分作用素に支配される非線形発展方程式

$$u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t, u(t)) \ni f(t) \quad \text{in } H, \quad t \in R, \tag{1.1}$$

を考察する。ここで、$\partial\varphi^t$ は φ^t の劣微分作用素で、$g(t,\cdot)$ は $D(g(t,\cdot))(\subset H)$ から H への時間依存する一価作用素で、$f \in L^2_{loc}(R;H)$ である。

本稿では、$\varphi^t(u(t))$, $g(t,\cdot)$, $f(t)$ にある種の有界性を仮定するとき、(1.1) の大域的有界な解の存在を示すとともに、(1.1) の初期値問題の解の漸近挙動を大域的アトラクターの立場から考察する。

本稿を通じて、H を実ヒルベルト空間としその内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)_H$, $|\cdot|_H$ で表す。

§ 2. 仮定

以下の条件を仮定する。

定義 2.1. 以下の条件を満たす適正下半連続凸関数の族 $\{\varphi^t\}_{t\in R}$ の全体を $\Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ とする：

(Φ1) 任意の時間 $t \in R$ に対し、φ^t は H 上の適正下半連続凸関数である。

(Φ2) 任意の定数 $k > 0$ に対し、

レベル集合 $\{z \in H; |z|_H^2 + \varphi^t(z) \le k\}$ が H でコンパクトである。

(Φ3) 任意の定数 $r > 0$、任意の時間 s, $t \in R$ と $z \in D(\varphi^s)$ with $|z|_H \le r$ に対し、

$$|\tilde{z} - z|_H \le |a_r(t) - a_r(s)|(1 + |\varphi^s(z)|^{\frac{1}{2}}),$$

$$\varphi^t(\tilde{z}) - \varphi^s(z) \le |b_r(t) - b_r(s)|(1 + |\varphi^s(z)|)$$

を満たす $\tilde{z} \in D(\varphi^t)$ が存在する。ここで $\{a_r\} := \{a_r; r > 0\}$ と $\{b_r\} := \{b_r; r > 0\}$ は、それぞれ $W^{1,2}_{loc}(R)$ と $W^{1,1}_{loc}(R)$ の実数値関数族で

$$\sup_{t\in R} |a_r'|_{L^2(t,t+1)} + \sup_{t\in R} |b_r'|_{L^1(t,t+1)} < +\infty \quad \text{for each } r \ge 0$$

を満たす。

(Φ4) ある正定数 $M_0 > 0$ が存在して、

$$L_{M_0}(t) := \{z \in D(\varphi^t); |z|_H \le M_0,\ \varphi^t(z) \le M_0\} \ne \emptyset, \quad \forall t \in R$$

を満たす。

定義 2.2. 以下の条件を満たす時間依存摂動項 $g(t,\cdot) : D(g(t,\cdot)) \subset H \to H$ の族 $\{g(t,\cdot)\}$ の全体を $\mathcal{G}(\{\varphi^t\})$ とする：

(g1) $D(\varphi^t) \subset D(g(t,\cdot)) \subset H$ for all $t \in R$、そして任意の区間 $J \subset R$ と $v \in L^2_{loc}(J;H)$ with $v(t) \in D(\varphi^t)$ for a.e. $t \in J$ に対し、

$$g(\cdot, v(\cdot)) \text{ は (強) 可測 on } J$$

である。

(g2) 不等式

$$|g(t,z)|_H^2 \le c_0\varphi^t(z) + c_1|z|_H^2 + c_2, \quad \forall t \in R,\ \forall z \in D(\varphi^t)$$

を満たす正定数 c_0, c_1 , c_2 が存在する。

(g3) $\{t_n\} \subset R$, $\{z_n\} \subset H$, $t_n \to t$ $(-\infty < t < +\infty)$, $z_n \to z$ in H (as $n \to +\infty$) そして $\{\varphi^{t_n}(z_n)\}$ が有界ならば、そのとき

$$g(t_n, z_n) \to g(t,z) \text{ weakly in } H, \quad \text{as } n \to +\infty$$

である。

(g4) 任意の定数 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|(g(t,z_1) - g(t,z_2), z_1 - z_2)_H| \le \varepsilon(z_1^* - z_2^*, z_1 - z_2)_H + C_\varepsilon|z_1 - z_2|_H^2,$$

$$\forall t \in R,\ \forall z_i \in D(\varphi^t),\ \forall z_i^* \in \partial\varphi^t(z_i),\ i = 1,2.$$

となる正定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在する。

(g5) 任意の有界集合 $B \subset H$ に対し、

$$\varphi^t(z) + (g(t,z), z - b)_H \ge C_0(B)|z|_H^2 - C_1(B), \quad \forall t \in R,\ \forall z \in D(\varphi^t),\ \forall b \in B$$

となる正定数 $C_0(B)$ と $C_1(B)$ が存在する。

§ 3．大域的有界な解の存在性

この節では、$\{\varphi^t\}_{t\in R} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$, $\{g(t,\cdot)\} \in \mathcal{G}(\{\varphi^t\})$ に対し、実ヒルベルト空間 H 上の適正下半連続凸関数 φ^t の劣微分作用素 $\partial\varphi^t(\cdot)$ に支配される有界力学系

$$\text{(E)} \quad u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t,u(t)) \ni f(t) \quad \text{in } H, \quad t \in R$$

の大域的有界な解の存在性について考察する。

定義 3.1. (i) 任意のコンパクト区間 $J := [t_0, t_1] \subset R$ に対し、関数 $u : J \to H$ が (E) の解であるとは、$u \in C(J;H) \cap W^{1,2}_{loc}((t_0,t_1];H)$, $\varphi^{(\cdot)}(u(\cdot)) \in L^1(J)$, $u(t) \in D(\partial\varphi^t)$ for a.e. $t \in J$, そして

$$f(t) - g(t,u(t)) - u'(t) \in \partial\varphi^t(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in J$$

を満たすときをいう。

(ii) 任意の区間 $J \subset R$ に対し、$u : J \to H$ が (E) の解であるとは、u が J の任意のコンパクト部分区間上で (E) の解であるときをいう。

定理 3.1. $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$, $\{g(t,\cdot)\} \in \mathcal{G}(\{\varphi^t\})$ とする。また $f \in L^2_{loc}(R;H)$ が

$$S_f := \sup_{t \in R} |f|_{L^2(t,t+1;H)} < +\infty$$

を満たすとする。このとき、*(E)* は大域的に有界な解を持つ。

定理 3.1 の存在定理により、(E) の解作用素を定義することができる。

定義 3.1. 任意の $-\infty < s \le t < +\infty$ に対し、$E(t,s)$ は $\overline{D(\varphi^s)}$ から $\overline{D(\varphi^t)}$ への写像で、初期値 $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$ に対し $u(t) \in \overline{D(\varphi^t)}$ を対応させる。ここで、u は初期値 $u(s) = u_0$ である (E) の解である。

このとき、解作用素 $\{E(t,s)\} := \{E(t,s);\ -\infty < s \le t < +\infty\}$ が次の性質を持つことがわかる：

(E1) $E(s,s) = I \quad \text{in } \overline{D(\varphi^s)} \quad$ for any $s \in R$.

(E2) $E(t_2,s) = E(t_2,t_1) \circ E(t_1,s) \quad$ for any $-\infty < s \le t_1 \le t_2 < +\infty$.

(E3) もし $-\infty < s_n \le t_n < +\infty$, $s_n \to s$, $t_n \to t$ $(-\infty < s \le t < +\infty)$, $z_n \in \overline{D(\varphi^{s_n})}$ そして $z_n \to z$ in H ならば、そのとき

$$E(t_n,s_n)z_n \longrightarrow E(t,s)z \text{ in } H \text{ as } n \to +\infty$$

となる。

§ 4. 時間依存大域的アトラクターとその特徴づけ

本節では、有界力学系 (E) の漸近安定性を大域的アトラクターの立場から考察する。しかし、我々の有界力学系 (E) には [2, 5] に代表される力学系のアトラクターの一般論が適用できない。なぜなら、有界力学系 (E) の有効領域 $D(\varphi^t)$ が時間とともに変化しているからである。従って我々は、定義 3.1 で定義された発展作用素に対するアトラクターの定義・概念を構築する必要がある。

そこで時間依存定義域を持つ発展作用素 $\{E(t,s)\}$ に対する時間依存大域的アトラクターについて議論する。そしてそれは、従来のアトラクターの概念 [1, 2, 5] の拡張になっている。

まず時間 $t \in R$ を固定したときの、発展作用素 $\{E(t,s)\}$ の attracting set や ω-limit set を定義する。

定義 4.1. (i) 任意の $t \in R$ を固定する。このとき、$K(t) \subset H$ が時間 t における attracting set であるとは、任意の有界部分集合 $B \subset H$ に対し、

$$\mathrm{dist}_H(E(t,s)(B \cap \overline{D(\varphi^s)}), K(t)) \longrightarrow 0 \qquad \text{as } s \to -\infty$$

となるときをいう。ここで、H の部分集合 A, B に対し、

$$\mathrm{dist}_H(A,B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} |x-y|_H$$

とする。

(ii) 任意の有界部分集合 $B \subset H$ に対し、

$$\omega(B,t) := \bigcap_{T<t} \overline{\bigcup_{s<T} E(t,s)(B \cap \overline{D(\varphi^s)})}$$

を時間 t における ω-limit set とよぶ。

Remark $x \in \omega(B,t)$ であることと、次の条件 $(\star)$ は必要十分である：

$(\star)$ There exist sequences $\{x_n\} \subset H; x_n \in \overline{D(\varphi^{s_n})} \cap B$ and $\{s_n\} \subset R$ such that $s_n \to -\infty$ and

$$E(t,s_n)x_n \to x \text{ in } X \qquad \text{as } n \to +\infty.$$

次の定理は、有界力学系 (E) に対する時間依存アトラクター $\mathcal{A}(t)$ の存在定理で、それは [1] の時間依存アトラクターの概念を拡張したものである。

定理 4.1. $\{E(t,s)\}$ を定義 *3.* 1 で定義された発展作用素とする。そのとき、任意の時間 $t \in R$ に対し、次を満たす集合 $\mathcal{A}(t)(\subset H)$ が存在する：

(i) $\mathcal{A}(t)$ は、H の空でないコンパクト集合である。

(ii) それぞれの有界部分集合 $B(\subset H)$ と正定数 $\epsilon > 0$ に対し、ある有限時間 $s_{t,B,\epsilon} \in R$ が存在して、

$$dist_H(E(t,s)z, \mathcal{A}(t)) < \epsilon, \qquad \forall z \in \overline{D(\varphi^s)} \cap B,\ \forall s \le s_{t,B,\epsilon}$$

を満たす。

(iii) 集合 $\mathcal{A}(t)$ は、

$$E(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t), \quad \forall s,\ t \in R \text{ with } s \le t$$

という不変性を持っている。

証明. 任意の時間 $t \in R$ を固定する。このとき、仮定 ($\Phi 2$) と (g5) から、時間 $t \in R$ での compact attracting set $K(t)$ が存在することがわかる。従って、集合 $\mathcal{A}(t)$ を

$$\mathcal{A}(t) := \overline{\bigcup_{B \subset \mathcal{B}} \omega(B,t)}$$

で定義すればよい。ここで、$\mathcal{B} := \{B \subset H; B \text{ is bounded in } H\}$ である。 $\diamondsuit$

次に、定理 4.1 で得られたアトラクターの特徴付けをするため、次の族を考える。

定義 4.2. (i) (E) の global bounded solution の族を $\mathcal{K}$ と定義する。つまり、

$$\mathcal{K} := \left\{ u; \begin{array}{c} u \text{ is a global solution for (E) and} \\ \text{there exists a positive constant } C_u \text{ such that} \\ \sup_{t \in R} |u(t)|_H \le C_u \end{array} \right\}.$$

(ii) 任意の時間 $t \in R$ に対し、global bounded solution の族 $\mathcal{K}$ の時間 t での切り口を $\mathcal{K}(t)$ とする。つまり、

$$\mathcal{K}(t) := \{u(t);\ u \in \mathcal{K}\}.$$

次の定理は、定理 4.1 で得られた時間依存アトラクター $\mathcal{A}(t)$ の特徴付けである。

定理 4.2. それぞれの時間 $t \in R$ に対し、$\mathcal{A}(t)$ を定理 *4.2* で得られた $t \in R$ でのアトラクターとする。このとき、$\mathcal{A}(t)$ は $\mathcal{K}(t)$ と一致する、つまり、

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{K}(t)$$

となる。

§ 5. 相転移問題への応用

本節では、絶対温度 $\theta = \theta(t,x)$ と物質の相の状態を表す order parameter $w = w(t,x)$ に支配される Penrose-Fife タイプの相転移モデル (PFC) を考察する。

$$\text{(PFC)} \begin{cases} [\theta + \lambda(t,x,w)]_t - \Delta\left(-\dfrac{1}{\theta} + \mu\theta\right) = q(t,x) \quad \text{in } Q := R \times \Omega, \\ w_t - \kappa\Delta w + \beta(w) + \sigma(w) + \dfrac{\lambda_w(t,x,w)}{\theta} \ni 0 \quad \text{in } Q, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left(-\dfrac{1}{\theta} + \mu\theta\right) + n_0\left(-\dfrac{1}{\theta} + \mu\theta\right) = h(t,x) \quad \text{on } \Sigma := R \times \Gamma, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

ここで、Ω は $R^N (1 \le N \le 3)$ の有界領域で滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つものとし、$\beta(\cdot)$ は $R \times R$ の maximal monotone graph である。また、n_0, κ, μ は正の定数で、q, h は与えられた関数とする。

ここでは、次のような有界性を仮定して、この相転移モデルの有界力学系を考察する。

- λ は $R\times R^N\times R$ 上の滑らかな関数で、それぞれの $(t,x)\in R\times R^N$ に対し $\lambda(t,x,w)$ は $w\in R$ に関して凸である。;
- λ とその偏微分 $\lambda_w := \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}$, $\lambda_t := \dfrac{\partial\lambda}{\partial t}$ は $R\times\overline{\Omega}\times[-1,1]$ 上で有界である、つまり、

$$L_\lambda := \sup\left\{|\lambda(t,x,w)| + |\lambda_w(t,x,w)| + |\lambda_t(t,x,w)|;\ \begin{matrix} x\in\overline{\Omega},\ t\in R \\ |w|\le 1 \end{matrix}\right\} < +\infty;$$

- $q\in L^2_{loc}(R;L^2(\Omega))$, $h\in L^2_{loc}(R;L^2(\Gamma))$ such that

$$\sup_{t\in R}|q|_{L^2(t,t+1;L^2(\Omega))} + \sup_{t\in R}|h|_{L^2(t,t+1;L^2(\Gamma))} < +\infty.$$

さて、[4] と同様に相転移モデル (PFC) は非線形発展方程式 (E) に変形されることがわかる。従って定理 3.1、4.1、4.2 を適用することにより、相転移モデル (PFC) の有界力学系に対し、

- 大域的有界な解の存在性
- 時間 $t\in R$ での大域的アトラクター $\mathcal{A}(t)$ の存在性
- 大域的有界な解の族の切り口は $\mathcal{A}(t)$ と一致する

ことがわかる。

参考文献

1. H. Crauel, A. Debussche and F. Flandoli, Random attractors, *J. Dynamics and Differential Equations*, **9**(1997), 307-341.
2. J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988.
3. A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Time-dependent attractors of bounded dynamical systems generated by subdifferentials, Communications in Applied Analysis. (to appear)
4. K. Shirakawa, A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Asymptotic stability for evolution equations governed by subdifferentials, pp. 287-310, in *Recent Developments in Domain Decomposition Methods and Flow Problems*, GAKUTO Intern. Ser. Math. Appl., vol 11, Gakkotosho, Tokyo, (1998).
5. R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
6. N. Yamazaki, Attractors of Dynamical Systems Generated by Time-Dependent Subdifferentials, Thesis, Chiba Univ., 1999.

Stability of stationary solutions to the half-space problem for the discrete Boltzmann equation with multiple collisions

Yoshiko Nikkuni

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1. Introduction

This note is a summary of the joint work [14] with Prof. Shuichi Kawashima, Kyushu University.

The aim of this paper is to investigate the asymptotic stability of stationary solutions to the initial-boundary value problem for a general class of the discrete Boltzmann equation with multiple collisions.

We consider the following initial-boundary value problem in the one-dimensional half-space $x > 0$:

$$(1)\begin{cases} \partial_t F + V\partial_x F = Q(F), \quad x > 0, \quad t > 0, & (1)_1 \\ F^+(0,t) = B^+, \quad t > 0, & (1)_2 \\ F(x,0) = F_0(x), \quad x > 0. & (1)_3 \end{cases}$$

Here $F = (F_i)_{i\in\Lambda}$ is the unknown function of the problem, $V = diag(v_i)_{i\in\Lambda}$; $\Lambda = \{1,\dots,m\}$ is a finite set and $\Lambda_+ := \{i \in \Lambda; v_i > 0\}$, $\Lambda_- := \{i \in \Lambda; v_i < 0\}$, $\Lambda_0 := \{i \in \Lambda; v_i = 0\}$, each v_i is a real constant and denotes the x-component of the i-th velocity. Each $F_i = F_i(x,t)$ denotes the mass density of gas particles with the velocity v_i at time t and position x. Put $F^\pm = (F_i)_{i\in\Lambda_\pm}$, $B^+ = (B_i)_{i\in\Lambda_+}$ with B_i being positive constants. The collision term $Q_i(F)$ in the multiple collision case is written as

$$(2) \qquad Q_i(F) = \sum_{p=2}^{r} Q_i^p(F), \quad i \in \Lambda,$$

where each $Q_i^p(F)$ is called the p-th order collision term and is a homogeneous polynomial of degree p with respect to $F = (F_i)_{i\in\Lambda}$. In this paper we consider the case where the initial function $F_0(x)$ satisfies $F_0 - M \in H^1(0,\infty)$ for a given constant Maxwellian M so that

$$(3) \qquad F_o(x) \to M \quad as \quad x \to \infty.$$

Here the Maxwellian $M = (M_i)_{i\in\Lambda}$ is defined as an equilibrium of the collision term $Q(F)$, i.e., $Q(M) = 0$ and $M_i > 0$ for $i \in \Lambda$.

The stationary problem corresponding to the above problem (1) for $F_0(x)$ satisfying (3) is

$$(4)\begin{cases} V\partial_x F^\infty = Q(F^\infty), \quad x > 0, \\ F^{\infty+}(0) = B^+, \end{cases}$$

$$(5) \qquad F^\infty(x) \to M \quad as \quad x \to \infty.$$

The stationary half-space problem (4)-(5) has been studied recently in [11,16] (see also [2]). These papers have proved the existence and uniqueness of solutions near the Maxwellian M in (5) under the smallness condition on $|B^+ - M^+|$. The result obtained in [11] is an improvement on the result in [16]. On the other hand, the nonstationary problem (1) was discussed in [6]. It was proved there that the problem admits a unique global-in-time solution without any restriction on the size of the data $F_0(x)$ and B^+. This paper is, therefore, to prove the convergence for $t \to \infty$ of the global solution obtained in [6] toward the stationary solution constructed in [11,16], when $F_0(x) - M$ is suitably small in $H^1(0,\infty)$. Such a stability result has been established in [13] for the Cabannes model with 14 velocities. We are to generalize that result to the general models described by the equation $(1)_1$.

2. Main result

To show a stability result, we assume that $(1)_1$ verifies the following stability condition (see [15]):

Assumption (stability condition).

$$(6) \qquad \textit{Let } \phi \in \mathcal{M} \textit{ and } V\phi = \lambda\phi \textit{ for } \lambda \in \mathbf{R}. \textit{ Then } \phi = 0.$$

Here, $\mathcal{M}$ consists of vectors $\phi = (\phi_i)_{i\in\Lambda}$ which are orthogonal to the collision term $Q(F)$, that is,

$$\mathcal{M} = \{\phi \in \mathbf{R}^m; < \phi, Q(F) >= 0 \quad for \ any \ F \in \mathbf{R}^m\},$$

where $<,>$ denotes the standard inner product in $\mathbf{R}^m$.

Concerning the stationary solution $F^\infty(x)$ of the problem (4)-(5) constructed in [11,16], we have the following property (see [11]):

Remark. *The solution $F^\infty(x)$ is in $C^\infty[0,\infty)$ and verifies the estimate*

$$(7) \qquad |\partial_x^j(F^\infty(x) - M)| \le C|\varepsilon|e^{-\sigma x}, \quad x > 0, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

with a positive constant C, where σ is some positive constant and

$$|\varepsilon| := \sum_{i\in\Lambda_+} |B_i - M_i|.$$

Then our main result is

Theorem. *Suppose that the stability condition (6) holds. Let M be a constant Maxwellian and assume that $F_0 - M \in H^1(0,\infty)$. Moreover, we assume that $F_0(x)$ satisfies the compatibility condition: $F_0^+(0) = B^+$. Let $F^\infty(x)$ be the unique stationary* *solution of the problem (4)-(5) satisfying (7) under the assumption in Kawashima-Nishibata [11]. Then there exists a positive constant* δ_0 *such that if* $\|F_0 - M\|_1 \le \delta_0$, *then the problem (1) has a unique global solution* $F(x,t)$ *satisfying*

$$F - M \in C^0([0,\infty); H^1(0,\infty)) \cap C^1([0,\infty); L^2(0,\infty)).$$

Furthermore, the solution $F(x,t)$ *converges uniformly in* $x \ge 0$ *to the corresponding stationary solution* $F^\infty(x)$ *as* $t \to \infty$, *i.e.,*

$$\sup_{x\ge 0} |F(x,t) - F^\infty(x)| \to 0 \quad as \quad t \to \infty. \tag{8}$$

3. Outline of the proof of Theorem

In order to prove the above theorem, it is convenient to reformulate our problem (1) by introducing a new unknown f as a perturbation from the stationary solution $F^\infty(x)$. Let us seek the solution $F(x,t)$ in the form

$$F = F^\infty + I_M f, \tag{9}$$

where $I_M = diag(M_i)_{i\in\Lambda}$. We substitute (9) in (1). Then the problem (1) is transformed into

$$(10)\begin{cases} I_M(\partial_t f + V\partial_x f) = Q(F) - Q(F^\infty), \quad x > 0, \quad t > 0, & (10)_1 \\ f^+(0,t) = 0, \quad t > 0, & (10)_2 \\ f(x,0) = f_0(x), \quad x > 0, & (10)_3 \end{cases}$$

where $f_0(x) = I_M{}^{-1}(F_0(x) - F^\infty(x))$.

Now we shall show the a priori estimate of solutions to the transformed problem (10), which plays an essential role in the proof of Theorem.

Proposition. *Suppose that the stability condition (6) holds and let* M *be a constant Maxwellian. Let* $T > 0$ *and let* $f(x,t)$ *be a solution to the problem (10), which satisfies*

$$f \in C^0([0,T]; H^1(0,\infty)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,\infty)).$$

Then there exist positive constants δ_1 *and* $C_1 > 1$, *which are independent of* T *and* $|\varepsilon|$, *such that if*

$$\sup_{0\le t\le T} \|f(t)\|_1 + |\varepsilon| \le \delta_1,$$

then the solution $f(x,t)$ *verifies the estimate*

$$\|f(t)\|_1^2 + \|\partial_t f(t)\|^2 + \int_0^t \|\partial_x f(\tau)\|^2 + \|\partial_t f(\tau)\|^2 d\tau \le C_1 \|f_0\|_1^2 \tag{11}$$

for $t \in [0,T]$, *where* $\|\cdot\|_1$ *denotes* H^1*-norm and* $\|\cdot\|$ *denotes* L^2*-norm.*

Point of the proof of Proposition.
The a priori estimate (11) is given by the L^2-energy method which is developed in [13] for the Cabannes model. This energy method is based on the previous consideration in [8]. A key to derive the estimate is to use the Boltzmann H-theorem. We also make use of a new Poincaré type estimate together with the property that the stationary solution approaches a given constant Maxwellian exponentially at infinity, i.e., (7) in Remark.

Let us introduce the following notations:

$$N(t) = \sup_{0\le\tau\le t} \|f(\tau)\|_1,$$

$$M(t)^2 = \int_0^t \|\partial_x f(\tau)\|^2 + \|\partial_t f(\tau)\|^2 + |f^-(0,\tau)|^2 d\tau,$$

where $t \in [0,T]$. We will show that the left hand side of (11) can be bounded from above by $C\|f_0\|_1^2 + C(N(t)+|\varepsilon|)M(t)^2$.

Now, we will explain the use of the Boltzmann H-theorem, which is the first point of the proof of Proposition. The Boltzmann H-function for $(1)_1$ is defined in terms of $h(\eta) = \eta\log\eta$ $(\eta > 0)$ as

$$H(F) = \sum_{i\in\Lambda} F_i \log F_i. \tag{12}$$

Note that $h(\eta)$ is a strictly convex function of $\eta > 0$. The equation for $H(F)$ is

$$\partial_t(\sum_{i\in\Lambda} F_i\log F_i) + \partial_x(\sum_{i\in\Lambda} v_i F_i \log F_i) =< \log F, Q(F) > \le 0, \tag{13}$$

which is called Boltzmann H-theorem for $(1)_1$. We put

$$\begin{cases} \Phi(\eta,\zeta) = \eta\log\eta - \zeta\log\zeta - (1+\log\zeta)(\eta-\zeta), \\ \Psi(\eta,\zeta) = \log\eta - \log\zeta - \frac{\eta-\zeta}{\zeta} \end{cases}$$

for $\eta, \zeta > 0$. Then we can modify (13) as

$$\begin{aligned} &\partial_t(\sum_{i\in\Lambda} \Phi(F_i, F_i^\infty)) + \partial_x(\sum_{i\in\Lambda} v_i \Phi(F_i, F_i^\infty)) \\ &=< \log F - \log F^\infty, Q(F) - Q(F^\infty) > + \sum_{i\in\Lambda} v_i \partial_x F_i^\infty \cdot \Psi(F_i, F_i^\infty), \end{aligned} \tag{14}$$

where we used $(1)_1$. Obviouly, we have

$$c|f_i|^2 \le \Phi(F_i, F_i^\infty) \le C|f_i|^2, \tag{15}$$

$$|\Psi(F_i, F_i^\infty)| \le C|f_i|^2, \tag{16}$$

provided that $N(T) + |\varepsilon|$ is suitably small. We see that each term on the right hand side of (14) is estimated as

$$< \log F - \log F^\infty, Q(F) - Q(F^\infty) > \le -c|Q(F) - Q(F^\infty)| + C|F^\infty - M|^2|f|^2, \tag{17}$$

$$(18)\qquad |\sum_{i\in\Lambda} v_i\partial_x F_i^\infty \cdot \Psi(F_i, F_i^\infty)| \le C|\partial_x F^\infty||f|^2.$$

Integrating (14) over $[0,\infty)\times[0,t]$, and using (15), (17), (18) and $(10)_2$, we obtain

$$(19)\qquad \begin{aligned}&\|f(t)\|^2 + \int_0^t |f^-(0,\tau)|^2 + \|Q(F)(\tau) - Q(F^\infty)\|^2 d\tau \\ &\le C\|f_0\|^2 + C\int_0^t\int_0^\infty (|F^\infty - M|^2 + |\partial_x F^\infty|)|f|^2 dx d\tau.\end{aligned}$$

In the above inequality (19), having the extra term of the form $O(|\partial_x^j(F^\infty - M)||f|^2)$ is only different from the estimate obtained in [8]. Accordingly, we next need to estimate the term $O(|\partial_x^j(F^\infty - M)||f|^2)$ $(j = 0,1,2,\cdots)$. This is the second point of the proof of Proposition. We can estimate this term as

$$(20)\qquad \int_0^t\int_0^\infty |\partial_x^j(F^\infty - M)||f|^2 dx d\tau \le C|\varepsilon|M(t)^2.$$

To derive the estimate (20), we use the following inequality:

$$(21)\qquad |h(x)| \le |h(0)| + \sqrt{x}\|\partial_x h\|, \quad x > 0,$$

for $h \in H^1(0,\infty)$, that follows from the fundamental theorem of differential and integral:

$$h(x) = h(0) + \int_0^x \frac{d}{dy} h(y) dy.$$

The above inequality (21) together with (7) shows that

$$(22)\qquad \begin{aligned}&\int_0^t\int_0^\infty |\partial_x^j(F^\infty - M|)(|f^+|^2 + |f^-|^2) dx d\tau \\ &\le C|\varepsilon|\int_0^t\int_0^\infty e^{-\sigma x}(|f^+|^2 + |f^-|^2) dx d\tau \\ &\le C|\varepsilon|\int_0^t\int_0^\infty e^{-\sigma x}(x\|\partial_x f^+(\tau)\|^2 + x\|\partial_x f^-(\tau)\|^2 + |f^-(0,\tau)|^2) dx d\tau \\ &\le C|\varepsilon|\int_0^t \|\partial_x f(\tau)\|^2 + |f^-(0,\tau)|^2) d\tau,\end{aligned}$$

which gives (20) for f^+ and f^-. Here we used $(10)_2$. On the other hand, concerning the estimate for $f^0 := (f_i)_{i\in\Lambda_0}$, we make use of

$$(23)\qquad |f^0| \le C(|f^+| + |f^-| + |\partial_t f^0|),$$

provided that $N(T) + |\varepsilon|$ is suitably small. Consequently, we obtain (20) for f^0 from (22) and (23). Therefore we have shown the L^2-estimate for the solution f by applying (20) to (19).

Concerning the other estimates for the solution f, we can show in the same way as in [7,8,13,etc.,]. We omit the details and refer the reader to [14].

we can show the global existence and uniqueness of solutions by combining the local existence result together with the a priori estimate. The asymptotic convergence of the nonstationary solution toward the corresponding stationary solution can be proved by applying the uniform estimate of the solution which follows from the a priori estimate.

References

[1] H. Cabannes, The discrete Boltzmann equation (Theory and applications), Lecture Notes, Univ. of California, Berkeley, 1980.

[2] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvienti, and M. Shinbrot, On nonlinear stationary half-space problems in discrete kinetic theory, J. Statist. Phys., 54 (1988), 885-896.

[3] R. Gatignol, Théorie Cinétique de Gaz à Répartition Discrète de Vitesses, Lecture Notes in Phys. 36, Springer-Verlag, New York, 1975.

[4] S. Kawashima, Global existence and stability of solutions for discrete velocity models of the Boltzmann equation. Recent Topics in Nonlinear PDE, Lecture Notes in Numer, Appl. Anal. 6, Kinokuniya, Tokyo, 1983, pp. 59-85.

[5] S.Kawashima, Large-time behavior of solutions of the discrete Boltzmann equation, Comm. Math. Phys., 109 (1987), 563-589.

[6] S. Kawashima, Global solutions to the initial-boundary value problems for the discrete Boltzmann equation, Nonlinear Anal., 17 (1991), 577-597.

[7] S. Kawashima, Existence and stability of stationary solutions to the discrete Boltzmann equation, Japan J. Indust. Appl. Math., 8 (1991), 389-429.

[8] S. Kawashima, Large-time behavior of solutions to the discrete Boltzmann equation in the half-space, Transport Theor. Stat. Phys., 21 (1992), 451-463.

[9] S. Kawashima, Exponential stability of stationary solutions to the discrete Boltzmann equation in a bounded domain, Math. Models Meth. Appl. Sci., 2 (1992), 239-248.

[10] S. Kawashima and N. Bellomo, The discrete Boltzmann equation with multiple collisions: Global existence and stability for the initial value problem, J. Math. Phys., 31 (1990), 245-253.

[11] S. Kawashima and S. Nishibata, Existence of a stationary wave for the discrete Boltzmann equation in the half-space, to appear in Comm. Math. Phys.

[12] A.Matsumura, Asymptotics toward rarefaction wave for solutions of the Broadwell model of a discrete velocity gas, Japan J. Appl. Math., 4 (1987), 489-502.

[13] Y. Nikkuni, Stability of stationary solutions to some discrete velocity model of the Boltzmann equation in the half-space, to appear in Funckcial. Ekvac.

[14] Y.Nikkuni and S. Kawashima, Stability of stationary solutions to the half-space problem for the discrete Boltzmann equation with multiple collisions, submitted to Kyushu J. Math.

[15] Y. Shizuta and S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, Hokkaido Math. J., 14 (1985), 249-275.

[16] S. Ukai, On the half-space problem for the discrete velocity model of the Boltzmann equation, Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Stochastics, Eds. S. Kawashima and T. Yanagisawa, World Scientific, (1998), 160-174.

LOCAL SOLVABILITY AND SMOOTHING EFFECTS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH MAGNETIC FIELDS

YOSHIHISA NAKAMURA (UNIV. KUMAMOTO)

1. Introduction

In this report, we consider the following nonlinear Schrödinger equation with a potential in a magnetic field

$$\begin{aligned} i\partial_t u &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(t,x))^2 u + V(t,x)u + F(u) \\ &= H(t)u + F(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

where $u = u(t,x)$ is a complex-valued function, $A(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x), \ldots, A_n(t,x))$ is a vector potential, $V(t,x)$ is a scalar potential and $F(u) = F \circ u$ is a local nonlinear operator given by a complex-valued function F on $\mathbb{C}$.

For the local Cauchy problem of Eqn.(1), we construct weak solutions u and to show the local smoothing effects for H^1-solutions. In Yajima[7][8], he studied the corresponding linear equation

$$\begin{aligned} i\partial_t u &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(t,x))^2 u + V(t,x)u \\ &= H(t)u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2}$$

and he proved that Eqn.(2) generates a unique unitary propagator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ under some assumptions for A and V. In this report, under suitable conditions on the nonlinear term F, we construct the local weak solutions of Eqn.(1).

We need the following assumptions;

Assumption (A) For $j = 1, \cdots, n$, $A_j(t,x)$ is a real-valued function of $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ such that $\partial_x^\alpha A_j(t,x)$ is C^1 function of t for each x and for any multi-index α. For $|\alpha| \geq 1$, we have, with some $\varepsilon > 0$

$$|\partial_x^\alpha B_{jk}(t,x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{-1-\varepsilon}, \ j,k = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

$$|\partial_x^\alpha A(t,x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t A(t,x)| \leq C_\alpha, \ (t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

where $B_{jk}(t,x) = \partial_j A_k(t,x) - \partial_k A_j(t,x)$.

Assumption (V) $V(t,x)$ is a real-valued function of $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ such that $\partial_x^\alpha V(t,x)$ is a continuous function of t for each x and for every α. For $|\alpha| \geq 2$ we have

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \leq C_\alpha, \ (t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Assumption (F1) $F \in C^1(\mathbb{C};\mathbb{C})$, with $F(0) = 0$.

Assumption (F2) For $\zeta = \xi + i\eta$, $|DF(\zeta)| \equiv \max\{|\partial_\zeta F|, |\partial_{\bar\zeta} F|\} \leq M|\zeta|^{p-1}$, for $|\zeta| \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, where $\partial_\zeta = \frac{1}{2}(\partial_\xi - i\partial_\eta)$, $\partial_{\bar\zeta} = \frac{1}{2}(\partial_\xi + i\partial_\eta)$.

Under these assumption, we can construct a weak solution for an initial data which is a L^2-function. We define the following function space

$$\bar{\mathcal{X}}(I) \equiv (\bigcap L^s(I;L^q)) \cap C(I;L^2),$$

where $\bigcap$ is the intersection in (q,s) satisfying $1/q + 2/ns = 1/2$ and $1/2 - 1/n < 1/q \leq 1/2$.

Theorem 1. Assume (A),(V),(F1) and (F2) with $1 < p < 1 + 4/n$. Then for each $\phi \in L^2$, there exists a unique solution $u \in \bar{\mathcal{X}}(I)$ of Eqn.(1) with $u(0) = \phi$ where $T > 0$ depends only on $\|\phi\|_2$.

Furthermore, the local solution $u \in \bar{\mathcal{X}}(I)$ depends on $\phi \in L^2$ continuously.

Next we construct H^1-solution and consider the local smoothing effects.

We set $\Sigma(k) = \{f \in L^2 | \sum_{|\alpha+\beta|\leq k} \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_2^2 = \|f\|_{\Sigma(k)}^2 < \infty\}$, $k = 0, 1, \ldots$, where $x^\alpha u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} u$ for a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$. And define

$$\bar{\mathcal{Y}}(I) \equiv \{u \in \bar{\mathcal{X}}(I) | \, \partial u \in \bar{\mathcal{X}}(I), xu \in \bar{\mathcal{X}}(I)\} \subset C(I;\Sigma(1)).$$

Then we have the following theorems;

Theorem 2. Assume (A),(V),(F1) and, if $n \geq 3$, (F2) with $1 < p < 1 + 4/(n-2)$. Then for each $\phi \in \Sigma(1)$, there exists a unique solution $u \in C(I;\Sigma(1))$ of Eqn.(1) with $u(0) = \phi$ where $T > 0$ depends only on $\|\phi\|_{\Sigma(1)}$. Moreover $u \in \bar{\mathcal{Y}}(I)$.

Furthermore, $u \in C(I;\Sigma(1))$ depends on $\phi \in \Sigma(1)$ continuously.

Remark 1. If the nonlinear term F satisfies so-called "sign condition" and "Hamilton structure", then we can prove the existense of the global solution to Eqn.(1).

Theorem 3. Let u denote the solution to Eqn.(1) in Theorem 2. Suppose $\mu > 1/2$. Then, in the case $1 \leq n \leq 6$, the following estimate holds;

$$\int_I \|\langle x\rangle^{-\mu-3/2} \langle D\rangle^{3/2} u\|_2^2 dt < \infty, \tag{6}$$

where $\|\cdot\|_2$ is the L^2 -norm, $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$, $\langle D\rangle = (I - \Delta)^{1/2}$.

In the case $n \geq 7$, if $p < 1 + 2/(n-4)$, then the above inequality holds.

Many authors studied nonlinear Schrödinger equations with power nonlinearity. In particular, we note Kato[1][2].

There are various results on the estimate as in Theorem 3 of smoothing effects. In Sjölin[5], he obtained the following inequality; For some $C > 0$, depending on $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\kappa+\mu})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^\kappa} |\phi(t,x)(1-\Delta)^{\frac{1}{4}} e^{it\Delta} f|^2 dx dt \leq C\|f\|_{L^2}^2, \quad \forall f \in L^2. \tag{7}$$

This inequality manifests that the free Schrödinger propagator $e^{it\Delta}$ has the smoothing effect which can improve the differentiability locally in time and space.

Later the similar properties for e^{-itH}, where $H = -\Delta + V$ was a self-adjoint operator with various asumptions on scalar potentials $V = V(x)$ or $V(t,x)$, were studied by many authors. In particular, Kato and Yajima[3] obtained the inequality replacing ϕ in (9) by $(1+|x|^2)^{-1/4-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, and Yajima[8] obtained Proposition 5.1(see later in Section 5) where he proved the smoothing effect for Eqn.(2).

This type of smoothing properties for nonlinear Schrödinger equations in the case of $A = V = 0$ were studied in Nakamura[3], Sjölin[6].

For $I = [0,T]$, put $L^{q,s} = L^s(I;L^q)$, where $1 < q < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, with its norm denoted by

$$\|f\|_{q,s} \equiv \Big(\int_I \|f(t)\|_q^s dt\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Set $r = 4(p+1)/n(p-1)$, i.e. $1/(p+1) + 2/nr = 1/2$. And set $r' = r/(r-1)$, i.e. $1/r + 1/r' = 1$. $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ means the space of rapidly decreasing functions. We denote various constants by C, M, etc. They may differ from line to line.

2. Preliminaries

Proposition 2.1(Yajima[7]) Let Assumption (A) and (V) be satisfied. Then there exists a unique propagator $\{U(t,s) \,|\, t,s \in \mathbb{R}^{k}\}$ for Eqn.(2) with the following properties(a)(b):

(a) For every $t \neq s$, $U(t,s)$ maps $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ into $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ continuously and extends to a unitary operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and satisfies $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$.

(b) For $f \in \Sigma(2)$,$U(t,s)f$ is a $\Sigma(2)$-valued continuous and L^2-valued C^1 function of (t,s), and the following equations hold:

$$i\partial_t U(t,s)f = H(t)U(t,s)f, \quad i\partial_s U(t,s)f = -U(t,s)H(s)f.$$

Proposition 2.2 (Yajima[7]) Let Assumption (A) and (V) be satisfied. Then there exists a positive number T such that for $0 < |t-s| \leq T$, $U(t,s)$ can be written in the form of an oscillatory integral operator;

$$U(t,s)f(x) = (2\pi i(t-s))^{-n/2} \int e^{iS(t,s,x,y)} e(t,s,x,y) f(y) dy, \tag{8}$$

and if we set $U(t,t) = 1$, the identify operator, then $\{U(t,s) \,|\, |t-s| \leq T, \text{for } t,s \in \mathbb{R}^1\}$ is strongly continuous in $L^2(\mathbb{R}^n)$, Here $S(t,s,x,y)$, $e(t,s,x,y)$ are uniquely given functions, respectively. (See Yajima[].)

Lemma 2.3(Yajima[8]) Let $T > 0$ be sufficiently small and let $0 < |t-s| < T$. Then for $2 \leq q \leq \infty$,

$$\|U(t,s)f\|_q \leq C_0 |t-s|^{-n(1/2-1/n)} \|f\|_{q'} \tag{9}$$

where q' is the index conjugate to q, i.e., $1/q + 1/q' = 1$, and the constant C_0 does not depend on t, s, and $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

We introduce the following spaces as in Kato[1][2].

$$\begin{aligned}
X &= X(I) = L^{2,\infty} \cap L^{p+1,r}, \\
& \quad \|u\|_X = \|u\|_{2,\infty} \vee \|u\|_{p+1,r}, \\
\tilde{X} &= \tilde{X}(I) = C(I;L^2) \cap L^{p+1,r}, \\
X' &= X'(I) = L^{2,1} + L^{1+1/p,r'}, \\
& \quad \|f\|_{X'} = \inf\{\|f_1\|_{2,1} + \|f_2\|_{1+1/p,r'} \,|\, f = f_1 + f_2\}.
\end{aligned}$$

Set $s = 0$, for simplicity, we define two linear operators Γ and G by

$$(\Gamma\phi)(t) = U(t,0)\phi, \quad (Gf)(t) = \int_0^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in I.$$

Lemma 2.4 (Yajima[7][8]) Γ is bounded from L^2 and G is bounded from X' to $X$to X, which satisfies

$$\|\Gamma\phi\|_X \leq C\|\phi\|_2, \ \phi \in L^2, \quad \|Gf\|_X \leq C'\|f\|_{X'}, \ f \in X',$$

where C, C' are independent of T. Moreover, $\Gamma\phi \in \tilde{\mathcal{X}}(I)$, $Gf \in \tilde{\mathcal{X}}(I)$, for any $\phi \in L^2$, $f \in X'$ on any interval I.

3. The proof of Theorem 1

Lemma 3.1 (Kato[2]) Assume that F satisfies (F1) and (F2) with $1 < p < 1 + 4/n$. Then $F \in C^1(X; X')$ with

$$\|F(u)\|_{X'} \leq M_1 T \|u\|_X + M_p T^\theta \|u\|_X^p, \quad u \in X, \tag{10}$$

$$\|F'(u)v\|_{X'} \leq (M_1 T + M_p T^\theta \|u\|_X^{p-1})\|v\|_X, \quad u, v \in X, \tag{11}$$

where M_1 and M_p are some constants, $\theta = 1/r - 1/r' = 1 - 2/r > 0$.

Remark 3.2 We mention the outline of proof of Lemma 3.1. Choose $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ so that $\Psi = 1$ in a neighborhood of the origin. Set $F_1 = \Psi F$ and $F_p = (1 - \Psi)F$. Then we have

$$F = F_1 + F_p, \quad F_1, F_p \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C}), \quad F_1(0) = F_p(0) = 0,$$

$$|F_1(\zeta)| \leq M_1 |\zeta|, \qquad |F_1'(\zeta)| \leq M_1,$$

$$|F_p(\zeta)| \leq M_p |\zeta|^p, \qquad |F_p'(\zeta)| \leq M_p |\zeta|^{p-1},$$

for some $M_1 > 0$ and $M_p > 0$. Then we have the following estimates

$$\|F_1(u)\|_{2,1} \leq M_1 T \|u\|_{2,\infty} \quad , \quad \|F_1'(u)v\|_2 \leq M_1 T \|v\|_2,$$

$$\begin{aligned} \|F_p(u)\|_{1+1/p,r'} &\leq M_p T^\theta \|u\|_{p+1,r}^p, \\ \|F_p'(u)v\|_{1+1/p,r'} &\leq M_p T^\theta \|u\|_{p+1,r}^{p-1} \|v\|_{p+1,r}. \end{aligned}$$

Combining the above estimates, we obtain the inequalities (18) and (19).

We introduce the following integral equation, which is equivalent to Eqn.(1),

$$u = \Phi(u) \equiv \Gamma\phi - iGF(u). \tag{12}$$

We prove the theorem by solving Eqn.(12).

Proof of Theorem 1. Let $E[\bar{E}]$ be the closed ball in $X[\bar{X}]$ with radius R and center at the origin. It is easy to prove that, if R is sufficiently large and T is sufficiently small, Φ maps E into $\bar{E}$ Φ is a contraction map in the X-metric. Since E is a closed subset of the Banach space X, it follows that Φ has a unique fixed point $u \in E$. Actually we have $u \in \bar{X}$ since Φ maps into $\bar{E}$. Moreover, since $GF(u) \in \bar{\mathcal{X}}(I)$ by $F(u) \in X'$, we have $u \in \bar{\mathcal{X}} \subset L^\infty(I; L^2 \cap L^{p+1})$. Then we conclude that u is a solution of Eqn.(1). It is easy to prove uniqueness and continuous dependence of solutions on initial data. □

4. The proof of Theorem 2

Before constructing H^1-solution, we introduce the following spaces;

$$\begin{aligned} Y &= \{u \in X \,|\, \partial u \in X, \, xu \in X\}, \\ &\quad \|u\|_Y = \|u\|_X \vee \|\partial u\|_X \vee \|xu\|_X, \\ \bar{Y} &= \{u \in \bar{X} \,|\, \partial u \in \bar{X}, \, xu \in \bar{X}\}, \\ Y' &= \{f \in X' \,|\, \partial f \in X', \, xf \in X'\}, \\ &\quad \|f\|_{Y'} = \|f\|_{X'} \vee \|\partial f\|_{X'} \vee \|xf\|_{X'}, \end{aligned}$$

Lemma 4.1 Let $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\kappa)$ and $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\kappa+\kappa})$. If $v = \Gamma\phi - iGf$, then

$$\partial_k v = \Gamma(\partial_k \phi) - iG(\frac{i}{2}(\partial_k(\mathrm{div}A))v + i(\partial_k A) \cdot \nabla v + (A \cdot \partial_k A + \partial_k V)v + \partial_k f), \tag{13}$$

$$x_k v = \Gamma(x_k \phi) - iG((\partial_k - iA_k)v + x_k f), \tag{14}$$

for $k = 1, \dots, n$, where $\mathrm{div} A = \partial_1 A + \partial_2 A + \cdots + \partial_n A$, $\nabla v = (\partial_1 v, \partial_2 v, \dots, \partial_n v)$.

Proof. To prove (13), we note that v satisfies the differential equation $i\partial_t v = H(t)v + f$. Then we have

$$i\partial_t \partial_k v = H(t)\partial_k v + [\partial_k, H(t)]v + \partial_k f, \qquad \text{for} \quad k = 1, \dots, n. \tag{15}$$

Here $[\ ,\ ]$ denotes the commutator. Since $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{\kappa+\kappa})$, we have, for $k = 1, \dots, n$,

$$[\partial_k, H(t)]v = \frac{i}{2}(\partial_k(\mathrm{div} A))v + i(\partial_k A) \cdot \nabla v + (A \cdot \partial_k A + \partial_k V)v.$$

Noting that $\partial_k v(0) = \partial_k \phi$, we obtain (13) for $k = 1, \dots, n$.

For $x_k v$, we may estimate in the same way. □

Lemma 4.2 Let $T > 0$ be sufficiently small and let $0 < |t| < T$. Then

$$\begin{aligned} \Gamma \ &: \ \Sigma(1) \to Y, \\ &\quad \text{with} \ \ |\!|\!|\Gamma\phi|\!|\!|_Y \le c\|\phi\|_{\Sigma(1)}, \quad \phi \in \Sigma(1), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} G \ &: \ Y' \to Y, \\ &\quad \text{with} \ \ |\!|\!|Gf|\!|\!|_Y \le c' |\!|\!|f|\!|\!|_{Y'}, \quad f \in Y'. \end{aligned} \tag{17}$$

Proof. First we begin with the assumptions of Lemma 4.1. We obtain from (13), (14)

$$|\!|\!|\partial_k v|\!|\!|_X \le C\|\partial_k \phi\|_2 + C' |\!|\!|\partial_k f|\!|\!|_{X'} + C'' T |\!|\!|v|\!|\!|_Y,$$

$$|\!|\!|x_k v|\!|\!|_X \le C\|x_k \phi\|_2 + C' |\!|\!|x_k f|\!|\!|_{X'} + C'' T |\!|\!|v|\!|\!|_Y,$$

where $C'' > 0$ depends on T. We note that In view of the mean value theorem, Assumptions (A) and (V) imply that, for fixed $t \in I = [0, T]$, $|A(t,x)| \le c_1 + c_2|x|$, $|\partial_k V(t,x)| \le c_3 + c_4|x|$, for some constants c_j, $j = 1, 2, 3, 4$, depending on T. While, it is obvious that $|\!|\!|v|\!|\!|_X \le C\|\phi\|_2 + C' |\!|\!|f|\!|\!|_{X'}$. Since T is sufficiently small, we have

$$|\!|\!|v|\!|\!|_Y \le c\|\phi\|_{\Sigma(1)} + c' |\!|\!|f|\!|\!|_{Y'}, \tag{18}$$

with constants c, c'. and, by a standard approximation procedure, (18) holds for $\phi \in \Sigma(1)$ and $f \in Y'$. □

We assume $n \ge 3$.

Lemma 4.3 Assume (F1) and (F2) with $1 < p < 1 + 4/(n-2)$. If $u \in Y$, then $F(u) \in Y'$ with

$$|\!|\!|F(u)|\!|\!|_{Y'} \le M_1 T |\!|\!|u|\!|\!|_Y + M_p' T^\theta |\!|\!|u|\!|\!|_Y^p, \tag{19}$$

where $\theta = 1 - 2/r > 0$, $M_p' = C_1' M_p$, for some $C_1' > 0$ and M_1, M_p are as in Remark 3.2.

Proof. We use the decomposition of F in Remark 3.2. It is easy to show the inequality(19) for $F_1(u)$. We estimate $F_p(u)$. By $1 < p < 1 + 4/(n-2)$, Sobolev's embedding theorem implies

$$\|u\|_{p+1,\infty} \le C_1 \|u\|_{L^\infty(I;H^1)},$$

for some $C_1 > 0$, which is independent of T. Hence we have, using Hölder inequality, Remark 3.2 and the above estimate, we have the following estimates;

$$\begin{aligned} \|\partial_k(F_p(u))\|_{1+1/p,r'} &\le \|F_p'(u)\partial_k u\|_{1+1/p,r'} \\ &\le M_p \|u\|_{p+1,\infty}^{p-1} \|\partial_k u\|_{p+1,r'} \\ &\le C_1' M_p T^{1-2/r} |\!|\!|u|\!|\!|_Y^p, \end{aligned}$$

for $k = 1, \dots, n$ and for some $C' > 0$, which is independent of T. We may estimate $F_p(u)$ and $x_k F_p(u)$ in the same way. Thus we obtain (19). □

Proof of Theorem 2. As in the proof of Theorem 1, we introduce $E[\bar{E}]$, which is the closed ball in $Y[\bar{Y}]$ with radius R and center at the origin. Since E is a complete metric space in the X-metric, we can apply the contraction map theorem on E to the function Φ defined by (12), and obtain the solution as in the previous section.

When $n = 1, 2$, we set $F_1 = F$, $F_p = 0$ and $X = L^{2,\infty}$. □

5. The proof of Theorem 3

Proposition 5.1 (Yajima[8]) Suppose that (A) and (V) be satisfied for Eqn.(2). Let $T > 0$ be sufficiently small, $\mu > 1/2$ and $\rho > 0$. Then there exists a constant $C_{\rho\mu} > 0$ such that for $s \in \mathbb{R}^1$

$$\int_{s-T}^{s+T} \|\langle x\rangle^{-\rho-\mu}\langle D\rangle^{\rho} U(t,s) f\|_2^2 dt \le C_{\rho\mu}\|\langle D\rangle^{\rho-1/2} f\|_2^2, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Proof of Theorem 3. We adapt Proposition 5.1 to $u = \Gamma\phi - iGF(u)$. Hence it suffice to prove $F(u) \in L^1(I; H^1)$ for $u \in Y$.

Lemma5.2(Sjölin[6]) Assume (F1) and, if $n \ge 3$, (F2) with $1 < p < 1 + 4/(n-2)$. Suppose $u \in \bar{\mathcal{Y}}_l(\mathcal{I}) \equiv \{\sqcap \in \bar{\mathcal{X}}(\mathcal{I}) | \partial\sqcap \in \bar{\mathcal{X}}(\mathcal{I})\}$ with $T < \infty$, where $\bar{\mathcal{X}}(\mathcal{I})$ is defined in (6). If $1 \le n \le 6$, then $F(u) \in L^1(I; H^1)$. If $n \ge 7$, under the additional assumption $p < 1 + 2/(n-4)$, $F(u) \in L^1(I; H^1)$.

Proof. It suffices to estimate $F_p(u)$ when $n \ge 3$. To estimate $L^{2,1}$-norm of $F_p(u)$ and $\partial(F_p(u))$, we may find (p_1, r_1), (p_2, r_2) which satisfy

$$1/2 - 2/n < 1/p_1 \le 1/2 - 1/n,\ 1/2 - 1/n < 1/p_2 \le 1/2, \tag{21}$$

and

$$\begin{aligned} 1/p_1 + 2/nr_1 &= 1/2 - 1/n, & (22)\\ 1/p_2 + 2/nr_2 &= 1/2, & (23)\\ (p-1)/p_1 + 1/p_2 &= 1/2, & (24)\\ (p-1)/r_1 + 1/r_2 &< 1. & (25) \end{aligned}$$

Then, by (21), (23) and the definition of $\bar{\mathcal{X}}(I)$, we have $\bar{\mathcal{X}}(I) \subset L^{p_2,r_2}$, and, set $1/p_3 = 1/p_1 + 1/n$, then, from (21) and (22), it follows $\bar{\mathcal{X}}(I) \subset L^{p_3,r_1}$. Hence, by Sobolev's embedding theorem, we have $\bar{\mathcal{Y}}_l(I) \subset L^{p_1,r_1}$. And, if (24) and (25) hold, then we have, by Hölder inequality,

$$\begin{aligned} \|F_p(u)\|_{2,1} &\le M_p T^{1-1/r_3}\|u\|_{p_1,r_1}^{p-1}\|u\|_{p_2,r_2}, & (26)\\ \|\partial(F_p(u))\|_{2,1} &\le \|F_p'(u)\partial u\|_{2,1} & (27)\\ &\le M_p T^{1-1/r_3}\|u\|_{p_1,r_1}^{p-1}\|\partial u\|_{p_2,r_2}, \end{aligned}$$

where $(p-1)/r_1 + 1/r_2 = 1/r_3 < 1$. Hence the right hand side of (36) and (37) converge, respectively.

Solving (23) and (24), we obtain that $1/p_1 = 2/nr_2(p-1)$. By $1/2 - 2/n < 1/p_1 \le 1/2 - 1/n$, we have $(n-4)(p-1)/4 < 1/r_2 < (n-2)(p-1)/4$. By $2 < r_2 < \infty$, thus we need the condition that $p < 1 + 2/(n-4)$. □

References

[1] T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations,in "Schrödinger operators", (H. Holden and A. Jensen eds.) Lecture Notes in Physics 345, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989

[2] T. Kato and K. Yajima, Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect, Rev.Math.Phys., 1 (1989)

[3] Y. Nakamura, Regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations with H^2 initial data, Yokohama Math. J., to appear

[4] Y. Nakamura, Local Solvability and Smoothing Effects of Nonlinear Schrödinger Equations with Magnetic Fields, preprint
[5] P. Sjölin, Regularity of solutions to the Schrödinger equations, Duke Math. J. 55 (1987)
[6] P. Sjölin, Regularity of solutions to nonlinear equations of Schrödinger type, Tohoku Math. J. 45 (1993)
[7] K. Yajima, On smoothing property of Schödinger propagators, in " Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations", (H. Fujita, T. Ikebe, S.T. Kuroda eds), Lecture Notes in Mathematics 1450, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989
[8] K. Yajima, Schrödinger evolution equations with magnetic fields, J.d'Analyse Math. 56 (1991)

Nonexistence of weak solutions of nonlinear biharmonic equations

Takahiro HASHIMOTO

Department of Mathematical Sciences, Ehime University.

1 Introduction

次の 4 階の微分作用素を含む方程式を考える.

$$\Delta^2 u = |u|^{q-2}u \ \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u = \Delta u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{3}$$

ここで Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbf{R}^N$ の有界領域, $q > 1$ とする. 左辺の微分作用素は biharmonic operator と呼ばれ, 板の変形を記述する方程式に現れる. 境界条件として, (2) もしくは (3) を与える.

問題 (1), (2) は, Sobolev の不等式

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in W_0^{2,p}(\Omega), \ \forall q \le \frac{Np}{N-2p},$$

の最良定数を与える関数を求める問題と関連している. 解の非存在に関しては Pohozaev [4] や Pucci & Serrin [3] などの結果がある.

問題 (1), (3) に現れる境界条件 $u = \Delta u = 0$ on $\partial\Omega$ は Navier boundary condition と呼ばれる. この場合は 2 階の微分方程式系

$$(\mathrm{S})\begin{cases} -\Delta u &= |v|^{p'-2}v \quad \text{in } \Omega, \\ -\Delta v &= |u|^{q-2}u \quad \text{in } \Omega, \\ \quad u &= v = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

に書き直して研究されることが多い. 存在に関しては, Clément, de Figueiredo & Mitidierii [1] によって, $2 < q < 2N/(N-2)$ の場合の結果が得られている. 非存在に関しては, Mitidieri [2], van der Vorst [5] 等の結果がある.

本稿では, biharmonic operator を含む 4 階の非線形楕円型方程式に対してできるだけ広いクラスの解に対する非存在について議論していく.

2 Main Results

問題 (1), (2) に対しては以下に述べる非存在の結果を得た.

Theorem 1 *Let Ω be star-shaped. We set*

$$\mathcal{P}_D = \{u \in H_0^2(\Omega) \cap L^q(\Omega); |u|^{q-2}u \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)\}$$

as a class of weak solutions. If $q > \dfrac{2N}{N-4}$, then the problem (1), (2) has no nontrivial solution belonging to $\mathcal{P}_D$.

Mitidieri や van der Vorst の問題 (2), (3) に対する非存在定理の証明は Hopf 型の最大値の原理に基づいているので強い正則性が必要である. 我々は球対称性を仮定する事により, 弱解の非存在の結果を得た.

Theorem 2 *Let $\Omega = B_R(0)$. We set*

$$\mathcal{P}_N = \{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega); |u|^{q-2}u \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)\}$$

as a class of weak solutions. If $q \geq \dfrac{2N}{N-4}$, then the problem (1), (3) has no nontrivial solution belonging to $\mathcal{P}_N$.

Remark 問題 (2), (3) に対して, 我々の考えているクラス では Δu の trace が可積分にならない. しかしながら左辺の関数 $|u|^{q-2}u(=: f$ とおく) にある程度の可積分性を仮定すると正則性の結果より Δu の trace が定義できる.

Proposition 3 *Let $f \in L^2(\Omega)$. then $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ and $\Delta u = 0$ in a sense of trace.*

proof $C_0^\infty(\Omega)$ は $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ で dense だから

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \phi dx = \int_\Omega f \phi dx \ \forall \phi \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$$

$A :=$\{Dirichlet zero 境界条件での Laplacian\}, とすると $D(A) = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. $\Lambda = A^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ を考え $\phi = \Lambda h$ とすると

$$\int_\Omega (-\Delta u) h dx = \int_\Omega f \cdot \Lambda h dx = \int_\Omega \Lambda f \cdot h dx \ \forall h \in L^2(\Omega)$$

ゆえに $-\Delta u = \Lambda f$ in $L^2(\Omega)$. $\Lambda f \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ であるから $\Delta u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

3 Pohozaev-type identity

ここでは, 4 階の方程式に対する Pohozaev 型の等式を導き, 定理を証明する. まず (1) に境界条件 $u=0$ のみを仮定した場合の恒等式を導いておく.

Lemma 4 *Let $u \in W^{4,r}(\Omega)$ be a solution of (1), ((2) or (3)). Then the following identity holds.*

$$\begin{aligned}
&-\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nabla u)(\nabla(\Delta u)\cdot\vec{n})dS \\
&+\int_{\partial\Omega}\Delta u(\nabla(x\cdot\nabla u)\cdot\vec{n})dS-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\Delta u|^2(x\cdot\vec{n})dS \\
&= \frac{N}{q}\int_\Omega |u|^q dx+\frac{4-N}{2}\int_\Omega|\Delta u|^p dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Proof. まず, $|u|^{q-2}u\in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ が仮定されているので, $u\in W^{4,2N/(N+2)}(\Omega)$ となり, 各境界積分の項が可積分となることを注意しておく. $\int_\Omega(1)(x\cdot\nabla u)dx$ を計算する.

$$\int_\Omega |u|^{q-2}u(x\cdot\nabla u)dx=-\frac{N}{q}\int_\Omega|u|^q dx.$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x\cdot\nabla u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega}\nabla(\Delta u)\vec{n}(x\cdot\nabla u)dS-\int_\Omega\nabla(\Delta u)\cdot\nabla(x\cdot\nabla u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega}(x\cdot\nabla u)(\nabla(\Delta u)\cdot\vec{n})dS-\int_{\partial\Omega}\Delta u(\nabla(x\cdot\nabla u)\cdot\vec{n})dS \\
&\quad+\int_\Omega\Delta u\Delta(x\cdot\nabla u)dx
\end{aligned}$$

$$I=\int_\Omega\Delta u\Delta(x\cdot\nabla u)dx$$

とおく.

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega\Delta u(2\Delta u+x\cdot\nabla(\Delta u))dx \\
&= 2\int_\Omega|\Delta u|^2dx+\int_\Omega x\cdot\nabla(\frac{1}{2}|\Delta u|^2)dx \\
&= 2\int_\Omega|\Delta u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\Delta u|^2(x\cdot\vec{n})dS-\frac{N}{2}\int_\Omega|\Delta u|^2dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\Delta u|^2(x\cdot\vec{n})dS+\frac{4-N}{2}\int_\Omega|\Delta u|^2dx
\end{aligned}$$

よって (4) が成り立つ.

Proof of Theorem 1
まず, (2) の方は法線方向と接線方向に分けて考えると $\nabla u = 0$ on $\partial\Omega$ がいえる. 左辺第二項の境界積分について,

$$\nabla(x \cdot \nabla u) \cdot \vec{n} = \nabla u \cdot \vec{n} + \sum_{i,j} x_j D_i D_j u n_i$$

$u = \nabla u = 0$ on $\partial\Omega$ より,

$$D_i D_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} n_i n_j.$$

よって, $\nabla u = 0$ on $\partial\Omega$ を考慮して

$$\int_{\partial\Omega} \Delta u (\nabla(x \cdot \nabla u) \cdot \vec{n}) dS = \int_{\partial\Omega} |\Delta u|^2 (x \cdot \vec{n}) dS$$

Lemma 5 より,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta u|^2 (x \cdot \vec{n}) dS \\ &= \frac{N}{q} \int_\Omega |u|^q dx + \frac{4-N}{2} \int_\Omega |\Delta u|^p dx. \end{aligned} \tag{5}$$

$\dfrac{4-N}{2} + \dfrac{N}{q} < 0 \iff q > \dfrac{2N}{N-4}$ であるから Ω が star-shaped i.e. $x \cdot \vec{n} \geq 0$ on $\partial\Omega$ ならば, (1), (2) は非自明解をもたない.

Proof of Theorem 2
$u = \Delta u = 0$ より,

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial n} n_i, \quad D_j(\Delta u) = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} n_j$$

であるので

$$\int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u)(\nabla(\Delta u) \cdot \vec{n}) dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} (x \cdot \vec{n}) dS.$$

$\Omega = B_R(0)$ で解が球対称性の場合には以下のようにして境界積分の正値性がいえる.

Lemma 5 *Let u be a radial solution of (1), (3) with $\Omega = B_R(0)$. Then $\dfrac{\partial u}{\partial n} \dfrac{\partial(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)}{\partial n} < 0$ on $\partial\Omega$.*

Proof. u が (E) の球対称解ならば, $u, v (= -\Delta u)$ は以下の常微分方程式系の解になる.

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}u')' &= r^{N-1} v \ \text{ in } (0, R), && (6) \\ -(r^{N-1}v')' &= r^{N-1}|u|^{q-2}u \ \text{ in } (0, R). && (7) \\ u(R) &= v(R) = 0. && (8) \end{aligned}$$

(6) に $r^{N-1}v_r$ をかけて $[0,R]$ で積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^R (r^{N-1}u_r)_r r^{N-1}v_r dr &= -\int_0^R r^{2(N-1)} v v_r dr \\ &= -\int_0^R r^{2(N-1)} \frac{1}{2}\frac{d}{dr}|v|^2 dr \\ &= -\left[r^{2(N-1)}\frac{1}{2}|v|^2\right]_0^R + (N-1)\int_0^R r^{2(N-1)-1}|v|^2 dr \\ &= (N-1)\int_0^R r^{2(N-1)-1}|v|^2 dr.\end{aligned}$$

左辺は,

$$R^{2(N-1)}u_r(R)v_r(R) - \int_0^R r^{N-1}u_r(r^{N-1}v_r)_r dr$$

となるので (7) に $r^{N-1}u_r$ をかけて $[0,R]$ で積分した式

$$\int_0^R (r^{N-1}v_r)_r r^{N-1}u_r dr = \frac{2(N-1)}{q}\int_0^R r^{2(N-1)}|u|^q dr$$

と合わせると

$$R^{2(N-1)}u_r(R)v_r(R) = \int_0^R r^{2(N-1)-1}\left(\frac{1}{q}|u|^q + \frac{1}{2}|v|^2\right) dr > 0. \tag{9}$$

よって, $\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial n} > 0$ on $\partial\Omega$. つまり

$$\left(\frac{N}{q} + \frac{4-N}{2}\right)\int_\Omega |u|^q dx > 0$$

となるので (ii) が証明された.

参考文献

[1] Ph. Clément, D. G. Figueiredo & E. Mitidieri, Positive solutions of semilinear elliptic systems, *Comm. Partial Diff. Equations* **17** (1992) 923–940.

[2] E. Mitidieri, A Rellich type identity and applications, *Comm. Partial Diff. Equations* **18** (1993), 125–151.

[3] P. Pucci & J. Serrin, A general variational identity, *Indiana University Mathematics Journal* **35** (1986), 681–703.

[4] S. I. Pohozaev, The eigenfunctions of quasilinear elliptic problems, *Mat. Sb.(N.S.)*, **82(124)** (1970), 192–212.

[5] R. C. A. M. VAN DER VORST, Variational identities and applications to differential systems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **116** (1991), 375–398.

変分法による非線型楕円型方程式の正値解の多重存在について

足達 慎二（早稲田大学大学院Ｄ２）

今回発表した研究結果は，田中和永先生（早大理工）との共同研究 [**AT1**] に基づく．

0. Introduction

次の非線型楕円型方程式の正値解の存在と多重度について考える：

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(x)u^p + f(x) & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u > 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N), \end{cases} \tag{0.1}$$

ここで，$1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$ $(N \geq 3)$, $1 < p < \infty$ $(N = 1, 2)$, $a(x) \in C(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \in H^{-1}(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \geq 0$ である．さらに $a(x)$ に関して次を仮定する：

(H1) $a(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^N$,

(H2) $a(x) \to 1$, $|x| \to \infty$,

(H3) ある定数 $\delta > 0$ と $C > 0$ が存在して

$$a(x) - 1 \geq -Ce^{-(2+\delta)|x|} \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^N,$$

(H4) $a(x) \in (0, 1] \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^N$, $a(x) \not\equiv 1$.

まず，$f(x) \equiv 0$ の場合について考える:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(x)u^p & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u > 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \tag{0.2}$$

方程式 (0.2) の正値解は非線型 Schrödinger 方程式や Klein-Gordon 方程式の定常解に関係する．(0.2) の正値解の存在は $a(x)$ の形状に非常にデリケートに依存することがわかっている．例えば，$a(x) \equiv 1$ の場合：

$$\begin{cases} -\Delta u + u = u^p & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u > 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \tag{0.3}$$

方程式 (0.3) は一意的な正値球対称解 $\omega(x) = \omega(|x|) > 0$ が存在し，(0.3) の全ての正値解 $u(x)$ は

$$u(x) = \omega(x - x_0) \quad \exists\, x_0 \in \mathbf{R}^N.$$

の形にかけることがわかっている．(Kwong [**K**], c.f. Kabeya-Tanaka [**KT**])．しかし $a(x) \not\equiv 1$ の場合，たとえ $a(x)$ と 1 の差が非常に小さくとも状況はまったく変わってくる．(c.f. Lions [**PLL**])．例えば，$a(x)$ が

$$a(x) \geq 1 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^N, \tag{0.4}$$

を満たすとき，Mountain Pass Theorem によって与えられるミニマックス値 — MP レベル — が Palais-Smale 条件が破れる最初のレベルより真に低いことがわかる．したがってこの場合，Mountain Pass Theorem から (0.2) の解を得ることができる．一方，$a(x)$ が (H4) を満たすとき，MP レベルが Palais-Smale 条件が破れる最初のレベルとちょうど等しくなることがわかり，Mountain Pass Theorem からは解を得ることができない．ここで，Bahri-Li [**BaYL**] によって (0.2) は仮定 (H1)–(H3) のもとで少なくともひとつ正値解が存在することが示されている．(c.f. Bahri-Lions [**BaPLL**])．

ここでは，$f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$の場合を扱う．我々の目標は (0.1) のようなタイプの摂動が，正値解の多重存在に与える影響を調べることである．このような方程式は Cao-Zhou [**CZ**], Hirano [**H**], Jeanjean [**J**], Zhu [**Z**] Adachi-Tanaka [**AT2**] らによって研究されてきた．Zhu [**Z**] は $a(x) \equiv 1$ の場合を研究し，ある定数 $M > 0$ が存在して

$$0 < \|f\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)} \leq M$$

ならば，仮定 (0.4) のもとで (0.1) で $a(x) \equiv 1$ とした方程式は少なくとも 2 つの正値解を持つことを示した．定数 $M > 0$ は対応する汎関数：

$$I_{1,f}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} u_+^{p+1}\,dx - \int_{\mathbf{R}^N} fu\,dx,$$

ここで，

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ and } u_+ = \max\{u, 0\},$$

が mountain pass geometry をもつように定められる．つまり，$\|f\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)} \leq M$ ならば

(i) ある定数 $\rho_0 > 0$ が存在して

$$I_{1,f}(u) \geq 0 \quad \forall\, \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} = \rho_0,$$

(ii) $\{u \in H^1(\mathbf{R}^N)\,;\, \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} > \rho_0,\ I_{1,f}(u) < 0\} \neq \emptyset$,

(iii) $\displaystyle\inf_{\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} < \rho_0} I_{1,f}(u) < 0$,

を満たす．Zhu [**Z**] の結果は Cao-Zhou [**CZ**], Jeanjean [**J**], Adachi-Tanaka [**AT2**] によって一般化されている．彼らは一般の非線型項 $g(x,u)$ に対する適当な条件下で次の方程式について研究している：

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x,u) + f(x) & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u > 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \tag{0.5}$$

Cao-Zhou [**CZ**], Jeanjean [**J**] は特に次の仮定：

$$g(x,u) \geq \overline{g}(u) \left(= \lim_{|x|\to\infty} g(x,u) \right) \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^N \text{ and } u > 0 \tag{0.6}$$

のもとで $\|f\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)}$ があまり大きくなく（しかし 0 ではない）対応する汎関数が mountain pass geometry を満たすとき，(0.5) は少なくとも 2 つの正値解を持つことを示した．仮定 (0.6) は (0.4) に対応する．つまり (0.6) は (0.5) を変分法で扱いやすくしている．

ここでは，(H4) の仮定のもとで (0.1) を考える．[**CZ**], [**J**] とは状況が全く異なるが，我々は (H4) の仮定のもとでより多くの正値解の存在を示すことができた．

1. Main results

我々は次の結果を得た．

Theorem 1.1 ([AT1]). (H1)–(H4) を仮定する．するとある定数 $\delta_0 > 0$ が存在して，$0 < \|f\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)} \leq \delta_0$ ならば (0.1) は少なくとも 4 つの正値解が存在する．

さらに Theorem 1.1 で得られた解の $\|f\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)} \to 0$ のときの挙動について次の結果を得た．

Theorem 1.2 ([AT1]). $(f_j(x))_{j=1}^{\infty} \subset H^{-1}(\mathbf{R}^N)$ を次を満たす非負値関数列とする：

$$\|f_j\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)} \to 0, \quad j \to \infty.$$

すると部分列 $(f_j(x))_{j=1}^{\infty}$ — 部分列も $(f_j(x))_{j=1}^{\infty}$ とあらわす — が存在して $f(x) = f_j(x)$ に対する (0.1) の 4 つの解の列 $(u_j^{(k)}(x))_{j\in\mathbf{N}}$ $(k = 1,2,3,4)$ に対して次を満たす：
(i) $\|u_j^{(1)}\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0, \quad j \to \infty.$
(ii) $\mathbf{R}^N$ 内の点列 $(y_j^{(2)})_{j=1}^{\infty}$, $(y_j^{(3)})_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^N$ が存在して，$j \to \infty$ のとき

$$|y_j^{(k)}| \to \infty, \quad \|u_j^{(k)}(x) - \omega(x - y_j^{(k)})\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0$$

を満たす $(k = 2,3)$.
(iii) Bahri-Li [**BaYL**] によって得られた (0.2) の正値解 $v_0(x)$ に対して

$$\|u_j^{(4)}(x) - v_0(x)\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Outline of the proof of Theorem 1.1. 我々は変分的手法を用いて (0.1) の正値解を見つける．$a(x)$, $f(x)$ に対して次の汎関数を定義する：

$$I_{a,f}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} a(x) u_+^{p+1}\, dx - \int_{\mathbf{R}^N} fu\, dx : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R},$$
$$J_{a,f}(v) = \max_{t>0} I_{a,f}(tv) : \Sigma_+ \to \mathbf{R},$$

ここで,

$$\Sigma = \{v \in H^1(\mathbf{R}^N)\,;\, \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} = 1\},$$
$$\Sigma_+ = \{v \in \Sigma\,;\, v_+ \not\equiv 0\}.$$

汎関数 $I_{a,f}(u) : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ や $J_{a,f}(v) : \Sigma_+ \to \mathbf{R}$ の critical point は (0.1) の正値解に対応することがわかる.

我々は $I_{a,f}(u)$, $J_{a,f}(v)$ の critical point を次のようにして見つける. まず, 最初の正値解 $u^{(1)}(a,f;x) = u_{loc\ min}(a,f;x)$ を $I_{a,f}(u)$ の 0 の近くでのlocal minimum を attain する critical point として得る. 次に, $I_{a,f}(u)$, $J_{a,f}(v)$ の Palais-Smale condition は次のレベルでのみ破れることをチェックする:

$$I_{a,f}(u_0(x)) + \ell I_{1,0}(\omega) \quad \ell = 1, 2, \dots$$

ここで $I_{1,0}(u)$ は極限方程式 (0.3) に対応する汎関数, $\omega(x)$ は (0.3) の正値球対称解, $u_0(x)$ は $I_{a,f}(u)$ の critical point である. 特に, Palais-Smale condition は

$$I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f;x)) + I_{1,0}(\omega)$$

より低いレベルでは成り立つことがわかる.

次に $c \in \mathbf{R}$ に対して

$$[J_{a,f} \le c] = \{u \in \Sigma_+\,;\, J_{a,f}(u) \le c\}$$

という記号を導入する. $f(x) \ge 0$, $f(x) \not\equiv 0$ で $\|f\|_{H^{-1}(\mathbf{R}^N)}$ が十分小さいとき, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$[J_{a,f} \le I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f;x)) + I_{1,0}(\omega) - \varepsilon] \ne \emptyset$$

であり

$$\mathrm{cat}([J_{a,f} \le I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f;x)) + I_{1,0}(\omega) - \varepsilon]) \ge 2 \tag{1.1}$$

であることがわかる. ここで cat(·) は Lusternik-Schnirelman category をあらわす. したがって Category 理論から我々は 2 つの正値解 $u^{(2)}(a,f;x)$, $u^{(3)}(a,f;x)$ を

$$I_{a,f}(u^{(k)}(a,f;x)) < I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f:x)) + I_{1,0}(\omega), \qquad k = 2, 3. \tag{1.2}$$

を満たすものとして得る. ここで, もし $f \equiv 0$ ならば,

$$u_{loc\ min}(a,0;x) \equiv 0$$

であり,

$$[J_{a,0} \le I_{a,0}(u_{loc\ min}(a,0;x) + I_{1,0}(\omega)] = \emptyset \tag{1.3}$$

となるので，(1.1) は我々の証明の重要な鍵となる．(1.1) を得るために，我々は **[AT2]** (c.f. Bahri-Li **[BaYL]**, Bahri-Loins **[BaPLL]**) と同様にして次の interaction phenomenon を用いる：十分大きな $|y| \geq 1$ に対して

$$I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f;x)+\omega(x-y)) < I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f;x)) + I_{1,0}(\omega).$$

4 つ目の正値解を得るために，我々は $J_{a,f}(v)$ に対して Bahri-Li **[BaYL]** によるミニマックス法を適応する．次のミニマックス値：

$$b_{a,f} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{y\in\mathbf{R}^N} J_{a,f}(\gamma(y)),$$

ここで

$$\Gamma = \{\gamma \in C(\mathbf{R}^N, \Sigma_+)\,;\, \gamma(y) = \frac{\omega(\cdot - y)}{\|\omega\|_{H^1(\mathbf{R}^N)}} \quad \text{for large } |y|\}$$

を考えると，$b_{a,f}$ に対応する正値解 $u^{(4)}(a,f;x)$ を得ることができ，$u^{(4)}(a,f;x)$ は

$$I_{a,f}(u^{(4)}(a,f;x)) \geq I_{a,f}(u_{loc\ min}(a,f;x)) + I_{1,0}(\omega)$$

を満たす．

References

[AT1] S. Adachi and K. Tanaka, Four positive solutions for the semilinear elliptic equation: $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ in $\mathbf{R}^N$, to appear in *Calculus of Variations and PDE.*

[AT2] S. Adachi and K. Tanaka, *preprint.*

[BaC] A. Bahri and J. M. Coron, On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 253–294.

[BaYL] A. Bahri and Y. Y. Li, On the min-max procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field equations in $\mathbf{R}^N$, *Rev. Mat. Iberoamericana* **6** (1990), 1–15.

[BaPLL] A. Bahri and P. L. Lions, On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **14** (1997), 365–413.

[CZ] D. M. Cao and H. S. Zhou, Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **126A** (1996), 443–463.

[H] N. Hirano, Existence of entire positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations, *Nonlinear Anal.* **29** (1997), 889–901.

[J] L. Jeanjean, Two positive solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations, *Differential Integral Equations* **10** (1997), 609–624.

[K] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbf{R}^n$, *Arch. Rational Mech. Anal.* **105** (1989), 234–266.

[PLL1] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 109–145 and 223–283.

[PLL2] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 223–283.

[T] C. Taubes, Min-Max theory for the Yang-Mills-Higgs equations, *Comm. Math. Phys.* **97** (1985), 473–540.

[Z] X. P. Zhu, A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation, *J. Differential Equations* **92** (1991), 163–178.

Superlinear-sublinear type の非線型項を伴う拡散方程式の解の挙動について

久藤 衡介
早稲田大学大学院理工学研究科 M 2

1 はじめに

最初に次の半線型楕円型境界値問題：

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda|\phi|^{q-1}u + |\phi|^{p-1}\phi, & x \in \Omega, \\ \quad \phi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で，指数条件 $0 < q < 1 < p$ を課す．さらに λ は実数パラメーターである．(1.1) に関する最初の本格的な研究としては Ambrosetti–Brezis–Cerami [1] が挙げられる．[1] では $p < \infty$, $(N = 1, 2)$, $p \le (N+2)/(N-2)$, $(N \ge 3)$ のとき，ある正数 λ_1 が存在し $\lambda \in (0, \lambda_1)$ ならば (1.1) が少なくとも 2 個の正値解 $\underline{\phi}(x;\lambda) \le \overline{\phi}(x;\lambda)$ をもつことが示されている．なお Ouyang–Shi [6] は，若干の付加条件の下，特に $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < 1\}$ の場合，$\lambda \in (0, \lambda_1)$ のときの正値解は上記の 2 個に限られることを示している．今回，我々は (1.1) で特に $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ とした問題：

$$\text{(SP)} \begin{cases} -\phi_{xx} = \lambda|\phi|^{q-1}\phi + |\phi|^{p-1}\phi, \ x \in (0,1), \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

の解構造を完全に決定した ([5])．詳細は次節で述べるが，非負値解についてのみまとめると以下のようになる：

ある正数 λ_1 および負数 λ_{-1} が存在し，次の (i)–(iv) を満たす．

(i) $\lambda > \lambda_1$ のとき (SP) は非自明解をもたない．

(ii) $0 < \lambda < \lambda_1$ のとき (SP) はちょうど 2 個の正値解 $\underline{\phi}(x;\lambda) < \overline{\phi}(x;\lambda)$ をもち，これらは λ に関して $C[0,1]$ の位相で連続である．さらに $\lim_{\lambda\to\lambda_1}\underline{\phi}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_1}\overline{\phi}(\lambda)$ および $\lim_{\lambda\to 0}\underline{\phi}(\lambda) = 0$ を満たす．

(iii) $\lambda_{-1} \le \lambda \le 0$ のとき (SP) は一意的な正値解 $\overline{\phi}(x;\lambda)$ をもち，これらは λ に関して $C[0,1]$ の位相で連続である．

(iv) $\lambda < \lambda_{-1}$ のとき (SP) の非負値解の集合は連続体となり, λ が減少するとともに解のとりうるピーク数は増加する.

次にここで得られた (SP) の各解の安定性について述べよう. そこで次の半線型放物型の初期値境界値問題:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u, & (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases}$$

を考える. (P) の解析で困難なのは, 特に $\lambda > 0$ のとき sublinear term $\lambda|u|^{q-1}u$ の効果により (P) の局所解の一意性は一般には成り立たない点にある (Fujita–Watanabe [4] を参照されたい). 一方, $\lambda \in \mathbb{R}$ のときの局所解の存在, および $\lambda \leq 0$ のときの局所解の一意性は示される. しかしながら, 我々はあるクラスに属する初期値 u_0 に対して (P) の非負値局所解の一意性を示した. その結果に伴い Sattinger [7] の比較による安定性判定法を用い, (SP) の非負値解のうち, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ のときの最小正値解 $\underline{\phi}(x;\lambda)$ および $\lambda \leq 0$ のときの自明解が安定であるという結論を得た.

2 定常問題 (SP) の 解構造

(SP) の解構造は phase-plane analysis によって得られる. 以下で用いる記号を定義しておく. 各 $\lambda \in \mathbb{R}$ ごとの (SP) の解集合を $S(\lambda)$ と書く. さらに

$$S_n^+(\lambda) = \{\phi \in S(\lambda) \,|\, \phi \text{ has exactly } (n-1)\text{-zero points in } (0,1) \text{ and } \phi'(0) > 0\},$$
$$S_n^-(\lambda) = \{\phi \in S(\lambda) \,|\, \phi \text{ has exactly } (n-1)\text{-zero points in } (0,1) \text{ and } \phi'(0) < 0\}.$$

と定義する. 最初に $\lambda > 0$ のときの (SP) の解構造を述べる.

Theorem 2.1. *There exists a monotone increasing sequence of positive numbers $\{\lambda_n\}$ as $n \to \infty$ with the following properties:*

(i) *If $\lambda \in (0, \lambda_n]$, then*

$$S_n^+(\lambda) = \{\overline{\phi}_n(\,\cdot\,;\lambda)\,,\,\underline{\phi}_n(\,\cdot\,;\lambda)\},$$

where $\overline{\phi}_n(x;\lambda)$ and $\underline{\phi}_n(x;\lambda)$ satisfy $\overline{\phi}_n(i/n,\lambda) = \underline{\phi}_n(i/n,\lambda) = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ and $\|\overline{\phi}_n(\,\cdot\,;\lambda)\|_\infty \geq \|\underline{\phi}_n(\,\cdot\,;\lambda)\|_\infty$ for $\lambda \in (0,\lambda_n]$ with $\overline{\phi}_n(x;\lambda_n) \equiv \underline{\phi}_n(x;\lambda_n)$.

(ii) *If $\lambda \in (\lambda_n, \infty)$, then $S_n^+(\lambda) = \emptyset$.*

Moreover, $S_n^-(\lambda) = \{-\phi \,|\, \phi \in S_n^+(\lambda)\}$ and $S(\lambda) = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^{\pm}(\lambda)$.

上の Theorem 2.1 により，任意の $\lambda > 0$ に対して (SP) は可算無限個の解をもつことがわかる．さらに詳しく任意の $\lambda > \lambda_n$ に対し，(SP) の非自明解は必ず $(0,1)$ 上で n 個以上の零点をもつこともわかる．次に $\overline{\phi}_n(\cdot\,;\lambda)$ および $\overline{\phi}_n(\cdot\,;\lambda)$ の $\lambda \in (0,\lambda_n)$ に関する連続性についての結果を述べる．

Theorem 2.2. *For each $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\phi}_n(\cdot\,;\lambda)$ and $\underline{\phi}_n(\cdot\,;\lambda)$ are continuous for $\lambda \in (0,\lambda_n]$ in the topology of $C^2[0,1]$.*

Theorem 2.1 および 2.2 により，$\lambda > 0$ に関する (SP) の大域的な解構造を直積空間 $\mathbb{R}^+ \times C^2[0,1]$ で見ると次のようにまとめられる：

$$\Gamma_n^+ = \{(\lambda,\phi) \mid \phi \in S_n^+(\lambda)\}, \quad \Gamma_n^- = \{(\lambda,\phi) \mid \phi \in S_n^-(\lambda)\}. \tag{2.1}$$

と定義すると，Γ_n^+ (resp. Γ_n^-) は $(\lambda,\phi) = (0,0)$ から分岐し $(\lambda,\phi) = (\lambda_n, \overline{\phi}_n(\lambda_n))$ (resp. $(\lambda,\phi) = (\lambda_n, -\overline{\phi}_n(\lambda_n))$) を一意的な turning point とする連続曲線 ($\supset$-型 branch) となる．

$\lambda \le 0$ のときの (SP) の解構造は若干複雑となる．以下で，L とは p および q によって定まるある正定数をあらわす．最初に $S_n^+(\lambda)$ および $S_n^-(\lambda)$ の構造を述べる．

Theorem 2.3. *For each $n \in \mathbb{N}$, define $\lambda_{-n} = (2nL)^{2(p-q)/(p-1)}$. Then the following properties* (i) *and* (ii) *hold true :*

(i) *If $\lambda \in [\lambda_{-n}, 0]$, then $S_n^+(\lambda) = \{\overline{\phi}_n(\cdot\,;\lambda)\}$, where $\overline{\phi}_n(x;\lambda)$ vanishes at $x = i/n$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.*

(ii) *If $\lambda \in (-\infty, \lambda_{-n})$, then $S_n^+(\lambda) = \emptyset$.*

Moreover, $S_n^-(\lambda) = \{-\phi \mid \phi \in S_n^+(\lambda)\}$.

Theorem 2.4. *For each $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\phi}_n(\cdot\,;\lambda)$ is continuous for $\lambda \in [\lambda_{-n}, 0]$ in $C^2[0,1]$.*

Theorem 2.2 および 2.4 より (2.1) で定義した Γ_n^+, Γ_n^- はそれぞれ $\lambda = \lambda_{-n}$ まで連続曲線として延長されることもわかる．

$\lambda < \lambda_{-1}$ のときは $S(\lambda)$ は 1 つの $(0,1)$ 上で compact support をもつ関数によって生成される連続体 $D_1(\lambda)$ を含むようになる：

Theorem 2.5. *For $\lambda \in (-\infty, \lambda_{-1})$ set $M(\lambda) = L|\lambda|^{-(p-1)/2(p-q)}$. Then for any $x_1 \in [M(\lambda), 1-M(\lambda)]$,* (P) *has a non-negative solution $\psi(x;\lambda,x_1)$ such that*

$$\|\psi(\,\cdot\,;\lambda,x_1)\|_\infty = \psi(x_1;\lambda,x_1) = \left\{\frac{|\lambda|(p+1)}{q+1}\right\}^{1/(p-q)} \quad \text{and}$$
$$\operatorname{supp}\psi(\,\cdot\,;\lambda,x_1) = [\,x_1 - M(\lambda), x_1 + M(\lambda)\,] \subset [\,0,1\,],$$

Moreover, the set of non-negative solutions is generated by $\psi(x;\lambda,x_1)$; that is

$$D_1(\lambda) = \{\psi(\,\cdot\,;\lambda,x_1) \mid M(\lambda) \le x_1 \le 1 - M(\lambda)\}.$$

こういった compact support をもつ解は, cubic-like type の非線型項を伴う porous-medium 方程式の定常問題においても観測されている (Aronson–Crandall–Peletier [3] を参照されたい).

ここで Theorem 2.5 で得られた, (0,1) 上で compact support をもつ (SP) の解 $\psi(x;\lambda,x_0)$ の support の長さが $|\lambda|$ に関して単調減少であることに注目する. このとき実は $2M(\lambda)=1/n$ は $\lambda=\lambda_{-n}$ と同値であることから, $\lambda<\lambda_{-n}$ のとき $S(\lambda)$ は任意の自然数 $j\le n$ に対し $(0,1)$ 上で compact support をもつ j 個の関数たちによって生成される連続体 $D_j(\lambda)$ を含むようになる：

Corollary 2.6. *Let n and j be positive integers such that $j\le n$. For $\lambda\in(-\infty,\lambda_{-n})$, assume that $x_1,x_2,\cdots,x_j$ satisfy*

$$\begin{cases}0<x_1<x_2<\cdots<x_j<1 \ \mathit{and}\\ x_i-x_{i-1}>2M(\lambda)\ \mathit{for}\ 1\le i\le j+1,\end{cases}$$

with $x_0=0$, $x_{j+1}=1$. Then $\sum_{i=1}^{j}\alpha_i\psi(x;\lambda,x_i)$, where $\alpha_i=1$ or -1, satisfies (P).

このとき Corollary 2.6 により, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $D_n(\lambda)$ は具体的に次のように書かれる:

$$D_n(\lambda)=\begin{cases}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(\,\cdot\,;\lambda,x_i)\ \middle|\ \begin{array}{l}0=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=1\text{ and}\\ |x_i-x_j|>2M(\lambda)\text{ for } i\ne j\end{array}\right\}\\ \text{if }\lambda\in(-\infty,\lambda_{-n}),\\ \emptyset\text{ if }\lambda\in[\lambda_{-n},0].\end{cases}$$

$D_n(\lambda)$ の各元は $(0,1)$ 上でちょうど n 個の 0 でない極値をもつこともわかる. さらに $D_n(\lambda)$ は $\lambda<\lambda_{-n}$ において次の意味で連続である：

Theorem 2.7. *Let $n\in\mathbb{N}$. If $\lambda,\mu\in(-\infty,\lambda_{-n})$, then*

$$\operatorname{dist}(D_n(\lambda),D_n(\mu))\longrightarrow 0 \ \mathit{as}\ |\lambda-\mu|\to 0,$$

where

$$\operatorname{dist}(D_n(\lambda),D_n(\mu))=\sup_{\phi\in D_n(\lambda)}\left(\inf_{\psi\in D_n(\mu)}\|\phi-\psi\|_{C^2}\right).$$

Theorem 2.3 以降をまとめると, $\lambda\le 0$ のときの (SP) 解構造は次のようにまとめられる：

Theorem 2.8. *For $\lambda\le 0$,*

$$S(\lambda)=\{0\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n^+(\lambda)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n^-(\lambda)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)$$

where $S_n^{\pm}(\lambda)\ne\emptyset$ (resp. $D_n(\lambda)\ne\emptyset$) if and only if $D_n(\lambda)=\emptyset$ (resp. $S_n^{\pm}(\lambda)=\emptyset$).

3 非定常問題 (P) の解の一意性に対する考察

(P) の局所解の一意存在性について考える. 最初に任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して初期値 $u_0 \in C_0^1[0,1]$ であれば局所解は存在する. 証明は例えば, 非線型項が滑らかなときに用いられる Banach の不動点定理の代わりに, Schauder の不動点定理を用いることによって示される. 次に一意性であるが, これは $\lambda \leq 0$ のときは容易に示される. 一方, $\lambda > 0$ のとき sublinear term $\lambda |u|^{q-1}u$ の効果により $u_0 \equiv 0$ に対して正値局所解 $u(x,t;0)$ および負値局所解 $-u(x,t;0)$ が存在する ([4]). このことは (P) の局所解の一意性は一般には成り立たないことを意味している. しかしながら, 我々は非線型項 $\lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u$ の Lipshitz 連続性が $u = 0$ のみでしか破れていない点に注目し, 初期値 u_0 が以下の条件 (C) を満たすとき (P) の非負値局所解の一意性を示した.

$$(\mathrm{C}):\ u_0 \in C_0^1[0,1],\ u_0 > 0 \text{ in } (0,1),\ u_0'(0) > 0 \text{ and } u_0'(1) < 0.$$

上記の一意性は次の比較定理から得られる：

Theorem 3.1. *Let u (resp. v) be any non-negative solutions of* (P) *with initial value u_0 (resp. v_0). If u_0 satisfies* (C) *and $u_0 \geq v_0 \geq 0$ in $(0,1)$, then $u(x,t) \geq v(x,t)$ in $(0,1) \times (0,\infty)$.*

Theorem 3.1 は $u_0 \equiv 0$ とすると, 先に述べた一意性の破れから成り立たない. 一方, この比較定理で条件 (C) を $u_0 \not\equiv 0$ まで弱められるかどうかは興味ある問題だが今のところわかっていない. なお Cauchy 問題に対する類似の結果が Aguirre–Escobedo [2] によって得られている.

4 定常問題 (SP) の解の安定性

2 節で述べた (SP) の解のうち非負値なものの安定性について考える. まず前節で述べたように $\lambda > 0$ のとき初期値 $u_0 \equiv 0$ に対して (P) の非自明な局所解が存在する. このことは $\lambda > 0$ のときの (SP) の自明解の不安定性を意味する. 一方 (SP) の他の非負値解の安定性に対する考察は, Theorem 3.1 が得られたことで, Sattinger [7] による比較を用いた安定性の判定法を用いることによって進められる.

最初に $\lambda \in (0,\lambda_1)$ のときの (SP) の最小正値解 $\underline{\phi}_1(x;\lambda)$ が安定であることを述べる:

Theorem 4.1. *For each $\lambda \in (0,\lambda_1)$, $\underline{\phi}_1(x;\lambda)$ is asymptotically stable in the following sense:*

> *For any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that if $\|u_0 - \underline{\phi}_1(\lambda)\|_{C^1} < \delta$, then the non-negative solution of* (P) *satisfies $\|u(t) - \underline{\phi}_1(\lambda)\|_\infty < \varepsilon$ for all $t \geq 0$ and $\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \underline{\phi}_1(\lambda)\|_\infty = 0$.*

証明の概略を述べる．まず任意に固定された $\lambda \in (0, \lambda_1)$ に対し, $\underline{\lambda}$ および $\overline{\lambda}$ を $0 < \underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda} < \lambda_1$ を満たすようにとると, $\underline{\phi}_1(\underline{\lambda})$ は (SP) の sub-solution および $\underline{\phi}_1(\overline{\lambda})$ は (SP) の super-solution であることに注意する．このとき,

$$\underline{\phi}_1(x; \underline{\lambda}) < \underline{\phi}_1(x; \lambda) < \underline{\phi}_1(x; \overline{\lambda}) \quad \text{for } x \in (0, 1)$$

が phase-plane analysis により示される．したがって $\underline{\phi}_1(\underline{\lambda})$ と $\underline{\phi}_1(\overline{\lambda})$ ではさまれた領域に存在する u_0 を初期値とした (P) の解 $u(t)$ は, $\lim_{t \to \infty} \|u(t) - \underline{\phi}_1(\lambda)\|_\infty = 0$ を満たす ([7])．さらに Theorem 2.2 を考慮すると所望の結果を得る．

同様の考察で, $\lambda \in (\lambda_{-1}, \lambda_1)$ のときの最大正値解 $\overline{\phi}_1(\lambda)$ および $\lambda \in (-\infty, \lambda_{-1}]$ のとき $D_1(\lambda)$ に含まれる任意の定常解の不安定性も示される．また $\lambda \in (-\infty, 0]$ のときの自明解の漸近安定性も示される．

参考文献

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis, and G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.*, **122** (1994), 519–543.

[2] J. Aguirre and M. Escobedo, A Cauchy problem for $u_t - \Delta u = u^p$ with $0 < p < 1$. Asymptotic behaviour of solutions, *Ann. Fac. Sci. Toulouse.*, **8** (1986-1987), 175–203.

[3] D. Aronson, M. G. Crandall, and L. A. Peletier, Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem, *Nonlinear Anal.*, **6** (1982), 1001–1022.

[4] H. Fujita and S. Watanabe, On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasi-linear parabolic equations, *Comm. Pure. Math.*, **21** (1968), 631–652.

[5] K. Kuto, On the structure of solutions of one-dimensional elliptic equations with concave and convex nonlinearities, *preprint.*

[6] T. Ouyang and J. Shi, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem, II, *J. Differential Equations.*, **158** (1999), 94–151.

[7] D. H. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.*, **21** (1972), 979–1000.

On the Cauchy problem of the Time Dependent Ginzburg-Landau equations

BY

TAKAHIRO AKIYAMA†, HIRONORI KASAI‡ AND MASAYOSHI TSUTSUMI‡

(†Department of Mathematical Science, Waseda University.
‡Department of Applied Physics, Waseda University,)

1 Cauchy problem.

We consider Cauchy problem for the Time Dependent Ginzburg-Landau equations in $\mathbf{R}^3$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{D}_A^2 \psi + \lambda(1 - |\psi|^2)\psi + i\Phi\psi, \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbf{R}^3, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathrm{rot}^2\mathbf{A} - \frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\} + \nabla\Phi, \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbf{R}^3, \quad (1.2)$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(x), \qquad \mathbf{A}(0,x) = \mathbf{A}_0(x), \qquad \text{in } \{0\}\times\mathbf{R}^3, \quad (1.3)$$

where $\mathbf{D}_A\psi = (\nabla\psi - i\mathbf{A}\psi)$, ψ is the complex order parameter, $\mathbf{A}$ is the magnetic vector potential, Φ is the scalar electric potential and λ is a real positive constant called the Ginzburg-Landau parameter of the substance. ψ_0 and $\mathbf{A}_0$ are initial conditions. The system (1.1)-(1.2), which we call the TDGL equations below, was proposed by A.Schmid [8] or L.P.Gor'kov and G.M. Eliashberg [5]. The TDGL equations have an important property, namely, that of gauge invariance. We consider this problem in the Coulomb gauge, namely,

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0, \qquad \text{in } \mathbf{R}^3. \quad (1.4)$$

For $1 \le p \le \infty$, $L^p(\mathbf{R}^3)$ denote the standard Lebesgue space. $\mathbf{L}^p_\sigma(\mathbf{R}^3) = \{\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) : A_i \in L^p(\mathbf{R}^3)$ and $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ in the sense of distribution$\}$ which is a subspace of $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^3) = \{L^p(\mathbf{R}^3)\}^3$. $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^3)$ is defined as $L^p(\mathbf{R}^3) \oplus \mathbf{L}^p_\sigma(\mathbf{R}^3)$ where $\oplus$ implies direct product. We denote the norm in $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^3)$ as

$$\|U\|_p = \|\psi\|_{L^p(\mathbf{R}^3)} + \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^3)} = \left\{\int_{\mathbf{R}^3} |\psi|^p dx\right\}^{1/p} + \sum_{i=1}^{3}\left\{\int_{\mathbf{R}^3} |A_i|^p dx\right\}^{1/p}, \quad (1.5)$$

where $U = (\psi, \mathbf{A})$.
Since $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, the TDGL equations (1.1)-(1.2) are rewritten as

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta\psi - 2i(\mathbf{A}\cdot\nabla\psi) - |\mathbf{A}|^2\psi + \lambda(1-|\psi|^2)\psi + i\Phi\psi, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = P_p\Delta\mathbf{A} + P_p\left[-\frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}(\nabla\psi) - \psi(\overline{\nabla\psi})\right\} + |\psi|^2\mathbf{A}\right], \tag{1.7}$$

$$\Delta\Phi = \mathrm{div}\left\{\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\right\}, \tag{1.8}$$

where, P_p is the projection $P_p : \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \to \mathbf{L}^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$.
Using (1.8), We have the following proposition.

Proposition 1 *We have*

$$\|\Phi\|_{L^6(\mathbf{R}^3)} \le C\left\|\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)}. \tag{1.9}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)} &= \int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\Phi|^2dx = -\int_{\mathbf{R}^3}\Delta\Phi\Phi dx \\
&= -\int_{\mathbf{R}^3}\mathrm{div}\left\{\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\right\}\Phi dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^3}\left\{\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\right\}\cdot\nabla\Phi dx \\
&\le \left\|\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)}\|\nabla\Phi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Using Sobolev-Gagliardo-Nirenberg's inequality, we have

$$\|\Phi\|_{L^6(\mathbf{R}^3)} \le C\|\nabla\Phi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)} \le C\left\|\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)}. \tag{1.11}$$

Q.E.D.
We employ the Semigroup Theory. (1.6) and (1.7) with the initial conditions (1.3) are expressed as an abstract evolution equation as follows:

$$\frac{d}{dt}U + \mathcal{A}U = \mathcal{B}(U), \tag{1.12}$$

$$U(0) = U_0 = (\psi_0,\ \mathbf{A}_0)^t, \tag{1.13}$$

where $U = (\psi, \mathbf{A})^t$ is a pair of functions, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\Delta - \lambda I & 0 \\ 0 & -P_p\Delta \end{pmatrix}$ and

$$\mathcal{B}(U) = \begin{pmatrix} -2i(\mathbf{A}\cdot\nabla\psi) - |\mathbf{A}|^2\psi - \lambda|\psi|^2\psi + i\Phi(\psi,\mathbf{A})\psi \\ P_p\left[-\frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}(\nabla\psi) - \psi(\overline{\nabla\psi})\right\} + |\psi|^2\mathbf{A}\right] \end{pmatrix}.$$

The operator $-\mathcal{A}$ generates a semigroup $e^{-tA} = (S_1(t), S_2(t))$. (1.12)-(1.13) is then converted into the integral equation

$$U = \tilde{U} + \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathcal{B}(U(s))ds, \tag{1.14}$$

where $\tilde{U} = e^{-tA}U_0$. For the $1 < p \le q < \infty$, the basic estimates we use are

$$\|S_1(t)\psi\|_{L^q(\mathbf{R}^3)} \le Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}, \tag{1.15}$$

$$\|\partial S_1(t)\psi\|_{L^q(\mathbf{R}^3)} \le Ct^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}, \tag{1.16}$$

$$\|S_2(t)\mathbf{A}\|_{\mathbf{L}^q_\sigma(\mathbf{R}^3)} \le Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{L}^p_\sigma(\mathbf{R}^3)}, \tag{1.17}$$

$$\|\partial S_2(t)\mathbf{A}\|_{\mathbf{L}^q_\sigma(\mathbf{R}^3)} \le Ct^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{L}^p_\sigma(\mathbf{R}^3)}, \tag{1.18}$$

where $\partial = \partial/\partial x_i (i = 1, 2, 3)$. Here and elsewhere, C denotes various constants that do not depend on the individual function U. (1.15) and (1.17) follow from the fact that the L^p-norm of the heat kernel is proportional to $t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$. (1.16) and (1.18) follow from the property of the derivatives of the heat kernel.

2 Main results.

We have the following theorems.

Theorem 1 *Let $U_0 \in \mathcal{L}^3(\mathbf{R}^3)$. Then there is a $T > 0$ and a unique solution U such that*

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}}U \in BC([0,T) : \mathcal{L}^q(\mathbf{R}^3)) \qquad \textit{for } 3 \le q \le \infty, \tag{2.1}$$

$$t^{1-\frac{3}{2q}}\partial U \in BC([0,T) : \mathcal{L}^q(\mathbf{R}^3)) \qquad \textit{for } 3 \le q < \infty. \tag{2.2}$$

Both take zero at $t = 0$ except for $q = 3$ in (2.1), in which $U(0) = U_0$. Furthermore, U has the additional property

$$U \in L^r(0, T_1 : \mathcal{L}^q(\mathbf{R}^3)) \qquad \textit{with } \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{q}\right),\ 3 < q < 9, \tag{2.3}$$

for some $0 < T_1 \le T$. Moreover, if there is $\delta > 0$ such that $\|U_0\|_3 < \delta$, then the solution in Theorem 1 is global, i.e. we may take $T = T_1 = \infty$.

Theorem 2 *Let $U_0 \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{L}^3(\mathbf{R}^3)$, where $1 < p < 3$. Then the solution U given by Theorem 1, has the following additional properties,*

$$U,\ t^{1/2}\partial U \in BC([0,T_2) :\ \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{L}^3(\mathbf{R}^3)), \tag{2.4}$$

with some $0 < T_2 \le T$. Moreover, if there is $\delta' > 0$ such that $\|U_0\|_3 < \delta' \le \delta$, then the solution in Theorem 2 is global, i.e. we may take $T = T_1 = T_2 = \infty$.

References

[1] Z. Chen and K.-H. Hoffmann, *Numerical studies of Non-Stationary Ginzburg-Landau Model for Superconductivity* – Advances in Mathematical Sciences and Applications **5** (1995) 363-389.

[2] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier Stokes initial value problem I.* – Arch. Rat. Mech. and Anal. **16** (1964) 269-315.

[3] H. Iwashita , *L_q-L_r estimate for the solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes intial value problem in L_q spaces* – Math. Ann. **285** (1989) 265-288.

[4] Y. Giga *Regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes system.* – Proc. AMS Summer Inst. (1983)

[5] L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg, *Generalization of Ginzburg-Landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities* – Soviet Phys. J.E.P.T. **27** (1968) 328-334.

[6] T. Kato *Strong L^p-Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbf{R}^m$, with Applications to Weak Solutions* – Math. Z.**187** (1984) 481-490.

[7] A. Pazy, *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (2nd edition)* – Springer Verlag.

[8] A. Schmid, *A time dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state* – Phys. konden.Materie **5** (1966) 302-317.

[9] Qi Tang, *On Evolution System of Ginzburg-Landau Equations with Fixed Total Magnetic Flux* – Commun. in Partial Differential Equations **20** (1995) 1-36.

[10] Qi Tang and S. Wang, *Time dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity* – Physica D **88** (1995) 139-166.

[11] M. Tsutsumi and H. Kasai, *The Time Dependent Ginzburg-Landau Maxwell Equations* – To appear Nonlinear Analysis TMA

Nonlinear Schrödinger equations with monotone nonlinearities

Tomomi Yokota

Department of Mathematics, Science University of Tokyo
e-mail: yokota@minserver.ma.kagu.sut.ac.jp

1. Introduction

Let Ω be a bounded or unbounded domain in $\mathbb{R}^N$ with compact C^2-boundary $\partial\Omega$ (including $\mathbb{R}^N$ itself). In $L^2(\Omega) := L^2(\Omega;\mathbb{C})$ we consider the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger type equation with monotone nonlinearities:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u + (1+i\beta)|u|^{p-1}u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$u(x,\, t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Here u is a complex-valued unknown function, $i = \sqrt{-1}$, $\beta \in \mathbb{R}$, and the exponent $p \geq 1$ is a constant. In particular, if $\beta = 0$, then (1.1) is written as

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

In this special case the global existence of unique strong solutions has been established by Pecher and von Wahl [7], Shigeta [8], and Okazawa and Yokota [5] (for weak solutions see Lions [3, Chapitre 1, Section 10]). Equation (1.1) is a mixed form between (1.4) and the usual nonlinear Schrödinger equation $\partial_t u - i\Delta u + i|u|^{p-1}u = 0$. On the other hand, (1.1) is formally included in the complex Ginzburg-Landau equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{p-1}u - \gamma u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{1.5}$$

However, (1.5) is usually considered for $\lambda > 0$ excluding the limit case $\lambda = 0$. In [5] we proved the global existence of unique strong solutions for (1.5) under condition

$$\frac{|\beta|}{\kappa} \leq \frac{2\sqrt{p}}{p-1} \tag{1.6}$$

without any restriction on the dimention $N \geq 1$ and the exponent $p \geq 1$.

The first purpose of this note is to prove the global existence of unique strong solutions to (1.1)–(1.3) for $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$ under condition (1.6) with $\kappa = 1$ by employing the theory of nonlinear semigroups. To do so we need a careful analysis of the computation in a perturbation theorem prepared in [5].

The second purpose is to discuss the relation between solutions of (1.1) and those of (1.5). Namely, we consider the following initial-boundary value problem:

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - (\lambda + i)\Delta u_\lambda + (1 + i\beta)|u_\lambda|^{p-1}u_\lambda = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.7}$$

$$u_\lambda(x,\, t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.8}$$

$$u_\lambda(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.9}$$

where $\lambda > 0$. Let $u(t) := u(x,t)$ and $u_\lambda(t) := u_\lambda(x,t)$ be unique global strong solutions to (1.1)–(1.3) and (1.7)–(1.9), respectively. Then we shall give the convergent rate of $u_\lambda(t)$ to $u(t)$ as $\lambda \downarrow 0$. In particular, if $\beta = 0$, then our result is the same as in [5].

2. Results

For the abstract setting of (1.1)–(1.3) we introduce two operators in the complex Hilbert space $X := L^2(\Omega)$ with inner product $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2}$ and norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$. Namely we define operators S and B as follows:

$$\begin{aligned} Su &:= -\Delta u \quad \text{for} \quad u \in D(S) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Bu &:= |u|^{p-1}u \quad \text{for} \quad u \in D(B) := L^2(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega), \end{aligned}$$

where $H^2(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$ are the usual Sobolev spaces of L^2-type. Then (1.1)–(1.3) can be regarded as one of initial value problems for abstract evolution equations in X:

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad u(0) = u_0, \tag{2.1}$$

where A is given by

$$A := iS + (1 + i\beta)B \quad \text{with} \quad D(A) := D(S) \cap D(B).$$

Before stating our results we give definitions of strong solutions to (1.1)–(1.3).

Definition 2.1. The global *strong solution* to (1.1)–(1.3) is defined as an X-valued function $u(t) := u(x,t)$ with the following properties:

(a) $u(t) \in D(A)$ for all $t \geq 0$ and $Au(\cdot) \in L^\infty(0,\infty;X)$.
(b) $u(\cdot)$ is Lipschitz continuous on $[0,\infty)$: $u(\cdot) \in C^{0,1}([0,\infty);X)$.
(c) The strong derivative $u'(t)$ exists for a.a. $t \geq 0$ and is bounded in X on $[0,\infty)$: $u(\cdot) \in W^{1,\infty}(0,\infty;X)$.
(d) $u(\cdot)$ satisfies the equation in (2.1) a.e. on $[0,\infty)$ as well as the initial condition.

Our main results in this note are now stated as follows.

Theorem 2.2. *Let $-c_p^{-1} < \beta \le c_p^{-1}$ where $c_p := (p-1)/(2\sqrt{p})$. Then for any initial value $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$ there exists a unique global strong solution $u(t) := u(x,t)$ to* (1.1)–(1.3) *in X such that*

$$
\begin{gathered}
u(\cdot) \in L^\infty(0,\infty; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty; L^{2p}(\Omega)), \\
u(\cdot) \in C^{0,1/2}([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^{0,1/(p+1)}([0,\infty); L^{p+1}(\Omega)), \\
\|u(t)\|_{H^1} \le \|u_0\|_{H^1}, \\
\|u(t) - v(t)\|_{L^2} \le \|u_0 - v_0\|_{L^2}, \\
\|\nabla u(t) - \nabla v(t)\|_{L^2}^2 \le K_1(\|Au_0\|_{L^2} + \|Av_0\|_{L^2})\|u_0 - v_0\|_{L^2}, \\
\|u(t) - v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \le 2^{p-1} K_2(\|Au_0\|_{L^2} + \|Av_0\|_{L^2})\|u_0 - v_0\|_{L^2},
\end{gathered}
$$

where $v(t)$ is a solution to (1.1)–(1.3) *with initial value $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$ and $K_1 := 1 + K_2|1 + i\beta|$, $K_2 := (1 + c_p)/(1 + c_p\beta)$.*

Theorem 2.3. *Let β be the same as in* Theorem 2.2. *For $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$ let $u(t) := u(x,t)$ and $u_\lambda(t) := u_\lambda(x,t)$ be unique global strong solutions to* (1.1)–(1.3) *and* (1.7)–(1.9), *respectively. Then for $t \ge 0$ and $\lambda > 0$,*

$$
\begin{gathered}
\|u(t) - u_\lambda(t)\|_{L^2} \le (\lambda t/2)^{1/2} \|\nabla u_0\|_{L^2}, \\
\|\nabla u(t) - \nabla u_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \le (\lambda t/2)^{1/2} K_1(\lambda\|\Delta u_0\|_{L^2} + 2\|Au_0\|_{L^2})\|\nabla u_0\|_{L^2}, \\
\|u(t) - u_\lambda(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \le (\lambda t/2)^{1/2} 2^{p-1} K_2(\lambda\|\Delta u_0\|_{L^2} + 2\|Au_0\|_{L^2})\|\nabla u_0\|_{L^2}.
\end{gathered}
$$

Remark. 1) In the case where $\beta = -c_p^{-1}$ the situation is more delicate: we will investigate this case and report our progress in the future.

2) Let $N \le 3$. Then the solution to (1.1)–(1.3) seems to be of class C^1; this can be shown by regarding (1.1) as a *semilinear* evolution equation (cf. [7]).

3) The Neumann problem can be dealt with in the same way as the Dirichlet problem mentioned above.

4) Our method can be also applied to (1.1) with generalized nonlinear term $g(x, |u|^2)u$. Here we assume that $g \in C(\Omega \times [0,\infty); \mathbb{R}) \cap C^1(\Omega \times (0,\infty); \mathbb{R})$ with $0 \le s\,(\partial g/\partial s)(x,s) \le \sigma g(x,s)$ and $|\nabla_x g(x,s)| \le k_1 g(x,s) + k_2$ for some constants σ, k_1, $k_2 \ge 0$ (cf. [6]).

3. Preliminaries

This section is devided into two parts: in the first part we review the abstract Cauchy problem with maximal monotone operator and its relation to the theory of nonlinear semigroups; in the second we consider the maximal monotonicity of linear combinations of a nonnegative selfadjoint operator and a nonlinear maximal monotone operator with complex coefficients.

3.1. Nonlinear semigroups and evolution equations

Let X be a complex Hilbert space with inner product $(\cdot,\cdot)$ and norm $\|\cdot\|$. An operator A with domain $D(A)$ and range $R(A)$ in X is said to be *monotone* (or accretive) if $\mathrm{Re}(Au_1 - Au_2,\ u_1 - u_2) \geq 0$ for $u_1,\ u_2 \in D(A)$. If, in addition, $R(A+\zeta) = X$ for some (and hence for every) $\zeta \in \mathbb{C}$ with $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$, then we say that A is *maximal monotone* (or m-accretive) in X.

The next theorem is fundamental in solving (1.1)–(1.3) regarded as (2.1) (see Kato [**2**] and Showalter [**9**, Proposition IV.3.1]).

Theorem 3.1. *Let A be a nonlinear maximal monotone operator in X. Then for any $u_0 \in D(A)$ there exists a unique strong solution to the initial value problem*

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad u(0) = u_0, \tag{3.1}$$

in the following sense:

(a) $u(t) \in D(A)$ *and* $\|Au(t)\| \leq \|Au_0\|$ *for all* $t \geq 0$.
(b) $\|u(t) - u(s)\| \leq \|Au_0\| \cdot |t - s|,\ t, s \geq 0$.
(c) du/dt *exists a.e. on* $[0,\infty)$, *with* $\|(du/dt)(t)\| \leq \|Au_0\|$ *(a.e.)*.
(d) $u(\cdot)$ *satisfies the equation in* (3.1) *a.e. on* $[0,\infty)$ *as well as the initial condition.*

We can define the solution operator $U(t) : D(A) \to D(A)$ by $U(t)u_0 := u(t),\ t \geq 0$, where $u(\cdot)$ is a unique solution to (3.1) in the sense of Theorem 3.1 (a)–(d). Denoting the continuous extension again by $U(t)$, we obtain a one-parameter family $\{U(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ (the closure of $D(A)$ in X) which satisfies

(a) $U(0) = 1,\ \ U(t+s) = U(t)U(s),\ \ t, s \geq 0$,
(b) $U(t)v \to v\ (t \downarrow 0),\ \ v \in \overline{D(A)}$,
(c) $\|U(t)v_1 - U(t)v_2\| \leq \|v_1 - v_2\|,\ \ v_1, v_2 \in \overline{D(A)},\ \ t \geq 0$.

The family $\{U(t); t \geq 0\}$ is called a *contraction semigroup on $\overline{D(A)}$ generated by $-A$.*

3.2. Perturbations of maximal monotone operators

An operator B in X is said to be *m-sectorial of type $S(c)$* if B is maximal monotone and *sectorial of type $S(c)$*:

$$|\mathrm{Im}(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)| \leq c\mathrm{Re}(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)$$

for $u_1, u_2 \in D(B)$ (cf. Goldstein [**1**, Definition 1.5.8]). This implies that the monotonicity of B is preserved to some extent under rotation. In fact, let $\beta \in \mathbb{R}$ with $|\beta| \leq c^{-1}$. Then $(1 + i\beta)B$ is monotone in X:

$$\mathrm{Re}((1 + i\beta)(Bu_1 - Bu_2), u_1 - u_2) \geq (c^{-1} - |\beta|)\, |\mathrm{Im}(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)| \geq 0.$$

Now we state a perturbation theorem for maximal monotone operators which is a slight extension of [**5**, Theorem 2.3].

Theorem 3.2. *Let S be a nonnegative selfadjoint operator in X. Let B be a nonlinear m-sectorial operator of type $S(c)$ in X. Assume that $D(S) \cap D(B) \neq \emptyset$ and for $u \in D(S)$ and $\varepsilon > 0$,*

$$|\mathrm{Im}(S_\varepsilon u, Bu)| \leq c\mathrm{Re}(S_\varepsilon u, Bu),$$

where S_ε is the Yosida approximation of S: $S_\varepsilon := \varepsilon^{-1}[1-(1+\varepsilon S)^{-1}]$. For $\beta \in \mathbb{R}$ let

$$A := iS + (1+i\beta)B, \quad D(A) := D(S) \cap D(B).$$

Then

(a) *A is maximal monotone in X, provided that $-c^{-1} < \beta \leq c^{-1}$.*
(b) *For $v \in D(S^{1/2})$ and $\zeta \in \mathbb{C}$ with* $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$,

$$\|S^{1/2}(A+\zeta)^{-1}v\| \leq (\mathrm{Re}\,\zeta)^{-1}\|S^{1/2}v\|.$$

(c) *For $u_0 \in D(A)$ and $t \geq 0$,*

$$\|BU(t)u_0\| \leq \frac{1+c}{1+c\beta}\|Au_0\|,$$

where $\{U(t); t \geq 0\}$ is the contraction semigroup on $\overline{D(A)}$ generated by $-A$.

Corollary 3.3. *In* Theorem 3.2 *assume further that $D(A)$ is dense in X. Then $U(t)$ leaves $D(S^{1/2})$ invariant and for $v \in D(S^{1/2})$ and $t \geq 0$,*

$$\|S^{1/2}U(t)v\| \leq \|S^{1/2}v\|.$$

In particular, if $0 \in D(B)$ and $B0 = 0$, then for $v \in X$ and $t \geq 0$,

$$\|U(t)v\| \leq \|v\|.$$

By the same way as in the proof of [**5**, Theorem 2.7] we have

Theorem 3.4. *Let S, B and A be the same as in* Theorem 3.2. *Then for $\lambda > 0$, $v \in D(S^{1/2})$ and $\zeta \in \mathbb{C}$ with* $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$,

$$\left\|(A+\zeta)^{-1}v - (\lambda S + A + \zeta)^{-1}v\right\| \leq (\lambda/4)^{1/2}(\mathrm{Re}\,\zeta)^{-3/2}\|S^{1/2}v\|.$$

Let $\{U_\lambda(t); t \geq 0\}$ be the contraction semigroup on $\overline{D(A)}$ generated by $-(\lambda S + A)$. Then for $\lambda > 0$, $u_0 \in D(A)$ and $t \geq 0$,

$$\|BU_\lambda(t)u_0\| \leq \frac{1+c}{1+c\beta}\|(\lambda S + A)u_0\|.$$

Assume further that $D(A)$ is dense in $D(S^{1/2})$ (that is, $D(A)$ is a core for $S^{1/2}$). Then for $\lambda > 0$, $v \in D(S^{1/2})$ and $t \geq 0$,

$$\|U(t)v - U_\lambda(t)v\| \leq (\lambda t/2)^{1/2}\|S^{1/2}v\|,$$

where $\{U(t); t \geq 0\}$ is the contraction semigroup on X generated by $-A$.

4. Proofs of Theorems 2.2–2.3

Let S and B be the same as defined in Section 2. Then it is well-known that S is a nonnegative selfadjoint operator in $X := L^2(\Omega)$. On the other hand, we have

Lemma 4.1. *B is m-sectorial of type $S((p-1)/(2\sqrt{p}))$ in X : for $u_1, u_2 \in D(B)$,*

$$|\mathrm{Im}(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)| \le \frac{p-1}{2\sqrt{p}} \mathrm{Re}(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2).$$

Here the constant factor has been determined by Liskevich and Perelmuter [4].

For the next lemma see [**5**, Lemma 3.2].

Lemma 4.2. *Let S_ε be the Yosida approximation of S. Then for $u \in D(S)$ and $\varepsilon > 0$,*

$$|\mathrm{Im}(S_\varepsilon u, Bu)| \le \frac{p-1}{2\sqrt{p}} \mathrm{Re}(S_\varepsilon u, Bu).$$

Now Lemmas 4.1 and 4.2 show that the assumption of Theorem 3.2 is satisfied with $c = c_p := (p-1)/(2\sqrt{p})$. Let $-c_p^{-1} < \beta \le c_p^{-1}$. Then it follows from Theorem 3.2 that $A = iS + (1 + i\beta)B$ is a maximal monotone operator with $D(A) = D(S) \cap D(B)$ dense in X. Hence we see from Theorem 3.1 that for any $u_0 \in D(A)$ there exists a unique strong solution to (3.1). This implies that (1.1)–(1.3) admits a unique global strong solution $u(t) := u(x,t)$ in the sense of Definition 2.1. Thus we obtain Theorem 2.2.

Theorem 2.3 is a consequence of Theorem 3.4.

References

[1] J. A. Goldstein, "Semigroups of Linear Operators and Applications," Oxford University Press, New York, 1985.

[2] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 508–520.

[3] J. L. Lions, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires," Dunod, Paris, 1969.

[4] V. A. Liskevich and M. A. Perelmuter, Analyticy of submarkovian semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 1097–1104.

[5] N. Okazawa and T. Yokota, Monotonicity method applied to the complex Ginzburg-Landau and related equations, preprint (1999).

[6] N. Okazawa and T. Yokota, Perturbation theory for m-accretive operators and generalized complex Ginzburg-Landau equations, preprint (1999).

[7] H. Pecher and W. von Wahl, Time dependent nonlinear Schrödinger equations, *Manuscripta Math.* **27** (1979), 125–157.

[8] T. Shigeta, A characterization of m-accretivity and an application to nonlinear Schrödinger type equations, *Nonlinear Analysis, TMA* **10** (1986), 823–838.

[9] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations," Math. Surv. Mono. vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

相転移現象の定常問題に現れる変分問題とその解の構造

千葉大・自然　　白川　健

千葉大・教育　　劒持　信幸

導入

本論文では、次の非線形方程式について考察する。

$$\kappa\partial V(w) \ni w + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L). \tag{0.1}$$

ここで、κ, L は正定数、θ_0 は与えられた定数、∂V は $L^2(0,L)$ 上の汎関数 V の（$L^2(0,L)$ での）劣微分作用素で、V は $|w| \le 1$ a.e. を満たす任意の L^2-関数 w の全変動を対応させる汎関数である。方程式 (0.1) は次の汎関数（自由エネルギー）

$$F_{\theta_0}(z) := \kappa V(z) - \frac{1}{2}\int_0^L |z+\theta_0|^2\, dx,\ z \in L^2(0,L)$$

の Euler-Lagrange 方程式である。

方程式 (0.1) は、次の非線形放物型の方程式系

$$(\theta+\chi)_t - \theta_{xx} = 0 \text{ in } Q := (0,+\infty)\times(0,L), \tag{0.2}$$

$$\chi_t + \kappa\partial V(\chi) \ni \chi + \theta \text{ in } L^2(0,L),\ t>0, \tag{0.3}$$

において適当な境界条件、初期条件を与え、

$$\theta(t) \to \theta_0 \text{ in } L^2(0,L) \text{ as } t \to +\infty$$

となる様にした時の定常問題に対応している。この力学系は A. Visintin（[6] 参照）によって液体・固体相転移問題の中間的尺度 (mesoscopic length scale) での数理モデルとして提唱されており、そこでは θ は（相対）温度の分布関数で、χ は物質の状態を（液体か固体かを）表す相関数とされる。従って方程式 (0.1) の解の構造を調べることは、力学系 $\{(0.2),(0.3)\}$ の定常解の安定性を議論する際に多くの情報を与えるもので、非常に意義深い。

本論分の目的は２つあり、第１は方程式 (0.1) の解の構造を調べる事で、実際に (0.1) の解はすべて高々有限個の不連続点を持つ様な階段関数（図１ 参照）である事が示される。

第２の目的は、自由エネルギー F_{θ_0} の極小元の構造を明らかにすることである。この問題に関しては Visintin によって既に研究されており、彼は co-area formula ([1] 参照) を応用して F_{θ_0} の極小元 w_* は必ず $|w_*| = 1$ a.e. となる事を一般多次元空間の場合に示した。本論分では、空間１次元に限定して方程式 (0.1) の解の構造を利用し、F_{θ_0} の極小元のより精密な構造を調べる。結果として F_{θ_0} の極小元はすべて高々有限個の点を除いて 1 または -1 を値に持つ階段関数（図２ 参照）である事が示される。

1. 定常解と自由エネルギーの極小元の構造

本論分を通して κ, L は正定数で、θ_0 は与えられた定数とする。$V_0 : L^2(0,L) \longrightarrow [0,+\infty]$ は L^2-関数の全変動を対応させる汎関数で、

$$V_0(z) := \sup \left\{ \int_0^L z\varphi_x \, dx \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \in C^1[0,L], \\ \text{supp}\ \varphi \subset (0,L)\text{: compact}, \\ |\varphi| \le 1 \text{ a.e. in } (0,L). \end{array} \right\}, \forall z \in L^2(0,L),$$

で与えられる。

注意 1.1 よく知られるように、$z \in L^2(0,L)$ の全変動 $V_0(z)$ は

$$V_0(z) := \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} \sum_{k=0}^{n_\Delta} |z(x_{k+1}) - z(x_k)|, \text{ 但し}$$

$$\mathcal{D} := \{\Delta \mid \Delta := \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n_\Delta} = L\},\ n_\Delta \in N\}$$

として与えても良い。また、特に z が十分滑らかな関数であれば、

$$V_0(z) = \int_0^L |z_x| \, dx$$

となる。

ここで全変動が有限な関数、いわゆる有界変分関数全体の空間を $BV[0,L]$ と書く。即ち

$$BV[0,L] := \left\{ z \in L^2(0,L) \mid V_0(z) < +\infty \right\}$$

である。任意の有界変分関数 $f \in BV[0,L]$ は各点 $x \in [0,L]$ において 右極限、左極限を持つが、それらをそれぞれ $f(x+)$, $f(x-)$ で表す。即ち

$$f(x+) := \lim_{y \searrow x} f(y),\ f(x-) := \lim_{y \nearrow x} f(y)$$

とする。

更に $L^2(0,L)$ 上の汎関数 V を次で定義する。

$$V(z) := \begin{cases} V_0(z), \text{ if } z \in BV[0,L],\ |z| \le 1 \text{ a.e. on } [0,L], \\ \\ +\infty \text{ otherwise.} \end{cases}$$

V は $L^2(0,L)$ 上の適正下半連続凸関数である ([1, Chapter 5] 参照)。以下、V の有効領域を $D(V)$ と表記する。即ち

$$D(V) := \{z \in BV[0,L] \mid |z| \le 1 \text{ a.e. on } [0,L].\}$$

とする。

今、定数 θ_0 を与えるごとに次の非線型方程式 $(P)_{\theta_0}$ を考える。

$$(P)_{\theta_0} \qquad \kappa\partial V(w) \ni w + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L),$$

ここに ∂V は V の $L^2(0,L)$ の位相での劣微分作用素である。

定義 1.1 任意の定数 $\theta_0 \in (-1,1)$ と $n \in N \cup \{0\}$ に対し、$BV[0,L]$ の部分空間 $S_n(\theta_0)$ を次のように定める (図 1 参照)。

(I) $S_0(\theta_0) := \{-1, -\theta_0, 1\}$;

(II) 任意の $n \in N$ に対し、$S_n(\theta_0)$ は次の 4 つの条件を満たす $[0,L]$ の分点 $\{x_k^L, x_k^R \mid k = 1,\cdots,n\}$ と有限数列 $\{c_k \mid k = 0,1,\cdots,n\} \subset [-1,1] \setminus \{-\theta_0\}$ が存在する様な有界変分関数 z の集合である。

(i) $0 < x_1^L \le x_1^R < \cdots < x_k^L \le x_k^R < \cdots < x_n^L \le x_n^R < L$,

$$J_k := \begin{cases} [0, x_1^L) \text{ for } k = 0, \\ \\ (x_k^R, x_{k+1}^L) \text{ for } k = 1,\cdots,n-1, \\ \\ (x_n^R, L] \text{ for } k = n. \end{cases}$$

(ii) $(c_{k-1} + \theta_0)(c_k + \theta_0) < 0,\ k = 1,\cdots,n.$

(iii) • $k \in \{0, n\}$ の場合、

$$|c_k + \theta_0||J_k| \ge \kappa \text{ 及び } c_k \in \{1,-1\} \cup \left\{\frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

ただし $|J_k|$ は区間 J_k の長さである。

• $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ $(n \ge 2)$ の場合、

$$|c_k + \theta_0||J_k| \ge 2\kappa \text{ 及び } c_k \in \{1,-1\} \cup \left\{\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

(iv)

$$z(x) := \begin{cases} c_k, \text{ if } x \in J_k, \ k = 0, 1, \cdots, n, \\ -\theta_0, \text{ if } x \in [x_k^L, x_k^R], \ k = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

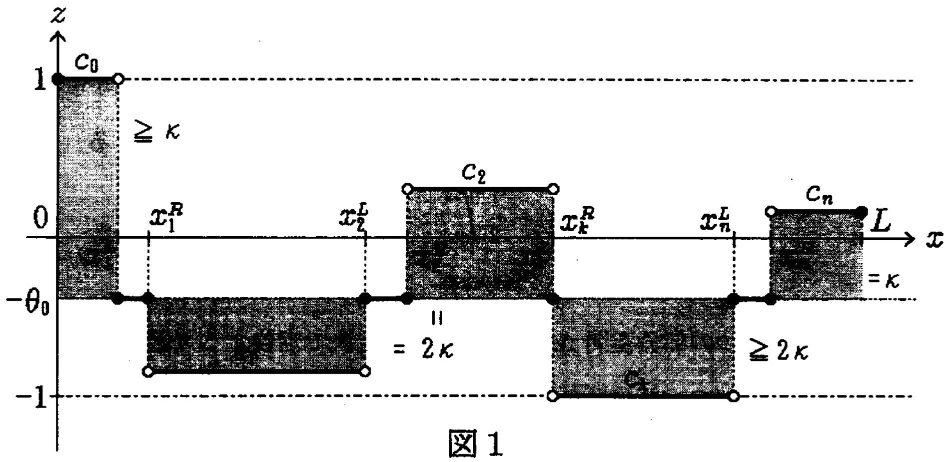


図 1

更に $N_{\theta_0} := \sup\{n \mid S_n(\theta_0) \neq \emptyset\}$ とし、$BV[0, L]$ の部分空間 $S(\theta_0)$ を次で定義する。

$$S(\theta_0) := \begin{cases} \{1\}, \text{ if } \theta_0 > 1, \\ \{1, -1\}, \text{ if } \theta_0 = 1, \\ \sum_{k=0}^{N_{\theta_0}} S_k(\theta_0), \text{ if } |\theta_0| < 1, \\ \{-1, 1\}, \text{ if } \theta_0 = -1, \\ \{-1\}, \text{ if } \theta_0 < -1. \end{cases}$$

注意 1.2 各 $\theta_0 \in (-1, 1)$ に対し、N_{θ_0} は有限である。実際 $S_n(\theta_0) \neq \emptyset$ $(n \geq 1)$ ならば、定義 1.1 の (II) の (iii) から

$$|J_0|, |J_n| \geq \frac{\kappa}{1 + |\theta_0|}, \ |J_k| \geq \frac{2\kappa}{1 + |\theta_0|}, \ k = 1, \cdots, n-1$$

となるので、

$$\frac{2n\kappa}{1 + |\theta_0|} \leq \sum_{k=0}^{n} |J_k| \leq L$$

を得る。従って

$$1 \leq n \leq \frac{L}{2\kappa}(1 + |\theta_0|) < +\infty,$$

即ち N_{θ_0} は有限である。

ここで、方程式 $(P)_{\theta_0}$ の解の構造について、我々は次の結果を得た。

定理 1.1 次の２つの条件は互いに同値である。

(i) $w \in BV[0,L]$ は $(P)_{\theta_0}$ の解である。
(ii) $w \in BV[0,L]$ に対し、関数 $w^\circ \in S(\theta_0)$ が存在して次の２つの条件を満足する。

$$(w^\circ(x+) - w(x))(w^\circ(x-) - w(x)) \le 0, \ \forall x \in [0,L]. \tag{1.1}$$

$$\text{点 } x \in [0,L] \text{ で } w^\circ \text{ が連続ならば } w(x) = w^\circ(x), \tag{1.2}$$

次に以下のような $L^2(0,L)$ 上の汎関数（自由エネルギー）F_{θ_0} を考える。

$$F_{\theta_0}(z) := \begin{cases} \kappa V(z) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |z+\theta_0|^2\,dx, \text{ if } z \in D(V), \\ +\infty \text{ otherwise.} \end{cases}$$

そして $S(\theta_0)$ の２つの部分空間 $M(\theta_0)$, $M_{loc}(\theta_0)$ を次で定義する（図２ 参照）。

$$M(\theta_0) := \begin{cases} \{1\}, \text{ if } \theta_0 > 0, \\ \{1,-1\}, \text{ if } \theta_0 = 0, \\ \{-1\}, \text{ if } \theta_0 < 0, \end{cases}$$

$$M_{loc}(\theta_0) := \begin{cases} \{1\}, \text{ if } \theta_0 \ge 1, \\ \{1,-1\}, \text{ if } 0 < \theta_0 < 1, \\ \left\{ z \in S(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ の連続点 } x \text{ において } |z(x)| = 1 \text{ で、} \\ \text{もし } z \in S_n(0)\ (1 \le n \le N_{\theta_0}) \text{ ならば} \\ x_k^L = x_k^R\ (k = 1,\cdots,n), \\ |J_0|, |J_n| > \kappa,\ |J_k| > 2\kappa\ (k = 1,\cdots,n-1), \\ \text{ただし } x_k^L, x_k^R, J_k \text{ はすべて定義 1.1 で} \\ \text{用いた記号である。} \end{array} \right\}, \text{ if } \theta_0 = 0, \\ \{-1,1\}, \text{ if } -1 < \theta_0 < 0, \\ \{-1\}, \text{ if } \theta_0 \le -1. \end{cases}$$

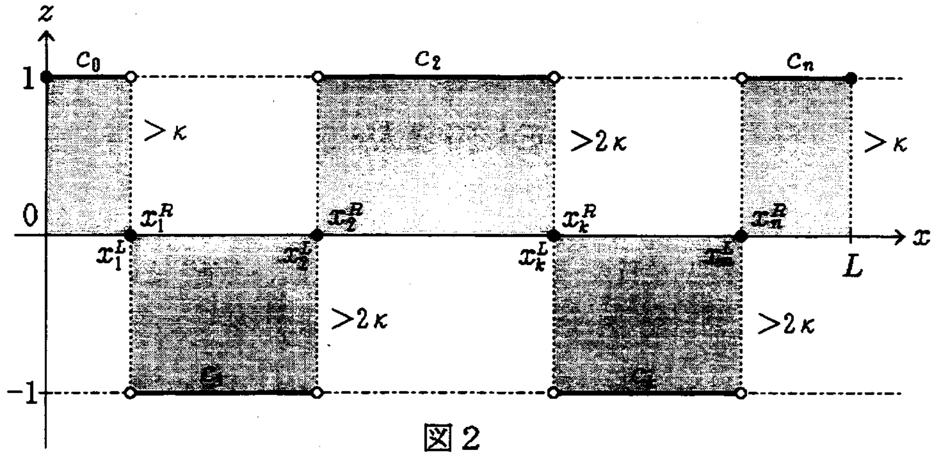


図2

この時、汎関数（自由エネルギー）F_{θ_0} の極小元の構造に関して、次の様な結果が得られた。

定理 1.2 *(i)* w が F_{θ_0} の最小元である事の必要十分条件は $w \in M(\theta_0)$ となる事である。

(ii) w が F_{θ_0} の極小元であることの必要十分条件は、空間 $M_{loc}(\theta_0)$ 内に条件 *(1.1)*, *(1.2)* を満足する様な関数 w° が存在する事である。

参考文献

[1] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1992.

[2] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, Lecture Notes Math., Springer, Vol. 1584, Berlin, 1994.

[3] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation functional with constraint, to appear Nonlinear Analysis.

[4] A. Visintin, The Stefan problem with surface tension, pp. 191-213, *Mathematical Models of Phase Change Problems,* ed. J. F. Rodrigues, Birkhäuser, Basel 1989.

[5] A. Visintin, Nonconvex functionals related to multiphase systems, SIAM J. Math. Anal.,**21** (1990), pp. 1281-1304.

[6] A. Visintin, *Models of Phase Transitions,* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **Vol. 28**, Birkhäuser, Boston, 1996.

A Phase-Field Model with Hysteresis

高橋 正人 (千葉大・自然)

この研究は、久保雅弘 (佐賀大・理工) と山崎教昭（千葉大・教育）との共同研究である。

1. 序

以下のような hysteresis 作用素を含む非線形偏微分方程式系を考える。
Problem (P): find u and w satisfying that

$$u_t + w_t - \Delta u + \mu u = f(x,t) \qquad \text{in} \quad Q = \Omega \times [0,+\infty), \tag{1.1}$$

$$w_t - \kappa \Delta w + \partial I_u(w) \ni g(w,u) \qquad \text{in} \quad Q, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \qquad \text{on} \quad \Sigma := \partial\Omega \times [0,+\infty), \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0, \quad w(x,0) = w_0. \tag{1.4}$$

ここで、Ωは滑らかな境界$\partial\Omega$を持つ R^N $(1 \le N \le 3)$ の有界領域とし、μ, κを正定数、摂動$g(w,u) := w + u$ として与える。物理的には、u は相転移温度、wは相の状態を表す相関数と解釈される。つまり、(1.1) は内部エネルギーのバランスを表し、(1.2) は u を入力すれば wが求まるシステムで、wの運動方程式とも言える。

また $u \in L^2(\Omega)$ に対して、集合 K_uを次のように定め、

$$K_u := \left\{ w \in L^2(\Omega) \mid f_a(u) \le w \le f_d(u) \right\}.$$

更に indicator function $I_u(w)$ を次のように定義する。

$$I_u(w) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad w \in K_u, \\ +\infty & \text{othewise.} \end{cases}$$

ここで、f_a, f_dは与えられた hysteresis loops である。

この問題に関して［1］により、解の存在性の結果が出されている。

定理 1.1 (cf. ［1］)
nonlinear hysteresis loops f_a, f_dが regular であるとする。
このとき、Problem (P) は解を持つ。

しかし、 hysteresis loops f_a, f_dが、非線型であるが故に解の一意性まではわからない。
そこで、今回は、一意性を持つ或る特殊な場合について論ずる。
２つの obstacle が直線である物質について考察するため、f_aと f_dを次のように定義する。

$$f_a := \alpha u + b_a,$$
$$f_d := \alpha u + b_d.$$

ここで、αは正定数とする。言い換えれば、f_a, f_dは、uw平面における傾きα、切片 b_a, b_dである一次関数と言える。

この問題に対して、次の結果が成り立つことを示していく：

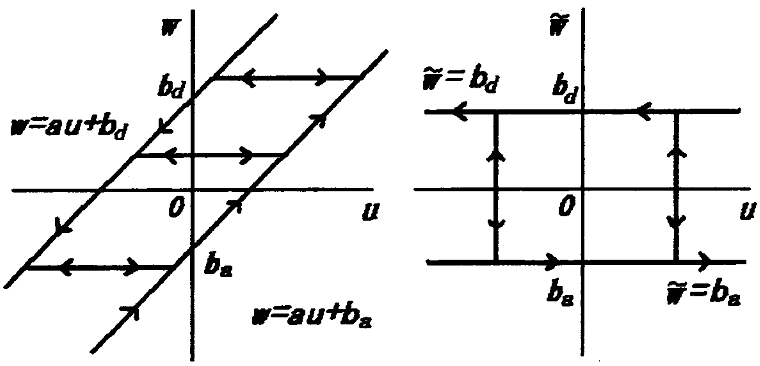
(i) Problem (P) の解が一意に存在する。
(ii) 解が大域的に有界となる。
(iii) 大域的アトラクターが存在する。

2. 解の存在と一意

ここで、Problem (P) の項 $\partial I_u(\cdot)$ が u に依存しない indicator function の劣微分作用素になるように未知関数の線形変換を行う。

$$\tilde{w} := w - \alpha u. \tag{2.1}$$

ここで、αは前章で定義した定数である。



これによって変換された問題を Problem $(\tilde{P})$ とする。
実際には (1.1)、(1.2) は次のようになる。

$$[(1-\alpha)u + \tilde{w}]_t - \Delta u = f(x,t) \qquad \text{in } Q, \tag{2.2}$$

$$[\tilde{w} + \alpha u]_t - \kappa\Delta(\tilde{w} + \alpha u) + \partial I_{[b_a, b_d]}(\tilde{w}) \ni u + \tilde{w} + \alpha u \qquad \text{in } Q. \tag{2.3}$$

更に、(2.3) のΔu に (2.2) を代入して変形すると、次の式となる。

$$[u + c(1-\kappa\alpha)\tilde{w}]_t - c\kappa\Delta\tilde{w} + c\partial I_{[b_a,b_d]}(\tilde{w}) - c\tilde{w} - c(1+\alpha+\kappa\mu\alpha)u$$

$$\ni -c\kappa\alpha f(x,t) \qquad \text{in } \ Q, \tag{2.4}$$

ここで、c はαとκに依存する正定数である。

同様、(2.1) の変換を用いて、境界条件 (1.3)、初期条件 (1.4) もそれぞれ書き換える。

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \ \Sigma, \tag{2.5}$$

$$u(\cdot,0) = u_0, \quad \tilde{w}(\cdot,0) = w_0 - \alpha u_0 \qquad \text{in } \ \Omega. \tag{2.6}$$

このように変換された問題 (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) を Problem $(\tilde{P})$ とする。

注意 2.1

$w^*(t) \in \partial I_{u(t)}(w(t))$ と $w^*(t) \in \partial I_{[b_a,b_d]}(\tilde{w}(t))$ は、全ての時間 t に対して、同値となる。

証明は、劣微分の定義から明らかである。

このとき、 Problem $(\tilde{P})$ は、

$$\frac{d}{dt}(AU)(t) + \partial\varphi(U(t)) + G(U(t)) \ni F(t) \quad \text{in } H \tag{2.7}$$

という形に記述されることがわかる。ここで、A は Hilbert 空間 H上の線形、self-adjoint、positive な作用素で、$\partial\varphi$ は適正下半連続関数 φ の劣微分、$G(u(t))$ は単調でない作用素で、F は与えられた外力項である。

実際には、Hを $L^2(\Omega)$ の直積空間とし、求める解Uを

$$U := \begin{pmatrix} u \\ \tilde{w} \end{pmatrix},$$

と定義し、A, G, Fは次のようになる。

$$A := \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & c(1-\kappa\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ c\{-\tilde{w} - (1+\alpha+\kappa\alpha\mu)u\} \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ c\kappa\alpha f(t) \end{pmatrix}.$$

更に、$\varphi(U)$ を

$$\varphi(U) := \begin{cases} \frac{1}{2}|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu}{2}|u|^2_{L^2(\Omega)} + c\left\{-\frac{\kappa}{2}|\nabla \tilde{w}|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega I_{[b_a,b_d]}(\tilde{w}(t))dx\right\}, \\ \qquad\qquad (u, w \in H^1(\Omega), I_{[b_a,b_d]}(\tilde{w}(t)) \in L^1(\Omega)) \\ +\infty \qquad\qquad (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義すると、$\partial\varphi(U(t))$ が次のようになることがわかる。

$$\partial\varphi(U) = \begin{pmatrix} -\Delta_N u + \mu u \\ c(-\kappa\Delta_N \tilde{w} + \partial I_{[b_a,b_d]}(\tilde{w})) \end{pmatrix}.$$

定理 2.2

(i) $(\tilde{P})$ の解が一意に存在する。

(ii) 熱源 f に、$\sup_{t>0} |f|_{L^2(t,t+1;H)} < +\infty$ を仮定すると、$(\tilde{P})$ の解は時間大域的に有界となる。

Proof.

上で示したように、問題 $(\tilde{P})$ は、非線型発展方程式 (2.7) の形に変形できる。
従って、[5] の結果を適用することにより、$(\tilde{P})$ の解の存在、一意性及び大域的有界性を得る。■

定義 2.3

定理 2.2 により、$\overline{D(\varphi)}$ から $\overline{D(\varphi)}$ への解作用素の集合族 $\{E(t,s); 0 \le s \le t < +\infty\}$ を定義する。これは、初期時間に対して、方程式の時間 t における解を対応させるもので、明らかに次の性質を満たす。

(E1) $E(s,s) = I$ in $\overline{D(\varphi)}$, $\forall s \ge 0$　　ここで I は H における恒等作用素である。

(E2) $E(t,s) = U(t,\tau) \circ U(\tau,s)$, $\forall 0 \le s \le \tau \le t$.

3. 解の漸近挙動

この節では、熱源 f が Stepanov sense で $f^\infty \in L^2(\Omega)$ に収束していると仮定し、$(\tilde{P})$ の解の漸近挙動を考察する。つまり、

$$|f(\cdot) - f^\infty|_{L^2(t,t+1,L^2(\Omega))} \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to +\infty \tag{3.1}$$

のとき、$(\tilde{P})$ の解の挙動を大域的アトラクターの立場から議論する。

(3.1) により、我々は問題 $(\tilde{P})$ の極限方程式 $(\tilde{P})_\infty$ を考える事ができる。

$$(\tilde{P})_\infty \begin{cases} [(1-\alpha)u + \tilde{w}]_t - \Delta u = f^\infty \quad \text{in } Q, \\ [u + c(1-\kappa\alpha)\tilde{w}]_t - c\kappa\Delta\tilde{w} + c\partial I_{[b_a,b_d]}(\tilde{w}) - c\tilde{w} - c(1+\alpha+\kappa\mu\alpha)u \ni -c\kappa\alpha f^\infty \quad \text{in } Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad \tilde{w}(\cdot,0) = w_0 - \alpha u_0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

すると、先と同様に、$(\tilde{P})_\infty$は

$$
(E_\infty)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(AU)(t) + \partial\varphi(U(t)) + G(U(t)) \ni F^\infty \quad \text{in } H,\ \ t>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U(0) = U_0 \end{cases}
$$

と変形することができる。ここで、F^∞は、H上の時間依存しない外力項となり、実際は次のように書ける。

$$
F^\infty := \begin{pmatrix} f^\infty \\ -c\kappa\alpha f^\infty \end{pmatrix}.
$$

従って、極限方程式 (E_∞) は自励形となり、(E_∞) の初期値 U_0に対し、時間 t での解 $U(t)$ を対応させる$\overline{D(\varphi)}$から$\overline{D(\varphi)}$への解作用素は semigroup$\{S(t); 0 \le s \le t < +\infty\}$ となる。

極限方程式 (E_∞) に対し、次の定理を得る。

定理 3.1 (cf. R. Temam , J. K. Hale)
$(\tilde{P})_\infty$には次の3条件を満たす大域的アトラクターと呼ばれる $\mathcal{A}_\infty$が存在する。
(1) $\mathcal{A}_\infty$ は、Hにおいて空でない連結凸集合である。
(2) $S(t)\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_\infty$,$\forall t \ge 0$,
(3) $\forall B$: 有界集合 $\in H$, $dist_H(S(t)B, \mathcal{A}_\infty) \longrightarrow 0$ as $t \to \infty$.
ここで、$dist_X(A,B) := \sup_{x\in A} \inf_{y \in B} |x-y|_H$と定義する。

Proof.
$(\tilde{P})_\infty$に対し、
$\forall B(\subset H)$: 有界集合, $\exists t_B < +\infty$ s.t. $S(t)B \subset B_0$, $\forall t \ge t_B$
となる absorbing set B_0が存在することがわかる。従って、大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$を次のような Sに対する ω-limit set で定義すればよい。

$$
\mathcal{A}_\infty := \omega_S(B_0) = \bigcap_{s\ge 0} \overline{\bigcup_{t \ge s} S(t)\left(\overline{D(\varphi)} \bigcap B_0\right)}. \qquad \blacksquare
$$

最後に $(\tilde{P})$ の解の漸近挙動に対し、次の定理を得た。

定理 3.2
(a) 任意の有界集合 $B(\subset H)$ に対し、

$$
\omega_E(B) := \bigcap_{\tau \ge 0} \overline{\bigcup_{\substack{t\ge\tau \\ s\ge 0}} E(t+s,s)(\overline{D(\varphi^s)} \cap B)} \subset \mathcal{A}_\infty.
$$

つまり、$\forall\varepsilon > 0$, $\exists T_{B,\varepsilon}$ s.t. $dist_H(E(t+s,s)U_0, \mathcal{A}_\infty) \le \varepsilon$
for all $s \ge 0$, $U_0 \in \overline{D(\varphi)} \cap B$ and $t \ge T_{B,\varepsilon}$
(b) $\exists B_*(\subset H)$: compact s.t. $\omega_E(B) = \mathcal{A}_\infty$

従って、定理3.2により、問題$(\tilde{P})$の解の漸近挙動は極限方程式$(\tilde{P})_\infty$の大域的アトラクター$\mathcal{A}_\infty$で特徴づけられることがわかった。

参考文献

1. P. Colli, N. Kenmochi, M. Kubo, A phase field model with temperature dependent constraint, Preprint

2. A. Damlamian and N. Kenmochi, Evolution equations associated with non-isotermal phase separation: a subdifferential approach, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol.**CLXXVI** 1999.

3. J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical surveys and Monographs **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1988.

4. N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, the Bulletin of the Faculty of Education, Chiba University Vol.**30**, December 1981.

5. K. Shirakawa, Large time behavior for boubly nonlinear systems gererated by subdifferentials, to appear A. M. S. A., 1998.

6. R. Temam, *Infinite Dimensional Systems in Mechanics and Physics*, Spronger-Verlag, Berlin, 1988.

7. A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Applied Mathematical Sciences,**111**, Springer.

影の領域における弾性波

森岡 達史　　阪大 理

ある種の物体に力を加えると変形するが、力を加えるのをやめるともとにもどる。このような性質を弾性という。弾性をもつ物体を弾性体とよぶ。弾性波とは、弾性体を伝わる波のことをいう。波の媒質のもとの状態からのずれを変位とよぶ。変位と進行方向とが互いに平行な波を縦波といい、垂直な波を横波という。弾性体が等方性をもつ場合、そこを伝わる弾性波は一般に縦波と横波の重合わせになっている。

縦波と横波について、それぞれの進行方向に対する変位の自由度を考えてみる。縦波の変位は進行方向に対して一意的に定まるので、変位の自由度は無いといえる。一方、横波の変位は進行方向に対して2次元の自由度を持っている。そこで、横波については、偏りが問題になる。ここで、波が偏りをもつとは、その変位が特定方向に集中していることをいう。

一般に波が障害物に当たると反射が起こる。弾性波の場合、入射波が縦波または横波のみであっても、一般には反射波として縦波と横波の両方が現れる。このように、波の種類が変わる現象を Mode の変換とよぶ。波が障害物の後ろ側に回りこむ現象を回折という。等方性弾性体を伝わる弾性波の場合、凸な障害物に対してある角度から横波が斜めに入射すると、Mode の変換により縦波が障害物に接する方向に現れて回折が起こる。このとき、障害物の境界を伝わる縦波にMode の変換が起こって、障害物の境界から弾性体の内部に向かって伝播する横波が現れる。障害物の境界を伝わる弾性波を単に表面波とよぶことにする。今の場合、回折により現われた表面波は、縦波と横波の重合わせになっている。この現象において、障害物に入射する横波が偏っていると仮定する。このとき、結論として、回折により現れる表面波が偏っていること、その偏りの方向は、入射波の偏りの方向に依存して定まることがわかった。

以下、問題の定式化について述べる。 等方性弾性体を伝わる弾性波の運動は、3×3 双曲型偏微分方程式系 $Lu = 0$ により記述される。ここで、

$$L = \partial_t^2 - A(\partial_x) \quad \text{in} \quad \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3,$$

$$A(\partial_x) = \mu\triangle + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}_x^3\ ,$$

$$\lambda,\ \mu\ :\ \text{正の定数。}$$

弾性体を伝わる縦波、横波はそれぞれ P 波、S 波とよばれる。 $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$ における 2 つの scalar 値偏微分作用素 $\Box_n$, $n = 1, 2$ を $\Box_n = \partial_t^2 - c_n^2 \triangle$ により定義する。ここで、 $c_1 = (\lambda + 2\mu)^{1/2}$, $c_2 = \mu^{1/2}$ である。 P 波、S 波はそれぞれ $Lu_P = \Box_1 u_P = 0$, $Lu_S = \Box_2 u_S = 0$ をみたす vectre 値関数 u_P, u_S として定式化される。 これらの等式は、P 波、S 波の伝播速度がそれぞれ c_1, c_2 であることを表している。

本講演において考察する現象を定式化する方程式は次のようになる。

$$
(1) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \mathbf{R} \times \Omega \\ u \,|_{\mathbf{R}\times\partial\Omega} = g \end{cases}
$$

$\Omega \subset \mathbf{R}_x^3$: 外部領域。

ここで Ω は弾性体を表わす。 Ωについては次を仮定する。

(H.1) $\partial\Omega$ は解析的である。

(H.2) $\mathbf{R}^3 \backslash \Omega$ は strictly convexである。

表面波の伝播を記述するために、いくつかの記号を準備する。

記号.

$N = \mathbf{R} \times \partial\Omega$, $\triangle_{\partial\Omega}$: $\partial\Omega$ 上のLaplacian。

$\sigma(\triangle_{\partial\Omega})$: $\triangle_{\partial\Omega}$ の主表象。

$q_n \in C^\infty(T^*N, \mathbf{R})$: $q_n(\tau, \beta) = -\tau^2 - c_n^2 \sigma(\triangle_{\partial\Omega})(\beta)$, $n = 1, 2$,

$\tau \in \mathbf{R}$, $\beta \in T^*(\partial\Omega)$ により定義される関数。

π : T^*N からN への射影。

$\rho \in T^*N \backslash 0$: $q_1(\rho) = 0$, $\pi(\rho) = (0, z)$, $z \in \partial\Omega$ を満たす固定された点。

γ : $\gamma(s) = \exp sH_{q_1}(\rho)$ により定義されるT^*N 内の曲線（零陪特性帯）。

$\partial/\partial n$: $\partial\Omega$ の法線方向に沿った微分。

m : $1 \leqq m < 3$を満たす固定された実数。

$WF_A(*)$: 解析的波面集合。

$WF_G^k(*)$: Gevrey k 級波面集合。

定理 1 . *(H.1)* と *(H.2)* が成り立つと仮定する。 $0 < s_0 < s_1$, s_1 は十分小、 $\omega \subset T^*N \backslash 0$, $\rho \in \omega$, ω は十分小、 $\omega \cap \gamma([s_0, s_1]) = \phi$, $WF_A(g) \subset \omega$, u は *(1)* の *outgoing* 解とする。 このとき、次の *(i)* , *(ii)* が成り立つ。

(i) $\gamma([s_0\,,\,s_1]) \cap WF_G^3((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$.
(ii) $\gamma([s_0\,,\,s_1]) \cap WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$ または
$\gamma([s_0\,,\,s_1]) \subset WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N)$ が成り立つ。

さらに、unilateral 作用素を用いて表面波の偏りを定式化することにより結論が得られる。

表面波の伝播の記述について、要点をまとめておく。$q_n \in C^\infty(T^*N\,,\,\mathbf{R})$ の符号に応じて、$T^*N\backslash 0$ は次のように分割される。

定義2．$T^*N\backslash 0$ において、$\{q_1 < 0\}$，$\{q_1 = 0\}$，$\{q_1 > 0\}$ により定まる集合をそれぞれ$P-$双曲型領域、$P-Glancing$ 領域、$P-$楕円型領域とよぶ。また、$\{q_2 < 0\}$，$\{q_2 = 0\}$，$\{q_2 > 0\}$ により定まる集合をそれぞれ$S-$双曲型領域、$S-Glancing$ 領域、$S-$楕円型領域とよぶ。

定義により $T^*N\backslash 0 = \{P-$ 双曲型領域$\} \cup \{P-$ Glancing 領域$\} \cup \{P-$ 楕円型領域$\} = \{S-$ 双曲型領域$\} \cup \{S-$ Glancing 領域$\} \cup \{S-$ 楕円型領域$\}$ が成り立つ。これらは、それぞれが disjoint union になっている。表面波の伝播を、$P-$Glancing 領域における (1) の outgoing 解の Gevrey 級特異性伝播として記述したのが定理1-(ii) である。また、定理1-(i) は、(1) の outgoing 解は$P-$Glancing 領域において 常に Gevrey 3 級の滑らかさを持っていることを示している。これは、現象としては、入射波の Energy の大部分は障害物の境界から 弾性体の内部に向かって去ってしまう事実に対応している。定義2において、P波及び S波に応じて $T^*N\backslash 0$ を それぞれ3つの集合に分割したが、ここで $\{P-$ Glancing 領域$\} \subset \{S-$ 双曲型領域$\}$ が 成り立っていることが重要である。このことから、S波の古典軌道は $T^*(\mathbf{R}\times\Omega)\backslash 0$ から $P-$Glancing 領域に入れること、また、$P-$Glancing 領域から $T^*(\mathbf{R}\times\Omega)\backslash 0$ に向かって S波の古典軌道が現れることがわかる。このことは、現象としては、S波がある角度から斜めに入射すると P波の回折が起こること、及びP波の回折によりMode の変換が起こ って、障害物の境界から弾性体の内部に向かって伝播するS波が現れることに対応している。実際、$P-$Glancing 領域において (1) の 漸近解を構成するときに、P波及び S波に応じて 相関数が2つ 必要になる（川下 [9]、Stefanov - Vodev [24], 森岡 [19]）。波動方程式に対して定理1が成り立つことは Lebeau [16] によって 証明され

た。定理1は、弾性方程式の Dirichlet 問題を波動方程式の Dirichlet 問題に帰着するStefanov - Vodev [24] の手法とLebeau [16] を組み合わせること により証明される（森岡 [19])。

波の偏りについては、Dencker [3] において擬微分作用素による定式化がなされた。今回考察している表面波については、擬微分作用素を unilateral 作用素 (Lebeau [16, §4]) に置きかえたうえで、[3] に従って定式化を行う。

References

1. C. Bardos - G. Lebeau - J. Rauch, *Scattering frequence and Gevrey 3 singularities*, Invent. Math. **90** (1987), 77–114.
2. C. Bardos - T. Masrour - F. Tatout, *Observation and control of elastic waves*, (J. Rauch - M. Taylor eds.) Singularities and Oscillation, IMA volumes in Math. and its Appl. **91** (1997), 1–16.
3. N. Dencker, *On the propagation of polarization sets for systems of real principal type*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–372.
4. G. Eskin, *General initial boundary problems for second order hyperbolic equations*, D. Reidel. Co. Dordrecht, London (1981), 19–54.
5. F.G. Friedlander - R. B. Melrose, *The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays*. II, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **81** (1977), 97–120.
6. C. Gérard, *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de système d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 409–412.
7. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* I-IV, Springer.
8. M. Iwashita - Y. Shibata, *On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems*, Glasnik Mate. **23** (1988), 291-313.
9. M. Kawashita, Master thesis (1988).
10. O. Lafitte, *The kernel of the Neumann operator for a strictly diffractive analytic problem*, Comm. P.D.E. **20** (1995), 419–483.
11. O. Lafitte, *Second term of the asymptotic expansion of the diffracted wave in the shadow*, Asymptotic Analysis **13** (1996), 329–359.
12. O. Lafitte, *Diffraction for a Neumann boundary condition*, Comm. P.D.E. **22** (1997), 319–359.

13. B. Lascar - R. Lascar, *Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **16** (1991), 547–584.

14. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz (1982–1983).

15. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **35** (1985), 145–216.

16. G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **9** (1984), 1437–1494.

17. G. Lebeau, *Propagation de singularité Gevrey pour le problème de Dirichlet*, Advanced in microlocal analysis, NATO A.S.I. published by Reidel (Garnir ed.) (1986), 203–223.

18. R.B. Melrose, *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems*, Duke. Math. J. **42** (1975), 605–635.

19. T. Morioka, *Régularité des ondes élastiques dans la région Glancing des ondes P*, to appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ..

20. Y. Okada, *Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. **39** (1992), 475–505.

21. M. Sato - K. Kashiwara - T. Kawai, *Hyperfunctions and pseudo differential equations*, Lect. Notes Math. 287, Springer (1973).

22. J. Sjöstrand, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems*, Comm. P.D.E. **5** (1980), 41–94.

23. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).

24. P. Stefanov - G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body*, Duke Math. J. **78** (1995), 677–714.

25. M.E. Taylor, *Grazing rays and reflection of singulaities of solution to wave equation*, Comm. Pure. Appl. Math. **29** (1976), 1–38.

26. K. Yamamoto, *Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations*, Japan J. Math. **14** (1988), 119–163.

走化性方程式の GALERKIN/RUNGE-KUTTA 近似

中口 悦史（大阪大学・工・応用物理）

1. はじめに

有界凸多角形領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上の Keller-Segel 方程式

$$
\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\{a\nabla u - ub(\rho)\nabla\rho\} & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d\Delta\rho + fu - g\rho & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \rho(x,0) = \rho_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}
$$

の Galerkin/Runge-Kutta 近似を考える．ここで a, d, f, g は正の定数，$b(\rho)$ は $(0,\infty)$ で定義された滑らかな関数，$n(x)$ は頂点でない境界点 $x \in \partial\Omega$ における外向き法線ベクトルとする．$u_0(x)$, $\rho_0(x)$ は初期関数で，$\delta_0 > 0$ を定数として，

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} u_0,\ \rho_0 \in H^2_N(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega);\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}, \\ u_0(x),\ \rho_0(x) \geq \delta_0 \text{ on } \overline{\Omega}, \end{cases}
$$

を満たすものとする．$u = u(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ は未知関数である．

Keller-Segel 方程式は，細胞性粘菌の走化性 (化学物質に引き寄せられる性質) による集合体形成の過程を記述するために，Keller and Segel [8] によって提出された．$u(x,t)$ は細胞性粘菌の密度を，$\rho(x,t)$ は化学物質の濃度をあらわす．関数 $b(\rho)$ の不定積分は知覚関数と呼ばれ，その代表的な形として $b\rho$, $b\log\rho$, $\frac{b\rho}{1+\rho}$ がある．この方程式の時間局所解の存在や一意性，時間大域解の存在の条件，有限時刻での解の爆発，定常解などの定性的な結果は [7, 9, 12, 13, 20] などで述べられている (大崎，第 20 回発展方程式若手セミナー報告集，pp.140–145 も参照のこと)．

ここでは (KS) の数値解析について述べる．準線形放物型偏微分方程式の全離散近似については Thomée [17] などでも触れられているが，(KS) は positive type ではあるが monotone type でないため，それらの結果を適用することが困難である．ここでは方程式 (KS) を含む，より一般的な positive type の準線形放物型方程式への応用を念頭において議論を進める．

2. 定式化と主定理

方程式 (KS) は以下のようにして L^2-積空間 $X = \mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ の上の準線形発展方程式

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + A(U)U = F(U), & 0 < t \leq T, \\ U(0) = U_0, \end{cases}
$$

として定式化される．指数 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ を任意に固定し，$Z = \mathbf{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ とおく．ここで (1.1) と Sobolev 空間の埋め込み定理により，初期関数 $U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{bmatrix}$ は $Z \subset \left\{ C(\overline{\Omega}) \right\}^2$ の元である．空間 Z の中の開球 K を，

$$
\operatorname{Re}\rho(x) \geq \delta \ \text{ on } \overline{\Omega} \ \text{ for } U = \begin{bmatrix} u \\ \rho \end{bmatrix} \in K
$$

本講演は八木厚志氏（大阪大学）との共同研究に基づくものである．

を満たすような $\delta>0$ がとれるように $r>0$ を十分小さくとって,

$$K=\left\{U=\begin{bmatrix}u\\ \rho\end{bmatrix}\in Z;\|U-U_0\|_Z=\sqrt{\|u-u_0\|_{H^{1+\epsilon}}^2+\|\rho-\rho_0\|_{H^{1+\epsilon}}^2}<r\right\}$$

と定義する.

各 $U=\begin{bmatrix}u\\ \rho\end{bmatrix}\in K$ に対して X の線形作用素 $A(U)$ を

$$\begin{cases}\mathcal{D}(A(U))=\mathcal{D}=\mathbf{H}_N^2(\Omega),\\ A(U)\widetilde{U}=\begin{bmatrix}A_1\tilde{u}-B(U)\tilde{\rho}\\ A_2\tilde{\rho}\end{bmatrix}, \quad \widetilde{U}=\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{\rho}\end{bmatrix},\end{cases}$$

で定義する. ここで

$$\begin{cases}A_1\tilde{u}=-a\Delta\tilde{u}+a\tilde{u},\\ A_2\tilde{\rho}=-d\Delta\tilde{\rho}+d\tilde{\rho},\\ B(U)\tilde{\rho}=-\operatorname{div}\{\mathrm{Re}\,u\,b(\mathrm{Re}\,\rho)\,\nabla\tilde{\rho}\},\end{cases}$$

である. $F(U)=\begin{bmatrix}F_1(U)\\ F_2(U)\end{bmatrix}$ は

$$\begin{cases}F_1(U)=au,\\ F_2(U)=d\rho+fu-g\rho,\end{cases}$$

で与えられる $U=\begin{bmatrix}u\\ \rho\end{bmatrix}\in K$ の関数である. また (1.1) により $U_0\in\mathcal{D}$ である.

さらに (2.1) は次の弱形式に書きなおすことができる.

$$\text{(2.2)}\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{dt}\langle U,V\rangle_{\mathbf{L}^2}+\alpha(U;U,V)=\langle F(U),V\rangle_{\mathbf{L}^2}, \quad 0<t\le T,\ V\in\mathbf{H}^1(\Omega),\\ U(0)=U_0.\end{cases}$$

ここで

$$\alpha(U;\widetilde{U},\widetilde{V})=a\langle\nabla\tilde{u},\nabla\tilde{v}\rangle_{L^2}+a\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle_{L^2}-\langle\mathrm{Re}\,u\,b(\mathrm{Re}\,\rho)\nabla\tilde{\rho},\nabla\tilde{v}\rangle_{L^2}+d\langle\nabla\tilde{\rho},\nabla\tilde{\mu}\rangle_{L^2}+d\langle\tilde{\rho},\tilde{\mu}\rangle_{L^2},$$

$$U=\begin{bmatrix}u\\ \rho\end{bmatrix}\in K,\ \widetilde{U}=\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{\rho}\end{bmatrix},\ \widetilde{V}=\begin{bmatrix}\tilde{v}\\ \tilde{\mu}\end{bmatrix}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$$

は $A(U)$ に関する $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 上の二次形式である. $\alpha(U;\cdot,\cdot)$ が $U\in K$ に関して一様に

$$|\alpha(U;\widetilde{U},\widetilde{V})|\le\alpha_0^{-1}\|\widetilde{U}\|_{\mathbf{H}^1}\|\widetilde{V}\|_{\mathbf{H}^1}, \quad U\in K,\ \widetilde{U},\widetilde{V}\in\mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$\mathrm{Re}\,\alpha(U;\widetilde{U},\widetilde{U})\ge\begin{cases}\alpha_0\|\widetilde{U}\|_{\mathbf{H}^1}^2-\alpha_0^{-1}\|\tilde{u}\|_{H^1}^2,\\ \alpha_0\|\widetilde{U}\|_{\mathbf{H}^1}^2-\alpha_0^{-1}\|\tilde{\rho}\|_{H^1}^2,\end{cases} \quad U\in K,\ \widetilde{U}=\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{\rho}\end{bmatrix}\in\mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$|\alpha(U;W_1,W_2)-\alpha(V;W_1,W_2)|\le\alpha_1\|U-V\|_{\mathbf{H}^{1+\epsilon}}\|W_1\|_{\mathbf{H}^1}\|W_2\|_{\mathbf{H}^1},$$

$$U,V\in\mathbf{H}^{1+\epsilon}(\Omega),\ W_1,W_2\in\mathbf{H}^1(\Omega)$$

を満たすことは容易に示される.

領域 Ω が滑らかである場合, 方程式 (2.1) の時間局所解の存在と一意性は [20] で示されている. [20, Theorem 3.4] によれば, (2.1) は (1.1) の条件下で, 指数 $\eta\in\left(0,\frac{1-\epsilon}{2}\right)$ を任意に選べば, ある部分区間 $[0,S]\subset[0,T]$ において一意な時間局所解 $U\in\mathcal{C}^\eta([0,S];Z)\cap\mathcal{C}^1([0,S];X)\cap\mathcal{C}([0,S];\mathcal{D})$ を持つ.

Galerkin 有限要素法によって空間離散化をする. $\{\tau_\xi\}_{\xi>0}$ を $\xi=\max\{d_\sigma;\,\sigma\in\tau_\xi\}>0$ をサイズパラメータとする Ω の三角形分割の族とする. ただし σ は τ_ξ に属する三角形を, d_σ はその直径を表す. ここで次の条件を仮定する.

(G) $\{\tau_\xi\}_{\xi>0}$ は正則かつ逆仮定を満たす，すなわちある正数 ν があって ξ に一様に

$$\nu\xi \le \rho_\sigma \le d_\sigma \le r_\sigma \le \nu^{-1}\xi, \quad \sigma \in \tau_\xi,$$

が成立する．ただし r_σ と ρ_σ はそれぞれ σ の外接円，内接円の半径を表す．

$$\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}) = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\ \text{各 } \sigma \in \tau_\xi \text{ で } v|_\sigma \text{ は一次関数 } \right\}$$

とし，$X_\xi = \left\{\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})\right\}^2$ とおく．X_ξ は $\left\{\mathcal{C}(\overline{\Omega})\right\}^2$ の部分空間であると同時に，通常の L^2-内積を導入することで $X = \mathbb{L}^2(\Omega)$ の有限次元部分空間とみなすことができる．$p_\xi : L^2(\Omega) \to \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$, $P_\xi = p_\xi \times p_\xi : \mathbb{L}^2(\Omega) \to X_\xi$ を L^2-直交射影とする．

これより (2.2) の Galerkin 近似は次式で与えられる．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle \widehat{U}, \widehat{V}\rangle_{\mathbb{L}^2} + \alpha(\widehat{U}; \widehat{U}, \widehat{V}) = \langle F(\widehat{U}), \widehat{V}\rangle_{\mathbb{L}^2}, \quad 0 < t \le T,\ \widehat{V} \in X_\xi, \\ \widehat{U}(0) = P_\xi U_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

試行関数の空間 X_ξ は有限次元だから，各 $U \in K$ に対して X_ξ の上の有界線形作用素 $A_\xi(U)$ を

$$\langle A_\xi(U)\widehat{U}, \widehat{V}\rangle_{\mathbb{L}^2} = \alpha(U; \widehat{U}, \widehat{V}), \quad \widehat{U}, \widehat{V} \in X_\xi,$$

で定義することができる．これを行列表記すると，

$$A_\xi(U) = \begin{bmatrix} A_{1\xi} & -B_\xi(U) \\ 0 & A_{2\xi} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ \rho \end{bmatrix},$$

となる．ここで $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ 上の有界線形作用素 $A_{1\xi}$, $A_{2\xi}$, $B_\xi(U)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \langle A_{1\xi}\hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2} = a\langle \nabla\hat{u}, \nabla\hat{v}\rangle_{L^2} + a\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2}, \quad \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}), \\ \langle A_{2\xi}\hat{\rho}, \hat{\mu}\rangle_{L^2} = d\langle \nabla\hat{\rho}, \nabla\hat{\mu}\rangle_{L^2} + d\langle \hat{\rho}, \hat{\mu}\rangle_{L^2}, \quad \hat{\rho}, \hat{\mu} \in \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}), \\ \langle B_\xi(U)\hat{\rho}, \hat{v}\rangle_{L^2} = \langle \mathrm{Re}\, u\, b(\mathrm{Re}\,\rho)\nabla\hat{\rho}, \nabla\hat{v}\rangle_{L^2}, \quad \hat{\rho}, \hat{v} \in \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

で定義される．

これより近似方程式 (2.3) は

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{U}}{dt} + A_\xi(\widehat{U})\widehat{U} = F_\xi(\widehat{U}), \quad 0 < t \le T, \\ \widehat{U}(0) = P_\xi U_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

となる．ただし $F_\xi(U) = P_\xi F(U)$.

連立常微分方程式系 (2.4) に Runge-Kutta スキーム $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ を適用する．ただし

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_s \end{bmatrix}.$$

また $\mathcal{I}$ は単位行列，$e = [1, \ldots, 1]^T$ とする．ここで以下の条件を仮定する．

(RK1) このスキームはある $0 < \theta \le \pi/2$ について $L(\theta)$-安定である，すなわち $(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}$ が開角領域 $\Sigma_\theta = \overline{\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 0,\ |\arg(-z)| < \theta\}}$ の近傍で正則で，安定関数 $r(z) = 1 + ze^T\mathcal{B}(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}e$ が $|r(z)| \le 1$ in Σ_θ かつ $r(\infty) = 0$ を満たす．

(RK2) このスキームの次数は $p \ge 1$，積分次数は q $(= \max\{q';\ \mathcal{A}\mathcal{C}^{k-1}e = \mathcal{C}^k e/k,\ k = 1, \ldots, q'\})$ で，$1 \le q \le \max\{p-1, 1\}$ を満たす．

時間刻み $h > 0$ でこのスキームを適用すると，次式で与えられる全離散近似を得る：

$$\begin{cases} \widehat{U}_{n+1} = \widehat{U}_n + he^T\mathcal{B}\left\{-\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n + \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\right\}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n = e\widehat{U}_n + h\mathcal{A}\left\{-\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n + \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\right\}, \\ \widehat{U}_0 = P_\xi U_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

ただし $\widehat{\boldsymbol{V}}_n = [\widehat{V}_{n,1}, \ldots, \widehat{V}_{n,s}]^T$，また $\boldsymbol{V} = [V_1, \ldots, V_s]^T$ に対して $\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{V}) = \mathrm{diag}[A_\xi(V_1), \ldots, A_\xi(V_s)]$, $\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{V}) = [F_\xi(V_1), \ldots, F_\xi(V_s)]^T$ であり，N は $N \cdot h \le T$ を満たす自然数．

以上の状況の下で次の定理を得る.

Theorem 2.1. 条件 (RK1–2), (G) を仮定し, 正数 h_0, ξ_0 と $S \in (0,T]$ が十分小さいとする. このとき $0 < h < h_0$, $0 < \xi < \xi_0$ なら, 近似方程式 (2.5) は 区間 $[0,S]$ での一意な解 $\widehat{\mathcal{U}} = [\widehat{U}_0, \dots, \widehat{U}_N, \widehat{V}_0, \dots, \widehat{V}_{N-1}]$ を持つ. さらに $\widehat{\mathcal{U}}$ は次式を満たす:

$$\max_{n=0,1,\dots,N} \left\{ \|\widehat{U}_n\|_{X_\xi} + \|A_\xi(\widehat{U}_n)\widehat{U}_n\|_{X_\xi} \right\} \le C, \tag{2.6}$$

ここで $C > 0$ は ξ, h に依存しない定数である.

Theorem 2.2. U は (2.1) の解で, $U \in C^{p+1}([0,S];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^{q'+1}([0,S];\mathbf{H}^2(\Omega))$ を満たすとする. ただし $q' = \min\{q, p-1\}$. 条件 (RK1–2), (G) を仮定し, 正数 h_0, ξ_0 と $S \in (0,T]$ が十分小さいとする. このとき $0 < h < h_0$, $0 < \xi < \xi_0$ なら, 誤差 $E_n = \widehat{U}_n - U(t_n)$ は次式で評価される:

$$\max_{n=0,1,\dots,N} \|\widehat{U}_n - U(t_n)\|_{\mathbf{H}^{1+\epsilon}} \le C_U \Big[\sigma^{-1}\xi^{1-\epsilon}\|U\|_{C^\sigma([0,S];\mathbf{H}^2)} \tag{2.7}$$
$$+ h^p\|U^{(p+1)}\|_{C([0,S];\mathbf{L}^2)} + h^{q'+1}\|U^{(q'+1)}\|_{C([0,S];\mathbf{H}^2)} \Big],$$

ただし $N \le S/h$. ここで $\sigma > 0$ は任意の指数, $C_U > 0$ は $\|U'\|_{C([0,S];\mathbf{L}^2)}$, $\|U\|_{C([0,S];\mathbf{H}^2)}$ に依存して決まり ξ, h に依存しない定数である.

3. 定理の証明

はじめに, 以下の条件が成立することに注意する. これにより (2.5) が, Banach 空間 X 上の抽象準線形放物型方程式 (2.1) に対する Galerkin Runge-Kutta 近似として定式化される. また以下に述べる証明が本質的に, 抽象的定式化に基づくものであるから, 上述の結果はより一般的なケースに容易に拡張されうることが分かる.

(A_U1) $\rho(A(U))$ は $U \in K$ に関わらず, ある角度 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ の角領域 $\Sigma_{\pi-\varphi}$ を含み, レゾルベント $(\lambda - A(U))^{-1}$ は

$$\|(\lambda - A(U))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_A}{|\lambda| + 1}, \quad \lambda \notin \overline{S_\varphi}, U \in K,$$

を満たす.

(A_U2) $A(U)$ の定義域は $U \in K$ によらず一定 $\mathcal{D}(A(U)) \equiv \mathcal{D}$ で, $A(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|\{A(U) - A(V)\}A(V)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le L_A\|U - V\|_Z, \quad U, V \in K,$$

を満たす.

(F_U) $F(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|F(U) - F(V)\|_X \le L_F\|U - V\|_Z, \quad U, V \in K,$$

を満たす.

(Sp) 指数 $\alpha = \frac{1+\epsilon}{2}$ について, $\mathcal{D}(A(U_0)^\alpha)$ は Z に連続的に埋め込まれ, 不等式 $\|\cdot\|_Z \le D\|A(U_0)^\alpha \cdot\|_X$ を満たす.

(In) U_0 は $\mathcal{D}(A(U_0))$ の元である.

(Sp_ξ0) すべての $\xi > 0$ について $X_\xi \subset Z$.

($\mathrm{A}_{U\xi}$1) $\rho(A_\xi(U))$ は $U \in K$ に関わらず, ある角度 $0 < \hat{\varphi} < \frac{\pi}{2}$ の角領域 $\Sigma_{\pi-\hat{\varphi}}$ を含み, レゾルベント $(\lambda - A_\xi(U))^{-1}$ は

$$\|(\lambda - A_\xi(U))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)} \le \frac{\hat{M}_A}{|\lambda| + 1}, \quad \lambda \notin \overline{S_{\hat{\varphi}}}, U \in K$$

を満たす. ここで $\hat{M}_A$ は ξ に依存しない正数.

($\mathrm{A}_{U\xi}$2) $A_\xi(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|\{A_\xi(U) - A_\xi(V)\}A_\xi(V)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)} \le \hat{L}_A\|U - V\|_Z, \quad U, V \in K,$$
$$\|A_\xi(U)^{-1}\{A_\xi(U) - A_\xi(V)\}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)} \le \hat{L}_A\|U - V\|_Z, \quad U, V \in K$$

を満たす. ここで $\hat{L}_A$ は ξ に依存しない正数.

($A_{U\xi}$3) $A_\xi(U)$ のノルムは

$$\|A_\xi(U)\|_{\mathcal{L}(X_\xi)} \le \hat{N}_A \xi^{-2}, \quad U \in K$$

で評価される．ここで $\hat{N}_A$ は ξ に依存しない正数．

($A_{U\xi}$4) 作用素 $R_\xi(U) = A_\xi(U)^{-1} P_\xi A(U), U \in K$, は

$$\|\{1 - R_\xi(U)\}A(U)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \hat{M}_R \xi^2, \quad U \in K,$$

$$\|\{R_\xi(U) - R_\xi(V)\}A(V)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \hat{L}_R \xi^2 \|U - V\|_Z, \quad U, V \in K$$

を満たす．ここで $\hat{M}_R$, $\hat{L}_R$ は ξ に依存しない正数．

(In_ξ) 十分小さな $\xi_0 > 0$ があって，$0 < \xi < \xi_0$ のとき $P_\xi U_0 \in K$.

(Sp_ξ1) $\|P_\xi\|_{\mathcal{L}(X)}$ と $\|A_\xi(P_\xi U_0) P_\xi A(U_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ は ξ について一様に有界である．

(Sp_ξ2) 指数 $\hat{\alpha} = \alpha = \frac{1+\epsilon}{2}$ について，ξ に一様に不等式 $\|\cdot\|_{Z_\xi} \le \hat{D}\|A_\xi(P_\xi U_0)^{\hat{\alpha}} \cdot\|_{X_\xi}$ が成立する．ここで Z_ξ は X_ξ に Z のノルムを備えた空間である．

これらの条件が成立することを示すためには，凸多角形領域上の Sobolev 空間の理論，作用素の分数べき，分数指数の Sobolev 空間上の有限要素法の理論などが必要であるが，ここでは割愛する．詳細については [11] を参照のこと．

Theorem 2.1 の略証．上の条件 ($A_{U\xi}$1–2), (In_ξ), (Sp_ξ1–2) と (F_U) より，各 ξ ごとに Nakaguchi and Yagi [10] の Theorem 5.6 を応用することができる (中口，第 19 回発展方程式若手セミナー報告集，pp.125–131 も参照のこと)．また，これらの条件に表れる定数がすべて ξ に依存しないことから，[10, Theorem 5.6] で与えられる h_0 も ξ に依存しない定数である．これにより，$\eta \in (0, 1-\hat{\alpha})$ を固定したとき，S を十分小さくとれば，任意の $h \in (0, h_0), \xi \in (0, \xi_0)$ と $N \le S/h$ に対して，方程式 (2.5) は積空間 $\mathcal{X}_{\xi,h}(S) = Z_\xi^{N+1} \times (Z_\xi^s)^N$ の閉部分集合

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\xi,h}(S) = \{\widehat{\mathcal{U}} = [\widehat{U}_0, \dots, \widehat{U}_N, \widehat{\boldsymbol{V}}_0, \dots, \widehat{\boldsymbol{V}}_{N-1}] \in Z_\xi^{N+1} \times (Z_\xi^s)^N;& \\ \widehat{U}_0 = P_\xi U_0,\ \|\widehat{U}_n - \widehat{U}_m\|_{Z_\xi} \le |(n-m)h|^\eta,\ 0 \le m \le n \le N,& \\ \|\widehat{\boldsymbol{V}}_n - e\widehat{U}_n\|_{Z_\xi^s} \le h^\eta,\ 0 \le n \le N-1\}&\end{aligned}$$

の中で一意な時間局所解 $\widehat{\mathcal{U}}$ を持ち，$\widehat{\mathcal{U}}$ は (2.6) を満たす．さらに一意解の表現公式

$$\begin{cases} \widehat{U}_n = \Phi_{\xi,h}(\widehat{\mathcal{U}}; n, 0) P_\xi U_0 + h \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \Phi_{\xi,h}(\widehat{\mathcal{U}}; n, \ell+1) \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_\ell) \mathcal{A} \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_\ell), \\ \qquad\qquad n = 0, 1, \dots, N, \\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n = \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) e \Phi_{\xi,h}(\widehat{\mathcal{U}}; n, 0) P_\xi U_0 + h \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) \mathcal{A} \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) \\ \qquad + h \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) e \Phi_{\xi,h}(\widehat{\mathcal{U}}; n, \ell+1) \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_\ell) \mathcal{A} \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_\ell), \\ \qquad\qquad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \tag{3.1}$$

が得られる．ここで

$$\Phi_{\xi,h}(\widehat{\mathcal{U}}; n, m) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ \left\{1 - h e^T \mathcal{B} A_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_{n-1}) \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_{n-1}) e\right\} & \\ \quad \times \cdots \times \left\{1 - h e^T \mathcal{B} A_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_m) \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_m) e\right\}, & n > m, \end{cases}$$

は離散発展作用素，$\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n))^{-1}$ である． □

Theorem 2.2 の略証．誤差 E_n を $E_n = P_\xi E_n + (1 - P_\xi) E_n$ と分解すると $P_\xi E_n = \widehat{U}_n - P_\xi U(t_n)$, $(1 - P_\xi) E_n = -(1 - P_\xi) U(t_n)$ となる．有限要素法の理論によって $\max_n \|(1 - P_\xi) U(t_n)\|_Z \le C \xi^{1-\epsilon} \|U\|_{\mathcal{C}([0,S];\mathcal{D})}$ が示されるので，第 1 項 $P_\xi E_n$ の評価が得られればよい．

ここでは以下の表記を用いる：$U_n = U(t_n)$, $V_{n,i} = U(t_n + c_i h)$, $\boldsymbol{V}_n = [V_{n,1}, \dots, V_{n,s}]$, $\widetilde{U}_n = P_\xi U_n$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}_n = P_\xi \boldsymbol{V}_n$, $\widetilde{\mathcal{U}} = [\widetilde{U}_0, \dots, \widetilde{U}_N, \widetilde{\boldsymbol{V}}_0, \dots, \widetilde{\boldsymbol{V}}_{N-1}]$, $\widetilde{E}_n = P_\xi E_n = \widehat{U}_n - \widetilde{U}_n$, $\widetilde{\boldsymbol{D}}_n = \widehat{\boldsymbol{V}}_n - \widetilde{\boldsymbol{V}}_n$.

次式で定義される量 e_n, d_n, $0 \le n \le N-1$, を導入する：

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + he^T\mathcal{B}\Big\{-A(V_n)V_n + F(V_n)\Big\} + e_n, \\ V_n = eU_n + h\mathcal{A}\Big\{-A(V_n)V_n + F(V_n)\Big\} + d_n. \end{cases}$$

この式に P_ξ を作用させたものを (2.5) から引くと

$$\begin{cases} \widetilde{E}_{n+1} = \widetilde{E}_n + he^T\mathcal{B}\left\{-A_\xi(\widetilde{V}_n)\widetilde{D}_n + G_\xi(\widetilde{V}_n + \widetilde{D}_n, \widetilde{V}_n)\right\} - he^T\mathcal{B}\tilde{c}_n - P_\xi e_n, \\ \widetilde{D}_n = e\widetilde{E}_n + h\mathcal{A}\left\{-A_\xi(\widetilde{V}_n)\widetilde{D}_n + G_\xi(\widetilde{V}_n + \widetilde{D}_n, \widetilde{V}_n)\right\} - h\mathcal{A}\tilde{c}_n - P_\xi d_n, \\ \widetilde{E}_0 = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

を得る．ここで

$$\tilde{c}_n = P_\xi\Big\{-A(V_n)V_n + F(V_n)\Big\} - \Big\{-A_\xi(\widetilde{V}_n)\widetilde{V}_n + F_\xi(\widetilde{V}_n)\Big\},$$

$$G_\xi(\widehat{V}, \widehat{W}) = -\left\{A_\xi(\widehat{V}) - A_\xi(\widehat{W})\right\}\widehat{V} + \left\{F_\xi(\widehat{V}) - F_\xi(\widehat{W})\right\}.$$

$\widetilde{\mathcal{E}} = [\widetilde{E}_0, \ldots, \widetilde{E}_N, \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_{N-1}]$ をこの半線形方程式 (3.2) の解と捉え，(3.1) と同様の表現公式を得ることによって，目的とする評価式を示すことができる． □

REFERENCES

[1] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.

[3] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[4] H. Fujita and T. Suzuki, *Evolution Problems*, Part 6 of Handbook of Numerical Analysis Vol. II, Finite Element Methods (Part 1), P. G. Ciarlet and J. L. Lions eds. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[5] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.

[6] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2nd edn. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[7] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *Chemotactic collapse for the Keller-Segel model*, J. Math. Biol., **35** (1996), 177–194.

[8] E. F. Keller and L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theoret. Biol., **26** (1970), 399–415.

[9] T. Nagai, T. Senba and K. Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 411–433.

[10] E. Nakaguchi and A. Yagi, *Error estimates of implicit Runge-Kutta methods for quasilinear abstract equations of parabolic type in Banach spaces*, Japan. J. Math., **25** (1999), 181–226.

[11] E. Nakaguchi and A. Yagi, *Full discrete approximation by Galerkin Runge-Kutta methods for a parabolic system of chemotaxis*, submitted to Nonlin. Anal.

[12] W. -M. Ni and I. Takagi, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J., **70** (1993), 247–281.

[13] R. Schaaf, *Stationary solutions of chemotaxis systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **292** (1985), 531–556.

[14] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Pronceton, 1970.

[15] H. Tanabe, *Equation of Evolution*, Iwanami, Tokyo, 1975 (in Japanese): English translation, Pitman, London, 1979.

[16] H. Tanabe, *Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Mercel Dekker, New York, 1996.

[17] V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[18] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[19] A. Yagi, *Coincidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs*, C. R. Acad. Sci. Paris, **299** (1984), 173–176.

[20] A. Yagi, *Norm behavior of solutions to a parabolic system of chemotaxis*, Math. Japon., **45** (1997), 241–265.

〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1 大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻

E-mail address: `nakaguti@ap.eng.osaka-u.ac.jp`

対称双曲系の初期値境界値問題に対する解の正則性について

田中 由美
(奈良女子大学)

1. Introduction

ここでは境界が特性的かつ多重度一定な場合に対する対称双曲系の初期値境界値問題について論じる．

Ω を $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ の有界開集合, その境界 Γ は滑らかとする．A_0, A_j は対称行列とし，一階微分作用素 L を次で定める．

$$L = A_0 \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j + B.$$

次の初期値境界値問題を考える．

$$Lu = F \qquad \text{in } [0,T] \times \Omega, \tag{1}$$

$$Mu = 0 \qquad \text{in } [0,T] \times \Gamma, \tag{2}$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad \text{for } x \in \Omega. \tag{3}$$

未知関数 $u = u(t,x)$ は l-ベクトル値関数である．$\nu(x) = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ を Γ 上の点 x における外向き単位法線ベクトルとし，境界行列を $A_\nu = \sum_{j=1}^{n} \nu_j A_j$ で定める．A_ν が singular でかつ $[0,T] \times \Gamma$ 上でランクが一定であるとき，境界が特性的かつ多重度一定であるという．M も Γ 上ランク一定とする．次に関数空間の定義を行う．

2. Function spaces

半空間 $\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n ; x_n > 0\}$ に対して $H^{m,\mu}_*(\mathbf{R}^n_+)$ を定義する．

まず，$\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ に対して，$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha_{\tan} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots (\rho(x_n)\partial_n)^{\alpha_n}$ と表す．ここに $\partial_x = (\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n)$, $\partial_i = \partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $\rho(x_n)$ は

$$\rho(x_n) = \begin{cases} x & 0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{2}, \\ 1 & x_n > 1 \end{cases}$$

を満たす滑らかな関数とする．

Definition.

$m, \mu \geq 0$ とする．$u \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ にたいし，$H^{m,\mu}_*(\mathbf{R}^n_+)$ を次のように定義する．

$$u \in H^{m,\mu}_*(\mathbf{R}^n_+) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \partial^\alpha_{\tan} \partial^j_n u \in L^2(\mathbf{R}^n_+), \ |\alpha| + \xi(j\,;\mu) \leq m.$$

ただし，ξ は,

$$\xi(j\,;\mu) := \begin{cases} j, & j < \mu, \\ 2j - \mu, & j \geq \mu \end{cases}$$

とする．また，$H_*^{m,\mu}(\mathbf{R}_+^n)$ のノルム $\|\cdot\|_{H_*^{m,\mu}(\mathbf{R}_+^n)}$ (または $\|\cdot\|_{H_*^{m,\mu}}$) を次で定める．

$$\|u\|^2_{H_*^{m,\mu}(\mathbf{R}_+^n)} := \sum_{|\alpha|+\xi(j;\mu)\le m} \|\partial^\alpha_{\tan}\partial^j_n u\|^2_{L^2(\mathbf{R}_+^n)}.$$

一般領域 Ω に対して $H_*^{m,\mu}(\Omega)$ を定義する．有界領域 Ω に対して Γ の 適当な有限開被覆を $\{\mathcal{O}_j\}_{j=1}^N$ とする．更に $\Omega_\delta=\{x\in\Omega;\mathrm{dist}(x,\Gamma)>\delta\}$ とおき，$\{\mathcal{O}_j\}_{j=1}^N\cup\{\Omega_\delta\}$ が $\overline{\Omega_\delta}$ の開被覆となるように $\delta>0$ を十分小さくとる．この開被覆に従属する 1 の分解を $\{\chi_j\}_{j=0}^N$ とする．即ち $\{\chi_j\}_{j=0}^N$ は $\mathrm{supp}\ \chi_j\subset\mathcal{O}_j$ $(1\le j\le N)$, $\mathrm{supp}\ \chi_0\subset\Omega_\delta$ であってかつ $\sum_{j=0}^N\chi_j=1$ in $\overline{\Omega}$ を満たすとする．$\{\mathcal{O}_j\}_{j=1}^N$ から局所座標の空間の原点を中心とした半径 r の球を B とし，$\mathcal{O}_j\cap\overline{\Omega}$ から $\mathrm{B}_+=B\cap\overline{\mathbf{R}_+^n}$ への微分同相写像を τ_j とする．このとき，$u^{(j)}=(\chi_j u)\circ\tau_j^{-1}$ は B_+ で定義された関数になる．$H_*^{m,\mu}(\Omega)$ を次で定義する．

$$u\in H_*^{m,\mu}(\Omega) \quad\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \chi_0 u\in H^m(\Omega) \text{ かつ } u^{(j)}\in H_*^{m,\mu}(\mathbf{R}_+^n),\ j=1,\cdots,N.$$

時間変数 t を含めた関数空間を次のように定義する．

$$\begin{aligned} X_*^{m,\mu}([0,T];\Omega) &= \bigcap_{j=0}^m C^j([0,T];H_*^{m-j,\mu}(\Omega)),\\ Y_*^{m,\mu}(0,T;\Omega) &= \bigcap_{j=0}^m W^{j,\infty}(0,T;H_*^{m-j,\mu}(\Omega)). \end{aligned}$$

ただし，$W^{j,\infty}(0,T;H_*^{m-j,\mu}(\Omega))$ は次で与える．

$$u\in W^{j,\infty}(0,T;H_*^{m-j}(\Omega)) \quad\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \partial_t^k u\in L^\infty(0,T;H_*^{m-j}(\Omega)),\ 0\le k\le j.$$

上の $X_*^{m,\mu}$, $Y_*^{m,\mu}$ ノルムは次で定義する．

$$|||u|||_{m,\mu,*} := \sup_{0\le t\le T}|||u(t)|||_{m,\mu,*}.$$

ただし，$|||\,u(t)\,|||_{m,\mu,*}$ は次で与える．

$$|||\,u(t)\,|||^2_{m,\mu,*} = \sum_{j=0}^m\|\partial_t^j u(t)\|^2_{H_*^{m-j,\mu}(\Omega)}.$$

次の関数空間も定義しておく．

$$Z_*^{m,\mu}(0,T;\Omega)=\bigcap_{j=0}^m W^{j,1}(0,T;H_*^{m-j,\mu}(\Omega)).$$

ただし，$W^{j,1}(0,T;H_*^{m-j,\mu}(\Omega))$ は次で与える．

$$u\in W^{j,1}(0,T;H_*^{m-j}(\Omega)) \quad\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \partial_t^k u\in L^1(0,T;H_*^{m-j}(\Omega)),\ 0\le k\le j.$$

$Z_*^{m,\mu}$ のノルムは次で与える．

$$\|u\|_{Z_*^{m,\mu}} := \int_0^T|||\,u(t)\,|||_{m,\mu,*}\,dt.$$

3. Main result

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域，その境界 Γ は滑らかとする．次の仮定をおく．

仮定 I

(i) A_j $(0 \le j \le n)$, B は $Y_*^{s,\mu}(0, T; \Omega)$ に属する $l \times l$ 行列値関数である．ただし，$s \ge \max\{m, 2[n/2]+6+\mu\}$ とする．

(ii) 各点 $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ で $A_j(t, x)$ $(0 \le j \le n)$ は Hermite 対称．特に $A_0(t, x)$ は正定値をとる，

(iii) 各点 $(t, x) \in [0, T] \times \Gamma$ で境界行列 $A_\mu(t, x)$ は $Ker\ M(x)$ 上で極大非負．

(iv) $\mathcal{N}(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \Gamma)$ があり，各点 $(t, x) \in [0, T] \times \Gamma$ に対し，$Ker\ A_\mu(t, x) = \mathcal{N}(t, x)$ が成り立つ．$\mathcal{N}(t, x)^\perp$ の次元は $x \in \Gamma$ によらず一定値 $l_1 \in (0, l)$ である．

(v) $M \in C^\infty(\Gamma)$ で $M(x)$ のランクは $x \in \Gamma$ によらず一定値 l_0 である．

仮定 II

μ は与えられた正整数とし，$\widetilde{m}$ を $1 \le \widetilde{m} \le \mu$ を満たす任意の正整数とする．初期値境界値問題 (1)-(3) が次の (i)′ と仮定 I の (ii) から (v) までを満たし，データ (f, F) がそれぞれ $H^{\widetilde{m}}(\Omega)$, $Z^{\widetilde{m}}(0, T; \Omega)$ に属し，かつ $\widetilde{m}-1$ 次の整合条件を満たすならば，(1)-(3) は $X^{\widetilde{m}}([0, T]; \Omega)$ 属する唯 1 つの解 u をもつ．
また，次の評価式を満たす．

$$|||u(t)|||_{\widetilde{m}} \le C'\{\|f\|_{H^{\widetilde{m}}(\Omega)} + \|F\|_{Z^{\widetilde{m}}(0,t;\Omega)} + |||F(0)|||_{\widetilde{m}-1}\}, \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

ただし，C' は $A_j\,(j=0,\cdots,n)$, B, T に依存する定数である．

(i)′ $A_j \in C^{\widetilde{m}+1}([0, T] \times \overline{\Omega})$ $(0 \le j \le n)$, $B \in C^{\widetilde{m}}([0, T] \times \overline{\Omega})$ である．

Theorem.

$\mu \ge 1$ を正整数とし，m を $m > \mu$ を満たす任意の正整数とする．初期値境界値問題 (1)-(3) が上の仮定 I，仮定 II を満たし，データ f, F がそれぞれ $H_*^{m,\mu}(\Omega)$, $Z_*^{m,\mu}(0, T; \Omega)$ に属し，かつ $m-1$ 次の整合条件を満たすならば，(1)-(3) は $X_*^{m,\mu}([0, T]; \Omega)$ に属する唯一つの解をもつ．また，次の評価式が成り立つ．

$$|||u(t)|||_{m,\mu,*} \le C\{\|f\|_{H_*^{m,\mu}(\Omega)} + \|F\|_{Z_*^{m,\mu}(0,t;\Omega)} + |||F(0)|||_{m-1,\mu,*}\}, \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

ただし，C は $A_j\,(j=0,\cdots,n)$, B, T に依存する定数である．

4 Sketch of Proof

証明は m に関する帰納法を用いる．即ち，$m=\mu+1,\cdots,k-1$ で Theorem が成り立つとする．$m=k$ について考える．有界領域 Ω に対して Γ の適当な有限開被覆をとり，この開被覆に従属する 1 の分解をおく．微分同相写像と未知関数の変換を行うと，u は $\operatorname{supp} u \subset \mathrm{B}_+ = B\cap\overline{\mathbf{R}^n_+}$ を満たす．このとき初期値境界値問題は次のようになる．

$$Lu=F \qquad \text{in } [0,T]\times \mathrm{B}_+, \tag{6}$$

$$Mu=0 \qquad \text{in } [0,T]\times (\mathrm{B}\cap \mathbf{R}^{n-1}), \tag{7}$$

$$u(0,x)=f(x) \qquad \text{for } x\in \mathrm{B}_+. \tag{8}$$

ここに M は定数行列であり，境界行列 $A_\nu=-A_n$ は A_n のランクを l_1 とすると，次を満たす．

$$A_n = \begin{pmatrix} A_n^{\mathrm{I}\mathrm{I}} & A_n^{\mathrm{I}\mathrm{II}} \\ A_n^{\mathrm{II}\mathrm{I}} & A_n^{\mathrm{II}\mathrm{II}} \end{pmatrix}.$$

$A_n^{\mathrm{I}\mathrm{I}}$, $A_n^{\mathrm{I}\mathrm{II}}$, $A_n^{\mathrm{II}\mathrm{I}}$, $A_n^{\mathrm{II}\mathrm{II}}$ はそれぞれ $l_1\times l_1$, $l_1\times(l-1_1)$, $(l-l_1)\times l_1$, $(l-l_1)\times(l-l_1)$ 行列であり，$A_n^{\mathrm{I}\mathrm{I}}$ は $[0,T]\times(\mathcal{B}_+\cap\mathbf{R}^{n-1})$ で正値，

$$A_n^{\mathrm{I}\mathrm{II}} = 0,\quad A_n^{\mathrm{II}\mathrm{I}} = 0,\quad A_n^{\mathrm{II}\mathrm{II}} = 0 \quad \text{on } [0,T]\times(\mathcal{B}\cap\mathbf{R}^{n-1})$$

である．u を $u={}^T(u_{\mathrm{I}},\, u_{\mathrm{II}})$ と表す．ただし，u_{I} は l_1 ベクトル値関数，u_{II} は $(l-l_1)$ ベクトル値関数とする．$u\in X_*^{m-1,\mu}([0,T];\mathcal{B}_+)$ であること及び $A_n^{\mathrm{I}\mathrm{I}}$ の性質より，$u_{\mathrm{I}}\in X_*^{m,\mu}([0,T];\mathcal{B}_+)$ となることに注意しておく．

まず最初に $u^\alpha=D_*^\alpha u$, $|\alpha|=k-\mu$ とおき，D_*^α を $Lu=F$ に作用させる．このとき，

$$Lu^\alpha + \sum_{|\beta|=k-\mu} C_{\alpha\beta}u^\beta = H_\alpha.$$

と表わせる．左辺は $Z^\mu(0,T;\mathcal{B}_+)$ に属していること，$C_{\alpha\beta}$ は $C^\mu([0,T]\times\overline{\mathcal{B}_+})$ に属していること，また u^α に対しては μ 次の整合条件を満たしていることより，$u^\alpha\in X^\mu([0,T];\mathcal{B}_+)$ を得る．

次に $|\beta|+\xi(i;\mu)=k,\ \ \nu+1\le i\le[(k+\mu)/2]$ となる (β,i) に対して $D_*^\beta\partial_n^i u_{\mathrm{II}}\in L^2([0,T]\times\mathcal{B}_+)$ が成り立つことを示す．

$|\beta|+\xi(i;\mu)=k-1,\ \ \mu+1\le i\le[(k-1+\mu)/2]$ となる (β,i) に対して $D_*^\beta\partial_n^i u=u^{\beta,i}$ を見る．$D_*^\beta\partial_n^i$ を $Lu=F$ に作用させると，

$$\sum_{j=0}^n A_j^{\mathrm{II}\mathrm{II}}\partial_j u_{\mathrm{II}}^{\beta,i} + B^{\mathrm{II}\mathrm{II}}u_{\mathrm{II}}^{\beta,i} + \sum_{|\gamma|+\xi(i;\mu)=k-1} C_{\beta\gamma}u_{\mathrm{II}}^{\gamma,i} = H_{\beta,i}$$

が得られる．左辺は $Z_*^1(0,T;\mathcal{B}_+)$ に属している．ここでは，Yamamoto [9] の Theorem 1 が適用できて，$u_{\mathrm{II}}^{\beta,j}\in X_*^{1,0}([0,T];\mathcal{B}_+)$ が得られる．従って，$u_{\mathrm{II}}^{\beta+1,j}\in L^2([0,T]\times\mathcal{B}_+)$ が得られる．

$k+\mu$ が奇数ならば，証明は終わる．偶数である場合は，$\partial_n^{\frac{k+\mu}{2}}u_{\mathrm{II}}\in L^2((0,T)\times\mathcal{B}_+)$ を示さねばならない．$\partial_n^{\frac{k+\mu}{2}-1}$ を $Lu=F$ に作用させると，

$$\sum_{j=0}^{n} A_j^{\mathrm{II}} \partial_j \partial_n^{\frac{k+\mu}{2}-1} u_{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{II}} \partial_n^{\frac{k+\mu}{2}-1} u_{\mathrm{II}} + C_{\frac{k+\mu}{2}-1} \partial_n^{\frac{k+\mu}{2}-1} u_{\mathrm{I}} = H_{\frac{k+\mu}{2}-1}.$$

となる. 左辺は $Z^1(0,T;\mathcal{B}_+)$ に属する. $\partial_n^{\frac{k+\mu}{2}-1} u_{\mathrm{I}}$ に対しては 1 次の整合条件が成り立つ. よって, 仮定 II より $\partial_n^{\frac{k+\mu}{2}-1} u_{\mathrm{II}} \in X^1([0,T];\mathcal{B}_+)$ が従う.

参考文献

[1] M.Ohno and Shirota, *On the initial boundary value probrem for the linear MHD equation*, preprint.

[2] M.Ohno, Y.Shizuta and T.Yanagisawa, *The initial boundary value probrem for linear symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, J. Math., Kyoto Univ. **35** (1995), 143-210.

[3] J.Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Trans. Amer. Soc., **291** (1985), 167-187.

[4] P.Secchi, *The initial–boundary value problem for symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary of constant multiplicity*, Differential Integral Equations, **9** (1996), 671-700.

[5] Y.Shizuta, Y.Yamamoto and T.Yanagisawa, *The initial boundary value probrem for linear symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity II*, preprint.

[6] Y. Tanaka, 対称双曲系の特性的初期値境界値問題に対する解の正則性, 特に解の *mild derivatives* について, 修士論文, Nara Women's University, (1998).

[7] M.Tsuji, *Regularity of solutions of hyperbolic mixed probrems with characteristic boundary*, Proc. Japan Acad., **48 A** (1972), 719-724.

[8] Y.Yamamoto, *Regularity of solutions of initial boundary value probrems for symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, preprint.

[9] Y.Yamamoto, *Regularity of solutions of initial boundary value probrems for symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Stochastics, (1998).

ある調和写像の安定性について

中島 徹
東北大学大学院理学研究科数学専攻 D1
E-mail address s97m25@math.tohoku.ac.jp

ここでは, 筆者の結果の証明について詳しく述べることを避け, 筆者の研究とこれまでの研究との関連及び幾つかの Open problems について述べる. 筆者の結果の証明について興味のあるかたは [9] を参照.

1 Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ を $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ なる有界領域とし, 写像のクラス $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1})$ を,

$$W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1}) = \{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^n) |\ |u(x)| = 1 \text{ (a.e.)}\}$$

エネルギー汎関数 $\mathbf{E} : W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

で定める.

Definition 1 (energy minimizing map, harmonic map)
(1) u が energy minimizing map (E.M.M) である.
$\underset{def}{\Leftrightarrow} \mathbf{E}(u) \leq \mathbf{E}(v)$ $(\forall\, v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1})$ with $\mathrm{u} - \mathrm{v} \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^n))$
(2)u が harmonic map (H.M.) である.
$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ u が $\mathbf{E}$ の Euler-Lagrange 方程式

$$\int_\Omega \{\langle \nabla u, \nabla \psi\rangle - |\nabla u|^2 (u, \psi)\}\, dx = 0 \quad \forall \psi \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^n)$$

を満たす.

Remark 1 E.M.M. 及び H.M. は微分幾何学における重要な研究対象であり, 一般には 2 つの Riemann 多様体間の写像について定義されるものである. 値域を球面とす

る調和写像の研究を行うのには次の2つの理由がある.
(1) 球面は調和写像の理論において未解決なことが多い正曲率の Riemann 多様体として最も簡単 (と,思われる) なものである.
(2) 液晶や非線型 σ モデルという物理的な問題に関係している.

実は,E.M.M. は一般には連続ではない. 実際 $n \geq 3$ ならば 3 次元球体 $\mathbb{B}^n$ から $\mathbb{S}^{n-1}$ への写像 $x/|x|$ は E.M.M. となるが, これは明かに原点において連続ではない. (一方, 2 次元領域から n 次元球面への E.M.M. 及び H.M. が解析的になることが, F. Hèlein, C. B. Morrey らによって示されている. [4, 7] また, 一般に H.M. は連続点の近傍では C^∞ 級となることが R. Schoen によって示されている. [13])
そこで我々は E.M.M. の不連続点の集合 (これを特異集合と呼ぶ) に注目する.

$\mathrm{Reg(u)} = \{\mathrm{x} \in \overline{\Omega} | \mathrm{u \text{ is continuous at } x}\}$
$\mathrm{Sing(u)} = \overline{\Omega} - \mathrm{Reg(u)}$ とする.

次の R.Schoen-K.Uhlenbeck の結果により, E.M.M. の特異集合はあまり大きくないことがわかる.

Theorem 1 (R.Schoen-K.Uhlenbeck) [14, 15]
M : m次元 境界付き compact Riemann 多様体 $(m \geq 3)$, N : n次元 compact Riemann 多様体 とする.
$u \in W^{1,2}(M, N)$ が E.M.M. ならば, $\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{Sing(u)} \cap \mathrm{Int}M \leq m - 3$
さらに, $m = 3$ のときは, $\mathrm{Sing(u)} \cap \mathrm{IntM}$ は discrete
また, $u|_{\partial M}$ が, $C^{2,\alpha}$ 級ならば u は, ∂M のある近傍上, C^α 級 である.

一方, H.M. では次のような興味深い結果が知られている.

Theorem 2 (T. Rivière) [12]
$\mathrm{H.M.u} \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ で $\mathrm{Sing(u)} = \overline{\mathbb{B}^3}$ となるものが存在する.

このように特異集合の大きさについては E.M.M. の場合の大きさの評価及び,E.M.M. と H.M. の場合の gap など種々の結果が得られている. そこで以下は特異集合の配置に興味を持つ. まず次の 2 つの結果に注目する.

Theorem 3 (H. Brezis, J. M. Coron, E. Lieb) [1]
E.M.M. $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ で $u|_{\partial \mathbb{B}^3} = id|_{\mathbb{S}^2}$ なるものは $u(x) = x/|x|$ のみである.

Theorem 4 (C. C. Poon) [11]
任意の $x \in \mathbb{B}^3$ に対して, ある H.M. $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ が存在して次を満たす.
$\mathrm{(1)Sing(u)} = \{\mathrm{x}\}$ $\quad$ $\mathrm{(2)u}|_{\partial \mathbb{B}^3} = \mathrm{id}|_{\mathbb{S}^2}$

このようにして, 特異集合の配置についても,H.M. と E.M.M. の間には gap があることがわかる.

2 L. Mou の結果と, $x/|x|$ の安定性

Introduction で見たように, 一般の H.M. の特異集合の配置については境界条件からだけではあまり詳しいことはわからないようである. ここで,H.M. の特異集合の問題として, L. Mou が提出した次の問題に着目する.

Problem 1 (L. Mou) [8]
任意の $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ に対して, 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と H.M. $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1})$ で次を満たすものは存在するか?
(1) $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset \Omega$
(2)$\mathrm{Sing(u)} = \{\mathrm{p_1, p_2, \cdots, p_k}\}$

ここで L. Mou の結果を述べる前に, いくつかの定義を述べておく.

Definition 2 $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ H.M. で $\mathrm{Sing(u)} = \{0\}$ なるものとする.
(1) u が弱安定 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\delta_u^2\mathbf{E}(\phi, \phi) \geq 0\ \forall\phi \in C_0^1(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n)$ with $(\mathrm{u}, \phi) = 0$
(2) u が強安定 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\lambda > 0$ s.t.

$$\delta_u^2\mathbf{E}(\phi, \phi) \geq \lambda \int_\Omega r^{-2}|\phi|^2\, dx \quad \forall\phi \in C_0^1(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n) \text{ with } (\mathrm{u}, \phi) = 0 \tag{2.1}$$

Remark 2 (1) ϕ が u に直交するという条件は, 変分の方向 $\phi(x)$ が $\mathbf{S}^{n-1}$ の $u(x)$ での接空間に含まれるという条件である.
(2)(2.1) の右辺の積分に weight r^{-2} がつけてあるのは, λ の値が,scaling によって不変になるようにするためである.

Theorem 5 (L. Mou) [8]
もし, H.M. $\mathrm{u} \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ で次の 3 つ条件を満たすものが存在すれば, Problem 1 は肯定的である.
(a)$\mathrm{Sing(u)} = \{0\}$ (b)u は次数 0 の斉次写像 (c)u は強安定

問題は (a) から (c) を満たす H.M. が実際に存在するかである. L. Mou はこのような H.M. が $\mathbb{B}^3$から $\mathbb{S}^2$ には多数存在することを証明している. (詳しくは後に述べる.) しかし $n \geq 4$ のとき, $\mathbb{B}^n$から $\mathbb{S}^{n-1}$ へのこのような H.M. が存在するかについては何も述べていない. そこで今回は $\mathbb{B}^n$から $\mathbb{S}^{n-1}$ $(n \geq 4)$ への H.M. で (a) から (c) を満たすものの存在を考察する. 特に E.M.M. $u(x) = x/|x|$ に注目する. u は明かに (a) と (b) を満す. よって問題は (c) を満たすかである. ここで u は エネルギー汎関数の最小点であるから, 弱安定にはなる. また, $n = 3$ では L. Mou によって強安定であることが示されている. そこで筆者は $n \geq 4$ の場合について研究し次の結果を得た.

Theorem 6 (N) [9]
$n \geq 7$ の場合, $u(x) = x/|x|$ は強安定であるが, $n = 4$ の場合, $u(x) = x/|x|$ は強安定ではない.

Theorem 6 により, $n \geq 7$ のときには Problem 1 は肯定的であることがわかる. また, 次の 2 つの事実をみると, この結果は大変興味深い.

Theorem 7 (L. Mou)
任意の $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$ に対して, ある H.M. $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ が存在して以下を満たす.
(1)$\mathrm{Sing}(u) = \{0\}$ (2) u は次数 0 の斉次写像 (3)$\deg(u,0)=d$

Theorem 8 (H. Brezis-J. M. Coron-E. Lieb) [1]
$u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ が非定値かつ次数 0 の斉次な E.M.M. であるとする. このとき, ある $R \in O(3)$ が存在して次を満たす.

$$u(x) = R\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad (x \in \mathbb{B}^3 - \{0\}).$$

これより, 特に $\deg(\mathrm{u}, 0) = \pm 1$

これにより,$n = 3$ のときは非定値かつ次数 0 の斉次な写像では, E.M.M. は常に強安定であること, 及び, E.M.M. でない H.M. が無限に存在することがわかる. 一方, $n = 4$ では $x/|x|$ のように対象性の高い (由緒正しい) E.M.M. でさえ, 強安定にはならない. このことは, 次元が写像の性質に影響をおよぼす現象として大変興味深い.

Conjecture 1 (1)$n = 5, 6$ のとき,$u(x) = x/|x|$ は強安定ではない
(2)$n = 4$ のとき,(a) から (c) を満たす H.M. は存在しない

3 今後の問題

E.M.M. の理論においては実は次数 0 の斉次写像は大変重要なものである. ここでは Problem 1 の (2) を考えるにおいて, 有効と思われる方法について述べておく. 以下で述べる定理についてはここで必要な制限されたものを述べることにするまず所謂 blow-up について述べる.

Theorem 9 (R. Hardt-F. H. Lin, S. Luckhaus, R. Schoen-K. Uhlenbeck) [3, 6, 14]
$u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$: E.M.M. $\mathrm{p} \in \mathrm{Sing}(\mathrm{u})$ とする.
このとき, ある 数列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,1)$ と, ある E.M.M. $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ とある $\alpha \in (0,1)$ が存在して次を満たす.
(1) u_0 は次数 0 の斉次写像
(2) u_{μ_j} は $W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ で u_0 に弱収束する.
(3) u_{μ_j} は $W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ で u_0 に局所強収束する.
(4) u_{μ_j} は $C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ で u_0 に収束する.
ここで, $u_{\mu_j}(x) = u(p + \mu_j x)$
この操作を blow-up と呼び, u_0 を tangent minimizing map (T.M.M.) と呼ぶ.

blow-up という操作は粗く言って特異点のまわりを拡大する操作である．よって，T.M.M. が特異点のまわりの状況を反映していると期待するのは自然である．ここで問題になるのは T.M.M. の uniqueness (u_0 が $\{\mu_j\} \subset (0,1)$ の取り方によらないこと）である．実は $\mathbb{B}^4$ から $\mathbb{S}^3$ の E.M.M. の場合このことは次の2つの定理から保証される．

Theorem 10 (R. Schoen-K. Uhlenbeck, T.Okayasu) [16]
$u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ を E.M.M. とする．このとき，Sing(u) は discrete

Theorem 11 (L. Simon) [17]
N を C^ω 級 compact Riemann 多様体，$u \in W^{1,2}(\Omega, N)$ を E.M.M. として，$p \in$ Sing(u) とする．このとき，もし p での T.M.M. $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n, N)$ で，Sing(u_0) $= \{0\}$ なるものが存在すれば，u_0 は u の p での唯一の T.M.M. である．

以上をふまえると,4 次元領域から 3 次元球面への E.M.M. の特異集合の解析には次数 0 の斉次な E.M.M. の解析が重要となると思われる．また，Problem 1 の (2) の解決は次の手順で行われると予想される．

Conjecture 2 (1) 強安定性という性質は blow-up によって不変である．
(2)$\mathbb{B}^4$ から $\mathbb{S}^3$ への 次数 0 の斉次な E.M.M. で強安定なものは存在しない．

ここで述べたのは，$\mathbb{B}^4$ から $\mathbb{S}^3$ への E.M.M. の特異点の場合であるが，強安定性が scaling によって不変な性質なことであることを考えると，このような研究は一般の 4 次元領域から $\mathbb{S}^3$ への E.M.M. の孤立特異点の解析へも応用される．また，さらに一般の場合の E.M.M. の孤立特異点の解析への応用にも興味が持たれる問題である．

References

[1] H. Brezis, J. M. Coron, E. Lieb, *Harmonic maps with defects.* Comm. Math. Phys. **107**, (1986), 649-705.

[2] R. Hardt, *Singularities of harmonic maps.* Bull. Amer. Math. Soc. **34**, (1997), 15-34.

[3] R. Hardt, F. H. Lin, *Mappings minimizing the L^p norm of the gradient.* Comm. Pure Appl. Math.**40**, (1987), 555-588

[4] F. Hélein, *Regularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphere.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311**, (1990), 519-524

[5] F. H. Lin, *Une remarque sur l'application $x/|x|$.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305**, (1987), 529–531.

[6] S. Luckhaus, *Partial Hölder continuity for minima of certain energies among maps into a Rimannian manifold.* Indiana Univ. Math. J. **37**, (1988), 349-367.

[7] C. B. Morrey, Jr, *Multiple integrals in the calculus of variations.* Springer Berlin-Heidelberg-New York. **1966**

[8] L. Mou, *Harmonic maps with prescribed finite singularities.* Comm. Partial Differential Equations **14**, (1989), 1509–1540.

[9] T. Nakajima, *Stability of the energy minimizing map $x/|x|$.* preprint

[10] T. Okayasu, *Regularity of minimizing harmonic maps into* $\mathbb{S}^4, \mathbb{S}^5$ *and symmetric spaces.*, Math. Ann. **298**, (1994), 193-205.

[11] C. C. Poon, *Some new harmonic maps from* $\mathbb{B}^3$ *to* $\mathbb{S}^2$. J. Diff. Geom. **34**, (1991), 165-168.

[12] T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres.*, Acta. Math. **175**, (1995), 197-226.

[13] R. Schoen, *Analytic aspects of harmonic map problem.* Seminar on nonlinear partial differential equations 321-358 MSRI. Publ. **2**, Springer New York-Berlin 1984.

[14] R. Schoen-K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps.* J. Diff. Geom. **17**, (1982), 307-335.

[15] R. Schoen-K. Uhlenbeck, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic.* J. Diff. Geom. **18**, (1983), 253-268.

[16] R. Schoen-K. Uhlenbeck, *Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere.* Invent. Math. **78**, (1984), 89-100.

[17] L. Simon, *Theorems on the regularity and singularity of energy minimizing maps.* ETH Lectures in Mathematics Series, Birakhauser, 1996

THE NONRELATIVISTIC LIMIT OF THE NONLINEAR KLEIN–GORDON EQUATION

SHŪJI MACHIHARA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060-0810, JAPAN

October 27, 1999

ABSTRACT. In this paper we consider the nonrelativistic limit of the nonlinear Klein–Gordon equation. We study how the solutions of the nonlinear Klein–Gordon equation converge toward the corresponding solutions of the nonlinear Schrödinger equation when the speed of light tends to infinity. Especially we consider the rate of convergence. We use Strichartz's estimate for the Klein–Gordon equation.

1. INTRODUCTION

We consider the nonlinear (and linear) Klein–Gordon equation in space-time $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\frac{\hbar^2}{2mc^2}u'' - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + \frac{mc^2}{2}u + \lambda|u|^{\gamma-1}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

where $\hbar$ is the Planck constant, m is the mass of particle, c is the speed of light, and u'' is the second time derivative, and $\lambda > 0$. When $n = 3$ and $\gamma = 3$, the equation (1.1) was introduced by Schiff [1] as the equation of classical neutral scalar mesons. If $\lambda = 0$, the equation (1.1) is the linear Klein–Gordon equation.

Substituting

$$u = ve^{-imc^2t/\hbar},$$

we obtain from (1.1) the following nonlinear Klein–Gordon equation for v:

$$\frac{\hbar}{2mc^2}v'' - i\hbar v' - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta v + \lambda|v|^{\gamma-1}v = 0.$$

The aim of this paper is to study this equation, particularly in the limit $c \to \infty$. We regard the procedure of taking limit $c \to \infty$ as "nonrelativistic limit." Formally, the limit equation is

$$-i\hbar v' - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta v + \lambda|v|^{\gamma-1}v = 0.$$

This is the nonlinear Schrödinger equation. So we expect that solutions of the nonlinear Klein–Gordon equation converge as $c \to \infty$ toward the corresponding solutions of the nonlinear Schrödinger equation. We may think of the Klein–Gordon equation as a relativistic generalization for the Schrödinger equation. From this relation, we have a particular interest in the convergence of solutions of two equations. In this paper we study this problem in detail. For simplicity, we set $A = -\Delta$, $\varepsilon = 1/c^2$, $f(v) = \lambda|v|^{\gamma-1}v$, and $\hbar = 2m = 1$. Given initial data, we rewrite the equations in question as

$$\varepsilon v'' - iv' + Av + f(v) = 0,\ v(0) = v_{0\varepsilon},\ v'(0) = v_{1\varepsilon}, \tag{1.2}$$

$$-iv' + Av + f(v) = 0,\ v(0) = v_{00}. \tag{1.3}$$

We denote by v_ε and v_0 the solution of (1.2) and (1.3), respectively.

We investigate how v_ε converges to v_0 as $\varepsilon \to 0$. There are a few results on the problem. The convergence in several modes has been proved, see [2] [3]. In [15], we have proved the convergence in $L^\infty(0,T;L^2)$. In this paper, we consider the rate of this convergence. When ε tends to 0, how rapidly does v_ε converge toward v_0 ? We show in Theorem 1 the upper bound of the order for nonlinear case. For linear case, we give the upper bound as well as the lower bound in Theorem 2.

This paper is constructed as follows. In Section 2, we state the main theorem. In Section 3, we give a sketch of proof.

We close this section by giving several notation. We abbrevitate $L^q(\mathbb{R}^n)$ to L^q and $L^r(I;L^q(\mathbb{R}^n))$ to L^rL^q , where I is a time interval. We denote by $H^{s,p}$ the Sobolev space of order s. For any p with $1 < p < \infty$, p' stands for its Hölder conjugate, i.e. $p' = p/(p-1)$.

2. Main Theorem

We state our main theorem.

Theorem 1. (Nonlinear Case)
Let $n = 3$, $\lambda > 0$ and $1 < \gamma < 21/5$. We assume that

$$v_{0\varepsilon} \in H^1,\ v_{1\varepsilon} \in L^2, \tag{2.1}$$

$$v_{00} \in H^1, \tag{2.2}$$

$$\sup_{\varepsilon>0}(\|v_{0\varepsilon}\|_{H^1} + \varepsilon^{1/2}\|v_{1\varepsilon}\|_{L^2}) < \infty, \tag{2.3}$$

$$\|v_{0\varepsilon} - v_{00}\|_{L^2} \le c\varepsilon^{1/4}. \tag{2.4}$$

Then for every $T > 0$, there exists c such that

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le c\varepsilon^{1/4}. \tag{2.5}$$

Remark 1.
In [15], we have shown only convergence of the LHS of (2.5) without specific rate. Theorem 1 gives an upper bound of the rate of this convergence.

Theorem 2. (Linear Case)

Let $\lambda = 0$. We assume (2.1),(2.2),(2.3), and (2.4).

Then for every $T > 0$, there exists c such that

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq c\varepsilon^{1/4}. \tag{2.6}$$

Moreover, for any $\alpha \geq 1/4$, $\delta > 0$, there exist $v_{0\varepsilon}$ and v_{00} such that

$$\|v_{0\varepsilon} - v_{00}\|_{L^2} \leq c\varepsilon^\alpha, \tag{2.7}$$

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \geq c\varepsilon^{1/4+\delta}. \tag{2.8}$$

3. Proof of The Main Theorem

From Duhamel principle, the solution v_ε of (1.2) satisfies the integral equation,

$$v_\varepsilon(t) = I_\varepsilon(t)v_{0\varepsilon} + J_\varepsilon(t)v_{1\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t J_\varepsilon(t-s)f(v_\varepsilon(s))ds, \tag{3.1}$$

where

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(t) &= e^{\frac{it}{2\varepsilon}}(\cos tA_\varepsilon - \frac{i}{2\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}\sin tA_\varepsilon),\\ J_\varepsilon(t) &= e^{\frac{it}{2\varepsilon}}A_\varepsilon^{-1}\sin tA_\varepsilon,\\ A_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\varepsilon A + \frac{1}{4}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

The solution v_0 of (1.3) satisfies

$$v_0(t) = I_0(t)v_{00} - i\int_0^t I_0(t-s)f(v_0(s))ds, \tag{3.2}$$

with

$$I_0(t) = e^{-iAt}.$$

We study $v_\varepsilon - v_0$. Subtracting (3.2) from (3.1) yields

$$v_\varepsilon(t) - v_0(t) = \sum_{i=1}^{5} P_\varepsilon^{(i)}(t), \tag{3.3}$$

with

$$P_\varepsilon^{(1)}(t) = (I_\varepsilon(t) - I_0(t))v_{00}, \tag{3.4}$$

$$P_\varepsilon^{(2)}(t) = I_\varepsilon(t)(v_{0\varepsilon} - v_{00}), \tag{3.5}$$

$$P_\varepsilon^{(3)}(t) = J_\varepsilon(t)v_{1\varepsilon}, \tag{3.6}$$

$$P_\varepsilon^{(4)}(t) = \int_0^t (iI_0(t-s) - \frac{1}{\varepsilon}J_\varepsilon(t-s))f(v_0(s))ds, \tag{3.7}$$

$$P_\varepsilon^{(5)}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t J_\varepsilon(t-s)(f(v_0(s)) - f(v_\varepsilon(s)))ds. \tag{3.8}$$

For $P_\varepsilon^{(1)}$, we rewrite $\cos tA_\varepsilon, \sin tA_\varepsilon$ with $e^{itA_\varepsilon}, e^{-itA_\varepsilon}$ and rearrange,

$$
\begin{aligned}
\|(I_\varepsilon(t) - I_0(t))v_{00}\|_{L^\infty L^2} &\le \|\{(1/2)(1+(4\varepsilon A+1)^{-1/2})e^{\frac{it}{2\varepsilon}-itA_\varepsilon} - e^{-itA}\}v_{00}\|_{L^\infty L^2} \\
&\quad + \|(1/2)(1-(4\varepsilon A+1)^{-1/2})e^{\frac{it}{2\varepsilon}+itA_\varepsilon}v_{00}\|_{L^\infty L^2} \\
&\le \|(e^{\frac{it}{2\varepsilon}-itA_\varepsilon+itA} - 1)v_{00}\|_{L^\infty L^2} \\
&\quad + \|(1-(4\varepsilon A+1)^{-1/2})v_{00}\|_{L^2} \\
&= \|(e^{ita_\varepsilon} - 1)v_{00}\|_{L^\infty L^2} + \|b_\varepsilon v_{00}\|_{L^2},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

here we have set

$$
\begin{aligned}
a_\varepsilon &= 1/(2\varepsilon) - A_\varepsilon + A, \\
b_\varepsilon &= 1 - (4\varepsilon A + 1)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

We study the operator a_ε . From the Parseval relation, we have

$$\|Au\|_{L^2} = \||\xi|^2\tilde{u}\|_{L^2}.$$

We set $\tilde{a}_\varepsilon = 1/(2\varepsilon) - 1/(2\varepsilon)(4\varepsilon|\xi|^2+1)^{1/2} + |\xi|^2$ and estimate

$$
\begin{aligned}
|e^{it\tilde{a}_\varepsilon} - 1| &\le 2, \\
|e^{it\tilde{a}_\varepsilon} - 1| &= |i\tilde{a}_\varepsilon \int_0^t e^{is\tilde{a}_\varepsilon} ds| \\
&\le |\tilde{a}_\varepsilon t| \\
&= t\left|4\varepsilon|\xi|^4/((4\varepsilon|\xi|^2+1)^{1/2}+1)^2\right| \\
&\le 4t\varepsilon|\xi|^4.
\end{aligned}
$$

Thus

$$|e^{it\tilde{a}_\varepsilon} - 1| \le 2^{1-\theta}(4t\varepsilon|\xi|^4)^\theta, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Considering assumption (2.2) , we set $\theta = 1/4$,

$$
\begin{aligned}
\|(e^{it\tilde{a}_\varepsilon} - 1)v_{00}\|_{L^\infty L^2} &\le c\|t^{1/4}\varepsilon^{1/4}|\xi|v_{00}\|_{L^\infty L^2} \\
&\le cT^{1/4}\varepsilon^{1/4}\||\xi|v_{00}\|_{L^2} \\
&\le c\varepsilon^{1/4}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

With respect to $P_\varepsilon^{(5)}$, we use the following Proposition.

Proposition 3. For any interval $I \subset \mathbb{R}$ with $0 \in \bar{I}, u \in C_0(I \times \mathbb{R}^n)$ and pair (q', r') such that

$$1 - \frac{1}{r'} = \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{q'} - \frac{1}{2}\Big) \quad , \quad \frac{1}{2} \le \frac{1}{q'} \le \frac{1}{2} + \frac{2}{n+2}, \tag{3.11}$$

the following estimate holds :

$$\Big\|\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} J_\varepsilon(t-s)u(s)ds\Big\|_{L^\infty(I;L^2)} \le c\|u\|_{L^{r'}(I;L^{q'})}, \tag{3.12}$$

where c is independent of u, I, and ε.

REFERENCES

[1] SCHIFF L. I., *Nonlinear meson theory of nuclear forces*, Phys. Rev., **84** (1951), 1-9.

[2] TSUTSUMI M., *Nonrelativistic approximation of nonlinear Klein–Gordon equation in two space dimension*, Nonlinear Analysis,Theory, Methods, Application, **8** (1984), 637–643.

[3] NAJMAN B., *The nonrelativistic limit of the nonlinear Klein–Gordon equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Application, Vol. 15, **3** (1990), 217–228.

[4] BREZIS H., GALLOUET T., *Nonlinear Schrödinger evolution equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Application, **4** (1980), 677–681.

[5] FATTORINI H. O., *Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces*, North–Holland, Amsterdam, (1985).

[6] MARSHALL B., STRAUSS W., WAINGER S., *$L^p - L^q$ estimates for the Klein- Gordon equation*, J. Math. pures Appl, **59** (1980), 417–440.

[7] YAJIMA K., *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Commun. Math. Phys., **110** (1987), 415-426.

[8] KATO T., *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Physique théorique , **46** (1987), 113–129.

[9] LIONS J. L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[10] GINIBRE J., VELO G., *Time decay of finite energy solutions of the non linear Klein–Gordon and Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré ,Physique théorique , **43**, n4 (1985), 399–442.

[11] GINIBRE J., VELO G., *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations*, Commun. Math. Phys., **144** (1992), 163–188.

[12] PECHER H., *Solution of semilinear Schrödinger equations in H^s*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique , **67** (1997), 259–296.

[13] PECHER H., *Nonlinear small data scattering for the wave and Klein–Gordon equation*, Mathematische Zeitschrift, **185** (1984), 261–270.

[14] WANG B., *On existence and scattering for critical and subcritical nonlinear Klein–Gordon equation in H^s*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Application, **31** (1998), 573–587.

[15] MACHIHARA S., *Nonrelativistic limit of the nonliner Klein–Gordon equation*, preprint.

L^∞-BMO ESTIMATE OF FIRST-ORDER SPACE DERIVATIVES OF STOKES FLOW IN A HALF SPACE

YASUYUKI SHIMIZU

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

§1 Introduction

In [13], we have proved the L^∞-estimate of first-derivatives of Stokes flow with zero boundary condition in a half space:

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \text{ for } t > 0, \tag{1.1}$$

where u_0 is the initial data. In this paper, we improve (1.1) by replacing the right hand side by the norm of bounded mean oscillation space BMO.

Theorem 1.1. *Let u be the solution of the Stokes equation* (1.1) *in $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ with initial data $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, which satisfies* $\mathrm{div} u_0 = 0$. *Then there is a constant C independent of u_0 such that*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \leq Ct^{-1/2}[u_0]_{\mathrm{BMO}} \tag{1.2}$$

for all $t > 0$.

First, we recall the Stokes equation in the half space $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$ $(n \geq 2)$:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \nabla p = 0, \mathrm{div} u &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \text{ at } t = 0, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Here $u = (u^1, \ldots, u^n)$ is unknown velocity field and p is unknown pressure field. Initial data u_0 is assumed to satisfy a *compatibility condition* : $\mathrm{div} u_0 = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$ and the normal component of u_0 equals zero on $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x_n = 0\}$.

This system is a typical parabolic equation and it has several properties resembling the heat equation. It is known that the Stokes equation in the whole space $\mathbb{R}^n$ can be reduced to the heat equation with initial data u_0 and we have the regularity-decay estimate

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \text{ for } t > 0, \tag{1.4}$$

for all $1 \leq p \leq \infty$ with C independent of t and u_0, where ∇ denotes the gradient in space variables.

Before explaining our problem, we introduce the known results for a half space. First, Ukai [15] showed (1.4) for the case $1 < p < \infty$ by estimating the representation of solutions in L^p. In the case $p = 1$ or $p = \infty$, the estimates does not follow from Ukai's method because the solution involves singular integral operators such as Riesz operators which are not bounded in L^1 or L^∞. Estimating the formula in Hardy space $\mathcal{H}^1$ of Fefferman and Stein instead of L^1, (1.4) for $p = 1$ was shown (Giga-Matsui-Shimizu [8]). Moreover, Shimizu [13] showed (1.4) for $p = \infty$ by applying the modified version of Ukai's formula.

We have two motivations for the estimate (1.2). First, we want to apply the estimate to the integral equations which is formally equivalent to the Navier-Stokes equations

$$u(t,x) = (e^{-tA}u_0)(x) - \int_0^t (e^{(s-t)A}P\nabla \cdot u(s) \otimes u(s))(x)ds, \tag{1.5}$$

where e^{-tA} is a solution operator of Stokes equation in a half space and P is a projection associated with the Helmholtz decomposition in a half space. P is constructed from some Riesz operators and not bounded in L^∞. However Riesz operators are bounded in BMO, so (1.3) may be useful in the problem (1.5).

Second motivation is involved from the duality arguement. In fact in [8], we proved (1.2) for $p = 1$ by more strong estimate

$$\|\nabla u(t)\|_{\mathcal{H}^1} \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_p \text{ for } t > 0. \tag{1.6}$$

Since the dual space of $\mathcal{H}^1$ is BMO, (1.2) is regarded to the dual result of (1.6) although (1.2) does not follow from (1.6) directly.

A key idea of this paper is to apply the modified version of Ukai's formula for ∇u obtained by Shimizu [13]. The formula was modified in the way of extension so that the terms involving the square root of minus tangential Laplacian Λ have no singularities on $\{x_n = 0\}$. By the duality arguement, it is sufficient to estimate the corresponding integral kernels in $\mathcal{H}^1$ and we have already completed estimating the terms involving Λ. There remain the terms without Λ which involve singularities on $\{x_n = 0\}$. In [13], we estimated the corresponding integral kernels in L^1. However, by detailed analysis, we are able to estimate these terms by estimating their integral kernels in $\mathcal{H}^1$.

REFERENCES

1. W. Borchers and T. Miyakaya, *L^2 decay for the Navier-Stokes flow in halfspaces*, Math. Ann. **282** (1988), 139–155.
2. ———, *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains*, Acta Math. **165** (1990), 189–227.
3. ———, *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains, II*, Hiroshima Math. J. **21** (1991), 621–640.
4. A.Carpio, *Large time behavior in incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 449-475.
5. Z.-M.Chen, *Solution of the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in exterior domains*, Pacific J. Math. **159** (1993), 227–240.
6. C.Fefferman and E.Stein, *$\mathcal{H}^p$ spaces of several variavles*, Acta Math. **129** (1972), 137–197.
7. Y.Giga, *Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^r spaces*, Math. Z. **178** (1981), 297–329.
8. Y.Giga, S.Matsui and Y.Shimizu, *On Estimates in Hardy Spaces for the Stokes Flow in a Half Space*, To appear in Math. Z., Hokkaido University Preprint Series in Mathematics (1999).
9. Y.Giga and H.Sohr, *On the Stokes operator in exterior domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **36** (1989), 103–130.
10. Y.Giga and H.Sohr, *Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains*, J. of Functional Analysis **102** (1991), 72–94.
11. H.Iwashita, *$L_q - L_r$ estimate for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

12. T.Miyakawa, *Hardy spaces of solenoidal vector fields, with application to the Navier-Stokes equations*, Kyushu J. Math. **50** (1997), 1–64.
13. Y.Shimizu, *L^∞-estimate of first-order space derivatives of Stokes flow in a half space,* To appear in Funkcialaj Ekvacioj (1999).
14. A.Torchinsky, *Real-variable methods in harmonic anarysis*, Academic Press, 1986.
15. S.Ukai, *A solution formula for the Stokes equation in* $\mathbb{R}^n_+$, Comm. Pure Appl. Math. **XL** (1987), 611–621.

ある放物型方程式に対する自由境界値問題の時間発展させた時の解の収束について

伊藤 一男（九大数理）、高坂 良史（北大理院）

§1. Introduction

H. Garcke と A. Novick-Cohen [1] は、多成分系合金の異種境界面をもつ 3 相問題に対し、以下のような界面の時間発展モデルを、退化 mobility をもつ Cahn-Hilliard 方程式系から特異極限を用いて形式的に導いた。

今、$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を有界領域とする。この Ω 内に非平衡状態の 3 つの相が存在するとし、それらの相は時間発展する 3 つの相境界 $\Gamma^i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ によって分けられているとする。さらに、それら 3 つの相境界は、片方の点は triple-junction $m(t) \in \Omega$ でつながっているとし、もう片方の点は Ω の境界 $\partial\Omega$ と交わっているとする。このとき、$t > 0, i = 1, 2, 3$ に対して、以下の式が成り立つ。

$$\begin{cases} (\Gamma^i(t) \text{ に沿って}) \\ \quad V^i = -l^i \sigma^i \kappa^i_{ss}, \\ (\Gamma^i(t) \cap \partial\Omega \text{で}) \\ \quad \Gamma^i \perp \partial\Omega, \quad \kappa^i_s = 0, \\ (\text{triple-junction } m(t) \text{ で}) \\ \quad \angle(\Gamma^1(t), \Gamma^2(t)) = \theta^3, \quad \angle(\Gamma^2(t), \Gamma^3(t)) = \theta^1, \quad \angle(\Gamma^3(t), \Gamma^1(t)) = \theta^2, \\ \quad l^1\sigma^1\kappa^1_s = l^2\sigma^2\kappa^2_s = l^3\sigma^3\kappa^3_s, \quad \sigma^1\kappa^1 + \sigma^2\kappa^2 + \sigma^3\kappa^3 = 0, \\ (\text{初期条件}) \\ \quad \Gamma^i(0) = \Gamma^i_0, \quad m(0) = m_0. \end{cases} \tag{1}$$

ここで、V^i は法速度、κ^i は曲率、s は弧長パラメータである。また、l^i は Cahn-Hilliard 方程式系の mobility から得られる定数、σ^i は $\Gamma^i(t)$ の表面エネルギーとして得られる定数であり、共に正である。さらに、θ^i は正の定数であり、$\sigma^1/\sin\theta^1 = \sigma^2/\sin\theta^2 = \sigma^3/\sin\theta^3$ なる関係を満たす。(1) は、$\Gamma(t) := \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i(t)$ と $m(t)$ を未知量とする。

H. Garcke と A. Novick-Cohen [1] は、(1) に対し次のような結果を得た。

(1) に対する既知の結果 [1]：$\Gamma_0 \in C^{4+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ に対する時間局所解の存在と幾何学的な解の一意性が得られている。また、(1) に付随するエネルギー E を

$$E[\Gamma(t)] := \sum_{i=1}^{3} \sigma^i L[\Gamma^i(t)] \quad \text{但し、} L[\Gamma^i(t)] : \Gamma^i(t) \text{ の長さ} \tag{2}$$

と定義すると、$E[\Gamma(t)]$ は 時間 t に関して非増加であることが得られている。さらに、$\Gamma^i(t)$ と $\Gamma^j(t)$ と $\partial\Omega$ とが囲む面積は時間 t に関して一定であることが得られている。

ここで、(1) に対して次のような結果を得るのが今回の目標である。

今回の目標：$\Gamma(t)$ が対称性をもつとき、つまり、$\Gamma^i(t)$ がそれぞれ

$$\begin{cases} \Gamma^1(t) = \Lambda^1[u(t,\cdot),\xi(t)] := \{(x,0)\ ;\ -a \le x \le -\xi(t)\}, \\ \Gamma^2(t) = \Lambda^2[u(t,\cdot),\xi(t)] := \{(x,-u(t,x))\ ;\ -\xi(t) \le x \le 0\}, \\ \Gamma^3(t) = \Lambda^3[u(t,\cdot),\xi(t)] := \{(x,u(t,x))\ ;\ -\xi(t) \le x \le 0\}, \end{cases} \tag{3}$$

と表されるときに、時間大域的な結果を得ることである。(但し、この場合、正の定数 a, b に対し、$\Omega := (-a,0)\times(-b,b)$ とする。)

$\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i(t)$ を (3) のように表したとき、(u,ξ) が未知量である。このとき、$\Gamma^3(t)$ に対する (1) は、$t>0$ に対して次のようになる。(但し、$\theta \in (0,\pi/2)$ に対して、$\theta^1 = 2\theta$、$\theta^2 = \theta^3 = \pi - \theta$、$\sigma^1 = 2\cos\theta$、$\sigma^2 = \sigma^3 = 1$、$l^i = 1$ $(i=1,2,3)$ とする。)

$$\begin{cases} u_t = -\partial_x\left(\dfrac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}}\partial_x\left(\dfrac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right)\right), \quad -\xi(t) < x < 0, \\ u_x(t,-\xi(t)) = \tan\theta, \quad u_x(t,0) = 0, \\ \partial_x\left(\dfrac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right) = 0 \quad \text{at } x = -\xi(t) \text{ and } 0, \\ u(t,-\xi(t)) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{for } -\xi(0) < x < 0, \quad \xi(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{4}$$

(注 1) この場合、$\sigma^1\kappa^1 + \sigma^2\kappa^2 + \sigma^3\kappa^3 = 0$ は自動的に成り立つ。
(注 2) 直線は曲率 0 であるから、

$$\Gamma^1(t) = \{(x,0)\ ;\ -a \le x \le -\xi(t)\}$$

は常に方程式 $V^1 = -l^1\sigma^1\kappa^1_{ss}$ の解である。したがって今後は (4) を満たす (u,ξ) の存在や時間発展させた時の動きについて考えれば良い。
(注 3) 「$u(t,-\xi(t)) = 0$」 $\Leftrightarrow$ 「$\dfrac{d}{dt}u(t,-\xi(t)) = 0$ かつ $u_0(-\xi_0) = 0$」であるから、今後は $u_0(-\xi_0) = 0$ を仮定して、$u(t,-\xi(t)) = 0$ の代わりに ξ に関する方程式

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -\ C_1(\theta)u_{xxxx}(t,-\xi(t)) + C_2(\theta)u_{xx}^3(t,-\xi(t)) \tag{5}$$

(但し、$C_1(\theta) := 1/[(1+\tan^2\theta)^2\tan\theta]$、$C_2(\theta) := 3(1+5\tan^2\theta)/[(1+\tan^2\theta)^4\tan\theta]$) を条件として用いる。

§2. 定常問題

まず、定常問題を考えるにあたり次を定義する。

Definition 1. A を正の定数とする。このとき、Γ^i が $\xi \in (0,a)$ かつ $(0\le)\, u \in H^2(-\xi,0)$ に対し $\Gamma^i = \Lambda^i[u,\xi]$ と表され、さらに $u(-\xi) = 0$, $u_x(-\xi) = \tan\theta$, $u_x(0) = 0$, $\int_{-\xi}^0 u(x)dx = A$ を満たすとき、$\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i \in \mathcal{C}_{\theta,A}$ であるという。

このとき、次の問題を考える。

Problem : minimize E on $C_{\theta,A}$.

この Problem に対し、以下の結果を得る。

Theorem 2. 汎関数

$$E[\Gamma]=2\left\{(a-\xi)\cos\theta+\int_{-\xi}^{0}(1+u_x^2)^{1/2}dx\right\}$$

に対して、unique minimizer $\Gamma_{\theta,A}\in C_{\theta,A}$ が存在する。ここで、$\Gamma_{\theta,A}=\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_{\theta,A}^{i}$ であり、

$$\Gamma_{\theta,A}^{i}=\Lambda^{i}[u_{\theta,A},\xi_{\theta,A}]$$

(Λ^i に関しては (3) を見よ)。但し、

$$\begin{aligned}
&\xi_{\theta,A}=r_{\theta,A}\sin\theta,\\
&u_{\theta,A}(x)=-r_{\theta,A}\cos\theta+(r_{\theta,A}^2-x^2)^{1/2},\quad x\in[-\xi_{\theta,A},0],\\
&r_{\theta,A}=\left(\frac{2A}{\theta-\sin\theta\cos\theta}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

である。

ここで、$\Gamma_{\theta,A}^1$ は直線、$\Gamma_{\theta,A}^2$ と $\Gamma_{\theta,A}^3$ は円弧であるから、$\Gamma_{\theta,A}$ が (4) の定常解であることは容易に示せる。

§3. 非定常問題

まず (4) の解の存在について考える。そのために、次のような変数変換を行う。

$$v(t,\eta):=u(t,-(1-\eta)\xi(t)),\quad (t,\eta)\in[0,\infty)\times[0,1].$$

この変数変換により、(4)-(5) は次のように表される。

$$\left\{\begin{aligned}
&v_t=f(\eta,v_\eta,v_{\eta\eta},v_{\eta\eta\eta},v_{\eta\eta\eta\eta},\xi,\dot{\xi}),\\
&v_\eta(t,0)=\xi(t)\tan\theta,\quad v_\eta(t,1)=0,\\
&v_{\eta\eta\eta}(t,0)=\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{v_{\eta\eta}^2(t,0)}{\xi(t)},\quad v_{\eta\eta\eta}(t,1)=0,\\
&v(0,\eta)=v_0(\eta):=u_0(-(1-\eta)\xi_0),\\
&\dot{\xi}(t)=-\,C_1(\theta)\frac{v_{\eta\eta\eta}(t,0)}{\xi^4(t)}+C_2(\theta)\frac{v_{\eta\eta}^3(t,0)}{\xi^6(t)},\\
&\xi(0)=\xi_0,
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

但し、

$$\begin{aligned}
&f(\eta,v_\eta,v_{\eta\eta},v_{\eta\eta\eta},v_{\eta\eta\eta\eta},\xi,\dot{\xi})\\
&=-\frac{1}{(\xi^2+v_\eta^2)^2}v_{\eta\eta\eta\eta}+\frac{10v_\eta v_{\eta\eta}}{(\xi^2+v_\eta^2)^3}v_{\eta\eta\eta}+\frac{3(\xi^2-5v_\eta^2)v_{\eta\eta}^3}{(\xi^2+v_\eta^2)^4}-\frac{(1-\eta)\dot{\xi}v_\eta}{\xi}.
\end{aligned}$$

また、解の存在を考える上で必要となる関数空間を定義する。今、$I := [0,1]$ とおく。さらに、$0 \le t_0 < t_1 < \infty$ に対し、$R_{t_0,t_1} = (t_0, t_1] \times I$ とおく。このとき、$0 < \alpha < 1$ に対して、

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}^{2+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}}) &:= C^{0,2+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}}) \cap C^{1/2}([t_0,t_1]; C^{\alpha}(I)),\\
\mathcal{Y}^{4+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}}) &:= \{v \in \mathcal{Y}^{2+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}}) \cap C^{1,4+\alpha}(R_{t_0,t_1})\ ;\ \|v\|_{\mathcal{Y}^{4+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}})} < \infty\},\\
\mathcal{Z}^1[t_0,t_1] &:= \{\xi \in C[t_0,t_1] \cap C^1(t_0,t_1]\ ;\ \|\xi\|_{\mathcal{Z}^1[t_0,t_1]} < \infty\}.
\end{aligned}$$

とする。ここで、ノルム $\|v\|_{\mathcal{Y}^{4+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}})}$、$\|\xi\|_{\mathcal{Z}^1[t_0,t_1]}$ は、

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\mathcal{Y}^{4+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}})} &= \|v\|_{\mathcal{Y}^{2+\alpha}(\overline{R_{t_0,t_1}})} + \sup_{0<\delta<t_1-t_0} \delta^{1/4}\|v_{\eta\eta\eta}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{R_{t_0+\delta,t_1}})}\\
&\quad + \sup_{0<\delta<t_1-t_0} \delta^{1/2}\|v_{\eta\eta\eta\eta}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{R_{t_0+\delta,t_1}})}\\
&\quad + \sup_{0<\delta<t_1-t_0} \delta^{1/2}\|v_t\|_{C^{0,\alpha}(\overline{R_{t_0+\delta,t_1}})},\\
\|\xi\|_{\mathcal{Z}^1[t_0,t_1]} &= \|\xi\|_{C[t_0,t_1]} + \sup_{0<\delta<t_1-t_0} \delta^{1/2}\|\dot{\xi}\|_{C^1[t_0+\delta,t_1]}.
\end{aligned}$$

で与えられる。

$\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^{3}\Gamma^i(t)$ が (3) のように表されるとき、我々は [1] の結果を改良した時間局所解に関する次の結果を得る。

Theorem 3 (Local existence). $\alpha \in (0,1)$ とする。また、$v_0 \in C^{2+\alpha}(I)$ とし、v_0 は $v_0(0) = 0$、$v_{0\eta}(0) = \xi_0 \tan\theta$、$v_{0\eta}(1) = 0$ を満たすとする。このとき、ある $T_0 = T_0(\xi_0, 1/\|v_0\|_{C^{2+\alpha}(I)}) > 0$ が存在して (6) は unique な解 $(v,\xi) \in \mathcal{Y}^{4+\alpha}(\overline{R_{0,T_0}}) \times \mathcal{Z}^1[0,T_0]$ をもつ。

この定理の証明をするにあたり、我々は解析半群と最良正則性の理論を用いる (see [2]、[3])。また、同様の議論を行うことにより、正則性に関する次の結果を得る。

Theorem 4 (Regularity). (v,ξ) を Theorem 3 で得られた (6) の解とすると、

$$(v,\xi) \in C^{1,6+\alpha}((0,T_0] \times I) \times C^{1+(2+\alpha)/4}(0,T_0].$$

である。

Theorem 3 により、$\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^{3}\Gamma^i(t)$ が (3) のように表されたときの global existece を得るためには、$C^{2+\alpha}$-a priori estimate が必要であることが分かる。このとき、次を得る。

Proposition 5 (A priori estimate). $A_0 := \int_{-\xi_0}^{0} u_0(x)dx$ とおく。また、定数 $\delta > 0$ を $1 - \theta/\tan\theta - \delta > 0$ を満たすように十分小さくとるとする。このとき、

$$\rho_0^2 := \|\kappa_{0,s}^3\|_{L^2(\Gamma_0^3)}^2 + M_{\theta,A_0}(E[\Gamma_0] - E[\Gamma_{\theta,A_0}])$$

(但し、$M_{\theta,A_0} = C(\delta)(\theta/L[\Gamma_{\theta,A_0}^3])^4$) が十分小さければ、$\rho_0$、$\theta$、$E[\Gamma_0]$、$L[\Gamma_{\theta,A_0}^3]$ に依存する正の定数 ν_1、ν_2 が存在して、$\alpha \in (0,1/2)$ に対し、

$$\xi(t) \ge \nu_1 > 0, \quad \|v(t,\cdot)\|_{C^{2+\alpha}(I)} \le \nu_2 < \infty.$$

が成り立つ。

(注 4) 実際、ν_1 は $\nu_1 = (2L[\Gamma^3_{\theta,A_0}]\sin\theta - E[\Gamma_0]^{5/2}\rho_0)/2\theta$ となるから、ρ_0 は

$$2L[\Gamma^3_{\theta,A_0}]\sin\theta - E[\Gamma_0]^{5/2}\rho_0 > 0 \tag{7}$$

を満たすくらい十分小さくとる必要がある。

(注 5) 頁数の都合上詳しい記述は書かないが、$\Gamma^3(t)$ がグラフの形を保つためには、ρ_0 を

$$\theta + E[\Gamma_0]^{3/2}\rho_0 < \pi/2 \tag{8}$$

を満たすくらい十分小さくとる必要がある。

Proposition 5 を示すには、$\|\kappa_s^3(t)\|_{L^2(\Gamma^3(t))}$ を評価することがポイントとなる。実際、次の評価を得る。

Lemma 6. $\lambda(>0)$ が十分小さいとき、$H(d,\lambda) > 0$ (for any $d > 0$) であるような関数 H が存在して、

$$E[\Gamma_0] > E[\Gamma_{\theta,A_0}] \quad \text{かつ} \quad H(E[\Gamma_0],\rho_0) > 0 \tag{9}$$

を満たすように初期値 Γ_0 をとれば

$$\|\kappa_s(t)\|_2^2 + H(E[\Gamma_0],\rho_0)\int_0^t \|\kappa_{sss}(\tau)\|_2^2 d\tau \le \rho_0^2 \quad \text{for } t \ge 0$$

(但し、$\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{L^2(\Gamma^3(t))}$) が成り立つ。

(注 6) $H(E[\Gamma_0],\rho_0) > 0$ を満たすように初期値 Γ_0 をとるということは、 ρ_0 が十分小さくなるように Γ_0 をとるということである。

Theorem 3 と Proposition 5 により、時間大域解に関する次の定理を得る。

Theorem 7 (Global existence). $\alpha \in (0,1/2)$ とする。また、ρ_0 が (7)-(9) を満たすように初期値 Γ_0 をとるとする。このとき、(6) は unique な時間大域解

$$(v,\xi) \in \mathcal{Y}^{4+\alpha}(\overline{R_{0,T}}) \times \mathcal{Z}^1[0,T] \quad \text{for any } T > 0$$

をもつ。

この定理により、初期値 Γ_0 が Γ_{θ,A_0} と十分近ければ、(4) は unique な時間大域解を $C^{1+\alpha/4,4+\alpha}$ においてもつことが分かる。

次に、時間 $t \to \infty$ とした時の解 $\Gamma(t)$ の動きについて考える。このとき、定常解の安定性に関する次の結果を得る。

Theorem 8 (Convergence). $\Gamma(t)$ を Theorem 7 で得た時間大域解 (ρ_0 は十分小さくとっている)、Γ_{θ,A_0} を Theorem 2 で得た面積 A_0 に対する E の minimizer とする。このとき、

$$\Gamma(t) \to \Gamma_{\theta,A_0} \quad \text{as } t \to \infty$$

である。

また、$E[\Gamma(t)]$ の時間に関する非増加性と、$\Gamma^i(t)$ と $\Gamma^j(t)$ と $\partial\Omega$ とが囲む面積が時間 t に関して一定であることから、次の定理を得る。

Theorem 9. $\Gamma(t)$ を Theorem 7 で得た時間大域解、Γ_{θ,A_0} を Theorem 2 で得た面積 A_0 に対する E の minimizer とする。このとき、

$$E[\Gamma(t)] \to E[\Gamma_{\theta,A_0}] \quad \text{as } t \to \infty,$$
$$L[\Gamma^3(t)] \to L[\Gamma^3_{\theta,A_0}] \quad \text{as } t \to \infty.$$

である。

References

[1] H. Garcke and A. Novick-Cohen, A singular limit for a system of degenerate Cahn-Hilliard equations, to appear in Adv. Diff. Equations.

[2] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhäuser, 1995.

[3] A. Lunardi, E. Sinestrari, and W. Von Wahl, A semigroup approach to the time dependent parabolic initial-boundary value problem, Diff. Int. Eqns. **5** (1992), 1275–1306.

On the Derivative Nonlinear Schrödinger Equations in Multi-Space Dimensions

Naoyasu Kita

1 Introduction

In this proceeding, we consider the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equation with nonlinear term of derivative type, i.e.,

$$\text{(NLS)} \begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + F(u, \bar{u}, \nabla u, \nabla \bar{u}) \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

where u is a complex valued unknown function of $(t, x) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ and $\bar{u}$ is the complex conjugate of u. Δ is the Laplacian in the n dimensional space and $\nabla u = (\partial_1 u, \cdots, \partial_n u)$. The nonlinear term F is the polynomial on $\mathbf{C}^{2+2n}$ of degree $\rho = 2$ or 3, i.e.,

$$F(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{2+2n}) = \sum_{|\alpha|=\rho} C_\alpha z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \cdots z_{2+2n}^{\alpha_{2+2n}},$$

where $C_\alpha \in \mathbf{C}$ and $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2+2n})$.

There are many results known about (NLS). Kenig-Ponce-Vega [11] showed the well-posedness for small initial data by applying the smoothing effects of linear solutions. Chihara [4] proved the problem for large initial data. His idea is based on the energy method through the pseudo differential operator technique. These results are shown by imposing large regularity on the initial data. (Recently, Chihara [3] has solved (NLS) under the condition $u_0 \in H^{s,0}(\mathbf{R}^n)$ with $s > n/2 + 3$.)

Our concern in this work is to solve (NLS) for the initial data with small regularity. We obtain the following results. (One can see the notations in theorems just after the statements.)

Theorem 1.1 (the case $\rho = 3$) *let $s > (n+3)/2$. then, for $\phi \in H^{s,0}(\mathbf{R}^n)$ with $\|\phi\|_{s,0}$ sufficiently small, there exists a unique solution u to (NLS) on $[0, T]$ (T depends on $\|\phi\|_{s,0}$) such that*

$$u \in C([0,T]; H^{s,0}(\mathbf{R}^n)). \tag{1}$$

Theorem 1.2 (the case $\rho = 2$) *Let $s > (n+3)/2, s' > (n+2)/2$ and $t' > 1/2$ satisfy $s > s' + t'$. Then, for $\phi \in H^{s,0}(\mathbf{R}^n) \cap H^{s',t'}(\mathbf{R}^n)$ with $\|\phi\|_{s',t'}$ sufficiently small, there exists a unique solution u to (NLS) on $[0, T]$ (T depends on $\|\phi\|_{s',t'}$) such that*

$$u \in C([0,T]; H^{s,0}(\mathbf{R}^n) \cap H^{s',t'}(\mathbf{R}^n)). \tag{2}$$

The solutions in Theorem 1.1 and 1.2 gain the regularity in the following sense.

Theorem 1.3 *The solutions in Theorem 1.1 and 1.2 satisfy*

$$\|\partial_j^{s+1/2}u\|_{L^\infty_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})} < \infty \quad \text{for } 1 \le j \le n. \tag{3}$$

Notations.

In the above theorems, the function spaces $L^p_{x_j}(L^r_{T,\widehat{x}_j})$ and $H^{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$ are defined by

$$L^p_{x_j}(L^r_{T,\widehat{x}_j}) = \{u; \|u\|^p_{L^p_{x_j}(L^r_{T,\widehat{x}_j})} = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(t,x)|^r dt d\widehat{x}_j\right)^{p/r} dx_j < \infty\},$$

where $\widehat{x}_j = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$.

$$H^{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{\sigma,\tau} = \|\langle x\rangle^\tau \langle D\rangle^\sigma f\|_{L^2_x} < \infty\},$$

where $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ and $\langle D\rangle^\sigma f = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^\sigma \mathcal{F}f$ ($\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}^{-1}$ stand for the Fourier and inverse Fourier transform, respectively). $\partial_j^\sigma f = \mathcal{F}^{-1}|\xi_j|^{\sigma-[\sigma]}\xi_j^{[\sigma]}\mathcal{F}f$. $[\sigma]$ is the largest integer which does not exceed σ. $U(t)\phi = \exp(it\Delta)\phi$ and $G(t)F = \int_0^t U(t-s)F(s)ds$.

We consider the initial value problem (NLS) by solving the integral equation :

$$\begin{aligned} u(t) &= \Phi(u)(t) \\ &\equiv U(t)u_0 - iG(t)F(u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}). \end{aligned} \tag{4}$$

Since the nonlinear term contains some derivatives, it causes, so called, the loss of derivative. Because of this difficulty, it is impossible to estimate the second term in (4) by the unitarity and Strichartz' type estimates of $U(t)$ ([2], [17] and [19]). To overcome the loss of derivative, we make use of the smoothing properties of $U(t)$ and $G(t)$, i.e.,

Lemma 1.4 (Hayashi-Hirata [8]) *Let $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ and $F \in L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})$. Then, we have*

$$\|\partial_j^{1/2}U(\cdot)\phi\|_{L^\infty_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})} \le C\|\phi\|_{L^2}, \tag{5}$$

$$\|\partial_j^{1/2}G(\cdot)F\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \le C\|F\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})}, \tag{6}$$

$$\|\partial_j G(\cdot)F\|_{L^\infty_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})} \le C\|F\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})}. \tag{7}$$

To introduce the maximal functions, we demonstrate the estimates of $\Phi(u)$ in (4). For simplicity, we consider the case $F(u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}) = \partial u\partial u\partial u$. Applying (6) in Lemma 1.4 to $\Phi(u)$, we can show that

$$\begin{aligned} \|\partial_j^s\Phi(u)\|_{L^\infty_T(L^2_x)} &\le \|u_0\|_{s,0} + C\|\partial_j^{s-1/2}(\partial u\partial u\partial_k u)\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})} \\ &\le \|u_0\|_{s,0} + C\|\partial u\partial u\partial_j^{s-1/2}\partial_k u\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})} \\ &\quad + \|(\text{some lower order derivatives})\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x}_j})}. \end{aligned} \tag{8}$$

Note that, to obtain the last inequality, we use Leibniz' rule for fractional derivatives ([5] and [12]). Since, by Hölder's inequality, we can show that

$$\begin{aligned}
&\|\partial u \partial u \partial_j^{s-1/2}\partial_k u\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x_j}})} \\
\leq\ &\|\partial u\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})}\|\partial u\|_{L^2_{x_k}(L^\infty_{T,\widehat{x_k}})}\|\partial_k\partial_j^{s-1/2}u\|_{L^\infty_{x_k}(L^2_{T,\widehat{x_k}})},
\end{aligned} \tag{9}$$

we need to estimate $\|\partial\Phi(u)\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})}$ in order to complete the contraction mapping principle.

$$\begin{aligned}
&\|\partial\Phi(u)\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} \\
\leq\ &\|U(\cdot)\partial u_0\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} + \|G(\cdot)\partial F\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Hence, it is important to control the $L^2_{x_j}(L^\infty_{\widehat{x_j}})$-norm of maximal functions for $U(t)\partial u_0$ and $G(t)\partial F$, where we call $\|U(\cdot)\phi(x)\|_{L^\infty_T}$ and $\|G(\cdot)F(x)\|_{L^\infty}$ the maximal functions for $U(t)\phi$ and $G(t)F$, respectively. In the proof of Theorem 1.1 and 1.2, the estimates of maximal functions play an important role to determine the regularity of u_0.

Remark 1.1. When the nonlinear term is quadratic, we need to estimate the weighted $L^2_{x_j}(L^\infty_{\widehat{x_j}})$-norm of maximal functions, i.e., $\|\langle x\rangle^\tau U(\cdot)\phi\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})}$ and $\|\langle x\rangle^\tau G(\cdot)\phi\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})}$ for $\tau > 1/2$.

Remark 1.2. We are not allowed to estimate $\|\partial_k\partial_j^{s-1/2}u\|_{L^\infty_{x_k}(L^2_{T,\widehat{x_k}})}$ in (9) so that

$$\|\partial_k\partial_j^{s-1/2}u\|_{L^\infty_{x_k}(L^2_{T,\widehat{x_k}})} \leq CT^\delta\|\partial_k\partial_j^{s-1/2}u\|_{L^\infty_{x_k}L^r_T L^2_{\widehat{x_k}}}$$

for some $r > 2$, since we want to use (7) in Lemma 1.4. This is the reason we need to impose the smallness on u_0.

Since the pages of this proceeding are limited, we shall only introduce the statements about the estimates of maximal functions in the forthcoming section.

2 Estimates of Maximal Functions

In this section, we introduce some inequalities concerned with the maximal functions and the outline of the proofs. There has been several kinds of estimates for maximal functions (see [14], [15] and [18]). Our main result is

Theorem 2.1 *Let $n/2 < \sigma$ and $0 < T < 1$. Then, for $\phi \in H^{\sigma,0}(\mathbf{R}^n)$, we have*

$$\|U(\cdot)\phi\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} \leq C\|\phi\|_{\sigma,0}. \tag{11}$$

In addition, let $n/2 < \sigma' < \sigma$ and $1/2 < \tau < 1$. Then, we have

$$\|\langle x\rangle^\tau U(\cdot)\phi\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} \leq C\|\phi\|_{\sigma',\tau} + CT^{1/2}\|\phi\|_{\sigma+\tau,0}. \tag{12}$$

As a corollary of Theorem 2.1, we obtain

Corollary 2.2 *Under the same conditions as in Theorem 2.1, we have*

$$\|G(\cdot)F\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} \leq C\|F\|_{L^1_T(H^{\sigma,0})}, \tag{13}$$

$$\|\langle x\rangle^\tau G(\cdot)F\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} \leq C\|F\|_{L^1_T(H^{\sigma',0})} + CT^{1/2}\sup_{1\leq k\leq n}\|\partial_k^{\sigma+\tau-1/2}F\|_{L^1_{x_k}(L^2_{T,\widehat{x_k}})}. \tag{14}$$

To prove Theorem 2.1, we need several lemmas.

Lemma 2.3 *Let $\sigma > n/2$. Then, we have*

$$\|\langle D\rangle^{-2\sigma}\int_0^T U(\cdot - s)F(s)ds\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\widehat{x_j}})} \leq C\|F\|_{L^2_{x_j}(L^1_{T,\widehat{x_j}})}. \tag{15}$$

Therefore, it follows that

$$\|\langle D\rangle^{-\sigma}\int_0^T U(-s)F(s)ds\|_{L^2_x} \leq C\|F\|_{L^2_{x_j}(L^1_{T,\widehat{x_j}})}. \tag{16}$$

Proof of Lemma 2.3. Note that the integral kernel of $\langle D\rangle^{-2\sigma}U(t-s)$ is

$$K(t-s, x-y) = (2\pi)^{-n}\int \langle\xi\rangle^{-2\sigma}\exp\left(-i(t-s)\xi^2 + i(x-y)\cdot\xi\right)d\xi.$$

Since $2\sigma > n$, there exists no singularity at $t = s$ and we have

$$|K(t-s, x-y)| \leq C\langle x-y\rangle^{-2\sigma}.$$

Hence, by Young's inequality, we obtain (15).

We next prove (16). By (15), it is easy to show that

$$\begin{aligned}
&\|\langle D\rangle^{-\sigma}\int_0^T U(-s)F(s)ds\|^2_{L^2_x} \\
&= \left|\int_0^T (F(t), \langle D\rangle^{-2\sigma}\int_0^T U(t-s)F(s)ds)dt\right| \\
&\leq C\|F\|^2_{L^2_{x_j}(L^1_{T,\widehat{x_j}})}.
\end{aligned}$$

This completes the proof of Lemma 2.3. □

To prove Theorem 2.1 (12), we use the smoothing properties of $U(t)$ and $G(t)$. One can see the one space dimensional version of the smoothing properties in [1]. The n space dimensional version is

Lemma 2.4 *Let $2 \leq p < \infty$. Then, we have*

$$\|\partial_j^{1/2-1/p}U(\cdot)\phi\|_{L^p_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x_j}})} \leq CT^{1/p}\|\phi\|_{L^2_x}, \tag{17}$$

$$\|\partial_j^{1-1/p}G(\cdot)F\|_{L^p_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x_j}})} \leq CT^{1/p}\|F\|_{L^1_{x_j}(L^2_{T,\widehat{x_j}})}. \tag{18}$$

proof of Lemma 2.4. The results follow from Stein's interpolation theorem and L^p-boundedness of the Hilbert transform. □

Now we start to show the outline of the proof for Theorem 2.1.

Proof of Theorem 2.1. We first prove (11) by the duality argument. Applying Lemma 2.3 (16), we have

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (F(s), \langle D\rangle^{-\sigma} U(s)\phi) ds \\
&= \left(\langle D\rangle^{-\sigma} \int_0^T U(-s)F(s)ds, \phi \right) \\
&\leq \| \langle D\rangle^{-\sigma} \int_0^T U(-s)F(s)ds \|_{L^2_x} \|\phi\|_{L^2_x} \\
&\leq C\|F\|_{L^2_{x_j}(L^1_{T,\hat{x}_j})} \|\phi\|_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

Hence, we obtain (11). We next prove (12). Since

$$\langle x\rangle^\tau U(t)\phi = U(t)\langle x\rangle^\tau \phi + iG(t)[\langle x\rangle^\tau, -\Delta]U(\cdot)\phi,$$

it follows from (11) that

$$\begin{aligned}
&\|\langle x\rangle^\tau U(\cdot)\phi\|_{L^2_{x_j}(L^\infty_{T,\hat{x}_j})} \\
&\leq C\|\phi\|_{\sigma',\tau} + C\sup_k \int_0^T \|\langle x\rangle^{-(1-\tau)} \partial_k^{\sigma'+1} U(s)\phi\|_{L^2_x} ds \\
&\leq C\|\phi\|_{\sigma',\tau} + CT^{1/2} \sup_k \|\langle x\rangle^{-(1-\tau)} \partial_k^{\sigma'} U(\cdot)\phi\|_{L^2_{T,x}} \\
&\leq C\|\phi\|_{\sigma',\tau} + CT^{1/2} \sup_k \|\partial_k^{\sigma'+1} U(\cdot)\phi\|_{L^p_{x_k}(L^2_{T,\hat{x}_k})},
\end{aligned} \tag{19}$$

where $1/2 = 1/p + (1-\tau-\epsilon)$ for some $\epsilon > 0$. Applying Lemma 2.4 (17) to the second term in RHS of (19), we obtain Theorem 2.1. □

References

[1] D. Bekiranov, T. Ogawa and G. Ponce, *On the well-posedness of Benny's interaction equation of short and long waves*, Advances in Diff. Eq., (1996), pp. 919–937.

[2] T. Cazenave and F.B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. T.M.A., **100** (1990), pp. 807–836.

[3] H. Chihara, *Gain of regularity for semilinear Schrödinger equations*, preprint.

[4] H. Chihara, *Local existence for semilinear Schrödinger equations*, Math. Japon., **42** (1995), 35–52.

[5] F. M. Christ and M. Weinstein, *Dispersive small amplitude solution to the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal., **100**(1991), pp. 87–109.

[6] P. Constantin and J.-C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1989), pp. 413–446.

[7] N. Hayashi, *The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equations*, Comm. in P.D.E., **18** (1993), pp. 823–833.

[8] N. Hayashi and H. Hirata, *Local existence in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system in the usual Sobolev space*, to appear in Proceedings of Royal Society of Edinburgh A.

[9] N. Hayashi and H. Hirata, *Global existence of small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, preprint.

[10] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Advances in Math. Supp. Studies, Studies in Applied Math., **8** (1983), pp. 93–128.

[11] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **10** (1993), pp. 255–288.

[12] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction mapping principle*, Comm. pure Appl. Math., **46** (1993), pp. 527–620.

[13] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991), pp. 33–69.

[14] C. E. Kenig and A. Ruiz, *A strong type* $(2,2)$ *estimate for the maximal function associated to the Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **280** (1983), pp. 239–246.

[15] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equations*, Duke Math., **55** (1987), pp. 699–715.

[16] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Princeton University Press, (1971).

[17] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equation*, Duke Math. J., **44** (1977), pp. 705–714.

[18] L. Vega, *The Schrödinger equation: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** (1988), pp. 874–878.

[19] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415–426.

Naoyasu Kita
Graduate School of Mathematics
Kyushu University
Hakozaki 6-10-1 Higashi-ku
Fukuoka 812-8581 Japan
E-mail: nkita@moon.ap.kyushu-u.ac.jp

Nonresonant Singular Two-Point Boundary Value Problems

Hidekazu ASAKAWA
Faculty of Engineering, Gifu University, Gifu 501-1193, Japan
e-mail: asakawacc.gifu-u.ac.jp

1999 / 10 / 31

1 Introduction

関数空間 X を

$$X = \{\phi \in \mathbf{L}^1_{loc}(0,1) \mid \int_0^1 t(1-t)|\phi(t)|\,dt < +\infty\},$$

で定義する．X は $\|\phi\|_X = \int_0^1 t(1-t)|\phi(t)|\,dt$ をノルムとして Banach 空間である．X の部分集合 X_+ と X_p を

$$\begin{aligned} X_+ &= \{\phi \in X \mid \phi(t) \geq 0 \text{ for a.e. } t \in (0,1)\}, \\ X_p &= \{\phi \in X_+ \mid \int_0^1 (1-t)t\phi(t)\,dt > 0\} \end{aligned}$$

としよう．

次のような二階常微分方程式の境界値問題 (BVP) を考える．

$$\begin{aligned} &u''(t) + \lambda_n a(t)u(t) + f(t,u(t)) = 0 \quad \text{a.e. } t \in (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで，$a \in X_p$ であり，$f : [0,1] \times R \to [-\infty, +\infty]$ は Carathéodory 関数（すなわち，すべての $u \in R$ に対し $f(\cdot,u)$ が可測関数で，殆どすべての $t \in (0,1)$ に対し $f(t,\cdot)$ が連続関数）で，線形増大度条件：$p_1, p_2 \in X_+$ があって，

$$|f(t,u)| \leq p_1(t)|u| + p_2(t) \quad u \in R, \quad \text{a.e. } t \in (0,1),$$

を満たすものとする．また，λ_n は，固有値問題 (EVP)

$$u''(t) + \lambda a(t)u(t) = 0 \quad \text{a.e. } t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \tag{1.2}$$

の第 n 固有値，より正確には，$u \in C[0,1]$ に対し，

$$L_a[u](t) = (1-t)\int_0^t sa(s)u(s)\,ds + t\int_t^1 (1-s)a(s)u(s)\,ds,$$

で定義される線形作用素 $L_a : C[0,1] \to C[0,1]$ の第 n 特性値とする．関数 a は必ずしも $L^1(0,1)$ に属さなくてもよく，その意味で固有値問題 (1.2) は区間の両端 $t=0$ と $t=1$ に Singularity の可能性を許している．

$a \equiv 1$ のときには，$\lambda_n = (n\pi)^2$ であり，Mawhin [1] やその参考文献等により，次の結果が知られている．

定理 1.1 （*Mawhin [1]* 等）
$a \equiv 1$ とする．また，$q_1 \geq 0$ と $q_2 \in \mathbf{L}^1(0,1)$ があって，

$$|f(t,u)| \leq q_1|u| + q_2(t) \quad u \in R, \quad a.e.\ t \in (0,1)$$

としよう．このとき，非線形項 $f(t,u)$ が *Nonresonant* 条件：

$$0 < \liminf_{|u|\to+\infty} \frac{f(t,u)}{u} \leq \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{f(t,u)}{u} < (2n+1)\pi^2 \equiv \lambda_{n+1} - \lambda_n$$

を満たすなら，*BVP (1.1)* は少なくても一つの解をもつ．

必ずしも $a \equiv 1$ でない場合への定理 1.1 の一般化としては，O'Regan [3] がある．O'Regan は，$a(t) > 0$ a.e. $t \in (0,1)$ と a の境界での挙動に関する若干の条件を仮定して，$\mathbf{L}_a^2(0,1) \equiv \{w \mid \int_0^1 a(t)|w(t)|^2\,dt < +\infty\}$ 上で EVP (1.2) を考察し，$\mathbf{L}_a^2(0,1)$ の枠組みで BVP (1.1) の可解性を論じている．そこでは，非線形項 $f(t,u)$ に線形増大度より可成り強い条件を課さなければならなかった．これは，BVP (1.1) の解が一般には $\mathbf{L}_a^2(0,1)$ に属さないことによっている．

以下で述べることは，EVP (1.2) と，BVP (1.1) の可解性を $C[0,1]$ の枠組みで考えれば，定理 1.1 を $a \in X_p$ の場合に一般化できることである．証明については，文献 [2] を参照して頂きたい．

2 固有値問題

まず，Banach 空間 X に属する関数の簡単な性質について触れておこう．

補題 2.1 $\phi \in X$ とする．

(1) $\int_0^t s\phi(s)\,ds,\ \int_t^1 (1-s)\phi(s)\,ds \in \mathbf{L}^1(0,1)$ であり，

$$\int_0^1 \int_0^t s\phi(s)\,dsdt = \int_0^1 \int_t^1 (1-s)\phi(s)\,dsdt = \int_0^1 s(1-s)\phi(s)\,ds$$

が成り立つ．

(2) $r \in (0,1)$ としよう．$v(0)=0$ なる $v \in C^1[0,r]$ に対して，

$$\lim_{t\to 0} v(t) \int_t^1 (1-s)\phi(s)\,ds = 0,$$

また，$w(1)=0$ なる $w \in C^1[r,1]$ に対して，

$$\lim_{t\to 1} w(t) \int_0^t s\phi(s)\,ds = 0$$

が成り立つ．

補題 2.1 の証明は Fubini の定理による．

$\phi \in X$ に対して，$L[\phi](\cdot)$ を

$$L[\phi](t) = (1-t)\int_0^t s\phi(s)\,ds + t\int_t^1 (1-s)\phi(s)\,ds \quad t \in [0,1]$$

と定義する．補題 2.1 により，L は X から $C[0,1]$ への有界線形作用素である．また，$u = L[\phi]$ は，$u \in AC[0,1] \cap C^1(0,1)$, $u' \in AC_{loc}(0,1)$ であって，u が境界値問題

$$\begin{aligned} &u''(t) + \phi(t) = 0 \quad \text{a.e. } t \in (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

の解であることと同値である．

よく知られているように L は $\mathbf{L}^1(0,1)$ から $C[0,1]$ への作用素とみなせばコンパクトであるが，X から $C[0,1]$ への作用素である L 自身はコンパクトではない．しかし，Arzela-Ascoli の定理により，L は次の意味のコンパクト性をもつ．

補題 2.2 $\psi \in X_+$ に対し,

$$K = L(\{\phi \in X \mid |\phi(t)| \le \psi(t) \quad a.e.\ t \in (0,1)\}),$$

で定義される集合 K は $C[0,1]$ で全有界 (precompact) である.

さて, $u \in C[0,1]$ に対し, $L_a[u] = L[au]$ と定義する. $\|L_a[u]\|_\infty \le \|au\|_X \le \|a\|_X\|u\|_\infty$ であるから, L_a は $C[0,1]$ 上の有界線形作用素である. また, 補題 2.2 により, L_a は $C[0,1]$ 上でコンパクトとなる. さらに, 作用素 L の性質より, $u \in AC[0,1] \cap C^1(0,1)$, $u' \in AC_{loc}(0,1)$ の下では, EVP (1.2) と作用素 L_a の特性値問題 $u - \lambda L_a[u] = 0$ とは同値である. ここで, λ が作用素 A の特性値とは, $N(I - \lambda A) \ne \{0\}$ となることである. ただし, 作用素 B の零空間を $N(B)$ で表している. このとき, $N(I - \lambda A)$ を特性値 λ に対応する固有空間, $u \in N(I - \lambda A) \setminus \{0\}$ を特性値 λ に対応する固有関数ということにしよう.

作用素 L_a の特性値問題については, 次のことが成り立つ.

補題 2.3 $a \in X_p$ とする.

(1) $N(I - \lambda L_a) \ne \{0\}$ なら, $\dim N(I - \lambda L_a) = 1$.

(2) 作用素 L_a の特性値は, 可算で,

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots \to +\infty$$

と並べることができる.

(3) $u \in N(I - \lambda_n L_a) \setminus \{0\}$ なら, $u \in C^1[0,1]$ で, u は閉区間 $[0,1]$ に丁度 $(n+1)$ 個の零点をもつ.

[2] における補題 2.3 の証明は, 特に突飛な方法を使う訳ではなく, 手順としては [4] に従った.

$a(t) > 0$ a.e. $t \in (0,1)$ を仮定し, L_a を $\mathbf{L}^2_a(0,1)$ 上の作用素とみなした場合には, 補題 2.3 と同様な結果が知られている. $a \in \mathbf{L}^1(0,1)$ のときには, Titchmarsh [5], Coddington & Levinson [6] により, (1)-(3) が成り立つ. また, [3] では, $a \in X$ のとき, a の境界での挙動に関する若干の条件の下に (1), (2) が成り立つことを示している.

その他の補題 2.3 と関連する結果としては，変数変換によって EVP (1.2) と同値な $[0,+\infty)$ 上の線形固有値問題を扱った Elbert, Kusano, Naito [7], Kabeya [8] 等がある．それらは，変数変換により EVP (1.2) に引き戻してみると，大雑把にいって，L_a を $C_0^1[0,1] \equiv \{u \in C^1[0,1] \mid u(0) = u(1) = 0\}$ 上の作用素とみなしているものであり，[7] の一つの結果は $a \in C[0,1)$, $a(t) > 0$, $\int_0^1 (1-t)a(t)\,dt < +\infty$ の場合に，[8] では $a \in C(0,1)$, $a(t) > 0$, $a \in X$ の場合に (1)-(3) が成り立つことを示していることになる．

3 Nonresonant 問題

$f(t,u)$ は線形増大度条件を満たす Carathéodory 関数とし，

$$\gamma_\infty(t) \equiv \liminf_{|u|\to+\infty} \frac{f(t,u)}{u} \le \gamma^\infty(t) \equiv \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{f(t,u)}{u}$$

としよう．関数 $u(t)$ が境界値問題 (1.1) の解とは，$u \in AC[0,1] \cap C^1(0,1)$, $u' \in AC_{loc}(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ であり， u が (1.1) の方程式を a.e. $t \in (0,1)$ で満たすこととする．

定理 1.1 は，次のように一般化される．

定理 3.1 $a \in X_p$ とする．このとき，

$$\gamma_\infty \in X_p \quad と \quad (\lambda_{n+1} - \lambda_n)a - \gamma^\infty \in X_p,$$

が成り立つなら，境界値問題 *(1.1)* は少なくても一つ解をもつ．

定理 3.1 の証明の概略：

境界値問題 (1.1) は，作用素方程式：

$$u = \lambda_n L_a[u] + L[f(\cdot,u)] \tag{3.1}$$

と同値である．$\mu \in (0, \lambda_{n+1} - \lambda_n)$ とし，写像 $K : [0,1] \times C[0,1] \to C[0,1]$ を

$$K(\tau,u) = L[(\lambda_n + (1-\tau)\mu)au + \tau f(\cdot,u)]$$

と定義する．K は完全連続なホモトピー写像であることがわかる．また，背理法を用いれば，$r > 0$ があって，$\|u\|_\infty \ge r$ なら $u - K(\tau,u) \ne 0$ が示さ

れる．Leray-Schauder's continuation theorem により，

$$\deg(I - K(0,\cdot), B_r, 0) = \deg(I - K(1,\cdot), B_r, 0)$$

となる．ただし，$B_r = \{u \in C[0,1] \mid \|u\|_\infty < r\}$ である．一方，L_a がコンパクトで，$I - K(0,\cdot) = I - (\lambda_n + \mu)L_a$ が１：１であるから，

$$\deg(I - K(0,\cdot), B_r, 0) \neq 0$$

がわかる．よって，$u \in C[0,1]$ があって，$u = K(1,u)$, すなわち，u は作用素方程式 (3.1) の解である．

∎

参考文献

[1] J. Mawhin, *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No.40,* American Mathematical Society, Providence, RI, 1979.

[2] H. Asakawa, *Nonresonant Singular Two-Point Boundary Value Problems,* Nonlinear Analysis T.M.A. to appear.

[3] D. O'Regan, *Singular Dilichlet boundary value problem-I. Superlinear and nonresonant case,* Nonlinear Analysis T.M.A. 29 (1997), 221–245.

[4] N. Shimakura, *Ordinary Diffferential Equations*, SHOKABO, TOKYO, (in Japanese) 1988.

[5] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions*, Oxford, London, 1962.

[6] E. A. Coddington & N. Levinson, *Theory of Ordinary Diffferential Equations*, Mc-GRAW Hill, New York, 1963.

[7] Á. Elbert, T. Kusano, M. Naito, *Singular eigenvalue problems for second order linear ordinary differential equations,* Archivum Mathematicum (BRNO) 34 (1998), 59–72.

[8] Y. Kabeya, *Uniqueness of nodal fast-decaying radial solutions to a linear elliptic equations,* Hiroshima Math. J. 27 (1997), 391–405.

[9] D. O'Regan, *Theory of Singular Boundary Value Problems,* World Scientific Press, Singapore, 1994.

[10] Y. Zhang, *Positive solutions of singular sublinear Emden-Fowler boundary value problems*, J. Math. Analysis Appl. 185 (1994), 215–222.