第１９回

発展方程式若手セミナー

報告集

１９９８年7月

第１９回

発展方程式若手セミナー

報告集

１９９８年7月

序

第１９回発展方程式若手セミナーは、平成９年度科学研究費補助金（基盤研究(B)(2)「50114088」実解析的方法の非線形発展方程式への応用（研究代表者：柴田良弘教授））の援助のもとに、平成９年８月４日より８月６日までの３日間、茨城県土浦市にある国民宿舎「水郷」で行われました。本年は、特別講演に小川卓克先生（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）をお招きし、「半線形発展方程式の L_p 理論について」という題目で講演をして頂いた他、１５件の一般講演、及び大学院生による short communications が行われました。

本報告集は、特別講演と一般講演の講演内容を元にまとめたものです。

１９回を迎えた今回のセミナーでも、例年通り発展方程式及びその関連分野の多彩なテーマによる講演が連日行われ、活発な討論・情報交換が行われました。この報告集が参加された方や関連分野の研究者の方々の研究に貢献できますよう願っております。

このセミナーの準備・運営に当たり多くの方々に協力していただきました。特に、早稲田大学 柴田良弘先生、筑波大学　高村博之先生、檀和日子先生及び筑波大学大学院生諸氏に厚く御礼申し上げます。また、小川卓克先生には、快く特別講演をお引き受けいただき、さらに多忙のなか報告集の原稿を書いて頂きました。この場をお借り致しまして、深く感謝申し上げる次第です。

平成１０年７月

第１９回発展方程式若手セミナー幹事
筑波大学数学系 小林　孝行
（現在の所属：九州工業大学工学部数学教室）

目　次

参加者名簿

氏　名	所　属	氏　名	所　属
秋山高弘	早稲田大	飯島秀樹	千葉大
石井克幸	神戸商船大	石田晴久	筑波大
石毛和弘	東北大	伊藤昭夫	千葉大
伊藤俊一	東北大	井上　弘	足利工業大
大崎浩一	大阪大	太田雅人	静岡大
小川卓克	名古屋大	角谷　敦	広島修道大
北　直泰	名古屋大	木下　保	筑波大
久保英夫	静岡大	剣持宣幸	千葉大
古城知巳	芝浦工大	小林孝行	筑波大
近藤　孝	名古屋大	佐藤得志	東北大
佐藤直紀	長岡工業高専	柴田進洋	名古屋大
柴田良弘	早稲田大	清水麗子	金沢大
白川　健	千葉大	高橋正人	千葉大
高村博之	筑波大	竹内慎吾	早稲田大
檀和日子	筑波大	津久井修司	筑波大
戸島滝男	中央大	中川　理	東北大
中口悦史	大阪大	中澤宣雄	筑波大
中島　徹	東北大	中村能久	熊本大
廣澤史彦	筑波大	廣田千秋	東北大
福間誠士	筑波大	本田寛伸	筑波大
前田健一	名古屋大	水町　徹	東大
三船　建	名古屋大	山崎　満	筑波大
山崎教昭	千葉大	湯沢泰生	筑波大
横山和義	北海道大	横山仁志	中央大

半線形発展方程式のL^P理論について

小川卓克

名古屋大学大学院 †
多元数理科学研究科

1. 導入と一般的枠組み

本稿の目的は 調和解析および実解析的手法に基づいた半線形発展方程式の可解性についてBanach空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ にて議論することである。実際に扱うのは数理物理などでよく引き合いに出される次のような type の発展方程式である。

(i) 非線形熱方程式：

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(u), & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(t,0) = u_0(x), \end{cases}$$

(ii) 非圧縮性粘性流体の運動方程式（ Navier-Stokes 方程式）：

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + \Delta u, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \mathrm{div}\ u = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(t,0) = u_0(x), \end{cases}$$

(iii) 非線形 Schrödinger 方程式：

$$(1.3) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \lambda|u|^{p-1}u, & t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ u(t,0) = u_0(x), \end{cases}$$

(iv) 非線形波動方程式：

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = \lambda|u|^{p-1}u, & t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^n \\ u(t,0) = u_0(x), & \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

いずれも特に断わらない限り $\mathbb{R}^n$ 上の Cauchy 問題を考えることにする。これらの方程式はいずれも主要部が線形であり その基本解がよく知られていて 非線形の項は主要部に対する摂動と見なして取り扱うことができる 以下ではこれら方程式の解の時間局所および大域存在(適切性)を Banach 空間$L^p(\mathbb{R}^n)$ にて考える。L を空間変数にだけ関わる線形作用素とし fをuまたは ∇uを含む非線形項とする。上記の方程式は共通して次のように表せる。

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \partial_t u + Lu = f(u) & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(t,0) = u_0(x), \end{cases}$$

† 現在の所属:九州大学大学院・数理学研究科

ここで主要部はいずれも適当な空間において半群（ないし群）$\{e^{-Lt}\}_{t>0}$を生成するからその摂動問題である (1.5) はDuhamel の原理によって半群を用いて積分方程式に直せる。

$$u(t)=e^{-Lt}u_0+\int_0^t e^{-L(t-t')}f(u(t'))dt' \tag{1.6}$$

上記の 4 種類の代表例の可解性を論ずるときにこのような積分方程式の形に直して考えるのが発展方程式論の立場である。

一般に線形部分の与える半群e^{-Lt}が何らかの意味で正則化効果(smoothing effect) を持つとき対応する半線形方程式は初期値に対するより弱い条件(広いクラス)の下で解くことができる。たとえば熱方程式の与える半群はいわゆる解析半群となり次のような評価を満たすことが知られている。

$$\|\nabla e^{\Delta t}u_0\|_2\le Ct^{-1/2}\|u_0\|_2$$

この評価と半群$\{e^{-Lt}\}_{t>0}$の有界性

$$\|e^{\Delta t}u_0\|_2\le C\|u_0\|_2$$

を補間することにより

$$\||\nabla|^{\alpha}e^{\Delta t}u_0\|_2\le Ct^{-\alpha/2}\|u_0\|_2,\qquad 0\le\alpha\le 1$$

を得る. 実際この評価をうまく用いれば半線形熱方程式や Navier-Stokes 方程式の適切性を $L^2(\mathbb{R}^n)$ において議論できる (Fujita-Kato の方法). 一方 3 番目や 4 番目の方程式に代表されるいわゆる分散型方程式や双曲型方程式ではこのような意味での smoothing 効果は期待できない。すなわち時間が経っても解の regularity が上がることは（一般には）望めないわけである。ここで smoothing effect ということをL^p評価ということに置き換えて考えて見ると実は上記の 4 種類の例はいずれも線形部分の半群がいわゆるL^p-L^q 評価と呼ばれる不等式を満たす。すなわち

$$\|e^{-Lt}u_0\|_p\le Ct^{-\gamma}\|u_0\|_q\qquad \gamma=n/2(1/q-1/p)$$

（ここでCは空間次元だけに依存する絶対定数。領域が$\mathbb{R}^n$でないときはその領域の形状や境界の様子などにも依存する）pとqのとりうる範囲は方程式の主要部により制限がある。最も一般的なものは熱方程式の場合であり全空間で考える限りは Navier-Stokes方程式も同様である。Schrödinger方程式では指数の組 (p,q) が共役指数のみ許される。さらに波動方程式では共役指数と初期値のregularityを要求する。これら線形部分に共通の性質を用いて半線形偏微分方程式を摂動法によって解くことができる。具体的な関数空間の設定はそれぞれのケースに固有な状況に寄ることになるがその背景にはおおむね以下のような指導原理がある。

前述のように発展方程式を半群(または群) e^{-Lt} を用いて積分方程式(1.6)に帰着する. たとえば熱方程式の場合は作用素Lは線形作用素$-\Delta$に適当な境界条件を与えて構成した半群の生成作用素であり初期値問題の場合は全空間の Laplacianで与えられるものとなる。前述のL^p-L^q評価により線形作用素e^{-Lt}は適当な空間の間の時空 L^p 有界性を満たすことがわかる：たとえば後述のように熱方程式の非斉次項

$$F\to\int_0^t e^{\Delta(t-t')}F(t')dt'$$

は$L^{\sigma}(0,T;L^q(\mathbb{R}^n))$から$L^{\theta}(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))$への有界作用素であることがわかる（ここで$p$, q, θ, σは適当な指数)。もし非線形項$f(u)$ が

$$f:L^{\theta}(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))\to L^{\sigma}(0,T;L^q(\mathbb{R}^n))$$

となっていれば積分方程式の右辺から定まる写像がその空間の中で縮小写像になることを主張することができる。この主張は一般的な発展方程式の解法の特別な例であるが、扱う方程式に含まれる非線形項が解のべき乗ないしはその微分との積という形をしており [1] それが基礎空間をL^p に選ぶ理由である。

以下で順次(i)-(iv)の方程式についてその可解性の議論を見てゆくことにする。

2. 放物型方程式の場合

2.1. L^2による解法-半線形熱方程式の場合. L^pの方法を考える前に(その原点となった) L^2の方法をFujita-Katoに従って述べる．ただし元のFujita-Katoの結果は２、３次元でのNavier-Stokes方程式の初期値境界値問題に対するものであったがここではより簡単に熱方程式の初期値問題について考える．以下、$L=-\Delta$ とし$D(L)=H^2(\mathbb{R}^n)$とする．よく知られているように熱方程式の基本解について以下が成り立つ。

Proposition 2.1. $L=-\Delta$ $D(L)=H^2(\mathbb{R}^n)$とする。このとき

$$e^{-Lt}u_0 = G_{4\pi^2 t} * u_0 = \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{1}{4\pi t})^{n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$$

ただし$G_{4\pi^2 t} = (\frac{1}{4\pi t})^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$。

このことから評価

$$\||\nabla|^\alpha e^{\Delta t} u_0\|_2 \le C_0 t^{-\alpha/2} \|u_0\|_2$$

は直接計算することにより確かめられる．ただし$C_0>0$は次元だけによる絶対定数。

さて一般に非線形項を含む(積分)方程式を逐次近似ないし縮小写像の方法で解くにはまず方程式をα- 階 微分して元の方程式と連立させるという方法が有効である．すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-t')} f(u(t'))dt' \\ |\nabla|^\alpha u(t) = |\nabla|^\alpha e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-t')} |\nabla|^\alpha f(u(t'))dt' \end{array} \right. \tag{2.1}$$

を考える．方程式を微分したのは方程式の右辺にある非線形項を処理するのに必然的に高いorderの微分ないし高いべきの積分を処理するに必要なためである．しかし微分した方程式の方にはもとより高い次数の非線形項を持つことになる．これを処理するのに半群のsmoothing effectを用いるのである．元の方程式を何回微分するか(すなわちαをいくつに選ぶか)は 方程式がどのような次数の非線形項を持ちまたそれをどのような函数空間でどのような初期値について解くかということに密接にかかわる．ここでは説明を簡潔にするため空間次元 $n=3$, 非線形項を $f(u)=u^2$ として扱ってみる．(実際それで多項式の場合の基本的な取り扱いを概ね理解できる)．示されうる定理は

Theorem 2.2. 半線形放物型方程式の初期値問題 *(1.1)* において $f(u)=u^2$、$u_0 \in L^2$とする。このときある時間 $T>0$ が存在して *(1.1)*の解u が 存在して $C([0,T);L^2) \cap C((0,T);H^{1/2})$ において局所適切である。

[1] こうした相性は重要だ

Proof of Theorem 2.2. まず(2.1)の 第一の方程式は半群のL^2有界性から以下のように評価される．

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_2 &= \|e^{-Lt}u_0\|_2 + \int_0^t \|e^{-L(t-t')}u(t')^2\|_2 dt' \\
&\le C_0\|u_0\|_2 + \int_0^t \||\nabla|^{1/2}e^{-L(t-t')}|\nabla|^{-1/2}u(t')^2\|_2 dt' \qquad (2.2)\\
&\le C_0\|u_0\|_2 + C_0\int_0^t (t-t')^{-1/4}\||\nabla|^{-1/2}u(t')^2\|_2 dt'
\end{aligned}
$$

ここで Hardy-Littlewood-Sobolevの不等式を思い出すと

$$
\|I_\mu f\|_p \le C\|f\|_q, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\mu}{n}
$$

ただし$I_\mu f$ は $I_\mu f = |\nabla|^{-\mu} f = \frac{1}{|x|^{n-\mu}} * f$で与えられる fractional integration(負の分数べき微分) である (たとえばStein [38]参照)．これを$\mu = 1/2$, $n = 3$, $p = 2$で用いると

$$
\||\nabla|^{-1/2} f\|_2 \le C\|f\|_{3/2} \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1/2}{3}
$$

を得る．この不等式のdualである

$$
\|g\|_3 \le C\||\nabla|^{1/2} g\|_2
$$

とともに積分方程式の評価に適用して

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_2 &\le C_0\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t (t-t')^{-1/4}\||\nabla|^{-1/2}u(t')^2\|_2 dt' \\
&\le C_0\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t (t-t')^{-1/4}\|u\|_3^2 dt' \qquad (2.3)\\
&\le C_0\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t (t-t')^{-1/4}t'^{-1/2}dt' (\sup_{0\le t'\le t} t'^{1/4}\||\nabla|^{1/2}u(t')\|_2)^2 \\
&\le C_0\|u_0\|_2 + C_1 t^{1/4} B(3/4, 1/2)(\sup_{0\le t'\le t} t'^{1/4}\||\nabla|^{1/2}u(t')\|_2)^2
\end{aligned}
$$

とできる．ここで$B(p,q)$ はBeta函数である．同様に第二の方程式から

(2.4)

$$
\begin{aligned}
\||\nabla|^{1/2}u(t)\|_2 &\le C_0t^{-1/4}\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t \||\nabla|e^{-L(t-t')}|\nabla|^{-1/2}u(t')^2\|_2dt' \\
&\le C_0t^{-1/4}\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t (t-t')^{-1/2}\||\nabla|^{-1/2}u(t')^2\|_2dt' \\
&\le C_0t^{-1/4}\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t (t-t')^{-1/2}\|u\|_3^2dt' \\
&\le C_0t^{-1/4}\|u_0\|_2 + C_1\int_0^t (t-t')^{-1/2}t'^{-1/2}dt'(\sup_{0\le t'\le t} t'^{1/4}\||\nabla|^{1/2}u(t')\|_2)^2 \\
&\le C_0t^{-1/4}\|u_0\|_2 + C_1B(1/2,1/2)(\sup_{0\le t'\le t} t'^{1/4}\||\nabla|^{1/2}u(t')\|_2)^2
\end{aligned}
$$

を得る．(2.3) と(2.4) から

$$
|||u|||_T = \sup_{0\le t'\le T}\|u(t')\|_2 + \sup_{0\le t'\le T} t'^{1/4}\||\nabla|^{1/2}u(t')\|_2
$$

とおけば

(2.5)
$$
|||u|||_T \le C_0\|u_0\|_2 + C_1T^{1/4}|||u|||_T^2
$$

を得る．完備距離空間として

$$
X = \{u \in C([0,T];L^2); |||u|||_T \le M\}
$$

(ただし $4C_0\|u_0\|_2 < M$) と選ぶと (2.5)は 条件 $T^{1/4} < 1/4MC_1$の下で写像

$$
\Phi : u \to \Phi(u) = e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-t')}u(t')^2dt'
$$

がX上の中への写像となっていることを示している．$f(u) = u^2$ であることを思い出すと Φが縮小写像となることも同様に示せて積分方程式 $u = \Phi(u)$の解の存在と初期値連続性が示せたことになる．

□

2.2. **L^p estimateとL^pによる解法-Navier-Stokes方程式の場合．** 以上で述べたL^2の方法をL^pに拡張してNavier-Stokes方程式への解法として見てみる．(Kato [19], Giga-Miyakawa [13] の方法) すでに見たようにもっとも簡単な熱方程式の可解性において分数べきの微分$|\nabla|^\alpha$(あるいはLaplacianの分数べき$(-\Delta)^{\alpha/2}$)が L^2の枠組みで有効であることを見たが Navier-Stokes方程式を扱う際には非線形項に$(u\cdot\nabla)u$を含むため ∇uに対する評価が不可欠である．これは方程式を$1+\alpha$ 階微分することを要請し広い函数空間 (ないし低い微分階数) による可解性には不利な条件である．一方次のSobolevの不等式を念頭に対応する函数空間で可解性を考える．

$$
\|u\|_3 \le C\||\nabla|^{1/2}u\|_2, \quad n=3
$$

この不等式は空間次元 $n=3$ のときの函数空間の包含関係 [2]

$$
\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)
$$

[2]対応する Besov空間では $\dot{B}^{1/2}_{2,1} \subset \dot{B}^{1/2}_{2,2} = \dot{H}^{1/2} \subset \dot{B}^{1/2}_{2,\infty}$ である

を意味しより広い-しかしhomogeneous degreeが一致する-関数空間 L^3における放物型方程式の可解性を示唆する．そこで $\dot{H}^{1/2}$ から L^3という置き換えを行いこの微分の階数を減らすことを考える．

まずNavier-Stokes方程式を一般的な半線形発展方程式の形に書き直すことから始める．Navier-Stokes方程式はdivergence freeな空間（いわゆるsolenoidal vector field）に落とすProjection operator Pにより 抽象的な発展方程式と potential の項からなる二つの方程式に分離できるいま L^p_σ を $C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n) \equiv \{C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ でdivergence が0となる関数全体$\}$のL^p-normによる完備化とし

$$P : L^p \to L^p_\sigma$$

をその空間へのprojectionとする．ここでL^pやL^p_σは3次元のベクトル値函数であることに注意する．考えている領域が$\mathbb{R}^n$全体ならFourier変換を用いてPは $P_{i,j} = \mathcal{F}^{-1}(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2})\mathcal{F}$ で与えられことがわかる．これは $u = Pu + \nabla p$ とおいて div を作用させると $\Delta p = \mathrm{div}\ u$となることから形式的に $Pu = u - \nabla p = u + (-\Delta)^{-1}\nabla \mathrm{div}\ u$ を得ることによる．このprojection operatorがL^p $(1 < p < \infty)$ で有界作用素になることは Calderon-Zygmond 評価とMarcinkiewiczの補間定理によりよく知られている。

Navier-Stokes方程式は Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ を用いて

$$\begin{cases} \partial_t u + Au + P(u \cdot \nabla u) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t,0) = Pu_0(x), \end{cases}$$

と表されて半群 $\{e^{-tA}\}_{t>0}$ がうまく構成できれば積分方程式は

$$u(t) = e^{-At}u_0 - \int_0^t e^{-A(t-t')}P(u \cdot \nabla u(t'))dt'$$

で与えられる。考えている領域が $\mathbb{R}^n$ ならP と$-\Delta$ が可換ということと PのL^p有界性 $(1 < p < \infty)$ から熱方程式と同様な評価が得られる。すなわち $e^{-tA} = e^{-tP\Delta} = Pe^{-t\Delta}$ によって L^p-L^q 評価は基本解(Gauss核)の表現 (c.f. Proposition 2.1) から容易に得られる。

Proposition 2.3. $1 < q \leq p < \infty$ *($q < p$ if $p = \infty$)* $\gamma = n/2(1/q - 1/p)$に対して

(i)

$$\|e^{-tA}u_0\|_p \leq Ct^{-\gamma}\|u_0\|_q$$

(ii)

$$\|\nabla e^{-tA}u_0\|_p \leq Ct^{-\gamma-1/2}\|u_0\|_q$$

を得る。

Proof. Convolutionに対するHausdorf-Youngの不等式から

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}u_0\|_p =& \|G_{4\pi^2 t} * u_0\|_p \\ \leq& \|G_{4\pi^2 t}\|_r\|u_0\|_q \quad 1/p = 1/r + 1/q - 1 \\ \leq& (4\pi t)^{-n/2(1-1/r)}(1/r)^{n/2r}\|u_0\|_q \\ \leq& (4\pi t)^{-n/2(1/q-1/p)}\|u_0\|_q \end{aligned} \tag{2.6}$$

となるが $e^{-tA} = Pe^{t\Delta} = e^{t\Delta}P$ よりProposition 2.3 を得る． □

Theorem 2.4 ([19], [13], [23]). *Navier-Stokes方程式の初期値問題 (2.2) において* $u_0 \in L^3$ とする。

(1) 絶対定数 $M_0 > 0$ があって $\|u_0\|_3 < M_0$ となるとき *(2.2)*は $C([0,\infty); L^3) \cap C((0,\infty); W^{1,3})$ において一意的な時間大域解を持つ。

(2) 仮定に加えて$u_0 \in L^q$ $(q > 3)$ とするとき ある $T > 0$ が存在して *(2.2)*は $C([0,T);L^3) \cap C((0,T);W^{1,3}) \cap L^\theta(0,T;L^p)$ において局所適切となる。ただし $2/\theta + n/p = 1$ *(*$n < p$*)* である。

あとに触れるようにこれらの解についてはそのregularityが得られて(2.2)のそれぞれ局所的及び大域的 古典解となる。

Proof of Theorem 2.4. Navier-Stokes方程式の強解を構成するために前述同様に微分した方程式と連立させる.

$$
(2.7)\qquad
\begin{cases}
u(t) = e^{-At}u_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-A(t-t')}P(u(t')\cdot\nabla u(t'))dt' \\
\nabla u(t) = \nabla e^{-At}u_0 + \displaystyle\int_0^t \nabla e^{-A(t-t')}P(u(t')\cdot\nabla u(t'))dt'
\end{cases}
$$

Proposition 2.3 より直ちに $1 < q \le p < \infty$なる p,qに対して

$$
(2.8)\qquad
\begin{aligned}
\|u(t)\|_p &= C\|u_0\|_p + C\int_0^t (t-t')^{-\gamma}\|u(t')\cdot\nabla u(t')\|_q dt' \\
\|\nabla u(t)\|_p &= Ct^{-1/2}\|u_0\|_p + C\int_0^t (t-t')^{-\gamma-1/2}\|u(t')\cdot\nabla u(t')\|_q dt'
\end{aligned}
$$

を得る. $\gamma = n/2(1/q - 1/p)$である. ここで$n = 3$として$p = 3$を選ぶと$q = 3/2$のとき

$$
\|u\cdot\nabla u\|_{3/2} \le \|u\|_3\|\nabla u\|_3
$$

となって都合が良さそうである. ところが同じ指数で第二の不等式を処理すると $(t-t')^{-\gamma-1/2}$の指数が $\gamma = 1/2$となることから可積分性があやしくなって具合わるい. 非線形項を

$$
\|u\cdot\nabla u\|_q \le \|u\|_r\|\nabla u\|_p
$$

と分けることにして許される指数の組み合わせを諸条件から調べてみると

$$
\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{r} \le \frac{1}{p}
$$
$$
\gamma = \frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{n} + \frac{1}{r}
$$

などとなる. そこで$n = 3$のとき第一の方程式に$p = 3$,$q = 3/2$, 第二の方程式に $p = 3$,$q = 2$としてPropostion 2.3 を適用してみると,

$$
(2.9)\qquad
\begin{aligned}
\|u(t)\|_3 &\le C\|u_0\|_3 + \int_0^t (t-t')^{-1/2}\|u(t')\cdot\nabla u(t')\|_{3/2}dt' \\
&\le C\|u_0\|_2 + \int_0^t (t-t')^{-1/2}\|u(t')\|_3\|\nabla u(t')\|_3 dt' \\
&\le C\|u_0\|_2 + \int_0^t (t-t')^{-1/2}t'^{-1/2}dt'(\sup_{0\le t'\le t}\|u(t')\|_3)(\sup_{0\le t'\le t} t'^{1/2}\|\nabla u(t')\|_3)^2 \\
&\le C\|u_0\|_2 + CB(1/2,1/2)(\sup_{0\le t'\le t}\|u(t')\|_3)(\sup_{0\le t'\le t} t'^{1/2}\|\nabla u(t')\|_3)
\end{aligned}
$$

となる．同様に二つ目の方程式は

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u(t)\|_3 &\le Ct^{-1/2}\|u_0\|_3 + C\int_0^t (t-t')^{-3/4}\|u(t')\cdot\nabla u(t')\|_2 dt' \\
&\le Ct^{-1/2}\|u_0\|_3 + C\int_0^t (t-t')^{-3/4}\|u(t')\|_6\|\nabla u(t')\|_3 dt'
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

となるからGagliardo-Nirenberg の不等式を用いて

$$
\begin{aligned}
t^{1/2}\|\nabla u(t)\|_3 &\le C\|u_0\|_3 + Ct^{1/2}\int_0^t (t-t')^{-3/4}\|u(t')\|_3^{1/2}\|\nabla u(t')\|_3^{1+1/2} dt' \\
&\le C\|u_0\|_3 + Ct^{1/2}\int_0^t (t-t')^{-3/4}t'^{-3/4} dt' \\
&\qquad \times (\sup\|u(t')\|_3)^{1/2}(\sup(t'^{1/2}\|\nabla u(t')\|_3)^{3/2} \\
&\le C\|u_0\|_3 + CB(1/4,1/4)(\sup\|u(t')\|_3)^{1/2}(\sup(t'^{1/2}\|\nabla u(t')\|_3)^{3/2}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

を得る．(2.9) と(2.11) から

$$
|\!|\!| u |\!|\!|_{X^3} = \sup_{0\le t'<\infty}\|u(t')\|_3 + \sup_{0\le t'<\infty} t'^{1/2}\|\nabla u(t')\|_3
$$

とおけば

$$
|\!|\!| u |\!|\!|_{X^3} \le C_0\|u_0\|_2 + C_1|\!|\!| u |\!|\!|_{X^3}^2 \tag{2.12}
$$

を得る．同様にして二つの差 $u-v$に対しても

$$
\sup_{0\le t'<\infty}\|u(t')-v(t')\|_3 \le C_1 M \sup_{0\le t'<\infty}\|u(t')-v(t')\|_3
$$

を得る．あとはL^2 のときと類似に $4C_0\|u_0\|_2 = M$とおいて

$$
X_M^3 = \{u\in C([0,\infty);L^3); |\!|\!| u |\!|\!|_{X^3}\le M\}
$$

とおけば X_M^3は metric

$$
d(u,v) = \sup_{0\le t<\infty}\|u(t)-v(t)\|_3
$$

によって 完備距離空間となるから $M<(4C_1)^{-1}$の下で(つまり $\|u_0\|_3 < (4C_0C_1)^{-1}$の下で) 写像

$$
\Phi : u \to \Phi(u) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-t')}P(u\cdot\nabla u(t'))dt'
$$

がX_M^3上で縮小写像となっていることが示される．この評価は時刻Tに依存しない評価であるから(小さい初期値に対する) 時間大域解を構成したことになる．

時間局所可解性を示すには積分方程式の第一項を

$$
\sup_{0<t<T}\|e^{-At}u_0\|_3 + \sup_{0<t<T} t^{1/2}\|\nabla e^{-At}u_0\|_3 \tag{2.13}
$$

のまま残し半群の性質

$$
\lim_{t\to 0+}\|e^{-At}u_0\|_3 = 0 \qquad \lim_{t\to 0+} t^{1/2}\|\nabla e^{-At}u_0\|_3 = 0
$$

を用いて(2.13)においてTを十分小さく選ぶことにより (2.12)の第一項に相当する項が絞れて有界性 ひいては縮小性が得られることになる。

2.3. **時空評価とNavier-Stokes方程式の一意性.** 古くからLeray らにより物理的な運動energyが有界なclassのNavier-Stokes方程式の解の一意性が未解決問題として残され多くの研究者の試みが知られているが解のregularityに付加条件を課すことにより解が一意であることが知られている. これはSerrinらによって 議論されたのでSerrinの正則性条件(regularity condition) ないし一意性条件 (uniqueness criteiron あるいはSerrin条件)などと呼ばれる. ここではLeray-Hopfの弱解よりも少し狭い解について一意性を考えてSerrinの条件が自動的に導出されることを見る. まず熱方程式の基本解についての時空評価をあげる.

Proposition 2.5 (Serrin, Giga, Kato). $1 < q \le p < \infty$ $\gamma = n/2(1/q - 1/p)$に対して

(i)

$$\|e^{-At}F(t')\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \le C\|F\|_{L^\theta(0,T;L^q)}$$

where $1/\theta = \gamma$.

(ii)

$$\|\int_0^t e^{-A(t-t')}F(t')dt'\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \le C\|F\|_{L^\sigma(0,T;L^q)}$$

ただし $1/\sigma - 1/\theta = 1 - \gamma > 0$。

(iii)

$$\|\int_0^t \nabla e^{-A(t-t')}F(t')dt'\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \le C\|F\|_{L^\rho(0,T;L^q)}$$

ただし $1/\rho - 1/\theta = 1/2 - \gamma > 0$

を得る。

Proof of Theorem 2.5. 1 はL^p-L^q 評価

$$\|e^{-At}F(t)\|_p \le (4\pi|t|)^{-\gamma}\|F(t)\|_q$$

を時間変数について $L^\infty(I;L^q) \to L_w^{1/\gamma}(I;L^p)$の弱評価 [3] と見なして Marcinkiewiczの補間定理を適用することによる。

2はL^p-L^q 評価から

$$\begin{aligned}
&\|\int_0^t e^{-A(t-t')}F(t')dt'\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \\
&\quad \le \|\int_0^t |4\pi(t-t')|^{-\gamma}\|F(t')\|_q dt'\|_\theta \\
&\quad = \big\||4\pi t|^{-\gamma} * \|F\|_q\big\|_\theta
\end{aligned}$$

と見なしてHardy-Littlewoodの不等式を用いることで得られる。3 ははじめのL^p-L^q評価を微分を含むもので始めることで同様に得られる。 □

[3] f が 弱- L^pとは: $\mu_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > t\}|$ に対して $\mu_f(t) \le Ct^{1/p}$を満たすもの

さて$u(t)$と$v(t)$が同じ初期条件u_0に対するNavier-Stokes方程式の積分方程式を満たす解とする(mild solution と呼ばれる). すなわちu, vは

$$(2.14) \qquad \begin{cases} u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-t')}P(u(t') \cdot \nabla u(t'))dt' \\ v(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-t')}P(v(t') \cdot \nabla v(t'))dt' \end{cases}$$

を満たす. ここで

$$e^{-A(t-t')}P_{i,j}(u_k \cdot \nabla_k u_j(t')) = e^{-A(t-t')}P_{i,j}\nabla_k(u_k(t')u_j(t'))$$

に注意して $u(t) - v(t) = w(t)$とおくと

$$(2.15) \qquad w_i(t) = -\int_0^t e^{-A(t-t')}P_{i,j}\nabla_k(u_k(t')w_j(t') + w_k(t')v_j(t'))dt'$$

$\|\cdot\|_{L^\theta(0,T;L^p)}$ をとればProposition 2.5 から

$$(2.16) \qquad \begin{aligned} \|w\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \leq & \|u \otimes w\|_{L^\rho(0,T;L^q)} + \|w \otimes u\|_{L^\rho(0,T;L^q)} \\ \leq & \|u\|_{L^\sigma(0,T:L^r)}\|w\|_{L^\theta(0,T;L^p)} + \|v\|_{L^\sigma(0,T:L^r)}\|w\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \end{aligned}$$

ただし $1/\rho - 1/\theta = 1/2 - n/2(1/q - 1/p) > 0$ かつ

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\theta}$$

これらの条件から

$$\frac{1}{2} - \frac{n}{2r} = \frac{1}{\sigma} > 0$$

すなわち

$$1 = \frac{n}{r} + \frac{2}{\sigma}, \quad r > n$$

を得る. 従ってもし解 u, vがともに $u, v \in L^\sigma(0,T;L^r)$ かつ

$$\|u\|_{L^\sigma(0,T;L^r)}, \|u\|_{L^\sigma(0,T;L^r)} \leq M$$

を満たすなら $T' < T$を十分小さく選ぶことにより

$$\|u\|_{L^\sigma(0,T';L^r)}, \|u\|_{L^\sigma(0,T';L^r)} \leq \frac{1}{4}$$

とできるから(2.16)から

$$\|w\|_{L^\theta(0,T';L^p)} \leq \frac{1}{2}\|w\|_{L^\theta(0,T';L^p)}$$

が従い適当なclassの解 (たとえば $u \in L^\theta(0,T;L^p)$)の一意性が示せる. これがSerrinによる一意性に対する付加条件である. いわゆるEnergy class (Leray-Hopf class)の弱解についても$u, v \in L^\sigma(0,T;L^r)$ならば $(0,T)$で 解 は一意となる.

2.4. **Navier-Stokes方程式のL^n 無条件適切性.** 以上でNavier-Stokes方程式に対するL^p空間 (本当は$L^\theta(I;L^p)$)における適切性が得られたわけであるが適切性が得られる空間は初期値が与えられる空間Xに対して $C(I;X)$という空間よりも狭いところとなっている。具体的にはSerrin条件である (c.f. [19])。そこで元々の可解性のclassとSerrinの条件が一致する空間において上の付加条件を回避することを考える ([3], [21], [22]) 発展方程式の解のpersistency (一貫性)を要求するなら $C(I;L^p)$という空間が望ましいからそれに相当するSerrinの条件を探し出すと

$$\frac{2}{\theta}+\frac{n}{p}=1$$

から$\theta=\infty$ として$p=n$を得る。

$C(I;L^n)$に対する適切性は非線形項の積分表示が作り出す双線形形式に対する微妙なreguralityのgainによって得られた。([4])。ここでは そのfirst stepとして解の一意性に対する 最近の研究を述べる ([11],[5])。上で見たように一意性を示すには非線形項

$$B(u,u)\equiv\int_0^t e^{-A(t-t')}P\big(u(t')\cdot\nabla u(t')\big)dt'=\int_0^t \nabla e^{-A(t-t')}P\big(u(t')\otimes u(t')\big)dt'$$

に対する評価が本質的である。斉次Besov 空間 を 可微分order s 可積分order (p,q)として $\dot{B}^s_{p,q}$ [4] とおく。次が得られている。

Theorem 2.6 (Furioli-LemairéRieusset-Terraneo,Cannone-Planchon). $n=3$とする。(θ,p) を *Serrin*条件

$$\frac{2}{\theta}+\frac{n}{p}=1,\quad 2\le p\le 2n/(n-2)$$

を満たす *admissible pair* とする。このとき 非線形項を与える双線形形式

$$B(u,v)=\int_0^t \nabla e^{\Delta(t-t')}P\big(u(t')\otimes v(t')\big)dt'$$

は

(1)

$$L^\theta(I;L^p)\times L^\theta(I;L^p)\to L^\infty(I;\dot{B}^{(6/p)-1}_{p/2,p/(p-3)})$$

への双連続形式となる。

(2) 同時に $B(u,v)$は

$$L^\infty(I;L^3)\times L^\infty(I;\dot{B}^{(3/p)-1}_{p,\infty})\to L^\infty(I;\dot{B}^{(3/p)-1}_{p,\infty})$$

(ただし$3/2<p<3$) の双連続形式となる。

特別な指数、すなわちわれわれの興味ある場合 $p=3$を考えると

$$B(u,v):L^\infty(I;L^3)\times L^\infty(I;L^3)\to L^\infty(I;\dot{B}^1_{3/2,\infty})$$

を得る。これより前述同様 $u,v\in C(I;L^3)$なる 2つの解の差 $w(t)=u(t)-v(t)$ に対し

$$\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^1_{3/2,\infty})}\le 2\|u\|_{L^\infty(I;L^3)}\|w\|_{L^\infty(I;L^3)}+\|w\|^2_{L^\infty(I;L^3)} \tag{2.17}$$

---

[4] そのnormは $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}=\left(\sum_j(2^{js}\|\mathcal{F}^{-1}\phi_j\hat{f}\|_p)^q\right)^{1/q}$

を得て wに対してわずかなregularityを得たことになる。u v は $L^\infty(I;L^3)$ に属しているから w は$L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,6})\subset L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})$でもある。そこで今度は

$$
\begin{aligned}
\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})} \le & 2C\|u\|_{C([0,t);L^3)}\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty}))} + C\|w\|_{C([0,t);L^3)}\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})} \\
\le & 3C\|u\|_{C([0,t);L^3)}\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty}))} + C\|v\|_{C([0,t);L^3)}\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

を得て 時間 t を絞れば 解のL^3 におけるt-連続性と

$$
\|B(u,u)\|_{C([0,t);L^3)} = \|u-e^{-tA}u_0\|_{C([0,t);L^3)} \to 0 \quad (t\to 0)
$$

より $I=[0,t)$に対して

$$
\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})} \le \varepsilon\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})}
\tag{2.19}
$$

を得て $\|w\|_{L^\infty(I;\dot{B}^{1/2}_{2,\infty})}=0$ が得られる。

Remark. $n=3$において以上の結果は解の時間大域的安定性の議論に発展できる。この話も元々はL^2 (正しくは$n=3$ での $H^{1/2}$ での [27]の議論) で始まったが Kawanago [23] によって L^3の方法に拡張された。たとえば 初期条件 が u_0 v_0 である Navier-Stokesの$L^\infty(0,T;L^3)$における解 u, vのいずれか一方がSerrin 条件を見たしかつある絶対定数 $C(r)>0$に対して $\|u-v\|_{L^\infty(0,T;L^3)}\le C(p,n)$ が満たされるならば別の定数 $A>0$があって

$$
\|u(t)-v(t)\|_3 \le C\|u_0-v_0\|_3\exp(A\|u\|_{L^\theta(0,T;L^q)})
$$

を満たす。ここで$(p.\theta)$はSerrin条件を満たす指数である。[23]における方法はイタリア学派の部分積分によるL^pの方法に通じここでの方法とは異なるが興味深い一致を見ることができる。

2.5. Navier-Stokes方程式の解の (準) L^1 評価. Navier-Stokes方程式のL^1 (ないしL^p $(p\le 1)$)理論は divergence free 空間へのprojection 作用素が 特異積分作用素となることから有界性が失われ取り扱いが困難となる。従ってP が有界となる何らかの代換空間が必要となる。break through は以下の定理であった。

Theorem 2.7 (Coifmann-Lions-Mayer-Semmes [7]). ベクトル場 u,v と $1/p+1/p'=1$ に対して $u\in L^p$, $v\in L^{p'}$ かつ $div\, u=0$ とする。このとき $u\cdot\nabla v\in\mathcal{H}^1$ である[5]。

Proof of Theorem 2.7. $\phi\in C_0^\infty(B_1)$ $\phi_t(x)=t^{-n}\phi(x/t)$ 及び $1/\bar{p}+1/\bar{p}'=1$に対して

$$
\begin{aligned}
|\phi_t*(u\cdot\nabla v)| =& |\phi_t(u\cdot\nabla(v-\bar{v})| \\
=& |\nabla\phi_t*(u\otimes(v-\bar{v}))| \le \|\nabla\phi_t\|_\infty\|u\|_{\bar{p}}\|v-\bar{v}\|_{\bar{p}'} \\
\le& \frac{C(\phi)}{t^{n+1}}\|u\|_{\bar{p}}\|v-\bar{v}\|_{\bar{p}'} \\
\le& Ct^{-1}\Big(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|u(x)|^{\bar{p}}dx\Big)^{1/\bar{p}}\Big(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|v(x)-\bar{v}|^{\bar{p}'}dx\Big)^{1/\bar{p}'} \\
\le& C\Big(M[|u(x)|^{\bar{p}}]\Big)^{1/\bar{p}}\Big(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|\nabla v(x)|^{\bar{q}}dx\Big)^{1/\bar{q}} \\
\le& C\Big(M[|u(x)|^{\bar{p}}]\Big)^{1/\bar{p}}\Big(M[|\nabla v(x)|^{\bar{q}}]\Big)^{1/\bar{q}}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

[5] $f\in\mathcal{H}^1$ とは $f\in L^1$ かつ $\sup_{0<t}|\phi_t*f|\in L^1$のとき

ただし$M[f]$ はHardy-Littlewoodの極大関数[6] $1/\bar{p}+1/\bar{q}=1+1/n$ 従って両辺のL^1normを取ると$1/p+1/p'=1$なる p に対して $\bar{p}<p\ \bar{q}<p'$ とできるから極大関数の L^p $(p>1)$ 有界性より

$$\begin{aligned}\|\sup_t|\phi_t*(u\cdot\nabla v)|\|_1 \le& C\|M[|u|^{p'}]\|_{p/\bar{p}}^{p/\bar{p}}\|M[|\nabla v|^{\bar{q}}]\|_{p'/\bar{q}}^{p'/\bar{q}} \\ \le& \|u\|_p\|\nabla v\|_{p'}\end{aligned} \tag{2.21}$$

□

これにより Navier-Stokes方程式を $\mathcal{H}^1$で取り扱うことが可能になる。Miyakawa [34] は初期値$u_0\in\mathcal{H}^1\cap L^2$に対する初期値問題 (2.2)を考えその時間大域解の減衰を議論した。初期値にL^1などの制限を 課すと空間遠方のdecayが早くなり一般に減衰のorderはよくなる。

注意したいのはたとえばスカラーの熱方程式でL^1 の初期値問題を考えるとたとえば$u_0>0$であれば

$$\|u(t)\|_1=\int u(t,x)dx=\int u_0(x)dx$$

であるからたとえ$u_0\in L^1\cap L^2$ であっても解は減衰しない。一方 Navier-Stokes方程式では divergence が0であることから $u(t)\in L^1$ ならばいつでも

$$\int u(t,x)dx=0,\quad t\ge 0$$

である。

3. 非線形分散型方程式とそのL^pの方法

3.1. 非線形Schrödinger 方程式とそのL^pの方法. 半線形分散型方程式は次のような非線形Schrödinger方程式などに代表される。たとえばその初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=\lambda|u|^{p-1}u, & t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}, \\ u(t,0)=u_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

に対しては線形部分のsmoothing effectが放物型方程式に比べ弱いことにより可解性の議論がやや難しくなる。ことにSchrödinger型方程式は非線形項を持たない (散乱理論の言葉でfreeの方程式という) 線形方程式の解は L^2以外では適切にならない。従って可解性は常にこのL^2 を基礎にして考えることになる。さらに非線形Schrödinger方程式の解はいくつかの保存量を持つ。すなわち非線形項がGauge invarianceを保つ場合で

$$\|u(t)\|_2=\|u_0\|_2 \tag{3.2}$$

$$P(u(t))=P(u_0) \tag{3.3}$$

$$E(u(t))=E(u_0) \tag{3.4}$$

ただし$P(u)$と$E(u)$はそれぞれ

$$P(u)=\int_{\mathbb{R}^n}u\nabla\bar{u}dx \tag{3.5}$$

$$E(u)=\|\nabla u\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.6}$$

[6] $M[f](x)=\sup_t\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t(x)}|f(x)|dx$

と定義される。これらの保存量を組み合わせると、もし L^2ないしH^1で時間局所解の適切性が証明できれば直ちに時間大域解の存在が示せる。さらにこれらのことから任意の$s \geq 1$に対しても同様にして$\||\nabla|^s u(t)\|_2$に対するa priori 評価を得ることができ大意的可解性を議論できる。このことから非線形Schrödinger方程式の適切性を議論するには Sobolev空間H^sが重要である。

さてSchrödinger型方程式は基本解が熱の場合と類似に求められることによりその性質を知ることは比較的容易である。Schrödinger方程式の初期問題の場合 $L = -i\Delta$として発展作用素$\{e^{i\Delta t}\}_{t\in\mathbb{R}}$は$L^2$においてunitary 群となるがその表現は熱方程式の時間tをitに書き換えたものである.

Proposition 3.1. $L = -i\Delta$ $D(L) = H^2(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき

$$e^{i\Delta t}u_0 = G_{4\pi^2 it} * u_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{4\pi it}\Big)^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4it}} u_0(y)dy$$

ただし$G_{4\pi^2 it} = \big(\frac{1}{4\pi it}\big)^{n/2} e^{\frac{|x|^2}{4it}}$。

この表現の正当化はparabolic regularization などによって得られる。(群にいれる生成作用素を$i\Delta$から$i\Delta + \varepsilon\Delta$などにして $\varepsilon \to 0$の極限を取る) 。

上記の表現により半群(実は群) $\{e^{i\Delta t}\}$ に対する$L^1 - L^\infty$評価

$$\|e^{i\Delta t}u_0\|_\infty \leq \Big|\frac{1}{4\pi t}\Big|^{-n/2}\|u_0\|_1$$

が直ちに得られる。一方（半）群 $\{e^{i\Delta t}\}$ は $L^2 \to L^2$ のunitary群に拡張できるからこれらの二つを組み合わせて Riesz-Thorinの補間定理を用いれば $\{e^{i\Delta t}\}$に対する以下の$L^p - L^{p'}$評価が得られる。

Proposition 3.2. $2 \leq p \leq \infty$ $1/p + 1/p' = 1$ $\gamma = n/2(1-2/p)$に対して

$$\|e^{i\Delta t}u_0\|_p \leq Ct^{-\gamma}\|u_0\|_{p'}$$

を得る。

ここで注意すべきなのは関数空間の指数が dual exponentになっている点でfreeのSchrödinger方程式の解がL^2でしか適切であり得ないという制約から受ける制限である。

さて非線形初期値問題の解はこのUnitary群を用いて

$$u(t) = e^{i\Delta t}u_0 - i\lambda\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}|u(t')|^{p-1}u(t')dt'$$

で与えられる。可解性の議論には当初$L^p - L^q$型の不等式が用いられていた。それは次第に 波動方程式の基本解について知られていた Strichartz評価 (時空評価) を用いて組織的に縮小写像を構成するということであると理解されるようになった。このSchrödinger evolutionの unitary 群に対する 時空評価は Strichartz[38]に起源し その後Ginibre-Velo[15], Yajima [46], Cazenave-Weisslar[6]らの改良によって今日知られるような形となった。まずそれを以下に述べる。

Theorem 3.3 ([37],[15],[46],[6]). $2 \leq p < 2n/(n-2)$ に対して $2/\theta = \gamma = n(1/2 - 1/p) < 1$ を満たす *pair* (p,θ)を*admissible pair*と呼ぶ。(p,θ), (q,σ)を任意の*admissible pair*とすると

$$\|e^{i\Delta t}u_0\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \leq C\|u_0\|_2 \tag{3.7}$$

$$\Big\|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}F(t')dt'\Big\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \leq C\|F\|_{L^{\sigma'}(0,T;L^{q'})} \tag{3.8}$$

ただし $1/\sigma - 1/\sigma' = 1/q + 1/q' = 1$。

Proof of Theorem 3.3. まずadmissible pair (p,θ)に対して 試験関数$\Phi \in L^{\theta'}(0,T;L^{p'})$をとって L^p-L^q 評価 Propostion 3.2 により

$$
\begin{aligned}
&|\langle\langle \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}F(t')dt', \Phi(t)\rangle\rangle| \qquad\qquad (\langle\langle\cdot\rangle\rangle \text{ は時空のdual coupling})\\
&=|\int_0^T\int_0^T \chi_{[0,t]}(t')\langle e^{i\Delta(t-t')}F(t'), \Phi(t)\rangle dt'dt|\\
&=|\int_0^T\int_0^T \chi_{[0,t]}(t')\langle F(t'), e^{-i\Delta(t-t')}\Phi(t)\rangle dt'dt|\\
&\le\int_0^T\int_0^T \chi_{[0,t]}(t')\|F(t')\|_{p'}\|e^{-i\Delta(t-t')}\Phi(t))\|_p dtdt'\\
&\le\int_0^T\int_0^T (4\pi|t-t'|)^{-\gamma}\|F(t')\|_{p'}\|\Phi(t))\|_{p'}dtdt' \qquad (\gamma = n(1/2-1/p))\\
&=\int_0^T ((4\pi|t|)^{-\gamma} * \|\Phi\|_{p'})\|F(t')\|_{p'}dt'\\
&\le\|(4\pi|t|)^{-\gamma} * \|\Phi\|_{p'}\|_{L^{\theta'}(0,T)}\|F\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})}\\
&\le C\|F\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})}\|\Phi\|L^{\theta'}(0,T;L^{p'})
\end{aligned}
$$

従ってdualityより

$$
\|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}F(t')dt'\|_{L^\theta(0,T;L^p)} \le C\|F\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})} \tag{3.9}
$$

を得る。次に

$$
\begin{aligned}
&\|\int_0^T \chi_{[0,t]}(t')e^{-i\Delta t}F(t)dt\|_2^2\\
&\quad=\int_0^T\int_0^T \chi_{[0,t]}(t)\chi_{[0,t]}(s)\langle e^{-i\Delta t}F(t), e^{-i\Delta s}F(s)\rangle dtds\\
&\quad=\int_0^T\int_0^T \chi_{[0,t]}(t)\chi_{[0,t]}(s)\langle e^{-i\Delta(t-s)}F(t), F(s)\rangle dtds\\
&\quad\le\int_0^T\int_0^T (4\pi|t-s|)^{-\gamma}\|F(t)\|_{p'}\|F(s))\|_{p'}dtds\\
&\quad=\int_0^T \|F(t')\|_{p'}((4\pi|t|)^{-\gamma} * \|\Phi\|_{p'})dt'\\
&\quad\le\|F\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})}\|(4\pi|t|)^{-\gamma} * \|\Phi\|_{p'}\|_{L^{\theta'}(0,T)}\\
&\quad\le C\|F\|^2_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})}
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\|\int_0^t e^{i\Delta t}F(t)dt\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C\|F\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})} \tag{3.10}
$$

(3.9)と(3.10)を補間することにより (q,σ) を$2 \le q \le p$なる admissible pairとして

$$\| \int_0^t e^{i\Delta(t-t'} F(t')dt' \|_{L^\sigma(0,T;L^q)} \le C\|F\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})} \tag{3.11}$$

及び(3.10)のdualと(3.9)を補間することにより $p \le q \le \infty$ に対して

$$\| \int_0^t e^{i\Delta(t-t')} F(t')dt' \|_{L^\theta(0,T;L^p)} \le C\|F\|_{L^{\sigma'}(0,T;L^{q'})} \tag{3.12}$$

それぞれをさらに補間すればのぞみの不等式を得る。

一方斉次項に対する評価は(3.10)より

$$\begin{aligned}
&| \int_0^T \chi_{[0,t]}(t')(e^{i\Delta t}u_0, \Phi(t))dt| \\
\le&(u_0, \int_0^T \int_0^T \chi_{[0,t]}(t)e^{-i\Delta t}\Phi(t)dt) \\
\le&\|u_0\|_2 \| \int_0^T \int_0^T \chi_{[0,t]}(t)e^{-i\Delta t}\Phi(t)dt\|_2 \\
\le&C\|u_0\|_2\|\Phi\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{p'})}
\end{aligned}$$

Dualityから求める評価を得る。 □

Remark. 上記の定理の主張はあとのsecsionで述べるような波動方程式への Strichartz評価のようにregularityを絡めてその指数の制限を拡大することも可能である。

さて可解性を議論するには例によって対応する積分方程式とそれを微分したものを連立させて適当な基礎空間で縮小写像を構成する。

$$u(t) = e^{i\Delta t}u_0 - i\lambda \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}|u(t')|^{p-1}u(t')dt' \tag{3.13}$$

$$|\nabla|^\alpha u(t) = e^{i\Delta t}|\nabla|^\alpha u_0 - i\lambda \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}|\nabla|^\alpha |u(t')|^{p-1}u(t')dt' \tag{3.14}$$

たとえば$(\rho, p+1)$をadmissible pairとしてはじめの方程式にはStricharts 評価を直接応用すると

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})} \le& C\|u_0\|_2 + |\lambda| \| \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}|u(t')|^{p-1}u(t')dt'\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})} \\
\le& C\|u_0\|_2 + |\lambda| \| |u|^{p-1}u\|_{L^{\rho'}(0,T;L^{(p+1)/p})} \\
\le& C\|u_0\|_2 + |\lambda| \|u\|^p_{L^{p\rho'}(0,T;L^{p+1})}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

を得る。ここで肝要なことはSchrödinger型の$L^p - L^q$評価では左辺と右辺に現れるx-空間の指数が共役指数しか許されないという点である。Strichartz評価ではこの点が少し緩和されるがこのため空間変数に対する指数を非線形項のorderに依存する$p+1$に取ることが要求される。これがBaillon-Cazenave-Figuria [1] や Ginibre-Velo [14] がはじめに気づいたことであった。さてそのようにとれば時間に関する指数であるρは自動的に定まる。問題は右辺に現れる$\|u\|_{Lp\rho'(0,T;L^{p+1})}$を左辺の$\|u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}$でcontrolする必要があるので

$$p\rho' \le \rho$$

という制限が必要である。また同時にStrichartz評価の条件で

$$p+1<\frac{2n}{n-2}$$

が要請される。ここではまず

$$\frac{p}{\rho}\leq\frac{1}{\rho'}=1-\frac{1}{\rho}$$

よって

$$\frac{2}{\rho}=\frac{n}{2}(1-\frac{2}{p+1})=\frac{n(p-1)}{2(p+1)}\leq\frac{2}{p+1} \tag{3.16}$$

ここから直ちに

$$p\leq 1+\frac{4}{n}$$

を得る。もう一つの制限は

$$p\leq 1+\frac{4}{n-2}$$

であるからこの場合は上の制限の方が強い。ここで$p<1+4/n$のときは(3.15)から直ちに

$$\|u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}\leq C\|u_0\|_2+|\lambda|T^\delta\|u\|^p_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}$$

(ただし$\delta>0$は$1+4/n-p$に依存した定数) を得る。よってTを十分小さく選べば $\|u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}$は初期値の$L^2$で制御できるということになる。同様な方法により差の評価も得られるので局所解を構成するための縮小写像が構成できたことになる。

すなわちここでは二つ目の微分した方程式を用いることなく初期値がL^2に入っているという条件だけで時間局所解が構成できたことになる。ちなみに当初に述べたように解のL^2normは(Energyも) 保存されるので局所存在時間が初期値のL^2normの大きさのみによるような場合は解が時間大域的に延長できる (すなわち大きい初期値の時間大域解である...) 一方 Critical case である $p=1+4/n$ の場合は評価は$\delta=0$となり

$$\|u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}\leq C\|u_0\|_2+|\lambda|\|u\|^p_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}$$

であるから$n=3$,$p=3$ のときのNavier-Stokes方程式に対する状況と同じとなり $\|u_0\|_2$を小さく選べば時間によらない評価(時間 a priori 評価)を得る。いわゆるsmall data global existence と呼ばれる結果である。一方右辺第一項を

$$\|u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}\leq\|u_0\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}+|\lambda|\|u\|^p_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}$$

としておけば$u_0\in L^2$の元でStrichartz 評価から第一項のTについての一様有界性が得られTを小さく選べばこの項はいくらでも小さくなる。従って同様に今度は任意の大きさの初期値に対する局所解の存在定理もいえる。この場合,時間大域的存在を示すためには$\|u\|_{L^\rho(t,T+t;L^{p+1})}$の tについての増大度の a priori評価が必要である。$\lambda<0$の場合で$p\geq 1+4/n$の場合には大きなdataに対して有限時間以内に爆発する解が知られているので$\|u\|_{L^\rho(t,T+t;L^{p+1})}$の大域的評価は得られない。しかし$\lambda>0$の場合にはこれは可能であると予想されている。いずれにしろL^2の初期値に対して$p=1+4/n$が一般に大域的解の存在のcritical exponentであることがわかる。

さて忘れていた微分した方程式を連立させるとどのようになるのであろうか？それは基本的には扱えるべきの次数が高くなるということである。しかし(3.14)に対して上と同様な評価を実行するだけではべきの次数は上がらない。実際 $(\rho, p+1)$をadmissible pairとすれば

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})} \le & C\|\nabla u_0\|_2 + |\lambda| \| \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}\nabla|u(t')|^{p-1}u(t')dt'\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})} \\
\le & C\|\nabla u_0\|_2 + |\lambda|\{\||u|^{p-1}\nabla u\|_{L^{\rho'}(0,T;L^{(p+1)/p})} \\
& + (p-1)\||u|^{p-2}u\nabla|u|\|_{L^{\rho'}(0,T;L^{(p+1)/p})}\} \\
\le & C\|\nabla u_0\|_2 + |\lambda|\|u\|^{p-1}_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}\|\nabla u\|_{L^\rho(0,T;L^{p+1})}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

従って前と同様に$\delta > 0$ ($\delta = 0$ if $p = 1 + 4/n$)

$$
\|u\|_{L^\rho(0,T;W^{1,p+1})} \le C\|u_0\|_{H^1} + |\lambda| T^\delta \|u\|^p_{L^\rho(0,T;W^{1,p+1})}
$$

を得る。この評価では明らかにL^2の場合よりも得をしたことにならない。そこで非線形項の評価を次のように換える。まず指数を以下のように与える。(q,ρ)と(s,σ)を二つのadmissible pairとし

$$
\frac{1}{s'} \quad (= 1 - \frac{1}{s}) = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}, \tag{3.18}
$$

$$
\frac{1}{r(p-1)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \tag{3.19}
$$

を満たすrを考える。これらの指数は非線形項の指数pと指数qで

$$
\frac{1}{s} = 1 + \frac{p-1}{n} - \frac{p}{q}, \tag{3.20}
$$

$$
\frac{1}{r} = (p-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}) \tag{3.21}
$$

で与えることができる。すると Sobolevの不等式から$1/s + 1/s' = 1$として

$$
\begin{aligned}
\|\nabla(|u|^{p-1}u)\|_{s'} \le & (p-1)\||u|^{p-1}\|_r\|\nabla u\|_q \\
\le & (p-1)\|u\|^{p-1}_{r(p-1)}\|\nabla u\|_q \\
\le & C\|\nabla u\|^p_q
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

従って(q,ρ)がadmissible pairであることに注意して

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\rho(0,T;L^q)} \le & C\|\nabla u_0\|_2 + |\lambda| \| \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}\nabla(|u(t')|^{p-1}u(t'))dt'\|_{L^\rho(0,T;L^q)} \\
\le & C\|\nabla u_0\|_2 + C|\lambda|\|\nabla(|u|^{p-1}u)\|_{L^{\sigma'}(0,T;L^{s'})} \\
\le & C\|\nabla u_0\|_2 + C|\lambda|\|\nabla u\|^p_{L^{p\sigma'}(0,T;L^q)}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

よって同様に

$$
p\sigma' \le \rho \tag{3.24}
$$

の条件の元で

$$
\|\nabla u\|_{L^\rho(0,T;L^q)} \le C\|\nabla u_0\|_2 + C|\lambda|T^\delta\|\nabla u\|^p_{L^\rho(0,T;L^q)}
$$

とできるはずである。ただし $\delta = (\rho - p\sigma')/\sigma'\rho$ とおいた。このようにできる条件を調べてみると

を得る。一方(q,ρ)と(s,σ)はともにadmissible pairであるから

$$\frac{2}{\rho}=n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}), \tag{3.25}$$

$$\frac{2}{\sigma}=n(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}), \tag{3.26}$$

を満たす。(3.26) よりまず

$$\frac{2}{\sigma'}=2-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}) \tag{3.27}$$

なので (3.24)と(3.25), (3.27)から

$$np(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})=\frac{2p}{\rho}\le\frac{2}{\sigma'}=2-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{s})$$

これと(3.20)より

$$\frac{p}{2}\le\frac{2}{n}+\frac{1}{2}+\frac{p-1}{n}$$

すなわち

$$p\le 1+\frac{4}{n-2} \tag{3.28}$$

以上をまとめて以下の定理を得る。

Theorem 3.4 ([1], [15], [42], [20], [6]). 以下で$(q.\theta)$ は任意の*admissible pair*とする。
(1) $1<p<1+4/n$ とする。$u_0\in L^2$ に対して 初期問題 *(3.1)*の解が時間大域局所的に存在して$C([0,\infty);L^2)\cap L^\theta_{loc}(0,\infty;L^q)$ で適切である。
(2) $1<p<1+4/(n-2)$ $\lambda>0$ とする。$u_0\in H^1$ に対して 初期問題 *(3.1)*の解が時間大域的に存在して$C([0,\infty);H^1)\cap L^\theta_{loc}(0,\infty;W^{1,q})$ で適切である。

3.2. **KdV 方程式とそのL^pの方法.** 半線形分散型方程式の他の例として一般化された Korteweg de Vries 方程式の 初期値問題

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x^3 u+\partial_x f(u)=0 & t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R},\\ u(t,0)=u_0(x),\end{cases} \tag{3.29}$$

があげられる。KdV方程式は特に$p=2,3$のときに完全可積分で逆散乱解法で可解となるが非線形Schrödinger 方程式と類似の性質を多く持つ。たとえば保存量

$$\int u(t)dx=\int u_0dx \tag{3.30}$$

$$\|u(t)\|_2=\|u_0\|_2 \tag{3.31}$$

$$E(u(t)=\|\partial_x u\|_2^2-\int G(u)dx=E(u_0)\quad G(u)'=f(u) \tag{3.32}$$

を持ちその線形部分を

$$i\partial_t u-D_x\partial_x^2 u=0 \tag{3.33}$$

(ただし $D_x=H\partial_x$ $H=\mathcal{F}^{-1}-i(\xi)\mathcal{F}$ はHilbert 変換) と見なせばSchrödinger 方程式同様の基本解の評価が得られる。

Proposition 3.5 (Ponce-Vega, Christ-Weinstein [8]). $2 \le p \le \infty$, $\gamma = 1/3(1-2/p)$, $1/p + 1/p' = 1$ に対して

$$\|e^{-\partial_x^3 t}u_0\|_p \le Ct^{-\gamma}\|u_0\|_{p'} \tag{3.34}$$

$$\|e^{-\partial_x^3 t}u_0\|_p \le Ct^{-1/4}\|u_0\|_1, \quad 4 < p \tag{3.35}$$

を得る。

特に両者を補間して

$$1 - \frac{1}{p} \le \frac{1}{q} \le \frac{3}{2} - \frac{2}{p}$$
$$1 \le q \le 2, \quad 2 \le p \le \infty,$$
$$(p,q) \ne (4,1)$$

に対して

$$\begin{aligned} &\|e^{-\partial_x^3 t}u_0\|_p \le Ct^{-\nu}\|u_0\|_q, \\ &\nu = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{p})(\frac{2}{q}-1) \end{aligned} \tag{3.36}$$

がなりたつ。

(3.34)はevolution 群 $e^{-\partial_x^3 t}$ の L^2-unitarity と L^∞-L^1 評価から、また (3.35) は(3.33) の基本解が Airy 関数で表せてその空間漸近挙動が知られていることから得られる。これからSchrödinger方程式のときと同様にしてStrichartz評価を得ることが可能である。

KdV方程式を解くにはNavier-Stokes方程式同様に非線形項の一階微分を処理する必要がある。そのため微分を含む形でのStrichartz 評価を得る努力が続けられてきた。これはKato [18]により斉次線形 KdV 方程式 (Airy 方程式)に対してはじめて顕に示された。以下ではKenig-Ponce-Vegaらによって非斉次方程式にまで拡張された結果を述べる。

Theorem 3.6 (Kato[18], Kenig-Ponce-Vega[28]).

$$\|\partial_x e^{-\partial_x^3 t}u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2(0,T)} \le C\|u_0\|_2 \tag{3.37}$$

$$\|\partial_x \int_0^t e^{-\partial_x^3(t-t')}F(t')dt'\|_{L^\infty([0,T];L^2)} \le C\|F\|_{L^1_x(\mathbb{R};L^2(0,T))} \tag{3.38}$$

$$\|\partial_x^2 \int_0^t e^{-\partial_x^3(t-t')}F(t')dt'\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2(0,T))} \le C\|F\|_{L^1_x(\mathbb{R};L^2(0,T))} \tag{3.39}$$

この定理を用いると非線形項の微分がevolution $e^{-\partial_x^3 t}$の smoothing effect により吸収されてNavier-Stokes方程式の可解性に似た議論でKdV方程式の局所可解性を議論できる。ただし 選ぶnormが通常の発展方程式になじみやすいものと時間と空間の順序が逆さまとなっていることからその処理に工夫を必要とする ([28] を参照)。

4. 非線形波動方程式へのL^pの応用

線形波動方程式に対するL^p 評価は実関数論からの興味もあり25年以上前から研究されてきた。現在でもその拡張について研究が進展している。その評価は基本的にはstationary phase methodによるものでもっとも複雑である。

$$W_\mu(t)u = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{-\mu}e^{2\pi it|\xi|}\hat{u}]$$

とおいて

$$\frac{\sin(2\pi t|\nabla|)}{2\pi|\nabla|} = \frac{1}{4\pi i}(W_1(t) - W_1(-t)) \tag{4.1}$$

$$\cos(2\pi t|\nabla|) = \frac{1}{2}(W_0(t) + W_0(-t)) \tag{4.2}$$

とおくと半線形波動方程式に対する積分方程式は

$$u(t) = \cos(2\pi t|\nabla|)u_0 + \frac{\sin(2\pi t|\nabla|)}{2\pi|\nabla|}u_1 + \int_0^t \frac{\sin(2\pi(t-t')|\nabla|)}{2\pi|\nabla|}f(u(t'))dt'$$

と表せる。そこでまず $W_\mu(t)$ に対する評価を考える。

Theorem 4.1 (Brenner[2]). $2 \le p < \frac{2(n+1)}{n+1-2\mu}$ $1/p + 1/p' = 1$ $\gamma = n(1-2/p) - \mu$に対して

$$\|W_\mu(t)u\|_p = \||\nabla|^{-\mu}e^{i|\nabla|t}u\|_p \le Ct^{-\gamma}\|u\|_{p'}$$

を得る。

これより直ちに

Corollary 4.2. $2 \le p < \frac{2(n+1)}{n+1-2\mu}$, $1/p + 1/p' = 1$, $\gamma = n(1-2/p) - \mu$とする。このとき$u_0 \in \dot{W}^{\mu,p'}$, $u_1 \in \dot{W}^{\mu-1,p'}$ に対して

$$\|\cos(2\pi t|\nabla|)u_0\|_p \le Ct^{-\gamma}\||\nabla|^{\mu}u_0\|_{p'} \tag{4.3}$$

$$\left\|\frac{\sin(2\pi t|\nabla|)}{2\pi|\nabla|}u_1\right\|_p \le Ct^{-\gamma}\||\nabla|^{\mu-1}u_1\|_{p'} \tag{4.4}$$

を得る。

Strichartz評価(時空評価)はSchrödingerの場合と同様に得られる。便宜上波動方程式の解を以下のように表現する。

$$\begin{aligned} v &= \cos(2\pi t|\nabla|)u_0 + \frac{\sin(2\pi t|\nabla|)}{|\nabla|}u_1 \\ w &= \int_0^t \frac{\sin(2\pi(t-t')|\nabla|)}{2\pi|\nabla|}F(t')dt'. \end{aligned} \tag{4.5}$$

それぞれ

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = 0, \\ v(t,0) = u_0(x), \quad \partial_t v(t,0) = u_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = F(t), \\ w(t,0) = 0, \quad \partial_t w(t,0) = 0 \end{cases}$$

を満たす線形波動方程式の解である。

次に$2 \le p < 2(n+1)/(n+1-2\mu)$ に対して $2/\theta = n(1-2/p) - 2\mu$ を満たす組(p,θ,μ)をaddmissible tripletと呼ぶことにする。

Theorem 4.3 ([2], [37], [16],[24] [17], [29]). (p,θ,μ), を任意の*addmissible triplet* (q,σ,ν)を$\mu+n(1/2-1/p)-\theta=1-(\nu+n(1/2-1/q)-\sigma$ を満たすものとすると

$$\|v\|_{L^\theta(0,T;L^p)}\le C(\|u_0\|_{\dot H^\mu}+\|u_1\|_{\dot H^{\mu-1}}) \tag{4.6}$$

$$\|w\|_{L^\theta(0,T;\dot W^{1-\mu,p})}\le C\|F\|_{L^{\sigma'}(0,T;\dot W^{\mu,q'})} \tag{4.7}$$

ただし $1/\sigma-1/\sigma'=1/q+1/q'=1$。

Theorem 4.3 を得るのにBrennerは次のLittman [32]の評価を用いた。

Lemma 4.4 (Littman). $\phi(\xi)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ とし kをvの*Hessian* の*rank* とする。$\lambda>0$ と *supp* $v\in B_R$なるなめらかな関数vに対してある定数$M>0$が存在して

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\exp(i\lambda\phi(\xi))v(\xi)\|_\infty\le C(1+\lambda)^{-k/2}(\|v\|_\infty+\sum_{\alpha\le M}\|D^\alpha v\|_1)$$

波動方程式にこの補題を適用するには基本的には phase function を $\phi(\xi)=|\xi|$と取ることによる。このとき$\xi=\xi_0$でphase functionに接する接空間を考えてそこでの直交座標系を取り直したさいに 変数変換されたphase function $\phi(\xi')$ の2階微分が縮退しない方向 の数はhessianの固有値の数 で定まり 仮定によりkである。$\phi(\xi)=|\xi|$の場合は$n-1$方向で2階微分が浮き上がる。古典的なVon der Corputの補題 (たとえば Stein [39] を参照) により一方向につき$\lambda^{-1/2}$の係数が稼げることから都合 $\lambda^{-(n-1)/2}$の係数を得る。これがLemma 4.4 のあらましである。$\lambda>0$はほぼ時間のパラメータと見てよいので解に対応する $\mathcal{F}^{-1}[\exp(i\lambda\phi(\xi))v(\xi)]$の$L^\infty$-norm に対して $t^{-(n-1)/2}$だけの減衰(ないし singularity) を得てそれがそのまま波動方程式の時間減衰のorderを生むことになる。このStrichartz型評価を用いて前述の分散型方程式同様に方程式の適切性を$C(I;H^\mu)$の部分空間上で議論できる。この方面では最近までにたとえば[29], [26]などの研究があり Strichartz評価の改良に従って可解性の範囲を広げる努力が続けられている。

5. 結語

ここでは主に4種類の非線形方程式についてその適切性に至る議論を中心に述べた。しかしここでの方法は時間大域的な挙動の研究にも適用でき多くの関連した研究がある。またここでのそれぞれの方程式の手法を転用して連立した非線形方程式系 [7] たとえば 圧縮性Navier-Stokes方程式,

$$\begin{cases}\partial_t\rho+u\cdot\nabla\rho+\rho\,\mathrm{div}\,u=0 & t>0,x\in\mathbb{R}^n,\\ \partial_t(\rho u)+\rho u\cdot\nabla u=-\nabla p+\Delta u, & t>0,x\in\mathbb{R}^n,\\ p(\rho)=\rho^a & \\ \rho(0,x)=\rho_0,\quad u(0,x)=u_0(x), &\end{cases} \tag{5.1}$$

圧縮性 Euler 方程式,

$$\begin{cases}\partial_t\rho+u\cdot\nabla\rho+\rho\,\mathrm{div}\,u=0 & t>0,x\in\mathbb{R}^n,\\ \partial_t(\rho u)+\rho u\cdot\nabla u=-\nabla p, & t>0,x\in\mathbb{R}^n,\\ p(\rho)=\rho^a & \\ \rho(0,x)=\rho_0,\quad u(0,x)=u_0(x), &\end{cases} \tag{5.2}$$

[7]時代は既に連立の時代を迎えている

Zakharov方程式

$$
(5.3)\qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = uv & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \partial_t^2 v - \Delta v = \Delta|u|^2, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x)=u_0, \quad v(0,x)=v_0(x), & \partial_t v(0,x)=v_1(x) \end{cases}
$$

Davey-Stuartson方程式

$$
(5.4)\qquad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = u\partial_x v & t\in\mathbb{R}, (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ \partial_x^2 v \pm \partial_y^2 v = \partial_x|u|^2, & t\in\mathbb{R}, (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u(0,x)=u_0, \quad v(0,x,y)=v_0(x,y), & \partial_t v(0,x,y)=v_1(x,y) \end{cases}
$$

などに適用が可能である。これらの研究は今後ますます盛んになると考えられる。本稿は平成9年8月 土浦市において行われた 第19回発展方程式若手セミナーでの講演を土台にその後の世間の進歩を多少加味して作成された。本稿の構成は明らかなように文献 [35]に強く影響されたものとなっている。[8]

なお各方程式に対するさらに詳しい結果についてはそれぞれの方面の専門家による明快な解説が知られている。たとえば

(i) 一般の発展方程式論(双曲型) [43]
(ii) Navir-Stokes方程式 [25]
(iii) 非線形Schrödinger方程式 [41] [36]
(iv) 非線形波動方程式 [44]

本稿では述べなかったがこれらの方程式の初期値境界値問題に対してもL^pの方法が有効であろうことはその先駆的仕事 [33]から予期されているが近年 特に外部問題に関して大きく研究が進展していることに注目したい. (たとえば [9]など)。また最近のBourgainやKleinerman-Machedonらによる L^2の方法への回帰や Strichartz評価に対する Lindblad-Sogge, Georgiev らの研究も興味深い。残念ながらここでは紙面の関係と筆者の能力的問題から触れることができなかった。こうした結果からのfeedbackを基に従来の研究への再検討がなされるのは時間の問題であろう。

最後に 本稿を執筆するに当たり 若手セミナー幹事の小林孝行氏にはたいへんお世話になりました。特に本稿の提出が大幅に遅くなったのにも関わらず忍耐強く 脱稿をお持ちくださり その間 筆者を励まし続けてくださいました。セミナー中から様々な形でお世話いただいたことをあわせてここに厚くお礼を申し上げます。

References

[1] Baillon,J-B.,Cazenave T., Figueira,M., *Equation de Schrödinger non linéaire*, C.R.Acad. Sci. Paris **284** (1977), 869-872.
[2] Brenner,P., *On L^p-L^q estimate for the wave equation*, Math. Z **145** (1975), 251-254.
[3] Brezis, H.,*Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations"*, Arch. Rat. Mech. Anal. **128** (1994), 359–360.
[4] Cannone, M., *Ondelettes,Paraproduits et Navier-Stokes* , Diderot et Editeur, Arts et Sciences, Paris 1995.
[5] Cannone, M.,Planchon,F. *On the regularity of the bilinear term for solutions to the incompressible Navier-Stokes equations* , preprint, Universite de Paris 7.

[8]実際 筆者個人としてはその後の進展を取り込み[35]の続編となるよう本稿を執筆したい意図もあったが構想、構成,内容のいずれをとっても及ぶべくもない。

[6] Cazenave,T., Weissler, F.B., *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in* H^s, Nonlinear Anal. T.M.A. (1989), .

[7] Coifman.R.,Lions P.L., Meyer Y., Semmes,S., *Compensated compactness and Hardy spaces* , J.Math. Pures Appl., **77** (1993) 247-286.

[8] Christ,F.M., Weinstein,M.I., *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 87-109.

[9] Dan,. W., Kobayashi,T., Shibata.,Y., *On the local energy decay approach to some fluid flow in an exterior domain* , "Resent Topics on Mathematical Theory of Viscuos Incompressible Fluid" Lecutre Note in Num. Appl. Anal. **16** (1998) 1-51

[10] Fujita,H., Kato,T., *On Navier-Stokes initial valure problem I* , Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1964) 269-315.

[11] Furioli,G.,Lemarié-Rieusset,P.G.,Terraneo,T., *Sur l'unicité dans* $L^3(\mathbb{R}^3)$ *des mild des équations de Navier-Stokes* C.R.Acad,Sci Paris (1997)

[12] Giga,Y., *Solutions for semilinear Parabolic eqautions in* L^p *and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system* J. Differential Equations **61** (1986) 186-212

[13] Giga, Y., Miyakawa, T., *Solution in* L_r *of the Navier-Stokes initial value problem,*, Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985) 267-281.

[14] Ginibre, J. Velo, G. *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Analysis **32** (1979), 1-31, 31-71.

[15] Ginibre, J. Velo, G. *The global Caushy problem for the nonlinear Klein-Gordon equations*, Math. Z **189** (1985), 487-505.

[16] Ginibre, J. Velo, G. *Generalized Strichartz inequality for the wave equation*, J. Funct. Anal. **133** (1995), 50-68.

[17] Grillakis, M.G., *Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical nonlinearity*, Annals of Math. **132** (1990) 485-509.

[18] Kato, T., *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation* in "Studies in Applied Mathematics" V. Guilemin ed. Adv. Math. Supp. Studies, **18** (1983) 93-128.

[19] Kato, T., *Strong* L^p *- solution of the Navier-Stokes equation in* $\mathbb{R}^m$ *with applications to weak solutions,*, Math. Z. **187** (1984) 471-480.

[20] Kato, T., *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Th'o. **46** (1987) 113-129.

[21] Kato, T., *On nonlinear Schrödinger equations, II.* H^s *- solutions and unconditional well-posedness*, J. Anal. Math. **67** (1995)

[22] 加藤敏夫 (Kato,T.), 「*Well-posedness*について」, 数学 **48** no.3 (1996) 298-300 岩波書店.

[23] Kawanago, T., *Stability estimate for strong solutions of the Navier-Stokes system and its application,*, Electronic J. Diff. Equations . **1998** no. 15 (1998) 1-23.

[24] Kapitanski, L., *Some generalisations of the Strichartz-Brenner inequality*, Leningrad Math. J. . **1** no. 15 (1990) 693-726.

[25] 小薗英雄 (Kozono,H.), 「非圧縮性粘性流体の方程式」, "非線形現象の解析" 数理科学 １１月号. (1997) 9-14.

[26] Nakamura, M., Ozawa,T., *The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the homogeneous Sobolev space*, preprint .

[27] Ponce,G., Racke, R., Sideris,T., Titi, E.S., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 329–341.

[28] Kenig, K. Ponce, G. Vega,L., *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl.Math. **46** (1993) 527-620.

[29] Lindblad, H., Sogge, C. D., *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations.* J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 2, 357–426.

[30] Lin,J. Strauss,W., *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Functional Analysis, **30** (1978) 245-263.

[31] Loins,P.L., *"Mathematical Topics in Fluid Mechanics" vol 1*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Application, Oxford Science Publ., 1996.

[32] Littman,, *Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages*, Bull A.M.S., **69** (1963), 766-770.

[33] Matsumura, A., Nishida, T., *The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), no. 9, 337-342.

[34] Miyakawa,T., *Hardy Spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations*, Kyushu J. Math., **50** (1996) 1-64.

[35] 大谷光春 (Ôtani, M.), *"An Introduction to Nonlinear Evolution Eauations"*, 第５回発展方程式若手セミナー報告集. (1984) 6月, 1-68.

[36] 小澤 徹 (Ozawa,T.), 「非線形シュレディンガー方程式」, "非線形現象の解析" 数理科学 １１月号. (1997) 36-44.

[37] Serrin,J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch.Rat.Mech. Anal., **9** (1962), 187-185.

[38] Stein, E., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,*, Prinston Univ. Press, Prinston, New Jersey 1970.

[39] Stein, E., *Oscillatory integrals in Fourier analysis,*, in "Beijin Lectures in Harmonic Analysis" Annals of Mathematics Studies **112** Prinston Univ. Press, Prinston, New Jersey 1986. pp307-355.

[40] Strichartz, R.S., *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equation,*, Duke Math. J., **44** (1977) 705-714.

[41] 堤 正義,(Tsutsumi,M.), 「非線形シュレディンガー方程式」 数学 **47** no.1 (1995) 18-37 岩波書店.

[42] Tsutsumi,Y. L^2 solution for nonlinear Schrödinger equation and nonlinear groups, Funk. Ekva. bf 30 (1987) 115-125.

[43] 堤 誉志雄, (Tsutsumi,Y.) 「発展方程式理論と"双曲型"偏微分方程式」 第１３回発展方程式若手セミナー報告集 (1992) pp 1-40.

[44] 堤 誉志雄, (Tsutsumi,Y.) 「零形式(null form)の時空評価式と非線形波動方程式への応用」 数理解析研究所講究録 **1059** (1998) pp 22-35.

[45] Weissler,F., *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math., **38** (1981) 29-40.

[46] Yajima,K., *Existence of solution of Schrödinger evolution equations,*, Comm. Math. Phys., **110** (1987) 415-426.

非線形力学的境界条件を伴うphase field方程式の解の時間を十分大きくしたときの漸近挙動について

佐藤直紀 (長岡高専一般教育科)

1 Introduction.

This is a joint work with Toyohiko Aiki.

We consider a nonlinear system of the following form: Find functions $u:[0,\infty)\to L^2(\Omega)$, $w:[0,\infty)\to L^2(\Omega)$ and $v:[0,\infty)\to L^2(\Gamma)$ satisfying that

$$u_t + w_t - \Delta u = f \quad \text{in } Q := R_+ \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$\nu w_t - \kappa \Delta w + \beta(w) + g(w) \ni u \quad \text{in } Q, \tag{1.2}$$

$$u = v \quad \text{on } \Sigma := R_+ \times \Gamma, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + c\frac{\partial v}{\partial t} + h(v) = \ell \quad \text{on } \Sigma, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma, \tag{1.5}$$

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.6}$$

$$v(0) = v_0 \quad \text{on } \Gamma, \tag{1.7}$$

where $R_+ := (0,\infty)$ and Ω is a bounded domain in R^N ($N \geq 1$) with smooth boundary Γ; ν, κ and c are positive constants; β is a maximal monotone graph in $R \times R$; $g : R \to R$ is a Lipschitz continuous function; h is a bi-Lipschitz continuous and increasing function; f and ℓ are given functions on Q and Σ, respectively; u_0, w_0 and v_0 are initial functions; $\frac{\partial}{\partial n}$ denotes the outward normal derivative on Γ. For simplicity, throughout this paper the above system (1.1) $\sim$ (1.7) is denoted by CP $:= \mathrm{CP}(\beta; g, h; f, \ell; u_0, w_0, v_0)$.

Phase field equation with constraints under nonlinear dynamic boundary condition is a model describing some interesting phase transition processes in a vessel, in which u means absolute temperature field in the interior of the vessel, v is that on the interface of the vessel and w is the non-conserved order parameter which indicates physical states, that is, liquid or solid or mushy. Phase field equations were studied by many authors. For example, Caginalp[6], Visintin[17], Damlamian-Kenmochi-Sato[8] and etc. The above problem CP was already investigated by [15]. We quote [15] for physical interpretation of the problem, existenece and uniqueness for the problem. Here, we give some comments on the dynamic boundary condition. The dynamic boundary condition which includes the time-derivative of un-known functions on the fixed boundary was proposed by Langer[14] in 1932. Recently, Aiki proved uniqueness of a solution of Stefan problem with the nonlinear dynamic boundary condition by using the dual space method in [2]. In [15] by some ideas used in [2] we obtained the uniqueness of solutions.

The main purpose of the present paper is to discuss the large-time behavior of the solution $\{u, w, v\}$ of CP. Precisely speaking, under the condition that $f(t) \to f^\infty$ and $\ell(t) \to \ell^\infty$ in appropriate senses as $t \to \infty$, it will be shown that as $t \to \infty$, $u(t, \cdot)$ and $v(t, \cdot)$ converge to functions u^∞ and v^∞, respectively, where $\{u^\infty, v^\infty\}$ is a solution of the corresponding steady-state problem for temperatures u and v:

$$-\triangle u^\infty = f^\infty \quad \text{in } \Omega,$$

$$u^\infty = v^\infty \quad \text{on } \Gamma,$$

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial n} + h(v^\infty) = \ell^\infty \quad \text{on } \Gamma.$$

It is easy to get uniqueness for the steady-state problem since h is monotone and bi-Lipschitz continuous. Also, it is difficult to show the convergence of $w(t)$, so we consider the ω-limit set $\omega(u_0, v_0, w_0)$ for w. We will show that $\omega(u_0, v_0, w_0)$ is not empty, it is closed, connected and compact in $L^2(\Omega)$ and any elements w^∞ of the ω-limit set is a solution of the corresponding steady-state problem for the order parameter w:

$$-\kappa \triangle w^\infty + \beta(w^\infty) + g(w^\infty) \ni u^\infty \quad \text{on } \Omega,$$

$$\frac{\partial w^\infty}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

Finally, we list some interesting results on asymptotic behavior for the solutions of phase field equations. In Kenmochi and Niezgódka[13] the similar results to the above one were obtained. In this paper, we shall use their argument in our proof. Ito and Kenmochi showd more precise properties on the asymptotic behavior in one-dimensional case (cf. [10]).

Notations. For the sake of simplicity of notations we put

$$V = H^1(\Omega), \quad W = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma),$$

$$D = \left\{ z \in L^2(\Omega); z \in V, \hat{\beta}(z) \in L^1(\Omega) \right\},$$

$$A(y, z) = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla z dx \quad \text{for } y, z \in V,$$

$$(y, z)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega yz dx \quad \text{for } y, z \in L^2(\Omega),$$

$$(y, z)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma yz dx \quad \text{for } y, z \in L^2(\Gamma),$$

$$Zz = \int_\Omega z dx + c \int_\Gamma z d\Gamma \quad \text{for } z \in V,$$

where c is the positive constant appearing in the boundary condition (1.4).

2 Existence and uniqueness results for CP

In this section, we will mention known results about existence-uniqueness and some properties for the solution of CP. First, we give assumptions (A1) $\sim$ (A5) and (A5)' for β, g, h, f, ℓ, u_0, w_0 and v_0.

(A1) β is a maximal monotone graph in $R \times R$ such that for some numbers σ_* and σ^* with $-\infty < \sigma_* < \sigma^* < \infty$

$$\overline{D(\beta)} = [\sigma_*, \sigma^*];$$

clearly, there is a non-negative proper l.s.c. convex function $\hat{\beta}$ on R satisfying that $\beta = \partial\hat{\beta}$, where $\partial\hat{\beta}$ is the subdifferential of $\hat{\beta}$;

(A2) g is a Lipschitz continuous function on R; we denote by C_g a Lipschitz constant of g;

(A3) h is a bi-Lipschitz continuous and monotone increasing function on R; in this case note that there is a non-negative primitive $\hat{h}$ of h; we denote by C_h a common Lipschitz constant of h and h^{-1};

(A4) $f \in L^2_{loc}([0,\infty); L^2(\Omega))$ and $\ell \in L^2_{loc}([0,\infty); L^2(\Gamma))$;

(A5) $u_0 \in L^2(\Omega), w_0 \in \overline{D}$ and $v_0 \in L^2(\Gamma)$ where $\overline{D}$ is the closure of the set D with respect to the topology of $L^2(\Omega)$.

Remark 2.1. (1) From assumption (A1) it follows that the order parameter w satisfies $\sigma_* \le w(t,x) \le \sigma^*$ in Q.
(2) In order to show the uniqueness-existence of solutions of CP we can weaken assumptions (A1) and (A3) to the following conditions, respectively: "β is a maximal monotone graph in $R \times R$; there exists a non-negative proper l.s.c. convex function $\hat{\beta}$ on R satisfying that $\hat{\beta}(r) \ge |r|^2$ for any $r \in R$ and $\beta = \partial\hat{\beta}$" and "$h$ is a Lipschitz continuous function on R" (see [15]).

We introduce some function spaces and operators. V becomes a Hilbert space with inner product $(\cdot,\cdot)_V$ defined by

$$(y,z)_V = A(y,z) + ZyZz \quad \text{for } y, z \in V.$$

Then, identifying $L^2(\Omega)$ with its dual space by means of the inner product $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$, we see that $V \subset L^2(\Omega) \subset V^*$ in which all the injections are densely defined and compact, where V^* is the dual space of V. We note here that the following inequalities hold;

$$|z|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega |z|_V \text{ and } |z|_{L^2(\Gamma)} \le C_\Omega |z|_V \quad \text{for } z \in V,$$

where C_Ω is a positive constant depending only on Ω.

Let F_V be the duality mapping from V onto the dual space V^* of V. It is easy to see that F_V is isometric from V onto V^* and

$$\langle F_V y, z\rangle_V = A(y,z) + ZyZz \quad \text{for all } y,z \in V,$$

where $\langle \cdot,\cdot\rangle_V$ stands for the duality pairing between V^* and V. Obviously, V^* becomes a Hilbert space with inner product $(\cdot,\cdot)_{V^*}$ defined by

$$(y^*,z^*)_{V^*} := \left\langle y^*, F_V^{-1}z^*\right\rangle_V \quad \left(= \left\langle z^*, F_V^{-1}y^*\right\rangle_V\right) \quad \text{for } y^*,z^* \in V^*.$$

W is a Hilbert space with inner product $(\cdot,\cdot)_W$ defined by

$$([y,y_\Gamma],[z,z_\Gamma])_W := (y,z)_{L^2(\Omega)} + c(y_\Gamma,z_\Gamma)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{for } [y,y_\Gamma],[z,z_\Gamma] \in W,$$

where c is the constant appearing in (1.4).

Now, we define an operator $E : V \to W$ by putting $Ez := [z, z|_\Gamma]$ for $z \in V$. Clearly, the range of E, $R(E)$, is a dense subspace of W and E is linear and compact. We identify W with its dual space W^*. Therefore, denoting by E^* the dual operator of E, we have

$$\langle E^*[y,y_\Gamma], z\rangle_V = (y,z)_{L^2(\Omega)} + c(y_\Gamma, z)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{for } [y,y_\Gamma] \in W \text{ and } z \in V.$$

We give a weak formulation of solutions for CP($\beta; g,h; f,\ell; u_0,w_0,v_0$) in the variational sense:

Definition 2.1. Let T be any positive number. A triplet $\{u,w,v\}$ of functions $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$, $w : [0,T] \to L^2(\Omega)$ and $v : [0,T] \to L^2(\Gamma)$ is a weak solution of CP($\beta; g,h; f,\ell; u_0,w_0,v_0$) on $[0,T]$, if it satisfies the following conditions (S1) $\sim$ (S4):

(S1) $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}((0,T];V)$,
$w \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V) \cap L^\infty_{loc}((0,T];V)$,
$v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$, $E^*[u+w,v] \in C([0,T];V^*) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T];V^*)$,
$\hat\beta(w) \in L^1(Q)$, and $u(t,x) = v(t,x)$ a.e. on Σ.

(S2)

$$\left\langle \frac{d}{dt}E^*[u(t)+w(t),v(t)], z\right\rangle_V + A(u(t),z) + (h(v(t)) - \ell(t), z)_{L^2(\Gamma)}$$
$$= (f(t),z)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } z \in V \text{ and a.e. } t \in [0,T].$$

(S3) There exists $\xi \in L^2_{loc}((0,T];L^2(\Omega))$ such that $\xi \in \beta(w)$ a.e. on Q and

$$\nu\left(\frac{d}{dt}w(t),\eta\right)_{L^2(\Omega)} + \kappa A(w(t),\eta) + (\xi(t),\eta)_{L^2(\Omega)} + (g(w(t)),\eta)_{L^2(\Omega)}$$
$$= (u(t),\eta)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \eta \in V \text{ and a.e. } t \in [0,T].$$

(S4) $u(0,x) = u_0(x)$, $w(0,x) = w_0(x)$ for a.e. $x \in \Omega$ and $v(0,x) = v_0(x)$ for a.e. $x \in \Gamma$.

Moreover, we call a triplet $\{u, w, v\}$ is a solution of CP on $[0, \infty)$, if it is a solution of CP on $[0, T]$ in the above sense for any $T > 0$.

We recall the existence-uniquness result on CP in [15]:

Theorem 2.1. *Suppose that conditions (A1) $\sim$ (A5) hold. CP admits a unique solution.*

3 Large-time behavior of the solution of CP

The purpose of this section is to show the asymptotic behavior of solutions of CP. First, further we suppose the following condition (A6):

(A6) $f^\infty \in L^2(\Omega)$, $\ell^\infty \in L^2(\Gamma)$, $f - f^\infty \in L^2(R_+; L^2(\Omega))$ and $\ell - \ell^\infty \in L^2(R_+; L^2(\Gamma))$.

In order to describe the main result we introduce steady-state problem;

$$-\Delta u^\infty = f^\infty \quad \text{in } \Omega, \tag{3.1}$$

$$u^\infty = v^\infty \quad \text{on } \Gamma, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial n} + h(v^\infty) = \ell^\infty \quad \text{on } \Gamma, \tag{3.3}$$

$$-\kappa \Delta w^\infty + \beta(w^\infty) + g(w^\infty) \ni u^\infty \quad \text{on } \Omega, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial w^\infty}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma. \tag{3.5}$$

Since h is monotone increasing and bi-Lipschitz continuous, by elementaly caluculation it follows that $u^\infty \in V$ and $v^\infty \in L^2(\Gamma)$ satisfying (3.1) $\sim$ (3.3) are uniquely determined. Now, we denote by P^∞ the problem (3.4) $\sim$ (3.5). However, in general, P^∞ has many solution w^∞ (see [10]). In the paper [10] Ito and Kenmochi investigated the large-time behavior of solutions of a phase transition model under the linear boundary condition for temperature in one dimensional case.

Our main result is stated in the following theorem:

Theorem 3.1. *Suppose that conditions (A1) $\sim$ (A6) hold and let $\{u, w, v\}$ be a solution of CP on $[0, \infty)$. Then,*

$$u(t) \to u^\infty \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } t \to \infty \text{ and } v(t) \to v^\infty \text{ in } L^2(\Gamma) \text{ as } t \to \infty,$$

where $\{u^\infty, v^\infty\}$ is the unique solution of problem (3.1) $\sim$ (3.3).

Moreover, let $\omega(u_0, w_0, v_0)$ be the ω-limit set for w, i.e.,

$$\omega(u_0, w_0, v_0) = \{z \in L^2(\Omega); w(t_n) \to z \text{ in } L^2(\Omega) \text{ for some } t_n \uparrow \infty\}.$$

Then,

(a) $\omega(u_0, w_0, v_0) \neq \emptyset$;

(b) $\omega(u_0, w_0, v_0)$ *is closed, connected and compact in* $L^2(\Omega)$*;*
(c) any element of $\omega(u_0, w_0, v_0)$ *is a solution of* P^∞.

Proof of the above theorem is given in [16].

References

[1] T. Aiki, Periodic stability of solutions to some degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions, J. Math. Soc. Japan, **48**(1996), 37-59.

[2] T. Aiki, Multi-dimensional two-phase Stefan problems with nonlinear dynamic boundary conditions, *Nonlinear Analysis and Applications*, pp. 1-25, Gakuto Inter. Ser. Math. Sci. Appl. Vol. **7**, Gakkōtosho, Tokyo, 1996.

[3] H. Attouch and A. Damlamian, Probléms d'évolution dans les Hilbert et applications, J. Math. pures appl., **54**(1975), 53-74.

[4] H. Brézis, Opérateurs maximaux monototones et semi-groupes de contractions dans les espases de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[5] H. Brézis, M. G. Crandall and A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space, Comm. Pure Appl. Math., **23**(1970), 123-144.

[6] G. Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal., **92**(1986), 205-245.

[7] A. Damlamian, Some results on the multi-phase Stefan problem, Comm. P.D.E., **2**(1977), 1017-1044.

[8] A. Damlamian, N. Kenmochi and N. Sato, Phase field equation with constraints, *Nonlinear Mathematical Problems in Industry*, pp. 391-404, Gakuto Inter.Ser. Math. Sci. Appl. Vol. **2**, Gakkōtosho, Tokyo, 1993.

[9] G. J. Fix, Phase field models for free boundary problems, *Free Boundary Problems: Theory and Application*, pp.580-589, Pitman Research Notes in Math. Ser. Vol. 79, 1983.

[10] A. Ito and N. Kenmochi, Asymptotic behavior of solutions to phase field models with constraints, Funkcialaj Ekvacioj, **39**(1996), 123-142.

[11] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., **30**(1981), 1-87.

[12] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, *Phase Transitions and Hysteresis*, pp.39-86, Lecture Notes in Math. 1584, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[13] N. Kenmochi and M. Niezgódka, Evolution systems of nonlinear variational inequalities arising from phase change problem, Nolinear Anal. TMA., **22**(1994), 1163-1180.

[14] R. E. Langer, A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with fluid, Tôhoku Math. J., Ser. 1,**35**(1932), 260-275.

[15] N. Sato and T. Aiki, Phase field equations with constraints under nonlinear dynamic boundary conditions, preprint.

[16] N. Sato and T. Aiki, Large-time behavior of solutions to phase field equations with constraints under nonlinear dynamic boundary conditions, Thch. Rep. Math. Chiba Univ., Vol. 13, No. 16, 1997.

[17] A. Visintin, Stefan problems with phase relaxation, IMA J. Appl. Math., **34**(1985), 225-245.

On the global attractor for periodic systems

Akio ITO and Noriaki YAMAZAKI

Department of mathematics
Graduate School of Science and Technology
Chiba University

1. Assumptions and known results

We consider the following nonlinear evolution system, generated by subdifferential $\partial\varphi^t$ of time-dependent proper l.s.c. convex function φ^t on a real Hilbert space H, of the form

$$\text{(E)} \qquad u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t, u(t)) \ni f(t) \quad \text{in } H.$$

At first, to give the class of $\{\varphi^t\} := \{\varphi^t; t \in R\}$ we are given two families $\{a_r\} := \{a_r; r \geq 0\}$ and $\{b_r\} := \{b_r; r \geq 0\}$ in $W^{1,2}_{loc}(R)$ and $W^{1,1}_{loc}(R)$ with

$$\sup_{t \in R} |a'_r|_{L^2(t,t+1)} + \sup_{t \in R} |b'_r|_{L^1(t,t+1)} < +\infty,$$

respectively. Then, we define the class $\Phi(\{a_r\}, \{b_r\})$ as follows:

(φ1) (Smoothness of the graph of φ^t in time) $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\}, \{b_r\})$ if and only if the following properties (i)-(iii) are fulfilled:

(i) For each $r \in R_+$, s, $t \in R$ and $z \in D(\varphi^s)$ with $|z|_H \leq r$, there exists $\tilde{z} \in D(\varphi^t)$ such that

$$|\tilde{z} - z|_H \leq |a_r(t) - a_r(s)|(1 + |\varphi^s(z)|^{\frac{1}{2}})$$

and

$$\varphi^t(\tilde{z}) - \varphi^s(z) \leq |b_r(t) - b_r(s)|(1 + |\varphi^s(z)|).$$

(ii) (Coerciveness) There is a positive constant c such that

$$\varphi^t(z) \geq c|z|^2_H, \quad \forall z \in H, \ \forall t \in R.$$

(iii) (Compactness of the level set) For each $r \geq 0$ the level set $\{z \in H; \varphi^t(z) \leq r\}$ is compact in H for any $t \in R$.

Next, for the given $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\}, \{b_r\})$ we define the class $\mathcal{G}(\{\varphi^t\})$ of the perturbation g. Namely, $\{g(t,\cdot)\} := \{g(t,\cdot); t \in R\} \in \mathcal{G}(\{\varphi^t\})$ if and only if the following conditions (g1)-(g5) are satisfied:

(g1) $D(\varphi^t) \subset D(g(t,\cdot)) \subset H$ for all $t \in R$ and $g(\cdot, v(\cdot))$ is (strongly) measurable on J for any interval $J \subset R$ and $v \in L^2_{loc}(J; H)$ with $v(t) \in D(\varphi^t)$ for a.e. $t \in J$.

(g2) There are positive constants C_0 and C_1 such that

$$|g(t,z)|^2_H \leq C_0\varphi^t(z) + C_1, \quad \forall t \in R, \quad z \in D(\varphi^t).$$

(g3) (Demi-closedness) If $\{t_n\} \subset R$, $\{z_n\} \subset H$, $t_n \to t$, $z_n \to z$ in H (as $n \to +\infty$) and $\{\varphi^{t_n}(z_n)\}$ is bounded, then $g(t_n, z_n) \to g(t, z)$ weakly in H as $n \to +\infty$.

(g4) For each $\varepsilon > 0$, there exists a positive constant $C_\varepsilon > 0$ such that

$$|(g(t, z_1) - g(t, z_2), z_1 - z_2)_H| \le \varepsilon (z_1^* - z_2^*, z_1 - z_2)_H + C_\varepsilon |z_1 - z_2|_H^2,$$
$$\forall t \in R,\ \forall z_i \in D(\partial\varphi^t),\ \forall z_i^* \in \partial\varphi^t(z_i),\ i = 1, 2.$$

(g5) (Coerciveness) For each bounded set B in H there are positive constants $C_0(B)$ and $C_1(B)$ such that

$$\varphi^t(z) + (g(t, z), z - b) \ge C_0(B)|z|_H^2 - C_1(B), \quad \forall t \in R,\ \forall z \in D(\varphi^t),\ \forall b \in B.$$

Under these assumptions, we have already obtained the global existence and uniqueness of the Cauchy problem with the initial data u_0 at time s in [3]: actually, for each $f \in L^2_{loc}(R; H)$ and each initial data $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$ there is a function $u : [s, +\infty) \to H$ with $u(s) = u_0$ such that for any compact subset J of $[s, +\infty)$ $u \in C(J; H)$, $u'(= \frac{du}{dt}) \in L^2_{loc}(J; H)$, $\varphi^{(\cdot)}(u(\cdot)) \in L^1_{loc}(J)$ and $f(t) - u'(t) - g(t, u(t)) \in \partial\varphi^t(u(t))$ for a.e. $t \in J$. Moreover, if $S_f := \sup_{t \in R} |f|_{L^2(t,t+1;H)} < +\infty$ then for any $\delta > 0$ there is a positive constant M, depending upon $|u_0|_H$, S_f and δ, such that

$$\sup_{t \ge s}\{|u(t)|_H + \int_t^{t+1} |\varphi^\tau(u(\tau))| d\tau\} + \sup_{t \ge s+\delta}\{\int_t^{t+1} |u'(\tau)|_H^2 d\tau + |\varphi^t(u(t))|\} \le M. \qquad (1.1)$$

From this results, we can define the family $\{U(t, s)\} := \{U(t, s); t \ge s,\ s \in R\}$ of the solution operator $U(t, s) : \overline{D(\varphi^s)} \to \overline{D(\varphi^t)}$ which assigns to the initial data u_0 the solution $u(t)$ of the Cauchy problem with $u(s) = u_0$.

In this paper, we are interested in the periodic systems. So, throughout this paper we give the following periodic condition as well as the above assumptions:

(A1) (T_0-periodicity) For some finite time T_0,

$$\varphi^{t+T_0} = \varphi^t,\ g(t + T_0, \cdot) = g(t, \cdot),\ f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in R.$$

For our periodic system, we have had the result of the existence of the periodic solution with the period T_0 in [2].

Remark 1.1. For $\{U(t, s)\}$, the following properties hold:

(U1) $U(s, s) = I$ for any $s \in R$, where I is the identity mapping on $\overline{D(\varphi^s)}$;

(U2) $U(t, s) = U(t, \tau) \circ U(\tau, s)$ for any $s \le \tau \le t$;

(U3) $U(t + T_0, s + T_0) = U(t, s)$ for any $s \le t$, $s \in R$.

We call $\{U(t, s)\}$, which has the properties (U1)-(U3), a periodic process in H generated by (E).

Notation. For simplicity, we use the following notation in this paper:

$$|\cdot|_H : \text{the norm in } H :$$

$$(\cdot,\cdot)_H : \text{the inner product in } H :$$

$$\mathcal{B}(H) : \text{the family of all bounded subsets of } H :$$

$$\mathrm{dist}_H(A,B) := \sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y|_H, \quad \forall A,\ B\subset H.$$

2. Some definitions and abstract results for periodic processes

In this section we give some definitions and abstract results for a periodic process, which are used in the next section.

Definition 2.1. Let $\{E(t,s)\}$ be any periodic process.

(i) $B_0 \in \mathcal{B}(H)$ is called a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) absorbing set for $\{E(t,s)\}$ if for any $s \in R$ and $B \in \mathcal{B}(H)$ there is a finite time $T := T(s,B)$ such that

$$\bigcup_{\sigma\in[0,T_0)}\bigcup_{\tau\geq t} E(\tau+\sigma, s+\sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})}\cap B) \subset B_0, \quad \forall t \geq T.$$

(ii) A subset P of H is called a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) attracting set for $\{E(t,s)\}$ if

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\sigma\in[0,T_0)} \mathrm{dist}_H(E(t+\sigma,s+\sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})}\cap B), P) = 0, \quad \forall s\in R,\ \forall B\in\mathcal{B}(H).$$

(iii) A closed subset $\mathcal{A}$ of H is called the uniform (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) global attractor for $\{E(t,s)\}$ if $\mathcal{A}$ has the following properties:

(GA1) $\mathcal{A}$ is compact in H;

(GA2) (Attracting property) $\mathcal{A}$ is a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) attracting set for $\{E(t,s)\}$;

(GA3) (Minimality) Let $\mathcal{A}'$ be any closed uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) attracting set for $\{E(t,s)\}$. Then, $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}'$.

Remark 2.1. From the definition, it is clear that a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) absorbing set for $\{E(t,s)\}$ is automatically is a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) attracting set for $\{E(t,s)\}$.

Definition 2.2. For any $B \in \mathcal{B}(H)$, we define the uniform (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) ω-limit set $\omega_s(B)$ starting from B at time s for $\{E(t,s)\}$ by

$$\omega_s(B) := \bigcap_{t\geq s}\overline{\bigcup_{\sigma\in[0,T_0)}\bigcup_{\tau\geq t} E(\tau+\sigma,s+\sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})}\cap B)}.$$

Remark 2.2. $y \in \omega_s(B)$ if and only if there are sequences $\{t_n\} \subset [s, +\infty)$, $\{\sigma_n\} \subset [0, T_0)$ and $\{x_n\} \subset B$ such that

$$x_n \in \overline{D(\varphi^{s+\sigma_n})}, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

$$t_n \longrightarrow +\infty \quad (\text{as } n \to +\infty) \tag{2.2}$$

and

$$E(t_n + \sigma_n, s + \sigma_n)x_n \longrightarrow y \quad \text{in } H \quad (\text{as } n \to +\infty), \tag{2.3}$$

where $\sigma_n \longrightarrow T_0$ means $\sigma_n \longrightarrow 0$.

Our propositions in this section give the sufficient condition for the existence of the uniform (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) global attractor for $\{E(t, s)\}$.

Proposition 2.1. *Assume that a periodic process $\{E(t, s)\}$ has a compact uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting set P. Then, for any $s \in R$ and $B \in \mathcal{B}(H)$, the following properties hold:*

(i) *$\omega_s(B)$ is non-empty, compact in H and $\omega_s(B) \subset P$;*

(ii) *$\omega_s(B)$ attracts B uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) as $t \to +\infty$, that is,*

$$\sup_{\sigma \in [0,T_0)} dist_H(E(t + \sigma, s + \sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})} \cap B), \omega_s(B)) \longrightarrow 0 \quad (as\ t \to +\infty); \tag{2.4}$$

(iii) *if Y is closed in H and attracts B uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) as $t \to +\infty$, then $\omega_s(B) \subset Y$.*

Proof. (i) At first, we show that $\omega_s(B) \neq \emptyset$. We fix $\sigma_0 \in [0, T_0)$ and $x_0 \in \overline{D(\varphi^{s+\sigma_0})} \cap B$ and consider any sequence $\{t_n\} \subset [s, +\infty)$ with $t_n \longrightarrow +\infty$ (as $n \to +\infty$). From the uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting property of P, we see that

$$\sup_{\sigma \in [0,T_0)} \text{dist}_H(E(t_n + \sigma, s + \sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})} \cap B), P) \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to +\infty.$$

So, there is some sequence $\{y_n\} \subset P$ such that

$$|E(t_n + \sigma_0, s + \sigma_0)x_0 - y_n|_H \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to +\infty.$$

Since P is compact in H, without loss of generality we assume that $y_n \longrightarrow y_0$ in H (as $n \to +\infty$) for some $y_0 \in P$. Hence, we see that $E(t_n + \sigma_0, s + \sigma_0)x_0 \longrightarrow y_0$ in H (as $n \to +\infty$). From Remark 2.2, we obtain $y_0 \in \omega_s(B)$, namely, $\omega_s(B) \neq \emptyset$.

Next, we show that $\omega_s(B) \subset P$. Let y be any element in $\omega_s(B)$. By Remark 2.2, there are sequences $\{t_n\} \subset [0, +\infty)$, $\{\sigma_n\} \subset [0, T_0)$ and $\{x_n\} \subset B$ such that (2.1)-(2.3) are fulfilled. By applying the uniformly(w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting property of P again, we see that

$$\text{dist}_H(E(t_n + \sigma_n, s + \sigma_n)x_n, P) \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to +\infty.$$

Therefore, $\text{dist}_H(y, P) = 0$. Since P is compact in H, $y \in P$. This implies that $\omega_s(B) \subset P$. Moreover, it follows from the fact that P is compact and $\omega_s(B)$ is closed in H that $\omega_s(B)$

is compact in H.
(ii) We show (ii) by contradiction. We assume that (ii) does not hold. Then, for some $B_0 \in \mathcal{B}(H)$ there are a positive constant δ_0 and sequences $\{t_n\} \subset [s, +\infty)$, $\{\sigma_n\} \subset [0, T_0)$ and $\{x_n\} \subset B$ such that

$$x_n \in \overline{D(\varphi^{s+\sigma_n})}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots,$$

$$t_n \longrightarrow +\infty \quad \text{as } n \to +\infty$$

and

$$\mathrm{dist}_H(E(t_n + \sigma_n, s + \sigma_n)x_n, \omega_s(B_0)) \geq \delta_0, \quad \forall n = 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

Similarly to (i), from the uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting property and compactness of P, without loss of generality we assume that for some $y \in P$

$$E(t_n + \sigma_n, s + \sigma_n)x_n) \longrightarrow y \text{ in } H \quad \text{as } n \to +\infty.$$

It follows from Remark 2.2 that $y \in \omega_s(B_0)$. This contradicts (2.5), i.e., $\mathrm{dist}_H(y, \omega_s(B_0)) \geq \delta_0$. Hence, we see that (2.4) holds.
(iii) We can show (iii) by using the same technique in (i). $\diamondsuit$

Proposition 2.2. *Suppose that the same assumption in Proposition 2.1, a periodic process $\{E(t, s)\}$ possesses a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T)$) global attractor $\mathcal{A}$.*
Proof. We consider the set G defined by

$$G := \overline{\bigcup_{s \in R} \bigcup_{n \in N} \omega_s(B_n)},$$

where $B_n := \{z \in H; |z|_H \leq n\}$. Then, we see that G is a required one. Indeed, for any $B \in \mathcal{B}(H)$ there is $n_B \in N$ such that $B \subset B_{n_B}$. So, we see that $\omega_s(B) \subset \omega_s(B_{n_B}) \subset G$ for any $s \in R$.
Hence, it follows from (ii) in Proposition 2.1 that

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{\sigma \in [0, T_0)} \mathrm{dist}_H(E(t + \sigma, s + \sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})} \cap B), G) = 0,$$

that is, G is a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting set for $\{E(t, s)\}$.

Next, let $\mathcal{A}'$ be any closed uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting set for $\{E(t, s\}$. Then, it follows from (iii) of Proposition 2.1 that $\omega_s(B_n) \subset \mathcal{A}'$ for any $n = 1, 2, \ldots$ and $s \in R$, so, $G \subset \mathcal{A}'$. This implies that G has a minimality property.

At last, it follows from the existence of a compact uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) attracting set for $\{E(t, s)\}$ and the minimality of G that G is compact in H. $\diamondsuit$.

Remark 2.3. In [1], V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik have already obtained the same results in the case when $\overline{D(\varphi^t)}$ is independent in time, namely, there is the subset D of H such that $\overline{D(\varphi^t)} = D$ for any $t \in R$.

3. Main theorems

In this section, we consider the periodic process $\{U(t, s)\}$ generated by our periodic system $(\mathrm{E})_s$.

Our first main theorem is as follows.

Theorem 3.1. *The periodic process $\{U(t,s)\}$ possesses a uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) global attractor $\mathcal{A}$.*

To show this theorem, it is enough from Remark 2.1 and Proposition 2.2 to show the following lemma.

Lemma 3.1. *(cf. [2, 3]) The periodic process $\{U(t,s)\}$ possesses a compact uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0,T_0)$) absorbing set B_0.*

Proof. We fix any time $s \in R$. Let B be any bounded subset of H and $\sigma \in [0,T_0)$. Now, we consider the Cauchy problem (E) with the initial data $u(s+\sigma) = u_0 \in \overline{D(\varphi^{s+\sigma})} \cap B$. By multiplying (E) by $u(t)-h(t)$, we get

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-h(t)|_H^2 + (h'(t), u(t)-h(t))_H + (u^*(t), u(t)-h(t))_H$$

$$+(g(t,u(t)), u(t)-h(t))_H = (f(t), u(t)-h(t))_H \tag{3.1}$$

$$\text{for a.e. } t \geq s+\sigma,$$

where $u^*(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ with $u'(t)+u^*(t)+g(t,u(t)) = f(t)$ and h is the (unique) T_0-periodic solution of $h'(t)+\partial\varphi^t(h(t)) \ni 0$.

Also, note that

$$(u^*(t), u(t)-h(t))_H \geq \varphi^t(u(t)) - \varphi^t(h(t)) \quad \text{(the definition of the subdifferential)} \tag{3.2}$$

and

$$\varphi^t(u(t)) + (g(t,u(t)), u(t)-h(t))_H \geq c_0|u(t)|_H^2 - c_1, \tag{3.3}$$

where $c_0 := c_0(B)$ and $c_1 := c_1(B)$ are positive constants given by condition (g5) for a bounded set B satisfying $h(t) \in B$ for all $t \in R$. It follows from (3.1)-(3.3) that

$$\frac{d}{dt}|u(t)-h(t)|_H^2 + \frac{c_0}{2}|u(t)-h(t)|_H^2 \leq M_1 + M_2\{|h'(t)|_H^2 + |f(t)|_H^2\} \tag{3.4}$$

$$\text{for a.e. } t \geq s+\sigma,$$

where $M_1 := 2c_1 + 2|\varphi^{(\cdot)}(h(\cdot))|_{L^\infty(0,T_0)} + 2c_0|h|^2_{L^\infty(0,T_0;H)}$ and $M_2 := \frac{4}{c_0}$. Here, applying the Gronwall's lemma to (3.4), we get

$$e^{\frac{c_0}{2}(\tau-t)}|u(\tau)-h(\tau)|_H^2 \leq |u(t)-h(t)|_H^2 + M_1\int_t^\tau e^{\frac{c_0}{2}(\mu-t)}d\mu$$

$$+M_2\int_t^\tau e^{\frac{c_0}{2}(\mu-t)}\{|h'(\mu)|_H^2 + |f(\mu)|_H^2\}d\mu \tag{3.5}$$

$$\text{for all } s+\sigma \leq t \leq \tau \leq t+T_0.$$

Taking $\tau = t+T_0$ in (3.5) and multiplying (3.5) by $e^{-\frac{c_0T_0}{2}}$, we obtain that

$$|u(t+T_0)-h(t+T_0)|_H^2 \leq e^{-\frac{c_0T_0}{2}}|u(t)-h(t)|_H^2 + M_3, \quad \forall t \geq s+\sigma, \tag{3.6}$$

where

$$M_3 := \frac{2M_1}{c_0} + M_2 \int_0^{T_0} \{|h'(t)|_H^2 + |f(t)|_H^2\} dt.$$

It follows from (3.6) that for all $n \in N$ and $t \geq s + \sigma$

$$|u(t + nT_0) - h(t + nT_0)|_H^2 \leq e^{-\frac{nc_0T_0}{2}} |u(t) - h(t)|_H^2 + M_3 \left(1 - e^{-\frac{c_0T_0}{2}}\right)^{-1}$$

Again, by using (3.5) we see that

$$|u(\tau) - h(\tau)|_H^2 \leq |u(t) - h(t)|_H^2 + M_3 \quad s + \sigma \leq t \leq \tau < t + T_0. \tag{3.7}$$

We note that for any $t(\geq s)$ there are $t' \in [0, T_0)$ and $n' \in Z_+$ such that $t = t' + n'T_0$. Then, it follows from (3.6) and (3.7) that

$$\begin{aligned}
|U(t+\sigma, s+\sigma)u_0 - h(t+\sigma)|_H^2 &\leq e^{-\frac{n'c_0T_0}{2}} \{|u_0|_H^2 + |h|_{L^\infty(0,T_0;H)}^2 + M_3\}^2 \\
&\quad + M_3 \left(1 - e^{-\frac{c_0T_0}{2}}\right)^{-1} \\
&\leq e^{-\frac{n'c_0T_0}{2}} \{R_B^2 + |h|_{L^\infty(0,T_0;H)}^2 + M_3\}^2 \\
&\quad + M_3 \left(1 - e^{-\frac{c_0T_0}{2}}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

where $R_B := \sup_{z \in B} |z|_H$.

The above inequality implies that

$$|U(t+\sigma, s+\sigma)u_0|^2 \leq 4e^{-\frac{n'c_0T_0}{2}} \{R_B^2 + |h|_{L^\infty(0,T_0;H)}^2 + M_3\}^2 + M_4, \quad \forall t \geq s, \tag{3.8}$$

where $M_4 := 2|h|_{L^\infty(0,T_0;H)}^2 + 2M_3 \left(1 - e^{-\frac{c_0T_0}{2}}\right)^{-1}$. Here, we put

$$B_1 := \{z \in H; |z|_H \leq \sqrt{1 + M_4}\}.$$

Then, by (3.8) it is easy to check that

$$U(t+\sigma, s+\sigma)u_0 \in B_1, \quad \forall \sigma \in [0, T_0),\ \forall t \geq t_B,\ \forall u_0 \in \overline{D(\varphi^{s+\sigma})} \cap B, \tag{3.9}$$

where $t_B := T_0 + \frac{4}{c_0} \log[4\{R_B^2 + |h|_{L^\infty(0,T_0;H)}^2 + M_3\}]$.

Now, we define the set B_0 by

$$B_0 := \overline{\bigcup_{\sigma \in [0,T_0)} U(\sigma + T_0, \sigma)(\overline{D(\varphi^\sigma)} \cap B_1)}.$$

Then, it is clear from (1.1) and (3.9) that B_0 is compact in H and

$$U(t+\sigma, s+\sigma)u_0 \in B_0, \quad \forall \sigma \in [0, T_0),\ \forall t \geq t_B + T_0,\ \forall u_0 \in \overline{D(\varphi^{s+\sigma})} \cap B,$$

namely,

$$\bigcup_{\sigma\in[0,T_0)} U(t+\sigma, s+\sigma)(\overline{D(\varphi^{s+\sigma})}\cap B) \subset B_0, \quad \forall t \geq t_B + T_0.$$

Thus, B_0 is a compact uniformly (w.r.t. $\sigma \in [0, T_0)$) absorbing set for $\{U(t,s)\}$. $\diamond$

Remark 3.1. In [2], we give some important properties of $\mathcal{A}$ in details.

References

1. V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimensions, J. Math. Pures Appl., **73** (1994), 279-333.

2. A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Attractors of periodic systems generated by time-dependent subdifferentials, Tech. Rep. Math. Sci., Chiba Univ., Vol. **13** (1997), No. 12.

3. K. Shirakawa, A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Asymptotic Stability for Evolution Equations Governed by Subdifferentials, to appear GAKUTO intern. Ser. Math. Appl., Gakkōtosho, Tokyo.

Penrose-Fife タイプの相転移モデルに対する周期解の存在性

山崎　教昭　（千葉大学・自然科学）

1. 序

本稿では、絶対温度 $\theta = \theta(t,x)$ と物質の状態を表す order parameter $w = w(t,x)$ に支配される Penrose-Fife タイプの相転移モデル（以下、$(\mathrm{PFM})_p$ と呼ぶ）を考察する。

$$[\theta + \lambda(w)]_t - \Delta\alpha(\theta) + \mu\theta = f(t,x) \quad \text{in } Q := (0,T_0)\times\Omega,$$

$$w_t - \kappa\Delta w + \beta(w) + g(w) - \alpha(\theta)\lambda_w(w) \ni 0 \quad \text{in } Q,$$

$$\frac{\partial\alpha(\theta)}{\partial n} + n_0\alpha(\theta) = h(t,x), \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma := (0,T_0)\times\Gamma,$$

$$\theta(0,\cdot) = \theta(T_0,\cdot), \quad w(0,\cdot) = w(T_0,\cdot) \quad \text{on } \Omega.$$

ここで、Ω は $R^N (1 \le N \le 3)$ の有界領域で滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つものとし、$\alpha(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ for $\theta > 0$ とする。また、$\beta(\cdot)$ は $R\times R$ の maximal monotone graph で、$\lambda(\cdot)$ は R の滑らかな凸関数で、$g(\cdot)$ は R 上の滑らかな関数とする。そして、n_0, κ, μ, T_0 は正の定数で、f, h は与えられた関数とする。

このモデルに対する初期値問題は、[1, 2, 5, 6] で既に研究されている。

また $\alpha(\cdot)$ がR上の bi-Lipschit 連続な増加関数である場合は、Sato [8] が$\mu = 0$である$(\mathrm{PFM})_p$の周期解の存在を示した。

そこで本稿では、$\alpha(\theta) = -\frac{1}{\theta}$である singular でかつ$\mu > 0$である$(\mathrm{PFM})_p$の周期解の存在性に関する結果について述べる。

2. 仮定と主定理

次の仮定の下で、周期問題 $(\mathrm{PFM})_p$ を議論する。：

(A1) β は $R\times R$ の maximal monotone graph で、$\overline{D(\beta)} = [-1,1]$;

(A2) λ は R 上の C^1-級の関数で、$\overline{D(\beta)}$ 上で凸関数;

(A3) g は R 上の局所リップシッツ連続関数;

(A4) κ, n_0, T_0 , μ は正の定数.

本稿を通じて、V を次のようなノルムを持つソボレフ空間とする：

$$|v|_V := \left\{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + n_0\int_\Gamma |v|^2 d\Gamma\right\}^{\frac{1}{2}}, \ \forall v \in V.$$

また、V の双対空間を V^* とし、V から V^* への双対写像 F を次のように定義する：

$$\langle Fv, z\rangle := \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla z dx + n_0\int_\Gamma vz d\Gamma,\ \forall v, \forall z \in V.$$

ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は、V^* と V の duality pairing を表す。$f^*(t)\in V^*$ は、

$$\langle f^*(t), z\rangle := \int_\Omega f(t)z dx + \int_\Gamma h(t)z d\Gamma \quad \text{for all } z\in V,$$

と定義する。そして、Δ_N は、次のように定義された $L^2(\Omega)$ への（非有界）作用素である：$l\in L^2(\Omega)$ に対し、

$$-\Delta_N v = l \Longleftrightarrow -\Delta v = l \text{ in } L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ in } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

このとき、

$$D(\Delta_N) := \left\{u\in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma\right\}.$$

定義 2.1. 関数の組 $\{\theta, w\}$ が、次の4つの条件を満たすとき問題 $(\mathrm{PFM})_p$ の解であると呼ぶ。

(w1) $\theta\in C_w([0,T_0];L^2(\Omega))$, $\theta'\in L^2(0,T_0;V^*)$, $w\in L^2(0,T_0;H^2(\Omega))$ with $w(t)\in D(\Delta_N)$ for a.e. $t\in[0,T_0]$, $w\in D(\beta)$ a.e. on Q そして $w'\in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$.

(w2) $\alpha(\theta)\in L^2(0,T_0;V)$ そして

$$\theta'(t)+\lambda(w)'(t)+F\alpha(\theta(t))+\mu\theta(t) = f^*(t) \quad \text{in } V^* \quad \text{for a.e. } t\in[0,T_0].$$

(w3) ある $\xi\in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ が存在して次を満たす：

$$\xi\in\beta(w) \text{ a.e. on } Q$$

$$w'(t)-\kappa\Delta_N w(t)+\xi(t)-\alpha(\theta(t))\lambda_w(w(t))+g(w(t)) = 0 \text{ in } L^2(\Omega) \text{ for a.e. } t\in[0,T_0].$$

(w4) $\theta(0,\cdot)=\theta(T_0,\cdot),\quad w(0,\cdot)=w(T_0,\cdot)\quad \text{in } L^2(\Omega).$

今回、次のような周期解の存在定理を得た。

定理 1. *(A1)-(A4)*、$f\in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ そして、$h\in L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))$ が

$$h<0 \ a.e.\ on\ \Sigma,\ \frac{1}{h}\in L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))$$

を満たすとする。そのとき、$(PFM)_p$ の解が少なくとも1つ存在する。

3. 抽象発展方程式への帰着とその周期解の存在

$(\mathrm{PFM})_p$の周期解の存在を Damlamian and Kenmochi [2] のアプローチで示す。つまり、$(\mathrm{PFM})_p$をヒルベルト空間 X における非線形発展方程式

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d}{dt}U(t) + \partial_X\varphi(U(t)) + G(U(t)) \ni l(t) \quad \text{for a.e. } t \in [0, T_0]$$

の立場から考察する。ここで、φ はヒルベルト空間 X 上の適正下半連続凸関数で、$\partial_X\varphi(\cdot)$ はその劣微分である。$G(\cdot)$ は X から X のリップシッツ連続作用素で、l は X-valued 関数である。

実際、ヒルベルト空間 X としては、内積 $(\cdot,\cdot)_X$

$$(U_1, U_2)_X := \left\langle e_1, F^{-1}e_2 \right\rangle + (w_1, w_2)_{L^2(\Omega)} \quad \text{for all } U_i := \begin{pmatrix} e_i \\ w_i \end{pmatrix} \in X \ (i = 1, 2)$$

をもつ直積空間 $\begin{matrix} V^* \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix}$ を考える。

[2] と同様にして、新しい変数$e := \theta + \lambda(w)$ を用いると $(\mathrm{PFM})_p$は、次の形に変形される；

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F\alpha(e(t) - \lambda(w(t))) + \mu e(t) \\ -\kappa\Delta_N w(t) + \xi - \alpha(e(t) - \lambda(w(t)))\lambda_w(w(t)) \end{pmatrix} \\ &\qquad + \begin{pmatrix} -\mu\lambda(w(t)) \\ g(w(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^*(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{for a.e. } t \in [0, T_0] \quad \text{in } X, \end{aligned} \tag{3.1}$$

そこで、(3.1) の第２項が $\partial_X\varphi\begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix}$ で表されるように、X 上で定義された適正下半連続凸関数 φ を定義する。

まず、$L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数 j_0 と j_1 を次のように定義する：

$$j_0(z) := \begin{cases} -\int_\Omega \log(z)dx, & \text{if } z \in L^2(\Omega) \text{ and } \log(z) \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$j_1(w) := \begin{cases} \int_\Omega \hat\beta(w)dx + \frac{\kappa}{2}|\nabla w|^2_{L^2(\Omega)}, & \text{if } w \in H^1(\Omega) \text{ and } \hat\beta(w) \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

そこで、X 上の適正下半連続凸関数 φ を次のように定義する：

$$\varphi\begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} := j(e - \lambda(w)) + \frac{\mu}{2}|e|^2_{V^*} + j_1(w), \quad \forall\begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in X.$$

ここで、j は V^* 上の j_0 の Γ-regularization である。このとき、j は V^* 上の適正下半連続凸関数で j_0 の拡張になっている。つまり、$L^2(\Omega)$ 上では $j = j_0$ となっている。Γ-regularization とその基本的な性質については [3] を参照する。

　このとき、次を得る：

補題 3.1. *(1)* φ は、X 上の適正下半連続凸関数である。

(ii) もし、$\begin{pmatrix}\tilde{e}\\ \tilde{w}\end{pmatrix} \in \partial_X\varphi\begin{pmatrix}e\\ w\end{pmatrix}$ ならば、そのとき

$$\tilde{e} = F\tilde{\alpha} + \mu e \quad \textit{for some } \tilde{\alpha} \in \partial_{V^*,V} j(e - \lambda(w)) \tag{3.2}$$

そして、*(3.2)* と同じ関数 $\tilde{\alpha}$ に対して、

$$\tilde{w} = -\kappa\Delta_N w + \xi - \tilde{\alpha}\lambda_w(w) \quad \textit{for some } \xi \in L^2(\Omega) \textit{ with } \xi \in \beta(w) \textit{ a.e. on } \Omega,$$

である。ここで、$\partial_{V^*,V} j$ は V^* から V への j の劣微分作用素である。

(iii) もし $\begin{pmatrix}\tilde{e}\\ \tilde{w}\end{pmatrix} \in \partial_X\varphi\begin{pmatrix}e\\ w\end{pmatrix}$ で $e \in L^2(\Omega)$ ならば、そのとき $\tilde{\alpha} = \alpha(e - \lambda(w)) \in V$ である。従って、

$$\partial_X\varphi\begin{pmatrix}e\\ w\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} F\alpha(e-\lambda(w)) + \mu e \\ -\kappa\Delta_N w + \xi - \alpha(e-\lambda(w))\lambda_w(w)\end{pmatrix};\ \begin{matrix}\xi \in L^2(\Omega) \textit{ such that} \\ \xi \in \beta(w) \textit{ a.e. on } \Omega\end{matrix}\right\}$$

である。

　この補題からすぐに、我々のシステム $(\mathrm{PFM})_p$ が

$$\text{(E)} \qquad \frac{d}{dt}U(t) + \partial_X\varphi(U(t)) + G(U(t)) \ni l(t) \quad \text{in } X,\ \text{a.e. } t \in [0, T_0],$$

と変形されることがわかる。ここで、

$$U := \begin{pmatrix}e\\ w\end{pmatrix},\ e := \theta + \lambda(w),\ G(U) := \begin{pmatrix}-\mu\lambda(w)\\ g(w)\end{pmatrix},\ l := \begin{pmatrix}f^*\\ 0\end{pmatrix}$$

である。

定義 3.1. (1) 与えられた $l \in L^1(0, T_0; X)$ に対し、$U \in C([0, T_0]; X) \cap W^{1,2}_{loc}((0, T_0]; X)$, $\varphi(U) \in L^1(0, T_0)$, $U(t) \in D(\partial_X\varphi)$ for a.e. $t \in [0, T_0]$ そして

$$l(t) - \frac{d}{dt}U(t) - G(U(t)) \in \partial_X\varphi(U(t)) \quad \text{for a.e. } t \in [0, T_0]$$

を満たすとき、$U : [0, T_0] \to X$ を (E) の解と呼ぶ。

(2) U が (E) の解で周期条件 $U(0) = U(T_0)$ を満たすとき、$U : [0, T_0] \to X$ を (E) の周期解と呼ぶ。

抽象発展方程式の理論を適用することにより、(E) の周期解の存在を得る：

定理2. *(1)* *(A1)-(A4)* を仮定し、$f \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$, $h \in L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))$ とする。そのとき、$U' \in L^2(0,T_0;X)$ そして $\varphi(U)$ が $[0,T_0]$ 上で絶対連続関数であるような *(E)* の周期解 U が存在する。

(2) *(1)* と同じ仮定の下で、$U_i := \begin{pmatrix} e_i \\ w_i \end{pmatrix}$, $i=1,2$ を *(E)* の 2 つの周期解とする。そのとき、もし $w_1 = w_2$ ならば $e_1 = e_2$ である。

4. $(\mathrm{PFM})_p$の周期解の存在

[2] における Remark によると、一般に $\partial_X \varphi(U)$ は X の非常に大きい部分集合なので、第 1 成分 e は Ω 上の singular measures を含む。従って、一般に (E) の周期解は、$(\mathrm{PFM})_p$の周期解にはならない。しかし、境界データ h に更なる仮定を付け加えることにより、(E) の任意の周期解はまた $(\mathrm{PFM})_p$の周期解になる。

定理 1 を証明するため、$q \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$, $h \in L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))$ を与えたとき、次の周期問題

$$\begin{cases} \theta'(t) + \partial_{V^*} j(\theta(t)) + \mu\theta(t) \ni q^*(t) \text{ in } V^*, \quad 0 < t < T_0, \\ \theta(0) = \theta(T_0), \end{cases} \tag{4.1}$$

を考察する。ここで、$q^* \in L^2(0,T_0;V^*)$ は

$$\langle q^*(t), z\rangle = (q(t),z) + (h(t),z)_\Gamma, \ \forall z \in V, \tag{4.2}$$

で与えられる。

$\theta \in C([0,T_0];V^*)$、$\theta' \in L^2(0,T_0;V^*)$、 $\theta(0)=\theta(T_0)$ そして、

$$q^*(t) - \theta'(t) - \mu\theta(t) \in \partial_{V^*} j(\theta(t)) \quad \text{for a.e. } t \in [0,T_0]$$

を満たすとき、θ を (4.1) の解とする。

定理3. 境界データ h が

$$h < 0 \ \textit{a.e. on}\ \Sigma, \ \frac{1}{h} \in L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))$$

を満たすとすると、*(4.1)* は $\theta \in C_w([0,T_0];L^2(\Omega))$ となる解 θ を少なくとも 1 つ持つ。

定理 3 を証明するため、α の正則近似法(cf. [2])を用いる。そこで、$\epsilon_n \downarrow 0$ となる $\{\epsilon_n\} \subset (0,1]$ に対し、

$$\alpha_n(r) := \alpha_{\epsilon_n}(r) + \epsilon_n r, \ r \in R,$$

と定義する。ここで、α_{ϵ_n} は ϵ_n での α の吉田近似である：つまり、

$$\alpha_{\epsilon_n}(r) := \frac{1}{\epsilon_n}\{r - (I + \epsilon_n\alpha)^{-1} r\}, \ r \in R$$

である。

さて、関数 j_n を次のように定める:

$$j_n(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \hat{\alpha}_{\epsilon_n}(z)dx + \frac{\epsilon_n}{2}|z|^2_{L^2(\Omega)}, & \text{if } \forall z \in L^2(\Omega), \\ +\infty, & \text{if } z \in V^* \setminus L^2(\Omega). \end{cases}$$

ここで、 $\hat{\alpha}_{\epsilon_n}$ は α_{ϵ_n} の不定積分である。

このとき、

補題 4.1. *(1)* $D(j_n)=L^2(\Omega)$ で、 j_n は V^* 上の適正下半連続凸関数である。
(2) j_n は j に V^* 上で *Mosco* の意味 *(cf. [7])* で収束する。
(3) 定理 3 の仮定の下で、

$$h_n \to h \ in \ L^2(0, T_0; L^2(\Gamma))$$

そして

$$\left\{\alpha_n^{-1}\left(\frac{h_n}{n_0}\right)\right\} \ is\ bounded\ in\ L^2(0, T_0; L^2(\Gamma))$$

を満たす $W^{1,2}(0, T_0; L^2(\Gamma))$ の列 $\{h_n\}$ が存在する。

さて、次の (4.1) に対する正則近似問題

$$\begin{cases} \theta_n'(t) + \partial_{V^*} j_n(\theta_n(t)) + \mu\theta_n(t) \ni q_n^*(t) \text{ in } V^*, \quad 0 < t < T_0, \\ \theta_n(0) = \theta_n(T_0), \end{cases}$$

を考えることにより定理 3 を証明することができる。ここで、q_n^* は (4.2) で h を h_n に置き換えたものである。

定理 3 の証明: まず、θ_n のアプリオリ評価をすると、

$$|\theta_n|_{C([0,T_0];L^2(\Omega))} \le R_1 \left(|q|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} + |h|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))} + \left|\frac{1}{h}\right|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Gamma))} + 1 \right)$$

となる n に依存しない正定数 R_1 が存在する。

従って、この θ_n のアプリオリ評価、補題 4.1 と収束定理 (cf. [4; Theorem 2.7.1]) により、

$$\theta_n \to \theta \text{ in } C_w([0, T_0]; L^2(\Omega))$$

を得る。 ◇

定理 1 の証明: $U := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix}$ を定理 2 で得られた任意の (E) の周期解とする。そのとき、$U \in W^{1,2}(0, T_0; X)$、$U(0) = U(T_0)$ そして $\varphi(U)$ は $[0, T_0]$ 上の連続関数である。それゆえ、

$$w \in C([0, T_0]; H^1(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T_0; L^2(\Omega)) \text{ そして } w(0) = w(T_0)$$

である。

そして、$\theta := e - \lambda(w)$ は

$$\theta'(t) + \partial_{V^*} j(\theta(t)) + \mu\theta(t) \ni f^*(t) - \lambda(w)'(t) \text{ in } V^* \quad \text{a.e. } t \in [0, T_0]$$

と $\theta(0) = \theta(T_0)$ を満たす周期解である。

ここで定理3を適用することにより、$\theta \in C_w([0, T_0]; L^2(\Omega))$ である。以上より、$\{\theta, w\}$ は $(\mathrm{PFM})_p$ の解である。 ◇

参考文献

1. P. Colli and J. Sprekels, On a Penrose-Fife model with zero interfacial energy leading to a phase-field system of relaxed Stefan type, Ann. Mat. Pura. Appl. **169**(1995), 269-289.

2. A. Damlamian and N. Kenmochi, Evolution equations associated with non-isothermal phase transitions, pp. 62-77, in *Functional Analysis and Global Analysis*, ed. T. Sunada and P. W. Sy, Springer-Verlag, Singapore, 1997.

3. I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, Studies Math. Appl. **Vol.1**, North-Holland, Amsterdam, 1976.

4. N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ. **39**(1981), 1-87.

5. N. Kenmochi and M. Niezgódka, System of nonlinear parabolic equations for phase change problems, Adv. Math. Sci. Appl. **3**(1993/94), 87-115.

6. Ph. Laurençot, Solutions to a Penrose-Fife model of phase-field type, J. Math. Anal. Appl. **185**(1994), 262-274

7. U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances Math. **3**(1969), 510-585.

8. N. Sato, Periodic solutions of phase filed equations with constraint, pp. 145-157, in *Free boundary problems, theory and applications*, Pitman Research Notes Math. **363**, Longman, Harlow, 1996.

9. N. Yamazaki, Periodic solutions for phase transition models, to appear in Nonlinear Anal. TMA.

Noriaki YAMAZAKI
Department of Mathematics
Graduate School of Science and Technology, Chiba University
1-33 Yayoi-chō, Inage-ku, Chiba, 263 Japan
e-mail yamazaki@math.e.chiba-u.ac.jp

Asymptotic Stability for Evolution Equations Generated by Time Dependent Subdifferentials

KEN SHIRAKAWA, AKIO ITO, NORIAKI YAMAZAKI
AND NOBUYUKI KENMOCHI

1. Introduction

The motivation of this work is a phase-field model with constraint of the Penrose-Fife type:

$$\begin{cases} [\theta+\lambda(x,t,w)]_t - \Delta\left(-\dfrac{1}{\theta}+\mu\theta\right) = q(x,t) \text{ in } Q := \Omega\times(0,+\infty), \\ w_t - \kappa\Delta w + \beta(w) + \sigma(w) + \dfrac{\lambda_w(x,t,w)}{\theta} \ni 0 \text{ in } Q, \end{cases} \tag{1.1}$$

with suitable initial-boundary conditions; in a solid-liquid system considered in a bounded domain Ω in R^N $(1 \le N \le 3)$, $\theta = \theta(x,t)$ is the (absolute) temperature and $w = w(x,t)$ is the order parameter with range $-1 \le w \le 1$. λ is a smooth function on $R_N \times R_+ \times R$ which is convex with respect to w, σ is a smooth function on R, μ and κ are positive constants and β is a maximal monotone graph in $R\times R$ with $\overline{D(\beta)} = [-1,1]$.

Recently, it was shown that this sort of solid-liquid phase transition models can be written as an evolution equation of the form:

$$u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t,u(t)) \ni f(t),\ t>0, \tag{1.2}$$

in a (real) Hilbert space H, where $\partial\varphi^t$ is the subdifferential of a proper l.s.c. and convex function φ^t on H, $g(t,\cdot)$ is a perturbation which is small relative to $\varphi^t(\cdot)$ and f is a given forcing term.

In this paper, as direct applications of abstract results on the asymptotic stability for (1.2), we discuss the global boundedness of solutions of (1.1), the existence of a global attractor of the limiting system associated with (1.1), and the large-time behaviour of solutions of (1.1) as $t \to +\infty$.

2. Abstract results

Now, we consider an evolution equation, with a perturbation, of the form

$$(\mathrm{E}_s) \quad u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t,u(t)) \ni f(t),\ t > s\ (\ge 0),$$

where $g(t,\cdot)$ is a singlevalued operator from a subset $D(g(t,\cdot)) \subset H$ into H for each $t \in \overline{R_+} := [0,+\infty]$ and $f \in L^2_{loc}(R_+;H)$. Also, the Cauchy problem for (E_s) associated with initial value u_0 is referred as $(\mathrm{E}_s\,;u_0)$, namely

$$(\mathrm{E}_s\,;u_0) \quad \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t,u(t)) \ni f(t),\ t>s, \\ u(s) = u_0. \end{cases}$$

For any interval $J \subset R_+$ with initial time s, a function $u : J \longrightarrow H$ is called a solution of (E_s) on J, if $g(\cdot,u(\cdot)) \in L^2_{loc}(J;H)$, $u \in C(J;H)\cap W^{1,2}_{loc}(J^\circ;H)$ and $u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) \ni f(t) - g(t,u(t))$ for a.e. $t \in J$, where J° is the interior of J; in addition, if $u(s) = u_0$, then u is called a solution of $(\mathrm{E}_s\,;u_0)$ on J.

Evolution system (E_s) is considered for any $\{\varphi^t\} := \{\varphi^t \mid 0 \le t \le +\infty\}$ in the class $\Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ specified below and for $g(t,\cdot)$ satisfying conditions (g1)~(g5) mentioned below.

Given two families $\{a_r\} := \{a_r \mid r \in R_+\} \subset W^{1,2}_{loc}(R_+)$ with $a_r' \in L^1(R_+) \cap L^2(R_+)$ and $\{b_r\} := \{b_r \mid r \in R_+\} \subset W^{1,1}_{loc}(R_+)$ with $b_r' \in L^1(R_+)$, we denote by $\Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ the class of all families $\{\varphi^t\}$ satisfying the following condition:

(Φ) for any $s,t \in \overline{R_+}$ and $z \in D(\varphi^s)$ with $|z|_H \le r$, there exists $\tilde{z} \in D(\varphi^t)$ such that

$$\begin{cases} |\tilde{z} - z|_H \le |a_r(t) - a_r(s)|(1 + |\varphi^s(z)|^{\frac{1}{2}}) \\ \varphi^t(\tilde{z}) - \varphi^s(z) \le |b_r(t) - b_r(s)|(1 + |\varphi^s(z)|), \end{cases}$$

where $a_r(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} a_r(t)$ and $b_r(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} b_r(t)$.

Also, for $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ we suppose that

(C) $\left\{\ z \in H \mid \varphi^t(z) + |z|_H^2 \le r\ \right\}$ is compact in H for every $r > 0$ and $t \in \overline{R_+}$.

Suppose further that $g(t,\cdot)$ fulfills the following conditions (g1)~(g5):

(g1) $D(\varphi^t) \subset D(g(t,\cdot)) \subset H$ for $\forall t \in \overline{R_+}$, and $g(\cdot, v(\cdot))$ is strongly measurable on J for any interval $J \subset R_+$ and $v \in L^2_{loc}(J;H)$ with $v(t) \in D(\varphi^t)$ for a.e. $t \in J$.

(g2) There are positive constants c_0, c_1, c_2 such that

$$|g(t,z)|_H^2 \le c_0\varphi^t(z) + c_1|z|_H^2 + c_2, \ \forall t \in \overline{R_+},\ \forall z \in D(\varphi^t).$$

(g3) (demi-closedness) If $\{t_n\} \subset \overline{R_+}$, $z_n \in D(\varphi^{t_n})$, $\{\varphi^{t_n}(z_n)\}$ is bounded, $z_n \to z$ in H and $t_n \to t$ (as $n \to +\infty$), then $g(t_n, z_n) \to g(t,z)$ weakly in H.

(g4) For each $\varepsilon > 0$ there exists a constant $C_\varepsilon > 0$ such that

$$|(g(t,z_1) - g(t,z_2), z_1 - z_2)_H| \le \varepsilon(z_1^* - z_2^*, z_1 - z_2)_H + C_\varepsilon|z_1 - z_2|_H^2,$$

$$\forall t \in \overline{R_+},\ \forall z_i \in D(\varphi^t),\ \forall z_i^* \in \partial\varphi^t(z_i),\ i = 1,2.$$

(g5) For each bounded subset B of H, there exist positive constants $C_1(B)$ and $C_2(B)$ such that

$$\varphi^t(z) + (g(t,z), z - b)_H \ge C_1(B)|z|_H^2 - C_2(B),\ \forall t \in \overline{R_+},\ \forall z \in D(\varphi^t),\ \forall b \in B.$$

The abstract result, which is concerned with the existence, uniqueness and global estimates of a solution of $(\mathrm{E}_s\,; u_0)$, is stated as follows.

Theorem 2.1. (cf. [3]) *Assume that $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$, (C), (g1)~(g4) hold. Let $f \in L^2_{loc}(R_+;H)$. Then, for each $s \ge 0$ and $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$, there exists one and only one solution u of $(\mathrm{E}_s\,; u_0)$ on $[s,+\infty)$.*

In addition if condition (g5) holds and $S_f := \sup_{t\geq 0}|f|_{L^2(t,t+1)} < +\infty$, *then, for the solution* u *of* $(\mathrm{E}_s\,; u_0)$ *on* $[s,+\infty)$ *the following estimate holds:*

$$\sup_{t\geq s}|u(t)|_H^2 + \sup_{t\geq s}\int_t^{t+1}|\varphi^\tau(u(\tau))|d\tau \leq N_1(1+S_f^2+|u_0|_H^2),$$

where N_1 *is a positive constant independent of* f, $s \geq 0$ *and* $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)} \cap B$. *Moreover, for each* $\delta > 0$ *and each bounded set* $B \subset H$, *there is a constant* $N_2(S_f, B, \delta) > 0$, *depending only on* $\delta > 0$, B *and* S_f, *such that for the solution* u *of* $(\mathrm{E}_s; u_0)$ *on* $[s,+\infty)$ *with* $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$, *the following estimate holds:*

$$\sup_{t\geq s+\delta}|u'|_{L^2(t,t+1;H)}^2 + \sup_{t\geq s+\delta}|\varphi^t(u(t))| \leq N_2(S_f, B, \delta).$$

Next, based on the above theorem, we define a family $\{E(t,s) \mid 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ of the solution operator $E(t,s) : \overline{D(\varphi^s)} \longrightarrow \overline{D(\varphi^t)}$ which assigns to each $u_0 \in \overline{D(\varphi^s)}$ the element $u(t) \in \overline{D(\varphi^t)}$, u being the solution of $(\mathrm{E}_s\,; u_0)$ on $[s,+\infty)$. We see that

(E1) $E(s,s) = I$ (the identity) on $\overline{D(\varphi^s)}$ for all $s \in R_+$,

(E2) $E(t_2,s) = E(t_2,t_1)E(t_1,s)$ for all $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$.

Definition 2.1. Let B be any subset of H. Then the set

$$\omega_E(B) := \bigcap_{\tau\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq\tau, s\geq 0} E(t+s,s)(\overline{D(\varphi^s)}\cap B)}$$

is called the ω-limit set of B under $E(t,s)$.

We consider the limiting system of (E_s) which is of the form

$$(\mathrm{E}_\infty) \quad u'(t) + \partial\varphi^\infty(u(t)) + g^\infty(u(t)) \ni f^\infty,\ t > 0,$$

where $g^\infty(\cdot) := g(+\infty,\cdot)$, assuming that $f^\infty \in H$ and

$$|f(t+\cdot) - f^\infty|_{L^2(0,1;H)} \to 0 \text{ as } t \to +\infty; \tag{2.1}$$

note here that $\{\varphi^t \mid t \in \overline{R_+}\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ implies that φ^t converges to φ^∞ on H as $t \to +\infty$ in the sense of Mosco [2].

Since (E_∞) is an autonomous system, it generates a semigroup $\{S(t) \mid t \in R_+\}$ on $\overline{D(\varphi^\infty)}$; for each $t \geq 0$, $S(t)$ is the solution operator which assigns to each $u_0 \in \overline{D(\varphi^\infty)}$ the element $u(t) \in \overline{D(\varphi^\infty)}$, where u is the solution of (E_∞) on $[0,+\infty)$ satisfying $u(0) = u_0$. So far as the Cauchy problem for (E_∞) is concerned, the existence and uniqueness of a solution is guaranteed as a special case (i.e. $\varphi^t \equiv \varphi^\infty$, $g(t,\cdot) \equiv g^\infty$ and $f \equiv f^\infty$) of Theorem 2.1. Therefore $S(t)$ is well-defined as a mapping in $\overline{D(\varphi^\infty)}$ and has the semigroup property on $\overline{D(\varphi^\infty)}$, and also its ω-limit set $\omega_S(B)$ of $B \subset H$ is defined by

$$\omega_S(B) := \bigcap_{\tau\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq\tau} S(t)\left(\overline{D(\varphi^\infty)}\cap B\right)}.$$

We now recall the notion of a global attractor for the semigroup $\{S(t)\}$.

Definition 2.2. A subset $\mathcal{A}_\infty$ of $\overline{D(\varphi^\infty)}$ is called a global attractor for the semigroup $\{S(t)\}$, if

(1) $\mathcal{A}_\infty$ is non-empty, connected and compact in H,

(2) (invariance) $S(t)\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_\infty$ for all $t \geq 0$,

(3) (attractiveness) for each bounded subset B of $\overline{D(\varphi^\infty)}$,

$$\sup_{x\in S(t)B} \inf_{y\in\mathcal{A}_\infty} |x-y|_H \longrightarrow 0 \text{ as } t \longrightarrow +\infty.$$

The next theorem gives a relationship between the asymptotic stability of the dynamical process $\{E(t,s)\}$ generated by (E_s) and that of the limiting process $\{S(t)\}$ generated by (E_∞).

Theorem 2.2. (cf. [3]) *Let $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$ and $f \in L^2_{loc}(R_+;H)$. Assume that (C), (g1)~(g5) and (1.3) hold. Then:*

(a) *There exists a global attractor $\mathcal{A}_\infty$ for $S(t)$.*

(b) *$\omega_E(B) \subset \mathcal{A}_\infty$ for each bounded subset B of H.*

(c) *There is a compact set $B_* \subset H$ such that $\omega_E(B_*) = \mathcal{A}_\infty$.*

Assertions (b) and (c) of Theorem 2.2 say that the asymptotic behaviour of (E_s) is very close to that of the limiting system (E_∞) as t is large enough. The theorem can be proved by using global estimates in Theorem 2.1. For the detail proofs of Theorems 2.1 and 2.2, see [3].

3. Application to a phase-field model with constraint

In this section, let Ω be a bounded domain in R^N, $1 \leq N \leq 3$, with smooth boundary $\Gamma := \partial\Omega$, V be the Sobolev space $H^1(\Omega)$ with norm

$$|v|_V := \left\{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + n_0 \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma\right\}^{\frac{1}{2}}, \ \forall v \in V,$$

V^* be the dual space of V and F be the duality mapping from V onto V^*, namely,

$$\langle Fv, z\rangle := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla z dx + n_0 \int_\Gamma vz d\Gamma, \ \forall v, \forall z \in V,$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the duality pairing between V^* and V and n_0 is a given positive constant.

Given $q \in L^2(\Omega)$ and $h \in L^2(\Gamma)$, an element $q^* \in V^*$ is uniquely determined by

$$\langle q^*, z\rangle := \int_\Omega qz dx + \int_\Gamma hz d\Gamma, \ \forall z \in V,$$

and it is easy to check that $Fv = q^*$ is formally equivalent to

$$-\Delta v = q \text{ in } \Omega, \ \frac{\partial v}{\partial n} + n_0 v = h \text{ on } \Gamma; \tag{3.1}$$

in fact, (3.1) is satisfied in the variational sense that

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla z dx + n_0 \int_\Gamma vz d\Gamma = \int_\Omega qz dx + \int_\Gamma hz d\Gamma \ (= \langle q^*, z \rangle), \ \forall z \in V.$$

By notation Δ_N we denote the Laplacian, with homogeneous Neumann boundary condition, in $L^2(\Omega)$, more precisely,

$$D(\Delta_N) = \left\{ z \in H^2(\Omega) \ \Big| \ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ in } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \ \Delta_N z = \Delta z \text{ a.e. in } \Omega \text{ for any } z \in D(\Delta_N).$$

Clearly, $-\Delta_N$ is singlevalued and maximal monotone in $L^2(\Omega)$.

Now, consider a phase-field model with constraint of the Penrose-Fife type, which is slightly more general than that mentioned in the introduction:

$$[\theta + \lambda(x,t,w)]_t - \Delta\left(-\frac{1}{\theta} + \mu\theta\right) = q(x,t) \text{ in } Q := \Omega \times (0, +\infty), \tag{3.2}$$

$$w_t - \kappa \Delta w + \xi + \sigma(w) + \frac{\lambda_w(x,t,w)}{\theta} = 0, \ \xi \in \beta(w) \text{ in } Q, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{1}{\theta} + \mu\theta\right) + n_0\left(-\frac{1}{\theta} + \mu\theta\right) = h(x,t), \ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ on } \Sigma := \Gamma \times (0, +\infty), \tag{3.4}$$

$$\theta(\cdot, 0) = \theta_0, \ w(\cdot, 0) = w_0 \text{ in } \Omega.$$

Here, we suppose that

- λ is a smooth function on $R^N \times R_+ \times R$ such that for each $(x,t) \in R^N \times R_+$, $\lambda(x,t,w)$ is convex with respect to $w \in R$;
- λ_w is the partial derivative of λ with respect to w, i.e. $\lambda_w(x,t,w) = \frac{\partial}{\partial w}\lambda(x,t,w)$ for $(x,t,w) \in R^N \times R_+ \times R$, and $L_\lambda := \sup_{x \in \overline{\Omega}, t \in R_+, w \in [-1,1]} |\lambda_w(x,t,w)| < +\infty$;
- β is a maximal monotone graph in $R \times R$ such that $\overline{D(\beta)} = [-1,1]$; we fix a proper l.s.c. convex and non-negative function $\hat{\beta}$ on R whose subdifferential $\partial\hat{\beta}$ coincides with β in R;
- σ is a smooth function on R;
- μ, n_0 and κ are positive constants.

Also, we suppose that $\lambda^\infty(x,w) := \lim_{t \to +\infty} \lambda(x,t,w)$ exists for each $(x,w) \in \overline{\Omega} \times R$, λ^∞ is smooth on $\overline{\Omega} \times R$ and there exists a non-negative function $d(\cdot) \in L^\infty(R_+) \cap L^1(R_+)$ such that $\sup_{x \in \Omega, |w| \le 1} \left| \frac{\partial}{\partial t}\lambda(x,t,w) \right| \le d(t)$ for a.e. $t \ge 0$.

Moreover, for the data q and h, we suppose that for some $q^\infty \in L^2(\Omega)$, $h^\infty \in L^2(\Gamma)$, $q \in L^2_{loc}(R_+; L^2(\Omega))$, $h \in L^2_{loc}(R_+; L^2(\Gamma))$, $|q(t + \cdot) - q^\infty|_{L^2(0,1;L^2(\Omega))} \to 0$, and $|h(t + \cdot) -$

$h^\infty|_{L^2(0,1;L^2(\Gamma))} \to 0$ as $t \to +\infty$. In terms of operators F and $-\Delta_N$ our system (3.2)$\sim$(3.4) is written in the form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(\alpha(e(t)-\lambda(\cdot,t,w(t))) + \mu e(t)) \\ -\kappa\Delta_N w(t) + \xi(t) - \alpha(e(t)-\lambda(\cdot,t,w(t)))\lambda_w(\cdot,t,w(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu F\lambda(\cdot,t,w(t)) \\ \sigma(w(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^*(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

where $e(t) = \theta(t) + \lambda(\cdot,t,w(t))$, $q^*(t)$ is an element of V^* determined by $\langle q^*(t), z\rangle = (q(t),z)_{L^2(\Omega)} + (h(t),z)_{L^2(\Gamma)}$, $\forall z \in V$ and $\alpha(r) := -\dfrac{1}{r}$ for $r > 0$.

In order to describe the phase-field model (3.2)$\sim$(3.4) as an evolution equation of the form (E$_s$) we choose as the Hilbert space H the product space $\begin{matrix} V^* \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix}$ endowed with inner product $(\cdot,\cdot)_H$ which is defined by $(u_1,u_2)_H := \langle e_1, F^{-1}e_2\rangle + (w_1,w_2)_{L^2(\Omega)}$, $\forall u_i = \begin{pmatrix} e_i \\ w_i \end{pmatrix} \in H$, $i = 1,2$. Also, we define a function $\varphi^t(\cdot)$ on H by putting

$$\varphi^t(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left\{-\log(e-\lambda(\cdot,t,w)) + \frac{\mu}{2}|e|^2\right\}dx + \frac{\kappa}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega \hat\beta(w)dx \\ \text{if } u := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ H^1(\Omega) \end{matrix}, \ \log(e-\lambda(\cdot,t,w)) \in L^1(\Omega),\ \hat\beta(w) \in L^1(\Omega), \\ +\infty \ \text{ otherwise,} \end{cases}$$

and denote by φ^∞ the function φ^t with $\lambda(x,t,w)$ replaced by $\lambda^\infty(x,w)$.

Lemma 3.1. *For each $t \in \overline{R_+}$, φ^t is proper l.s.c. and convex on H, $D(\varphi^t) \subset \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ H^1(\Omega) \end{matrix}$ and there are positive constants ν_0, ν_1, independent of $t \in \overline{R_+}$, such that*

$$\varphi^t(u) \geq \nu_0(|e|^2_{L^2(\Omega)} + |w|^2_{H^1(\Omega)}) - \nu_1,\ \forall u := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in D(\varphi^t).$$

Lemma 3.2. *Put $a_r(t) = c_*|\Omega|^{\frac12}\int_0^t d(\tau)d\tau$ and $b_r(t) = \tilde C\int_0^t d(\tau)d\tau$ for all $t \geq 0$ and $r > 0$, where $|\Omega|$ is the volume of Ω, c_* is a positive constant satisfying $|\cdot|_{V^*} \leq c_*|\cdot|_{L^2(\Omega)}$, $\tilde C := \mu|\Omega|^{\frac12}\{1 + (\nu_1 + \frac{1}{4\nu_0}) + \frac12|\Omega|^{\frac12}\int_0^{+\infty} d(\tau)d\tau\}$ and ν_0, ν_1 are positive constants obtained in Lemma 3.1. Then $\{\varphi^t\} \in \Phi(\{a_r\},\{b_r\})$.*

Lemma 3.3. (cf. [1]) *For each $t \in \overline{R_+}$,*

$$D(\partial\varphi^t) = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ H^2(\Omega) \end{matrix} \ \middle|\ \begin{matrix} \alpha(e-\lambda(\cdot,t,w)) + \mu e \in V,\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ in } H^{\frac12}(\Gamma), \\ \exists\xi \in L^2(\Omega) \text{ such that } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } \Omega \end{matrix} \right\}$$

and if $\begin{pmatrix} e^* \\ w^* \end{pmatrix} \in \partial\varphi^t\begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix}$, then

$$\begin{aligned} e^* = F(\alpha(e-\lambda(\cdot,t,w)) + \mu e),\ w^* = -\kappa\Delta_N w + \xi - \alpha(e-\lambda(\cdot,t,w))\lambda_w(\cdot,t,w) \\ \text{for some } \xi \in L^2(\Omega) \text{ such that } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } \Omega. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Moreover, we have

$$(u_1^* - u_2^*, u_1 - u_2)_H \geq \mu|e_1 - e_2|^2_{L^2(\Omega)} + \kappa|\nabla(w_1 - w_2)|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\forall t \in \overline{R_+},\ \forall u_i := \begin{pmatrix} e_i \\ w_i \end{pmatrix} \in \partial D(\varphi^t),\ \forall u_i^* \in \partial\varphi^t(u_i),\ i = 1, 2.$$

Now, combining expression (3.5) and (3.6), we see that our system (3.2)$\sim$(3.4) is reformulated as the evolution equation

$$u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t, u(t)) \ni f(t) \text{ in } H,\ t > 0,$$

where $g(t,u) := \begin{pmatrix} -\mu F\lambda(\cdot, t, w) \\ \sigma(w) \end{pmatrix}$ for $u := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ H^1(\Omega) \end{matrix}$, $f(t) := \begin{pmatrix} q^*(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

As to the operator $g(t, \cdot)$, it is not difficult to verify conditions (g1)$\sim$(g5).

Consequently, we see that all the assertions mentioned in Theorems 2.1 and 2.2 hold true for the non-autonomous system

$$(\mathrm{E}_s) \quad u'(t) + \partial\varphi^t(u(t)) + g(t, u(t)) \ni f(t),\ t > s,$$

and its limiting system

$$(\mathrm{E}_\infty) \quad u'(t) + \partial\varphi^\infty(u(t)) + g^\infty(u(t)) \ni f^\infty,\ t > 0,$$

where $g^\infty(u) := \begin{pmatrix} -\mu F\lambda^\infty(\cdot, w) \\ \sigma(w) \end{pmatrix}$ for $u := \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\Omega) \\ \times \\ H^1(\Omega) \end{matrix}$ and $f^\infty := \begin{pmatrix} q^{\infty *} \\ 0 \end{pmatrix}$ with $q^{\infty *} \in V^*$ determined by q^∞ and h^∞ as before.

References

1. A. Damlamian and N. Kenmochi, Evolution equations associated with non-isothermal phase transitions, pp. 62-77, in *Functional Analysis and Global Analysis*, ed. T. Sunada and P. W. Sy, Springer-Verlag, Singapore, 1997.

2. U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions variational inequalities, Advances Math., **3**(1969), 510-585.

3. K. Shirakawa, A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Asymptotic stability for evolution equations governed by subdifferentials, to appear in GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. Appl., **Vol. 11**, Gakkōtosho, Tokyo.

Nobuyuki KENMOCHI and Ken SHIRAKAWA
Department of Mathematics
Faculty of Education, Chiba University
1-33 Yayoi-chō, Inage-ku, Chiba, 263 Japan

Akio ITO and Noriaki YAMAZAKI
Department of Mathematics
Graduate School of Science and Technology, Chiba University
1-33 Yayoi-chō, Inage-ku, Chiba, 263 Japan

退化 p-Laplacian の拡散と cubic like の反応

竹内 慎吾 (早大理工)
E-mail: 697m5041@mn.waseda.ac.jp

1 はじめに

本講演は，早稲田大学の山田義雄教授との共同研究である．

退化 p-Laplacian を拡散項としてもち，cubic like [1]の反応項をもつ，次の反応拡散方程式を考える．

$$
(\mathrm{P})\begin{cases} u_t=\lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x+|u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t)\in(0,1)\times(0,+\infty),\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,1),\end{cases}
$$

ここで $p>2$，$q\geq 2$，$r>0$ とし，λ は正のパラメータとする．(P) の反応項は，source の項 $|u|^{q-2}u$ と，それよりも'強い'効果を持つ absorption の項 $|u|^{q+r-2}u$ とからなっており，このような反応項をもつ反応拡散方程式は，Fisher 方程式（あるいは Kolmogorov-Petrovsky-Piscunov 方程式）の一般化と考えられる．

よく知られている研究として，$p=q=2$，すなわち線型拡散のときの (P) についての Chafee-Infante の研究 [1] (Henry [3] も参照されたい) がある．彼らは大域解の存在，定常解全体の集合の構造，および各定常解の安定性を解明している．特に定常問題について，λ が $\lambda_n=((n+1)\pi))^{-2}$，$n=0,1,\cdots$ を減少して通り過ぎるとき，開区間 $(0,1)$ に n 個の零点をもつ 2 つの定常解が自明解から分岐するという美しい結果を得ている．

(P) に対する定常問題は

$$
(\mathrm{SP})\begin{cases} \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x+|\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r)=0, & x\in(0,1),\\ \phi(0)=\phi(1)=0.\end{cases}
$$

であるが，Guedda-Veron [2] は p-Laplacian（を摂動した作用素）の固有値問題として，$p=q>1$，$r>0$，すなわち homogeneous の場合について (SP) を研究した．彼らは，$p=q$ ならば (SP) は線型拡散と同じ分岐構造をもつこと，特に $p=q>2$ ならば，十分小さい λ に対しては flat core [2]をもつ定常解が存在することを示している．

我々が興味をもっているのは，さらに一般的な $p>2$，$q\geq 2$，$r>0$ という場合について大域解の存在，定常解全体の集合の構造，および各定常解の安定性を調べることである．本講演ではとりわ

[1] グラフの形状が 3 次関数のような関数をこう呼ぶことにする．

[2] 関数が平らになっている領域．Kamin-Veron [4] も参照されたい．

け，定常問題において，(退化) 非線型拡散が解の形状にどのような影響を与えるのか，解集合の構造が p, q, r にどのように依存するのかということを考察したい．

2 非定常問題 (P) についての諸結果

さて，非定常問題 (P) に対しては次の結果が得られる．

Theorem 2.1. *For any $u_0 \in L^2$, there exists a unique strong solution $u(\cdot)$ of* (P) *in* $[0, +\infty)$ *with satisfying:*

$$u \in C((0, +\infty); W_0^{1,p}),$$
$$t^{1/2} u_t(t) \in L^2(0, T; L^2) \quad \textit{for every } T > 0.$$

証明には，劣微分作用素の差の項をもつ非線型発展方程式の一般論（例えば Ȯtani [5]）と，$W_0^{1,p}$ の一様凸性を用いる．詳しくは Takeuchi-Yamada [6] を参照されたい．定理 2.1 を基礎として，さらに (P) が L^2 における dynamical system を生成することがわかるので，その一般論（例えば Henry [3]）を援用することにより，ω-limit set に関する次の諸性質が得られる．

Theorem 2.2. *For each $u_0 \in L^2$, $\omega(u_0)$ is non-empty, compact, invariant and connected in L^2 and*

$$\operatorname{dist}(u(t; u_0); \omega(u_0)) \equiv \inf_{v \in \omega(u_0)} \|u(t; u_0) - v\|_\infty \to 0 \qquad \textit{as } t \to +\infty. \tag{2.1}$$

Furthermore, it holds that

$$\omega(u_0) \subset E_\lambda \equiv \{\phi \in W_0^{1,p}; \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1 - |\phi|^r) = 0 \ \textit{in } (0, 1)\}.$$

定理 2.2 が主張しているのは，$L^2(0,1)$ のどんな関数を初期値としても，(P) の解は時間発展とともにある '定常解' に一様に近づくということである．ここで '定常解' と書いたのは次のような理由による：例えば定常解全体の集合 E_λ が離散集合であると示されたのならば，(P) の解はあるひとつの定常解に一様収束すると結論できる[3]が，まだ E_λ の性質については何もわかっていないからである[4]．

次のような比較定理も得られる（upper solution, lower solution の定義は [6] を参照されたい）．

Theorem 2.3. *Let u (resp. v) be an upper (resp. a lower) solution for* (P) *in* $[0, +\infty)$. *If* $u(0) \geq v(0)$, *then* $u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t)$ *for every* $t \in [0, +\infty)$.

---

[3] 実際，線型拡散のときにはそうであるというのは [1] の主張するところである．

[4] $p = q > 2$ のときに限れば，E_λ は λ が十分小さいときには離散集合と有限個の連続体との和集合になることが [2] によって知られている．よってこのときにはあるひとつの定常解に収束するとは結論できない．

3 定常問題 (SP) についての結果と考察

(SP) の解集合 E_λ の構造は time-map method によって調べられる．具体的には次のような方法である：(SP) の代わりに初期値問題

$$
\text{(IP)} \begin{cases} \lambda\psi_x + f(\phi) = 0, & x \in (0, +\infty), \\ \phi(0) = 0, \ \psi(0) = \alpha, \end{cases}
$$

$(\psi = |\phi_x|^{p-2}\phi_x,\ f(\phi) = |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r))$ を考える．その解を $\phi(\cdot;\alpha)$ とするとき，パラメータ α を変化させることにより $\phi(1;\alpha) = 0$ となるような ϕ を探すことができれば，それはとりも直さず (SP) の解になっているというわけである．

さて，以後，初期値問題 (IP) を考えよう．まず，(IP) の解は

$$
F(\phi) + \frac{\lambda(p-1)}{p}|\psi|^{p/(p-1)} = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{p/(p-1)}, \tag{3.1}
$$

を満たすことがわかる．ここで，$F(\phi) = \int_0^\phi f(s)ds$ である．(3.1) を $\phi\psi$-phase plane に図示すると図 1 のようになる．(IP) の解は，$\phi\psi$-phase plane 上では，P から矢印にそって出発している軌道に対応している．なお，点 $(\phi,\psi) = (\pm1, 0)$ は平衡点になっている[5]ことに注意しておこう．また，最終的には $\phi(1) = 0$ となる解が問題となるわけだから，パラメータ α の変域は $0 < \alpha \le \alpha_0$ に限ってよいことがわかる．

はじめて $\phi_x = 0$ となる x，すなわち

$$
X(\alpha) = \inf\{x \in (0, +\infty); \phi_x(x;\alpha) = 0\}
$$

を定義すれば，これは P から出発した軌道が Q に到達する‘時間’を表していると考えられる．その意味で $X(\alpha)$ を time-map とよんでいる．(3.1) と陰関数定理とから，$X(\alpha)$ は

$$
X(\alpha) = \left\{\frac{\lambda(p-1)}{p}\right\}^{1/p} \int_0^{\phi_\alpha} (F(\phi_\alpha) - F(\phi))^{-1/p} d\phi, \qquad \alpha \in (0, \alpha_0] \tag{3.2}
$$

と表せることがわかる．よって

$$
I(a) = \int_0^a (F(a) - F(\phi))^{-1/p} d\phi, \qquad a \in (0, 1]
$$

という補助関数を導入すれば，$X(\alpha)$ は

$$
X(\alpha) = \left\{\frac{\lambda(p-1)}{p}\right\}^{1/p} I(\phi_\alpha)
$$

と表される．さらに，ϕ_α は $(0, \alpha_0]$ から $(0, 1]$ の上への単調増加関数であるから，$X(\alpha)$ の $(0, \alpha_0]$ における挙動は本質的に $I(a)$ の $(0, 1]$ における挙動と同じである．$I(a)$ の挙動についての次の補題は重要である．

[5] 点 (0,0) も平衡点であるが，孤立した平衡点のためさほど重要ではない．

Lemma 3.1. *For any $p > 2$ and $q \geq 2$, $I(\cdot)$ is continuous in $(0,1]$. In particular, $I(1) = \lim_{a \to 1-0} I(a)$ is finite. Furthermore, $I(\cdot)$ has the following properties.*

(i) *For $p > q$, $I(\cdot)$ is strictly monotone increasing and*

$$\lim_{a \to 0+} I(a) = 0.$$

(ii) *For $p = q$, $I(\cdot)$ is strictly monotone increasing and*

$$\lim_{a \to 0+} I(a) = I_0 \equiv p^{1/p} \int_0^1 (1 - t^p)^{-1/p} dt.$$

(iii) *For $p < q$, there exists $a^* \in (0,1)$ such that $I(\cdot)$ is strictly monotone decreasing in $(0, a^*)$ and strictly monotone increasing in $(a^*, 1)$. Moreover, $I(\cdot)$ satisfies*

$$\lim_{a \to 0+} I(a) = +\infty.$$

証明は，端点における漸近挙動については

$$I(a) = O(a^{1-q/p}), \qquad a \to 0+, \tag{3.3}$$

$$(F(1) - F(\phi))^{-1/p} = O((1-\phi)^{-2/p}), \qquad \phi \to 1 - 0 \tag{3.4}$$

というオーダーで評価されることからわかる．他の性質については [6] を参照されたい．

補題 3.1 において，$I(1) < \infty$ は $X(\alpha_0) < \infty$ ということを意味しているわけだが，これは $\phi\psi$-phase plane において $P(0, \alpha_0)$ から出発した軌道が平衡点 $Q(1,0)$ に有限時間 $X(\alpha_0)$ で到達することが出来る[6]ことを意味している．(3.4) によれば，これは p-Laplacian の退化性によるものであり，q や r とは無関係である．そして，$Q(1,0)$ に到達したあと，軌道は任意有限時間そこに停留して ($Q(1,0)$ が平衡点だから許される)，それから $R(0, -\alpha_0)$ に向かうことができるのである．関数の言葉で表現すれば，原点から傾き $\alpha_0^{1/(p-1)}$ で出発した (IP) の解は，$x = X(\alpha_0)$ で 1 に達することができ，そのあと $x = X(\alpha_0) + c$ (c は任意の非負の実数) まで 1 をとり続け，それから 0 に向かって減少していくことができるのである．

$\phi\psi$-phase plane の対称性を考慮して以上の考察をすれば，(IP) の解の形状は完全に把握できる．その結果，目標であった (SP) の解集合の構造がわかるのだが，詳しい議論は [6] に譲るとして結果を述べたい．便宜上，いくつか言葉の定義をしておく．

$$\begin{aligned} E_\lambda^l &\equiv \{\phi \in E_\lambda; \phi \text{ has } l\text{-zero points in } (0,1) \text{ and } \phi_x(0) > 0\}, \\ -E_\lambda^l &\equiv \{\phi \in E_\lambda; \phi \text{ has } l\text{-zero points in } (0,1) \text{ and } \phi_x(0) < 0\} \\ &= \{-\phi; \phi \in E_\lambda^l\} \end{aligned}$$

($l = 0, 1, 2, \cdots$)，そして

$$\lambda_k(a) \equiv \frac{p}{p-1}(2(k+1)I(a))^{-p}, \qquad a \in (0,1], \quad k = 0, 1, \cdots.$$

E_λ の構造定理を述べる．図 2 と合わせて見て頂ければ幸いである．

[6] 線型拡散の場合はこのようなことはなく，$I(1) = +\infty$ であることが [1] により示されてる．

Theorem 3.1. *Let $p > q$. For each $\lambda > 0$ it holds that*

$$E_\lambda = \{0\} \bigcup_{l=0}^{\infty} \{\pm E_\lambda^l\},$$

[7] *where each E_λ^l satisfies the following properties.*

(a) $E_\lambda^0 = \{\phi_\lambda^0\}$ *for* $\lambda > 0$.
(b) *If* $\lambda \geq \lambda_l(1)$ *for* $l = 1, 2, \cdots$, *then* $E_\lambda^l = \{\phi_\lambda^l\}$.
(c) *If* $0 < \lambda < \lambda_l(1)$ *for* $l = 1, 2, \cdots$, *then E_λ^l is diffeomorphic to* $[0,1]^l$.

In particular, for every $\lambda > 0$ there exists a unique positive solution of (SP).

Theorem 3.2. [8] *Let $p = q$ and define*

$$\lambda_k = \frac{p}{p-1}(2(k+1)I_0)^{-p}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Then it holds that

(i) *if* $\lambda \geq \lambda_0$, *then* $E_\lambda = \{0\}$,
(ii) *if* $\lambda_k > \lambda \geq \lambda_{k+1}$, *then* $E_\lambda = \{0\} \bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E_\lambda^l\}$,

where E_λ^l has the same properties as (a), (b) *and* (c) *in Theorem* 3.1. *In particular,* (SP) *has a unique positive solution if and only if* $\lambda < \lambda_0$.

Theorem 3.3. *Let $p < q$ and let a^* be the constant given in Lemma* 3.1. *Then it holds that*

(i) *if* $\lambda > \lambda_0(a^*)$, *then* $E_\lambda = \{0\}$,
(ii) *if* $\lambda_k(a^*) \geq \lambda > \lambda_{k+1}(a^*)$, *then* $E_\lambda = \{0\} \bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E_\lambda^l\}$,

where $E_\lambda^l = \{\psi_\lambda^l\} \cup F_\lambda^l$ and F_λ^l has the following properties for each $l = 0, 1, \cdots$.

(a) *If* $\lambda = \lambda_l(a^*)$, *then* $F_\lambda^l = \{\psi_\lambda^l\}$.
(b) *If* $\lambda_l(a^*) > \lambda \geq \lambda_l(1)$, *then F_λ^l consists of a single element ϕ_λ^l satisfying* $\phi_{\lambda x}^l(0) > \psi_{\lambda x}^l(0)$ *and* $1 > |\phi_\lambda^l(x)| > |\psi_\lambda^l(x)|$ *for all $x \in (0,1)$ except for zero points of ϕ_λ^l and ψ_λ^l.*
(c) *If* $\lambda_l(1) > \lambda > 0$, *then F_λ^l is diffeomorphic to $[0,1]^l$ and $\phi_x(0) > \psi_{\lambda x}^l(0)$ for all* $\phi \in F_\lambda^l$.

In particular, for every $\lambda < \lambda_0(a^*)$, (SP) *has exactly two positive solutions* ψ_λ^0, ϕ_λ^0 *satisfying* $\phi_{\lambda x}^0(0) > \psi_{\lambda x}^0(0)$ *and* $\phi_\lambda^0(x) > \psi_\lambda^0(x)$ *for all* $x \in (0,1)$.

(3.4) によって，flat core をもつ解が存在するのは p-Laplacian の退化性にのみ起因していることはすでに述べた．さらに，これらの結果からわかることは，自明解からの分岐は p と q との homogeneity

[7] 正確にはもうひとつ '∪' が必要だが，省略した．
[8] 当然のことだが，この結果は [2] のものと同様である．

によってのみ起こるということである．これは結局のところ，(3.3) に起因している．$p<q$ の場合には正値解が二つ存在することも注目すべき点であろう．

4 各定常解の安定性について

3 章で紹介した定常解全体の集合の構造定理から，E_λ が次のように表現できることがわかる．

$$E_\lambda = D \bigcup_{l=1}^{\infty} \{\pm G_\lambda^l\},$$

ここで，D は (SP) の解からなる離散集合で，G_λ^l は次で与えられる：

$$G_\lambda^l \equiv \begin{cases} \text{empty set} & \text{if } \lambda \geq \lambda_l(1), \\ E_\lambda^l & \text{if } 0 < \lambda < \lambda_l(1) \text{ and } p \geq q, \\ F_\lambda^l & \text{if } 0 < \lambda < \lambda_l(1) \text{ and } p < q. \end{cases}$$

このように表したとき，定理 2.2 と構造定理から次の定理が得られる．

Theorem 4.1. *For every $u_0 \in L^2$, $u(t;u_0)$ satisfies one of the following conditions:*

(i) $\|u(t;u_0) - \phi\|_\infty \to 0$ *as $t \to +\infty$ for a stationary solution ϕ,*

(ii)

$$\mathrm{dist}(u(t;u_0); G_\lambda^l)_\infty \equiv \inf_{\phi \in G_\lambda^l} \|u(t;u_0) - \phi\|_\infty \to 0 \qquad \text{as } t \to +\infty$$

for a continuum G_λ^l, $l = 1, 2, \cdots$.

定理 4.1 と比較定理（定理 2.3）とから，各定常解の安定性[9]がわかる．その際，比較関数をどのように選ぶかが問題となるが，time-map の考察から適当な比較関数がとれることがわかる．結果は図 2 にあげておく．

参考文献

[1] Chafee, N. and Infante, E.F., A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Appl. Anal.* **4**, 17–37 (1974).

[2] Guedda, M. and Veron, L., Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310**, 419–431 (1988).

[3] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1981.

[9] 安定性の定義として，D に属する定常解に対しては L^∞ における Lyapunov の意味での安定性を採用する．G_λ^l に属する定常解に対しては [6] を参照されたい．

[4] Kamin, S. and Veron, L., Flat core properties associated to the p-Laplace operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118**, 1079–1085 (1993).

[5] Ôtani, M., On existence of strong solutions for $\frac{du}{dt}(t) + \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA*, **24**, 575–605 (1977).

[6] Takeuchi, S. and Yamada, Y., Aymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian, *submitted.*

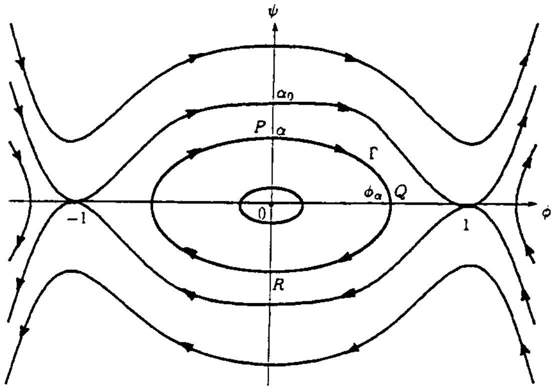

図 1 : $\phi\psi$-phase plane.

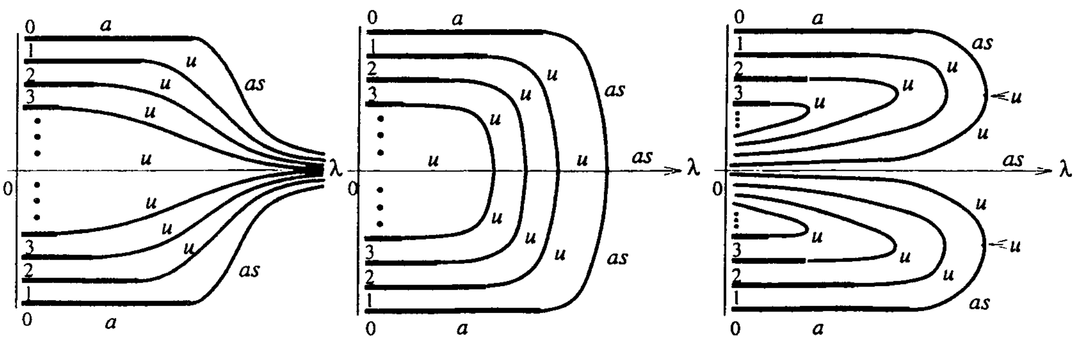

図 2 : 構造定理（分岐ダイアグラム）と各定常解の安定性. (s, u, a, as はそれぞれ安定, 不安定, attractive, 漸近安定を表す. 各 branch の数字は対応する定常解の零点の個数. 太い部分に対応するのは flat core をもつ定常解の集合 $G^{\prime}_{\lambda}$.)

The Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations with magnetic fields

Yoshihisa Nakamura Kumamoto Univ.

We consider the following nonlinear Schrödinger equations with a potential in a magnetic field,

$$
\begin{aligned}
i\partial_t u &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(t,x))^2 u + V(t,x)u + F(u) \\
&= H(t)u + F(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

where $A(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x), ...A_n(t,x))$ is a vector potential, $V(t,x)$ is a scalar potential, $F(u)$ is a local nonlinear operator.

We consider local Cauchy ploblem of Eqs.(1), in this article, we regard $\partial_t u$ as distribution on $\mathbb{R}^n$, we construct weak solutions u that $u(t) \in L^2$,H^1 or H^2, and consider local smoothing effects for H^1-solutions. Then, we need to consider linear part of Eqs(1),

$$
\begin{aligned}
i\partial_t u &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(t,x))^2 u + V(t,x)u \\
&= H(t)u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{2}
$$

To construct local solutions, suppose $A(t,x), V(t,x)$ and nonlinear term F respectively satisfy with the following assumptions. $\partial_x = (\partial_1, , , , , \partial_n)$ and multi-index $\alpha = (\alpha_1, , , , \alpha_n)$, $\partial_x^\alpha = (\partial_{x_1}^{\alpha_n}, , , , \partial_{x_n}^{\alpha_n})$.

Assumption A For $j = 1,..n$, $A_j(t,x)$ is a real-valued function of $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ such that $\partial_x^\alpha A_j(t,x)$ is C^1 for any multi-index α. For $|\alpha| \geq 1$ we have, with some $\varepsilon > 0$

$$
|\partial_x^\alpha B_{jk}(t,x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{-1-\varepsilon}, \ j,k = 1,..,n, \tag{3}
$$

$$|\partial_x^\alpha A(t,x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t A(t,x)| \le C_\alpha,\ (t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

where $B_{jk}(t,x) = \partial_j A_k(t,x) - \partial_k A_j(t,x)$.

Assumption V $V(t,x)$ is a real-valued function of $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ such that $\partial_x^\alpha V(t,x)$ is continuous for every α. For $|\alpha| \geq 2$ we have

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha,\ (t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Assumption F1 $F \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, with $F(0) = 0$.

Assumption F2 $|F'(\zeta)| \le M(1 + |\zeta|^{p-1}),\ \zeta \in \mathbb{C},\ 1 \geq p \le \infty$.

We can construct a weak solution for an initial data which is a L^2-function, under these assumption.

Theorem 1 Asaume (A,V,F1,F2) with $1 < p < 1+4/n$. For each $\phi \in L^2$,there is $T > 0$,depending only on $\|\phi\|_2$, and a unique solution $u \in C(I; L^2)$ of the Eqs.(1) with $u(0) = \phi$.

Theorem 1' In Th.1, $u \in C(I; L^2)$ depends on $\phi \in L^2$ continuously.

To construct H^1- and H^2-solution and consider local smoothing effects, we change assumptions of A and V.

Assumption A' For $j = 1,,,n, A_j(x)$, which is independent of t, is satisfied with Assumption.A.

Assumption V' $V(x)$, which is independent of t, is real-valued function and bounded from below. For $|\alpha| = 2$ we have,

$$\partial^\alpha V \in L^\infty \tag{6}$$

Remark Then there is V_0 which is satisfied with (V) and $V_0 \geq 1$, we have $V = V_0 + V_1$.

More we introduce the following assumption.

Assumption A" Under (A',V') we have,

$$|A(x)| \le C|V_0(x)^{1/2}|,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Then we rewrite Eqs(1) by

$$i\partial_t u = H_1 u + V_1 u + F(u), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(x))^2 + V_0(x) \tag{9}$$

We can construct a weak solution for an initial data which is a H^1-function, under these assumption.

Theorem 2 Assume (A',A",V',F1) and, if $n \geq 2$, (F2) with $1 < p < 1 + 4/(n-2)$. For each $\phi \in D(H_1^{1/2}) = H^1 \cap D(V_0^{1/2})$,there is $T > 0$, depending only on $\|H_1^{1/2}\phi\|_2$, and a unique solution $u \in C(I; D(H_1^{1/2}))$ to the Eqs.(1) $u(0) = \phi$.

Theorem 2' In Th.2, $u \in C(I; D(H_1^{1/2}))$ depends on $\phi \in D(H_1^{1/2})$ continuously.

At the same time, We can construct a solution for an initial data which is a H^2-function.

Theorem 3 Assume (A',A",V',F1) and, if $n \geq 4$, (F2) with $1 < p < 1 + 4/(n-4)$. For each $\phi \in D(H_1) = H^2 \cap D(V_0)$, there is $T > 0$, depending only on $\|H_1\phi\|_2$, and a unique solution $u \in C(I; D(H_1))$ to the Eqs.(1) $u(0) = \phi$.

Theorem 3' In Th.3, $u \in C(I; D(H_1))$ depends on $\phi \in D(H_1)$ continuously.

We consider the smoothing property of the solution to Eqs.(1) constructed in Theorem.2.

Theorem 4 Let u denote the solution to the Eqs.(1) in Theorem 2. Suppose $\mu > 1/2$.

In the case $1 \leq n \leq 6$, the following holds.

$$\int_I \|\langle x\rangle^{\mu-3/2}\langle D\rangle^{3/2}u\|_2^2 dt < \infty \tag{10}$$

where $\|\cdot\|_2$ is the L^2 -norm.

In the case $n \geq 7$, if $p < 1 + 2/(n-4)$, then the above inequality holds.

The following notations are used in this article.

$I = [0, T]$
$(\ ,\ )$: L^2-inner product.
$\|\ \|_q$: L^q-norm.
$L^{q,s} = L^s(I; L^q)$
$\|\ \|_{q,s}$: $L^{q,s}$-norm.
$r \equiv 4(p+1)/n(p-1)$
$r' = r/(r-1)$
$S = S(\mathbb{R}^n)$: the space of rapidly decreasing functions.

1 Preliminaries

Proposition2.1 (Yajima[3]) Let $T > 0$ be sufficient small. Then There exists a unique prpagator $U(t,s)$ defined for $0 < |t-s| < T$ by for Eqs.(2) with some properties.

Lemma2.2(Yajima[3])Let $T > 0$ be sufficient small, $0 < |t-s| < T$. Then for $2 \le q \le \infty$,

$$\|U(t,s)f\|_q \le C|t-s|^{-n(1/2-1/n)}\|f\|_{q'}, \tag{11}$$

where q' is the index conjugate to q: $1/q + 1/q' = 1$, and the constant C does not depend on t, s, and $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

We introduce the following spaces as Kato[1].

$X = X(I) = L^{2,\infty} \cap L^{p+1,r}$
$\bar{X} = \bar{X}(I) = C(I; L^2) \cap L^{p+1,r}$
$X' = X'(I) = L^{2,1} + L^{1+1/p,r'}$
norm$\|u\|_X = \|u\|_{2,\infty} \vee \|u\|_{p+1,r}$
$\|f\|_{X'} = \inf\{\|f_1\|_{2,1} + \|f_2\|_{1+1/p,r'} | f = f_1 + f_2\}$

Set $s = 0$, for simplify, we define two linear operators Γ and G by

$$(\Gamma\phi)(t) = U(t,0)\phi, \qquad t \in I, \tag{12}$$

$$(Gf)(t) = \int_0^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad t \in I. \tag{13}$$

Lemma2.3

$$\|\Gamma\phi\|_X \le C\|\phi\|_2, \qquad \phi \in L^2, \tag{14}$$

$$\|Gf\|_X \leq C'\|f\|_{X'}, \qquad f \in X', \tag{15}$$

where C, C' are independent of T.

Lemma2.4(Kato[1]) Assume that F satisfies (F1,2). Then $F \in C^1(X; X')$ (cf. Kato[1]) with

$$\|F(u)\|_{X'} \leq M_1 T\|u\|_X = M_2 T^\theta \|u\|_X^p, \quad u \in X, \tag{16}$$

$$\|F'(u)v\|_{X'} \leq (M_1 T + M_2 T^\theta \|u\|_X^{p-1})\|v\|_X, \quad u, v \in X, \tag{17}$$

where M_1, M_2 are some constants, $\theta = 1/r - 1/r' = 1 - 2/r > 0$.

2 The proof of Theorem.1.

We prove the theorem by solving the integral equation

$$u = \Phi(u) \equiv \Gamma\phi - iGF(u). \tag{18}$$

Let $E[\bar{E}]$ be the closed ball in $X[\bar{X}]$ with radius R and center at the origin.

Lemma3.1(Kato[1]) Φ maps E into $\bar{E}$ if R is sufficiently large and T is sufficiently small, both depending only on $\|\phi\|_2$.

Lemma3.2(Kato[1]) Φ is a contraction map in the $X-$metric.

Using the fact that a solution u of (1) coincides with the unique fixed point of Φ in E, Theorem.1 is proved.

3 The proof of Theorem.2

Lemma4.1(Kato[1]) Assume (V'). V can be written in the form $V = V_0 + V_1$, where both V_0, V_1 are real-valued, and

$$V_0 \in C^\infty; V_0 \geq 1; \partial^k V_0 \in L^\infty (k \geq 2), \tag{19}$$

$$\partial^k V_1 \in L^\infty (k \leq 2). \tag{20}$$

Lemma4.2$D(H_1) = H^2 \cap D(V_0)$, and $D(H_1^{1/2}) = H^1 \cap D(V_0^{1/2})$.

Set $\partial_A = \partial - iA, Q(x) = V_0(x)^{1/2}$, we introduce the following function spaces

$$Y = \{u \in X | \partial u \in X, Qu \in X\}, \|u\|_Y = \|u\|_X \vee \|\partial u\|_X \vee \|Qu\|_X,$$
$$Y' = \{f \in X | \partial f \in X', Qu \in X'\}, \|f\|_{Y'} = \|u\|_{X'} \vee \|\partial f\|_{X'} \vee \|Qu\|_{X'},$$

Lemma4.3 $\phi \in D(H_1)$ implies that $\partial\phi, \partial_A\phi, Q\phi \in D(H_1^{1/2}) = H^1 \cap D(V_0^{1/2})$.

Let Γ_1, G_1 be operators defined by(15)(16) with $U_1(t,s)$, a propagator for H_1.

Lemma4.4 Let $\phi \in D(H_1)$ and $f \in L^2(I; D(H_1))$. If $v = \Gamma_1 - iG_1 f$, then

$$\partial_A v = \Gamma_1 \partial_A \phi - iG_1((\partial Q)Qv + \partial f), \tag{21}$$

$$Qv = \Gamma_1 Q\phi - iG_1(\Delta Q + 2(\partial Q)(\partial_A v) + Qf). \tag{22}$$

Lemma4.5 Let $T > 0$ be sufficient small, $0 < |t - s| < T$. Then

$$\Gamma_1 : D(H_1^{1/2}) \to Y, \|\Gamma_1 \phi\|_Y \le c\|H_1^{1/2}\phi\|_2, \phi \in D(H_1^{1/2}), \tag{23}$$

$$G_1 : Y' \to Y, \|G_1 f\|_Y \le c\|f\|_{Y'}, f \in Y'. \tag{24}$$

Lemma4.6 Let $u \in Y, f = V_1 u + F(u)$. Then $f \in Y'$ with

$$\|f\|_{Y'} \le c(M_1 + K_1)T\|u\|_Y + M_2 T^\theta \|u\|_Y^p \tag{25}$$

where $\theta = 1 - 2/r > 0$, $K_1 < \infty$ is a constant depending on V_1, and M_1, M_2 are as in().

Let $E[\bar{E}]$ be the closed ball in $Y[\bar{Y}]$ with radius R and center at the origin. It is our plan to apply the contraction map theorem on E to the function Φ.

Lemma4.7E is a complete metric space in the X-metric.

Proof of Theorem 2. We set

$$u = \Phi_1(u) \equiv \Gamma_1 \phi - iG_1 F(u), \tag{26}$$

and apply Lemma4.1-7 to this map, we can proved as the Proof of Theorem 1.

4 The proof of Theorem 3.

Let $n \geq 4$. Set k as the following,

$$k = \frac{n}{4}(1 - \frac{1}{p}), \qquad (0 \leq k < 1). \tag{27}$$

Then by Sobolev's Lemma,

$$L^{2p} \supset H^{2k} \supset H^2 \supset D(H_1) = H^2 \cap D(V_0). \tag{28}$$

Lemma5.1(Kato[1]) F maps H^{2k} into L^2 continuously, sends bounded sets into bounded sets.

Note that, since $V_1 \in L^\infty$, $V_1 u \in L^2$ for $u \in L^2$.

We introduce the following spaces;

$$\begin{aligned} X, \bar{X} \quad &: \quad \textit{as above}. \\ Z \quad &= \quad \{u \in L^\infty(I; D(H_1)) |\, \partial_t u \in X\} \\ &= \quad \{u \in X |\, \partial_t u \in X, H_1 u \in L^{2,\infty}\} \subset L^\infty(I; L^{2p}) \end{aligned}$$

Lemma5.2 Γ_1 is bounded from $D(H_1) = H^2 \cap D(V_0)$ into $\bar{Z}$, with bounded independent of T.

Lemma5.3 Let $f \in L^{2,\infty}$ with $\partial_t f \in L^{q,s}$ for some q, s such that $\frac{1}{q} + \frac{2}{ns} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$. Then $f(0)$ exists with $\|f(0)\|_2 \leq \|f\|_{2,\infty}$, and $G_1 f \in Z$ with $\|G_1 f\| \leq cT\|f\|_{2,\infty} + c\|\partial_t f\|_{q,s}$. If, in particular, $f \in C(I; L^2)$, then $G_1 f \in \bar{Z}$.

Lemma5.4 $Z \subset L^\infty(I; H^2) \cap Lip(I; L^2) \subset C^\theta(I; H^{2k}) \subset C^\theta(I; L^{2p})$, with

$$\|u(t) - u(\tau)\|_2 \leq c|t - \tau| \|u\|_Z, \quad u \in Z, \tag{29}$$

$$\|u(t) - u(\tau)\|_{2p} \leq c|t - \tau|^\theta \|u\|_Z, \quad u \in Z, \tag{30}$$

where $\theta \equiv 1 - k > 0$.

Given $\phi \in D(H_1)$, set

$$E = \{u \in Z |\, \|u\|_Z \leq R, u(0) = \phi\}. \tag{31}$$

Define the map Φ_1 by (32).

Lemma5.5 Let $\phi \in D(H_1)$. Then Φ_1 maps E into E if R is sufficiently large and T sufficiently small, depending only on $\|H_1\phi\|_2$.

Lemma5.6 Φ_1 is a contraction map in the X-metric.

Lemma5.7 E is a complete metric space in the X-metric.

Proof of Theorem.3 We apply Lemma5.4-7 to the map Φ_1, and we can proved as the Proof of Theorem 1.

5 The proof of Theorem.4

We consider smoothing property of the solution u to Eqs.(1) in Theorem.2. First the property of the linear part of Eqs(1) is given by the following proposition the property of the linear part of Eqs(1).

Proposition6.1(Yajima[3])Suppose that (A,V) be satisfied for Eqs.(2). Let $T > 0$ be sufficient small, $\mu > 1/2$ and $\rho > 0$. Then there exists a constant $C_{\rho\mu} > 0$ such that for $s \in \mathbb{R}^1$

$$\int_{s-T}^{s+T} \|\langle x\rangle^{-\rho-\mu}\langle D\rangle^{\rho} U(t,s)f\|_2^2 dt \leq C_{\rho\mu}\|\langle D\rangle^{\rho-1/2}f\|_2^2 \qquad f \in S(\mathbb{R}^n). \quad (32)$$

By the above fact, the proof of Teorem.4 is sufficient to prove the next lemma.

Lemma6.2(Sjölin[2]) Assume (F1) and, if $n \geq 2$, (F2) with $1 \leq p < 1 + 4/(n-2)$. And let $u \in Y$, defined chapter.3. Then $F(u) \in L^1(I; H^1)$ for $1 \leq n \leq 6$. Under the additional assumption $p < 1 + 2/(n-4)$, $F(u) \in L^1(I; H^1)$ for $n \geq 7$.

References

[1] T.Kato, Nonlinear Schrödinger equations,in Schrödinger operators, Lecture Notes in Physics 345, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989

[2] P.Sjölin, Regularity of solutions to nonlinear equations of Schrödinger type, Tohoku Math. J. 45 (1993)

[3] K.Yajima, Schrödinger evolution equations with magnetic fields,J.d'Analyse Math. 56 (1991)

L^p - L^q Asymptotic Behavior of the Solutions to the Perturbed Schrödinger Equations

Naoyasu Kita
Graduate School of Polymathematics, Nagoya University,
Furōchō, Chikusaku, Nagoya, 464-01, Japan
e - mail address : m95012@math.nagoya-u.ac.jp

Abstract In this paper, we consider the asymptotic behavior of $e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W_+^*\phi$ in L^q - spaces $(2 \le q \le \infty)$ as $t \to \pm\infty$, for Schrödinger operators $H_0 = -\Delta$ and $H = -\Delta + V$.

1 Introduction and Theorem

In this paper, we consider the asymptotic behavior of the solutions to the perturbed Schrödinger equations.

$$\begin{cases} i\partial_t u = Hu \\ u(0,x) = \phi, \end{cases} \tag{1}$$

where u is a complex valued function of $(t,x) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n$ ($n \ge 3$ odd). $H = H_0 + V$ is the Schrödinger operator on $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$, where H_0 is the free Hamiltonian $H_0 = -\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. V is the potential function and we impose the following conditions on V:

Assumption (V).

Let $n^* = \dfrac{n-1}{n-2}$.

1. V is a real valued measurable function.

2. $(\langle x\rangle^\sigma V)^\wedge \in L^{n^*}(\mathbf{R}^n)$ for some $\sigma > 2/n^*$.

3. $\hat{V} \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

4. There exists some $\delta > \max\{n+2, \frac{3}{2}n - 2\}$ such that

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta V(x) \right| \le C\langle x\rangle^{-\delta} \quad \text{for any } |\beta| \le \frac{n-3}{2}.$$

In the above condition, $\hat{\phi}$ and $\check{\phi}$ denote the Fourier and inverse Fourier transform of ϕ, respectively. $\langle x \rangle$ denotes $(1+|x|^2)^{1/2}$. $L^p(\mathbf{R}^n)$ is the usual L^p space on $\mathbf{R}^n$ with the Lebesgue measure, and $L^p_\alpha(\mathbf{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n) | \langle x \rangle^\alpha f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$ is the weighted L^p - space. Note that $L^p_0(\mathbf{R}^n) = L^p(\mathbf{R}^n)$. $H^{s,\alpha}(\mathbf{R}^n)$ is the function space where $\langle x \rangle^\alpha (1-\Delta)^{s/2} f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. We denote the norm of these function spaces by $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^p_\alpha}$ or $\|\cdot\|_{H^{s,\alpha}}$, respectively. We denote the space of rapidly decreasing smooth functions by $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ and the space of compactly supported smooth functions by $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. For the Banach spaces X and Y, $\mathcal{B}(X;Y)$ is a set of bounded operators from X to Y. If $X=Y$, then we denote $\mathcal{B}(X;X)$ by $\mathcal{B}(X)$. For $z \notin \sigma(H_0)$ (or $z \notin \sigma(H)$), we denote the resolvent of H_0 (H resp.) by $R_0(z)$ ($R(z)$ resp.). For $\lambda \in \mathbf{R}$, we denote $R_0(\lambda \pm i0)$ (or $R(\lambda \pm i0)$) by $R_0^\pm(\lambda)$ (or $R^\pm(\lambda)$), where $R(\lambda \pm i0)$ is the weak limit of the resolvent, i.e. $(\phi, R(\lambda \pm 0)\psi) = \lim_{\epsilon \to +0} (\phi, R(\lambda \pm \epsilon)\psi)$

Under the assumption of V, the unbounded operator H on $\mathcal{H}$ can be extended as a lower semi-bounded selfadjoint operator with domain $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbf{R}^n)$ (see Reed - Simon [9]). Let e^{-itH} and e^{-itH_0} be the strongly continuous unitary group on $\mathcal{H}$ associated with H and H_0, respectively.

The wave operators $W_\pm$ are defined as follows.

$$W_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} \quad \text{in } \mathcal{H}. \tag{2}$$

Note that the strong limits in (2) exist and the wave operators have the following properties (see Agmon [1], Kuroda [7]).

(1) (partial isometry) For any $\psi \in \mathcal{H}$, $\|W_\pm \psi\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$.

(2) (completeness) RangeW_+ = RangeW_- = $L^2_{ac}(H)$, where $L^2_{ac}(H)$ is the absolutely continuous subspace of H ([10]).

(3) (intertwining property) For any bounded Borel function f on $\mathbf{R}^1$, we have $f(H)W_\pm = W_\pm f(H_0)$.

The wave operator plays an important role in the scattering theory. In quantum mechanics, we can guess that the solution $u(t) = e^{-itH}\phi$ to (1) approaches to the free state $v(t) = e^{-itH_0}\psi$ for some $\psi \in \mathcal{H}$ as t tends to $+\infty$, if $\phi \in L^2_{ac}(H)$ (the absolutely continuous subspace of H). This conjecture is true if we choose $\psi = W_+\phi$.

In addition to Assumption (V), we need the spectral condition on H.

Assumption (S). 0 is neither an eigenvalue nor resonance of H.

We call that 0 is the resonance of H if there exists a solution $u \in L^2_{-\gamma}(\mathbf{R}^n)$ for any $\gamma > 1/2$ but $u \notin L^2(\mathbf{R}^n)$ such that $-\Delta u + Vu = 0$. This spectral condition is very important since it assures that the resolvent $R^+(\lambda)$ has no singularity at $\lambda = 0$ (see Lemma 2 or [5]). If there is a singularity at $\lambda = 0$, then the decay order of $e^{-itH}P_{ac} \in \mathcal{B}(L^p; L^q)$ becomes less than $n(1/2 - 1/q)$ (see [6]) and we can not obtain the L^p boundedness of the wave operators $W_\pm$ (see Lemma 4 or [11]). It is known that H does not admit zero energy resonance if $n \geq 5$ or $V(x) > 0$.

We state the main theorem.

Let (V) and (S) be satisfied. (1) Let $2 \leq q < \infty$ and $1/p = 1 - 1/q$. Then, for $\phi \in L^2_{ac}(H) \cap L^p(\mathbf{R}^n)$, the quantity $e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W^*_\pm\phi$ belongs to $L^q(\mathbf{R}^n)$, and

$$\|e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W^*_\pm\phi\|_{L^q} = o(|t|^{-n(1/p-1/2)}) \quad \text{as } t \to \pm\infty. \tag{3}$$

(2) For $\phi \in L^2_{ac}(H) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$, the quantity $e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W^*_\pm\phi$ belongs to $L^\infty(\mathbf{R}^n)$, and

$$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\frac{n}{2}} \left(e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W^*_\pm\phi\right) = -\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}e^{\pm\frac{\pi n i}{2}}}(B_0 1, \phi)\{(-\Delta)^{-1}VB_0 1\} \tag{4}$$

holds in $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. In Theorem 1, $(-\Delta)^{-1}$ denotes the operator defined by the convolution with the Newton potential, i.e. $(-\Delta)^{-1}f(x) = \dfrac{\Gamma(n-2)}{(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\displaystyle\int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy$. B_0 is the 0 th coefficient of the expansion of operator $(I + R_0^+(\lambda)V)^{-1} \in \mathcal{B}(H^{1,-\alpha}(\mathbf{R}^n))$ for $\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \delta - \frac{n}{2} - 1$ (see Lemma 2 below or [3] p 64, [5]), and it has the following form :

$$B_0\psi(x) \quad = \quad (I + (-\Delta)^{-1}V)^{-1}\psi(x). \tag{5}$$

Note that the function $B_0 1$ means that the operator B_0 operates on the constant function 1 which is considered as an element in $H^{1,-\alpha}(\mathbf{R}^n)$.

For the characterization of the term in the right hand side of (4), we show the proposition. Let V satisfy Assumption (V). Then the following results hold.
(1) If $n \geq 3$, then $B_0 1 \in L^\infty$.
(2) $(-\Delta)^{-1}VB_0 1 \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$.
(3) Let $n \geq 5$. Then, for any q with $2 \leq q \leq \infty$, $(-\Delta)^{-1}VB_0 1 \in L^q(\mathbf{R}^n)$. The $L^p - L^q$ estimate of the operator $e^{-itH}P_{ac}$ is obtained by Journé, Soffer and Sogge [6]. They obtain the decay order of $e^{-itH}P_{ac} \in \mathcal{B}(L^p; L^q)$ is the same as that of e^{-itH_0} if the spectral condition (S) is satisfied. Recently, Yajima [11] showed the similar result of the decay by proving the L^p boundedness of the wave operators $W_\pm$. Yajima applied his results to the L^p-L^q estimates for the propagators of Klein-Gordon equations with potentials. The assumptions on V in this paper is almost similar to that of Yajima since we use his result to estimate the high energy part.

It follows from the definition of wave operators that the L^2 norm of the quantity in Theorem 1 tends to zero as $t \to \pm\infty$. But L^q-estimates for this quantity seems to be new.

We prove Theorem 1 only in the case of $t \to +\infty$, since we obtain the results in the case of $t \to -\infty$ in the same manner. We use the well-known formula which follows from Cook's method (cf. [10]):

$$(\psi, e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W^*_+\phi) = i\int_t^\infty (e^{-i(\sigma-t)H_0}\psi, Ve^{-i\sigma H}\phi)d\sigma. \tag{6}$$

We use $L^1 - L^\infty$ estimate of the operator $e^{-i\tau H_0}$:

$$\|e^{-i\tau H_0}\|_{\mathcal{B}(L^1;L^\infty)} \leq (4\pi\tau)^{-n/2}. \tag{7}$$

Since this estimate has a strong singularity at $\tau = 0$, we have to estimate the right hand side of (6) carefully when σ is near t. Hence we decompose (6) into two parts.

$$(\psi, e^{-itH}\phi - e^{-itH_0}W^*_+\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= i\int_{t+\epsilon}^{\infty}(e^{-i(\sigma-t)H_0}\psi, Ve^{-i\sigma H}\phi)d\sigma + i\int_t^{t+\epsilon}(e^{-i(\sigma-t)H_0}\psi, Ve^{-i\sigma H}\phi)d\sigma \\
&= i\int_{\epsilon}^{\infty}(e^{-isH_0}\psi, Ve^{-i(s+t)H}\phi)ds + i\int_t^{t+\epsilon}(e^{-i(\sigma-t)H_0}\psi, Ve^{-i\sigma H}\phi)d\sigma \qquad (8)\\
&\equiv I_\epsilon(t;\psi,\phi) + J_\epsilon(t;\psi,\phi). \qquad (9)
\end{aligned}$$

We further decompose $I_\epsilon(t;\psi,\phi)$ in (9) into two parts. We use a low energy cut off function $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ defined by

$$\eta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda < 1, \\ 0 & \text{if } 2 < \lambda. \end{cases} \qquad (10)$$

Then we have

$$\begin{aligned}
\text{(The right hand side of (9))} &= I_\epsilon(t;\psi,\eta(H)\phi) + I_\epsilon(t;\psi,(1-\eta(H))\phi) + J_\epsilon(t;\psi,\phi) \\
&\equiv I_{\epsilon,\ell}(t;\psi,\phi) + I_{\epsilon,h}(t;\psi,\phi) + J_\epsilon(t;\psi,\phi). \qquad (11)
\end{aligned}$$

We call $I_{\epsilon,\ell}(t;\psi,\phi)$ (resp. $I_{\epsilon,h}(t;\psi,\phi)$) the low energy part (resp. high energy part).

2 Estimate of Low Energy Part

We have the following result for the low energy part. Under the conditions (V) and (S), we obtain

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^{n/2} I_{\epsilon,\ell}(t;\psi,\phi) &= i\left(\int \phi(y)dy\right)\int_\epsilon^\infty (4\pi i)^{-n/2}(e^{isH_0}\psi, VB_0 1)ds \\
&\quad -i\int_\epsilon^\infty \frac{1}{(4\pi i)^{\frac{n}{2}}}(e^{isH_0}\psi, VB_{n-2}(-\Delta)^{-1}\phi)ds, \qquad (12)
\end{aligned}$$

uniformly with respect to $\psi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ with $\|\psi\|_{L^1} \leq 1$. In Theorem 2, the operators B_0 and $B_{n-2} \in \mathcal{B}(H^{1,\alpha})$ ($\alpha > \frac{n}{2} + 1$) are defined as

$$\begin{aligned}
B_0\psi(x) &= (I + (-\Delta)^{-1}V)^{-1}\psi(x), \qquad (13)\\
B_{n-2}\psi(x) &= \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{4\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(n-1)}\left(\int V(y)B_0\psi(y)dy\right)B_0 1(x). \qquad (14)
\end{aligned}$$

To obtain Theorem 2, we substitute the formular :

$$e^{-(s+t)H}\eta(H)\phi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \eta(\lambda)e^{-(s+t)\lambda}(R^+(\lambda) - R^-(\lambda))\phi d\lambda. \qquad (15)$$

As a result, we need some estimate of the resolvent for λ near 0. We introduce the lemma which was proved by Jensen and Kato (cf. [5], [3], [4]). [Jensen and Kato] Let $n \geq 3$ be odd. Assume that the spectral condition (S) holds. Then, for $\alpha > \frac{n}{2} + 1$, we have the expansion as follows.

$$(I + R_0^{\pm}(\lambda)V)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\pm\pi j/2}\lambda^{j/2}B_j + o(\lambda^{(n-1)/2}), \quad \text{as } \lambda \downarrow 0 \text{ in } \mathcal{B}(H^{1,-\alpha}(\mathbf{R}^n)), \qquad (16)$$

where B_j are bounded operators on $H^{1,-\alpha}(\mathbf{R}^n)$ and that they have the following properties.

$$B_j = 0 \quad \text{for } j \text{ odd when } 0 \le j < n-2. \tag{17}$$

One can differentiate the error term $o(\lambda^{(n-1)/2})$ any number of times in $\mathcal{B}(H^{1,-\alpha}(\mathbf{R}^n))$ and we have

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} o(\lambda^{(n-1)/2}) = o(\lambda^{(n-1)/2-j}). \tag{18}$$

Remark The existence of the inverse $(I+R_0^{\pm}(\lambda)V)^{-1}$ follows from Fredholm's alternative. Precisely speaking, for $\lambda \ge 0$, the operator $R_0^{\pm}(\lambda)V$ is a compact operator on $H^{1,-\alpha}(\mathbf{R}^n)$. Hence, we have only to show that the operator $I + R_0^{\pm}(\lambda)V$ is injective. This is true if the Hamiltonian H has neither nonnegative eigenvalues nor 0 resonance. If 0 is an eigenvalue or resonance of H, then the operator $(I + R_0^{\pm}(\lambda)V)^{-1}$ has some singularity at $\lambda = 0$ (see [3], [4], [5]).

3 Estimate of High Energy Part

For the high energy part, we have the following result. Under the assumption (V),

$$\lim_{t\to\infty} t^{n/2} I_{\epsilon,h}(t;\psi,\phi) = 0, \tag{19}$$

uniformly in $\|\psi\|_{L^1}(\mathbf{R}^n) \le 1$. To get the strong decay of $I_{\epsilon,h}$ in Theorem 3, we use the integration by parts (precisely speaking, the oscillatory integration technique). Since $I_{\epsilon,h}$ has the following form :

$$I_{\epsilon,h}(t;\psi,\phi) = \frac{i}{\pi}\int_{t+\epsilon}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-i(s+t)\lambda}(1-\eta(\lambda))(e^{-isH_0}\psi, V\mathrm{Im}\{R^+(\lambda)\}\phi)d\lambda ds, \tag{20}$$

we need some estimates of the resolvent and its derivatives for large λ.

[Jensen and Kato] Assume that $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\gamma}$, $(\gamma > 2N+1)$. Let $N + \frac{1}{2} < \alpha < \gamma - N - \frac{1}{2}$. Then, for $j = 0, \dots, N$, we have

$$\|\frac{d^j}{d\lambda^j} R^{\pm}(\lambda)\|_{\mathcal{B}(L^2_\alpha;L^2_{-\alpha})} = \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{j+1}{2}}) \quad \text{as } \lambda \to \infty. \tag{21}$$

4 Estimate of $J_\epsilon(t;\psi,\phi)$

Under the conditions (V) and (S), we obtain

$$|J_\epsilon(t;\psi,\phi)| \le C\epsilon^{1/2} t^{-n/2}\|\psi\|_{L^1}\|\phi\|_{L^1}. \tag{22}$$

To obtain Theorem 4, we need the lemmas. Let $\hat{V} \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

(1) For any $\tau \in \mathbf{R}$, the operator $e^{i\tau H_0} V e^{-i\tau H_0}$ belongs to $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}^n))$ where $1 \le p \le \infty$, and

$$\|e^{i\tau H_0} V e^{-i\tau H_0}\|_{\mathcal{B}(L^p)} \le (8\pi)^{-n/2}\|\hat{V}\|_{L^1}. \tag{23}$$

(2) For any $\tau, \sigma \in \mathbf{R}$ with $\tau \neq \sigma$, the operator $e^{i\tau H_0} V e^{-i\sigma H_0}$ belongs to $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}^n); L^q(\mathbf{R}^n))$ where $1 \leq p \leq 2, 1/p + 1/q = 1$, and

$$\|e^{i\tau H_0} V e^{-i\sigma H_0}\|_{\mathcal{B}(L^p;L^q)} \leq (8\pi)^{-n/2}(4\pi|\tau - \sigma|)^{-n(1/p-1/2)}\|\hat{V}\|_{L^1}. \tag{24}$$

From Lemma 4, we obtain Let $\hat{V} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$ and $1/p + 1/q = 1$. Then,

$$\|e^{i\tau_1 H_0} V e^{i\tau_2 H_0} V \dots V e^{i\tau_N H_0}\|_{\mathcal{B}(L^p;L^q)} \leq (4\pi|\sum_{j=1}^{N} \tau_j|)^{-n(1/p-1/2)}((8\pi)^{-n/2}\|\hat{V}\|_{L^1})^{N-1}. \tag{25}$$

The following result was proved by Yajima. [Yajima] Assume that the conditions (V) and (S) hold. Then, for $1 \leq p \leq \infty$, the wave operators $W_\pm$ can be extended as an operators in $\mathcal{B}(L^p(\mathbf{R}^n))$ and there exists a positive constant C such that

$$\|W_\pm\|_{\mathcal{B}(L^p)} \leq C. \tag{26}$$

For the proof of Lemma 4, see Yajima [11]. Note that we have the formula :

$$\begin{aligned} &J_\epsilon(t; \psi, \phi) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} i^j \int_t^{t+\epsilon} \int_{\sigma_1}^{\infty} \cdots \int_{\sigma_{j-1}}^{\infty} (e^{-i(\sigma_j - \sigma_{j-1})H_0} V \dots V e^{-i(\sigma_1 - t)H_0}\psi, V e^{-i\sigma_j H_0} W_+^* \phi) d\sigma_j \dots d\sigma_1 \\ &\quad + i^N \int_t^{t+\epsilon} \int_{\sigma_1}^{\infty} \cdots \int_{\sigma_{N-1}}^{\infty} (e^{-i(\sigma_N - \sigma_{N-1})H_0} V \dots V e^{-i(\sigma_1 - t)}\psi, V e^{-i\sigma_N H}\phi) d\sigma_N \dots d\sigma_1. \end{aligned} \tag{27}$$

By using Corollary 4 and Lemma 4, we obatin Theorem 4. we obtain Theorem 1 from Theorem 2, 3 and 4.

References

[1] Agmon, S., *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 2 (1975), pp. 151-218.

[2] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo. 1983.

[3] Jensen, A., *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions results in $L^2(\mathbf{R}^m)$, $m \geq 5$*, Duke Math. J. 47, 1980, pp. 57-80.

[4] Jensen, A., *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions results in $L^2(\mathbf{R}^4)$*, J. Math. Anal. Appl. 101, 1984, pp. 397-422.

[5] Jensen, A., and Kato, T., *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decayof the wave functions*, Duke Math. J. 46, 1979, pp. 583-611.

[6] Journé, J. L. and Soffer, A. and Sogge, C. D., *Decay estimates for Schrödinger operators*, Comm. Pure Appl. vol XLIV, 1991, pp. 573-604.

[7] Kuroda, S. T., *Scattering theory for differential operators, I and II*, J. Math. Soc. Japan 25 (1972), pp. 75-104 and 222-234.

[8] Reed, M., and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis*, Academic Press, New York-San Francisco-London. (1975).

[9] Reed, M., and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier Analysis, Self-adjointness*, Academic Press, New York-San Francisco-London. (1975).

[10] Reed, M., and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics III, Scattering Theory*, Academic Press, New York-San Francisco-London. (1979).

[11] Yajima, K., *The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan. (1995).

非線形波動方程式の爆発解の性質について

太田 雅人 (静岡大学工学部)

Email : tsmoota@eng.shizuoka.ac.jp

この講演報告ノートは高村博之氏 (筑波大学数学系) との共同研究 [10] に基づく.

§1. 導入

半線形単独波動方程式

$$u_{tt} - \Delta u = F(u, u_t, \nabla u), \quad (t, x) \in \mathbf{R}^{1+n} \tag{1}$$

の解の特異性について考える. 多くの非線形項に対して (1) に対する初期値問題の解は一般には大域的に存在せず, 有限時間内に「爆発する」ことはよく知られているが, 実際にどのように爆発するのかはあまり分かっていない. すなわち

問題A (1) に対する初期値問題の解が大域的に存在しないとき, いつどこでどのように爆発するのか?

という問題に対する結果はあまり得られていない. この問題に関して $n = 1$, $F(u, u_t, \nabla u) = |u|^\alpha$ $(1 < \alpha < \infty)$ の場合に Caffarelli and Friedman [2] は次のような結果を示している.

定理A (Caffarelli and Friedman [2]) $1 < \alpha < \infty$ とする. $t = 0$ で滑らかな初期データを与えたとき $u_{tt} - u_{xx} = |u|^\alpha$ $(t > 0, x \in \mathbf{R})$ の古典解 $u(t,x)$ は時間大域的に存在するか, さもなければ (t,x) 平面内のある C^1 space-like 曲線 $t = \varphi(x)$ 上で無限大となる. すなわち $|\varphi'(x)| < 1$ $(x \in \mathbf{R})$ なる $\varphi \in C^1(\mathbf{R})$ が存在し, $\{(t,x) : t < \varphi(x)\}$ では $u(t,x)$ は有限で $\lim_{t \to \varphi(x) - 0} |u(t,x)| = \infty$ となる. さらにその blow-up rate は常微分方程式 $u_{tt} = |u|^\alpha$ のものと同じである.

古典解 $u(t,x)$ が存在する最大の領域の境界 $t = \varphi(x)$ を blow-up boundary と呼ぶ. Caffarelli and Friedman [3] では $n = 2, 3$ の場合にある条件をみたす初期データに対して定理Aと同様の結果, すなわち blow-up boundary は時空内の C^1 space-like 曲面となり, blow-up rate は常微分方程式 $u_{tt} = |u|^\alpha$ のものと同じになることを示している.

問題Aは初期データを与えて初期値問題の解の特異性を調べるという問題であったが, 逆に初めに与えた特異性をもつ解を構成するという問題も考えられる. すなわち

問題B　$\Omega \subset \mathbf{R}^{1+n}$ が与えられたとき, $\mathbf{R}^{1+n} \setminus \overline{\Omega}$ で (1) をみたし $\partial\Omega$ 上で特異性をもつ関数 $u(t,x)$ を求めよ. 但し $\mathbf{R}^{1+n} \setminus \overline{\Omega}$ はある初期面 $t = t_0$ を含むとする.

この問題が肯定的に解決されれば $t = t_0$ で初期データを与えた (1) に対する初期値問題の解で $\partial\Omega$ 上で特異性をもつ解が構成されたことになる. もちろん定理Aにより $u_{tt} - u_{xx} = |u|^\alpha$ に対しては $\partial\Omega$ が space-like 曲線でないときは問題Bの解は存在しないのでどのような $\Omega \subset \mathbf{R}^{1+n}$ に対して問題Bが肯定的に解けるのかまたは解けないのかが問題となる. この問題Bに関して Kichenassamy and Littman, Kichenassamy の一連の論文 [8], [5], [6] では一般化された Fuchs 型偏微分方程式の理論を用いて $F(u) = e^u$ の場合をモデルケースとして一般次元で与えられた space-like 曲面上に特異性をもつ解を構成している. 但し 常微分方程式 $u_{tt} = F(u)$ の爆発解を基礎にしてその摂動として (1) の解を構成しているので blow-up rate は常微分方程式 $u_{tt} = F(u)$ のものと同じである. 非線形波動方程式に関するその他の結果については [1], [7], [11] を参照.

§2. 今回得られた結果

高村博之氏（筑波大学数学系）との共同研究 [10] では $n = 1$, $F(u, u_t, \nabla u) = u_t^2 - u_x^2$ の場合, すなわち

$$u_{tt} - u_{xx} = u_t^2 - u_x^2, \quad (t,x) \in \mathbf{R}^{1+1} \tag{2}$$

に対して問題Bについて調べたところ, 常微分方程式 $u_{tt} = u_t^2$ の爆発解の摂動とは考えられない, これまで考えていたのよりも遥かに複雑な爆発現象が起こることが分かったので報告する.

定理1　任意の $p > 0$, $l \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ に対して

$$\sum_{j+k=l} |\partial_t^j \partial_x^k u(t,x)| = O(|(t,x)|^{-p-l}) \quad \text{near} \quad (t,x) = (0,0) \tag{3}$$

を満たす (2) の解 $u(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R}^{1+1} \setminus \{(0,0)\})$ が存在する.

定理 2　$g \in C^\infty(\mathbf{R})$ は $g(x) > 0$ for $x \in \mathbf{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx > 2$ を満たすと仮定する．このとき $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = g(x)$ なる (2) の解 $u(t,x)$ の blow-up boundary は space-like C^∞ 曲線となる．

定理 3　$g \in C^\infty(\mathbf{R})$ はある定数 $R > 0$ に対して $g(x) = g(-x)$, $g(x) > 0$ for $|x| < R$, $g(x) = 0$ for $|x| \geq R$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2$ を満たすと仮定する．このとき $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = g(x)$ なる (2) の解 $u(t,x)$ の blow-up boundary は $t = R + |x|$ となる．

注　常微分方程式 $u_{tt} = u_t^2$ の一般解は $u(t) = -\log(c_1 - t) + c_2$ だからこの blow-up rate は定理 1 で $p = 0$ の場合に対応する．定理 1 では (2) にはこれ以外に任意冪 $p > 0$ の blow-up rate が存在することを主張している．定理 2 は $F(u) = |u|^\alpha$ の場合と同様にある space-like 曲線上で爆発するための十分条件を与えている．定理 1 と定理 3 から (2) の blow-up boundary は space-like 曲線になるとは限らない．

証明方法は Cole-Hopf-Nirenberg 変換) $u = -\log v$ $v = exp(-u)$ によって (2) が線形波動方程式 $v_{tt} - v_{xx} = 0$ に変換されるという有名事実に基づく．線形波動方程式の解の零点が (2) の解の爆発点に対応する．$H(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ を $H(x) = \exp(-|x|^{-p})$ near $x = 0$, $H(x) > 0$ for $x \neq 0$ なる関数とすると $u(t,x) = -\log\{H(x-t) + H(x+t)\}$ が定理 1 の (3) を満たす (2) の解 $u(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R}^{1+1} \setminus \{(0,0)\})$ となる．

今回発見された爆発現象が (2) 以外にも一般的に起こるかどうかは大変興味深い未解決問題である．但し 次の §で示すように $F(u, u_t, u_x) = f(u)(u_t^2 - u_x^2)$ に対しては (1) は $F(u, u_t, u_x) = u_t^2 - u_x^2$ の場合と同様な未知関数に対する非線形変換によって線形化できるので (2) と同様な結果が成り立つ．今回の結果をモデルケースとして将来，一般論が展開されることを期待します．

§3. Cole-Hopf-Nirenberg 変換の一般化とその応用

この §では

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u)(|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2) = 0 \tag{4}$$

という形の半線形波動方程式は一般化された Cole-Hopf-Nirenberg 変換

$$v = G(u) = \int_0^u \exp\left(\int_0^s f(r)dr\right) ds$$

によって線形波動方程式 $\partial_t^2 v - \Delta v = 0$ に変換されることを示す. $f(r) = -1$ のとき $v = G(u) = 1 - \exp(-u)$ となるが これはCole-Hopf-Nirenberg 変換である. (4) に対する初期値問題に関して任意の滑らかな初期データを与えたとき大域解が存在するための $f(u)$ に対する必要十分条件が一般化された Cole-Hopf-Nirenberg 変換を用いると求まる. よく知られた事実かも知れないが以下でその定理と証明を付記する.

Consider the following Cauchy problem:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u)(|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2) = 0, \qquad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \tag{5}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{6}$$

where $u = u(t, x)$ is a real valued unknown function of $(t, x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $f(r)$ is a real valued smooth function of $r \in \mathbf{R}$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$, $\nabla = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$, $\partial_t = \partial/\partial t$ and $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

Theorem. *Let $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Then, for any $(u_0, u_1) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)\times C^\infty(\mathbf{R}^n)$ there exists a global classical solution $u \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$ of* (5)–(6) *if and only if f satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\int_0^s f(r)dr\right) ds = +\infty \quad \textit{and} \quad \int_{-\infty}^0 \exp\left(\int_0^s f(r)dr\right) ds = +\infty. \tag{7}$$

例として $f(r) = cr^k$ $(c \in \mathbf{R}, k \in \{0, 1, 2, \cdots\})$ という場合を考えると 条件 (7) がみたされるための必要十分条件は $c \geq 0$ かつ k が奇数であることが容易に分かる.

Proof of Theorem. Introduce the function

$$G(u) = \int_0^u \exp\left(\int_0^s f(r)dr\right) ds, \quad u \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

and let $\alpha = \lim_{u\to-\infty} G(u)$ and $\beta = \lim_{u\to+\infty} G(u)$. Then, since $G'(u) = \exp(\int_0^u f(r)dr)$ > 0 for all $u \in \mathbf{R}$, G is a C^∞-diffeomorphism from $\mathbf{R}$ onto the interval (α, β). Therefore, there exists the inverse function H of G, which is a C^∞-diffeomorphism from (α, β) onto $\mathbf{R}$. Note that $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$, because $G(0) = 0$ and $G'(u) > 0$ for all $u \in \mathbf{R}$.

First, we show that (7) is a sufficient condition for which the Cauchy problem (5)–(6) has a global smooth solution for any smooth initial data. In this case, by the assumption (7), we have $\alpha = -\infty$ and $\beta = +\infty$. Let $(u_0, u_1) \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \times C^\infty(\mathbf{R}^n)$ and let $v(t,x)$ be the solution of the linear wave equation $\partial_t^2 v - \Delta v = 0$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ with $v(0,x) = G(u_0(x))$ and $\partial_t v(0,x) = G'(u_0(x))u_1(x)$. Then $u(t,x) = H(v(t,x))$ is a global classical solution of (5)–(6) such that $u(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$. In fact, since $G(u_0(x)), G'(u_0(x))u_1(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, we have $v(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$, so $u(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$. Moreover, since

$$G''(u) = f(u)G'(u), \quad H'(v) = \frac{1}{G'(H(v))},$$

$$H''(v) = -\frac{G''(H(v))H'(v)}{\{G'(H(v))\}^2} = -\frac{G''(H(v))}{G'(H(v))}H'(v)^2 = -f(H(v))H'(v)^2, \tag{9}$$

$$\partial_\alpha u(t,x) = H'(v(t,x))\partial_\alpha v(t,x),$$

$$\partial_\alpha^2 u(t,x) = H''(v(t,x))|\partial_\alpha v(t,x)|^2 + H'(v(t,x))\partial_\alpha^2 v(t,x),$$

where $\alpha = 0, 1, \cdots, n$ and $\partial_0 = \partial_t$, we have

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) \\
&= H'(v(t,x))(\partial_t^2 v(t,x) - \Delta v(t,x)) + H''(v(t,x))(|\partial_t v(t,x)|^2 - |\nabla v(t,x)|^2) \\
&= H''(v(t,x))(|\partial_t v(t,x)|^2 - |\nabla v(t,x)|^2) \\
&= -f(u(t,x))(|\partial_t u(t,x)|^2 - |\nabla u(t,x)|^2).
\end{aligned}$$

Therefore, $u(t,x)$ is a global classical solution of (5)–(6).

On the other hand, it follows from (9) that $u(t,x) = H(t)$ is a classical solution of (5) in $(\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n$ such that $\lim_{t\to\alpha+0} u(t,x) = -\infty$ and $\lim_{t\to\beta-0} u(t,x) = +\infty$ for all $x \in \mathbf{R}^n$. Hence, (7) is also a necessary condition for which the Cauchy problem (5)–(6) has a global classical solution for any smooth initial data. $\square$

参考文献

[1] Alinhac S., *"Blowup for Nonliear Hyperbolic Equations."* Birkhäuser (1995).

[2] Caffarelli L. A. and Friedman A., *Differentiability of the blow-up curve for one-dimensional wave equations.* Arch. Rational Mech. Anal., **91** (1985), 83–98.

[3] Caffarelli L. A. and Friedman A., *The blow-up boundary for nonlinear wave equations.* Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986), 223–241.

[4] Hopf E., *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., **3** (1950), 201–230.

[5] Kichenassamy S., *Fuchsian equations in Sobolev spaces and blow-up.* J. Differential Equations, **125** (1996), 299–327.

[6] Kichenassamy S., *The blow-up problem for exponential nonlinearities.* Comm. Partial Differential Equations, **21** (1996), 125–162.

[7] Kichenassamy S., *"Nonlinear Wave equations."* Dekker (1996).

[8] Kichenassamy S. and Littman W., *Blow-up surfaces for nonlinear wave equations, Part I, II.* Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993), 431–452, 1869–1899.

[9] Klainerman S., *Global existence for nonlinear wave equations.* Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 43–101.

[10] Ohta M. and Takamura H., *Remarks on the blow-up boundaries and rates for non-linear wave equations.* Nonlinear Anal., T.M.A. (to appear).

[11] Strauss W. A., *"Nonlinear Wave equations."* CBMS Number 73 (1989).

空間２次元のにおける異なるスピードをもつ波動方程式のシステムの時間大域解について

久保英夫　(静岡大)

始めに、この研究は星賀彰氏（北見工大）との共同研究であることをお断りしておきます。

1　問題を考える動機

次の様な波動方程式のシステムの初期値問題を考える。

$$\Box_i u^i \equiv \partial_t^2 u^i - c_i^2 \Delta u^i = F^i(\partial u, \partial^2 u) \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \tag{1. 1}$$

$$u^i(x, 0) = \varepsilon f^i(x), \quad \partial_t u^i(x, 0) = \varepsilon g^i(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^2. \tag{1. 2}$$

ただし、$i = 1, \cdots, m$, $u = (u^1, \cdots, u^m)$, $\partial = (\partial_t, \partial_1, \partial_2)$, $\varepsilon > 0$ とする。伝播スピード $c_i > 0$ $(i = 1, \cdots, m)$ は、

$$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_m > 0 \tag{1.3}$$

を満たすものとする。また、f^i, g^i は台コンパクトな滑らかな関数で、非線型項 F^i に対しては次の仮定をおく。

$$F^i(\partial u, \partial^2 u) = O(|\partial u|^3 + |\partial^2 u|^3) \quad \text{near} \quad (\partial u, \partial^2 u) = 0.$$

Examlpe. 次の初期値問題を考える。

$$\Box_1 u^1 = (\partial_t u^2)^3 + 3(\partial_t u^2)^2(\partial_t u^1) \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \tag{1. 4}$$

$$\Box_2 u^2 = (\partial_t u^1)^3 + 3(\partial_t u^1)^2(\partial_t u^2) \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, \infty). \tag{1. 5}$$

ここで、u^1, u^2 はそれぞれ (1.2) $(i = 1, 2)$ を満たすものとする。このとき、伝播スピード c_1, c_2 に応じて次の事実が成り立つ。

Case 1: $c_1 = c_2$ のとき。

どんなに小さな ε に対しても、$f^i(x)$, $g^i(x)$ の取り方によっては、u^1, u^2 が有限時間内に爆発する。実際、$w = u^1 + u^2$ とおくと w は次を満たすので、例えば [4] から、w の一階偏導関数が有限時間内に発散することが分る。

$$\Box_1 w = (\partial_t w)^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, \infty). \tag{1. 6}$$

Case 2: $c_1 \neq c_2$ のとき。

十分小さな ε に対して、時間大域解が存在する。これは、最近、北大の上見練太郎先生と横山和義氏の共同研究によって明らかにされた ([1])。

Problem: 以上を踏まえて、次のような問題を設定する：
十分小さな ε に対して、$f^i(x)$, $g^i(x)$ の取り方によらず、時間大域解が存在するような、非線型項のクラスを定めよ。

2 結果

簡単の為、非線型項は３次の項のみから構成されいるものとし、２階の偏導関数については１次式であることを仮定すると、F^i は次のように書ける。

$$F^i(\partial u, \partial^2 u) = \sum_{j,k,l=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{2} D_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha u^j \partial_\beta u^k \partial_\gamma \partial_\delta u^l \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, m.$$

ただし定数 $D_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は、次のような対称性を満たすものとする。

$$D_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ljki}^{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ljki}^{\alpha\beta\delta\gamma}.$$

このとき、F^i が [1] によって導入された null-condition を満たすことは、次と同値である：

$$(X_0)^2 - c_i^2\{(X_1)^2 + (X_2)^2\} = 0$$

なる任意の３次元ベクトル $X = (X_0, X_1, X_2)$ に対して

$$C_i(X) \equiv \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{2} D_{iiii}^{\alpha\beta\gamma\delta} X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta = 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{2.7}$$

が成り立つ。

さて、得られた結果は次の通りである。

Theorem 1 非線型項 $F^i (i = 1, \cdots, m)$ が条件 (2.7) を満たすならば、初期値問題 (1.1), (1.2) は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して滑らかな時間大域解を一意的に持つ。

Remark: システム (1.1) において伝播のスピード c_i が全て等しい場合、F^i が 条件 (2.7) を満たすならば初期値問題 (1.1), (1.2) は時間大域解を持つことが S. Katayama [2] において示されている。（空間３次元で非線型項が２次の場合、同様の結果が S. Klainerman [3] によって得られている。）従って、我々の結果はこの仕事の拡張にあたる。

3 非線型項

議論を明確にするために、F^i を

$$F^i(\partial u, \partial^2 u) = N^i(\partial u^i, \partial^2 u^i) + R^i(\partial u, \partial^2 u), \tag{3.8}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
N^i(\partial u^i, \partial^2 u^i) &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{2} D_{iiii}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^i \partial_\gamma \partial_\delta u^i, \\
R^i(\partial u, \partial^2 u) &= \sum_{(j,k,l)\neq(i,i,i)} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{2} D_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha u^j \partial_\beta u^k \partial_\gamma \partial_\delta u^l
\end{aligned}
$$

と表し、N^i を Null form と呼ぶことにする。R^i の処理は、R. Agemi - K. Yokoyama [1] によるところが多いので、ここでは、Null form についてのみ考察する。

条件 (2.7) を満たすNull form N^i は次の項の一次結合で表されることが知られている。

$$
\begin{aligned}
N_1^i &= ((\partial_0 u^i)^2 - c_i^2 |\nabla u^i|^2) \partial_\alpha \partial_\beta u^i, \\
N_2^i &= \partial_\alpha u^i \partial_\beta ((\partial_0 u^i)^2 - c_i^2 |\nabla u^i|^2), \\
N_3^i &= \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^i \Box_i u^i, \\
N_4^i &= \partial_\alpha u^i (\partial_\beta u^i \partial_\gamma \partial_\delta u^i - \partial_\gamma u^i \partial_\beta \partial_\delta u^i).
\end{aligned}
$$

ただし、$\partial_0 = \partial_t$ で $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2$ とする。

Null form の項から時間変数の decay を余分にかせぐためには、

$$L_j = x_j \partial_t + t \partial_j, (j = 1, 2), \ S = t\partial_t + r\partial_r, \ \Omega = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1$$

を用いて、恒等式

$$\partial_i = -\omega_i \partial_t + \frac{1}{t} L_i + \frac{\omega_i}{t+r} S - \sum_{j=1}^{2} \frac{r\omega_i \omega_j}{t(t+r)} L_j \quad \omega_i = \frac{x_i}{|x|} \quad i = 1, 2 \tag{3.9}$$

を使うことが有効である。ところが、もし $c_i \neq 1$ ならば $\Box_i$ と L_j $(j = 1, 2)$ は commute せず、恒等式 (3.9) を使うことは困難となる。これがスピードが異なる場合に Null form を扱いづらい理由である。しかしながら、我々は

$$\partial_r = -\frac{1}{c_i} \partial_0 + \frac{r - c_i t}{c_i r} \partial_0 + \frac{1}{r} S \quad \text{for} \quad r > 0 \tag{3.10}$$

及び

$$\nabla = \omega \partial_r - \frac{x^\perp}{r^2} \Omega \quad \text{for} \quad r > 0, \tag{3.11}$$

を用いることによりその困難を回避することに成功した。ここで、$x = r\omega, \ |\omega| = 1, x^\perp = (x_2, -x_1)$.

例えば、$Q_i(u) = (\partial_0 u)^2 - c_i^2 |\nabla u|^2$ は、次のような式変形を行なうことによって、一般の2次式よりも強い減衰評価を満たすことが分かる。まず、(3.11) を使うと

$$Q_i(u^i) = (\partial_0 + c_i \partial_r) u^i \ (\partial_0 - c_i \partial_r) u^i + \frac{c_i^2}{r^2} (\Omega u^i)^2$$

を得る。更に、(3.10) から

$$(\partial_0 + c_i\partial_r)u^i = \frac{r - c_i t}{r}\partial_0 u^i + \frac{c_i}{r}Su^i$$

が従うことが分かる。従って、

$$|Q_i(u^i)| \le \frac{C|r - c_i t|}{r}|\partial_0 u^i|\,|\partial u^i| + \frac{C}{r}|\Gamma u^i|\,|\partial u^i|$$

が成り立つ。ただし、Γ は ∂_α $(\alpha = 0, 1, 2)$, S 及び Ω のいずれかとする。

いま、重み関数として

$$w_i(r,t) = (1+r)^{\frac{1}{2}-\gamma}(1+t+r)^\gamma(1+|r-c_it|) \quad \text{with} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2} \tag{3.12}$$

をとると、$t(>1)$ と $r(>1)$ が同等となるような領域では、

$$|Q_i(u^i)| \le \frac{C}{(1+t+r)^2}|w_i(r,t)\partial u^i|^2 + \frac{C}{(1+t+r)^{1+\mu}w_i(r,t)}|(1+t+r)^\mu \Gamma u^i|\,|w_i(r,r)\partial u^i|$$

と評価でき、これは一般の２次式が満たす次の評価よりも十分良くなっている。

$$|\partial_\alpha u^i|\,|\partial_\beta u^i| \le \frac{C}{w_i(r,t)^2}|w_i(r,t)\partial u^i|^2.$$

このような理由で、臨界指数を持つ非線型項も null-condition を満たせば、粗く言って、４次以上の非線型項と同列に扱うことが可能となる。

4 証明の概略

時間局所解の存在と一意性は知られているので、*Theorem* 1 を証明するには適切な *a-priori* 評価を得ると良い。ここで、いくつか記号を導入する。

$$|u(t)|_k = \sum_{|a|\le k}\sum_{i=1}^m \|\Gamma^a u^i(\cdot,t)\|_{L^\infty}, \tag{4. 13}$$

$$[u(t)]_k = \sum_{|a|\le k}\sum_{i=1}^m \|w_i(|\cdot|,t)\Gamma^a u^i(\cdot,t)\|_{L^\infty}, \tag{4. 14}$$

$$\|u(t)\|_k = \sum_{|a|\le k}\sum_{i=1}^m \|\Gamma^a u^i(\cdot,t)\|_{L^2}. \tag{4. 15}$$

ただし、k は非負整数、$a = (a_0, \cdots, a_5)$ は多重指数である。また、時間変数に関して L^∞-ノルムをとったものを次の様に表わす。

$$|u|_{k,T} = \sup_{0<t<T}|u(t)|_k, \quad [u]_{k,T} = \sup_{0<t<T}[u(t)]_k, \quad \|u\|_{k,T} = \sup_{0<t<T}\|u(t)\|_k. \tag{4.16}$$

さて、基本解を直接、評価することにより次を得る。

Proposition 1 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ を *(1.1), (1.2)* の解とする。任意に与えられた正数 δ に対して、u が

$$[\partial u(t)]_{[\frac{k+4}{2}]} \leq \delta \quad for \quad 0 \leq t < T$$

を満たすとする。ここで、k は非負整数、T は正数である。このとき、

$$(1+t+r)^{\mu}|u(t)|_k \leq C_k(\varepsilon + [\partial u]^2_{[\frac{k+1}{2}],t}\|\partial u\|_{k+3,t}) \quad for\ (x,t) \in \mathbf{R}^2 \times [0,T) \quad (4.\ 17)$$

及び、

$$[\partial u(t)]_k \leq C_k\Big(\varepsilon + (\varepsilon + [\partial u]^2_{[\frac{k+4}{2}],t})\|\partial u\|_{k+6,t}\Big) \quad for \quad (x,t) \in \mathbf{R}^2 \times [0,T) \quad (4.\ 18)$$

が成り立つ。ただし、$0<\mu<1/2$.

我々は、重みつき L^∞-ノルム $[\partial u(t)]_k$ について、閉じた評価を作りたいので、(4.18) の右辺における L^2-ノルムを処理する必要がある。そのために、次のエネルギー評価を用いる。

Proposition 2 *Proposition* 1 と同じ仮定のもと次が成立する。

$$\|\partial u(t)\|_k \leq C\|\partial u(0)\|_k \exp\left(\int_0^t |\partial u(s)|^2_{[\frac{k+1}{2}]}ds\right). \quad (4.\ 19)$$

この *Proposition* を用いることによって、L^2-ノルムが処理されると同時に、いわゆる、Dreivative loss も解消される。以上のような議論から、必要な評価が導かれ、*Theorem* 1 が証明される。

参 考 文 献

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, *The null condition and global existence of solutions to systems of wave equations with different speeds,* to appear in Series on Adv. in Math. for Appli. Sci., World Scientific.

[2] S. Katayama, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **31** (1995), p. 645-665.

[3] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations* Lectures in Appli. Math. **23** (1986), p. 293-326.

[4] H.Kubo, *Blow-up of solutions to semilinear wave equations in low space dimensions,* Diff. and Int. Equations, **7** (1994), p. 315-321.

Semigroup Theory による磁場の入った Ginzburg-Landau 方程式の解の存在について

秋山　高宏
(早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻修士課程 2 年)

1　序説

この研究は早稲田大学理工学部応用物理学科の堤正義教授の指導のもと笠井博則氏(早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻博士課程 2 年)との共同研究である。

2　問題と結果

Ωを$\mathbf{R}^3$の有界領域とし、Ωの境界$\partial\Omega$は十分滑らかであるとする。この時、磁場の入った Ginzburg-Landau 方程式は

$$\begin{aligned} \psi_t &= \mathbf{D}_A^2\psi + \lambda(1-|\psi|^2)\psi + i\Phi\psi, && \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \quad (1)\\ \mathbf{A}_t &= -\mathrm{rot}^2\mathbf{A} - \frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\} + \nabla\Phi, && \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \quad (2)\end{aligned}$$

とかける。ここで$\mathbf{D}_A\psi = \nabla\psi - i\mathbf{A}\psi$、$\psi$は complex-valued order parameter、$\mathbf{A}$は magnetic vector potential、Φは scalar electric potential、λは Ginzburg-Landau 定数と呼ばれる正の定数である。([3]、及びその参考文献を見よ。)
境界条件としては

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{n} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \text{on } \partial\Omega \qquad (3)$$

を考える。ここで、$\mathbf{n}$は$\partial\Omega$の単位外向き法線ベクトルである。
また初期条件として

$$\psi(0,x) = \psi_0, \qquad \mathbf{A}(0,x) = \mathbf{A}_0, \qquad \text{in } \Omega \qquad (4)$$

Semigroup Theory による磁場の入った Ginzburg-Landau 方程式の解の存在について

秋山　高宏
(早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻修士課程 2 年)

1 序説

この研究は早稲田大学理工学部応用物理学科の堤正義教授の指導のもと笠井博則氏 (早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻博士課程 2 年) との共同研究である。

2 問題と結果

Ωを$\mathbf{R}^3$の有界領域とし、Ωの境界$\partial\Omega$は十分滑らかであるとする。この時、磁場の入った Ginzburg-Landau 方程式は

$$\begin{aligned} \psi_t &= \mathbf{D}_A^2\psi + \lambda(1-|\psi|^2)\psi + i\Phi\psi, && \text{in } (0,\infty)\times\Omega, && (1)\\ \mathbf{A}_t &= -\mathrm{rot}^2\mathbf{A} - \frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\} + \nabla\Phi, && \text{in } (0,\infty)\times\Omega, && (2) \end{aligned}$$

とかける。ここで$\mathbf{D}_A\psi = \nabla\psi - i\mathbf{A}\psi$、$\psi$は complex-valued order parameter、$\mathbf{A}$ は magnetic vector potential、Φはscalar electric potential、λは Ginzburg-Landau 定数と呼ばれる正の定数である。([3]、及びその参考文献を見よ。)
境界条件としては

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{n} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \text{on } \partial\Omega \qquad (3)$$

を考える。ここで、$\mathbf{n}$ は$\partial\Omega$の単位外向き法線ベクトルである。
また初期条件として

$$\psi(0,x) = \psi_0, \qquad \mathbf{A}(0,x) = \mathbf{A}_0, \qquad \text{in } \Omega \qquad (4)$$

を与える。今、$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$を仮定すると式(1)、(2)は

$$\begin{aligned}
\psi_t &= \Delta\psi - 2i(\mathbf{A}\cdot\nabla\psi) - |\mathbf{A}|^2\psi + \lambda(1-|\psi|^2)\psi + i\Phi\psi, &(5)\\
\mathbf{A}_t &= \Delta\mathbf{A} - P(\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\nabla\psi) - \psi(\overline{\nabla\psi})\} - |\psi|^2\mathbf{A}), &(6)\\
\Delta\Phi &= \mathrm{div}\{\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\}, &(7)
\end{aligned}$$

と書き表すことができる。ここで、$P : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{H}_\sigma(\Omega)$は$Leray$の射影作用素である。今、関数空間

$$\begin{aligned}
&C_n^\infty(\Omega) = \{\psi \in C^\infty(\Omega);\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega\},\\
&\mathbf{H}_\sigma(\Omega) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{L}^2(\Omega);\ \mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \ \text{ in } \Omega\},\\
&\mathbf{H}_{\sigma,b}(\Omega) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{H}_\sigma(\Omega); \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0,\ \mathrm{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},\\
&\mathbf{C}_{\sigma,b}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{A} \in \{C^\infty(\Omega)\}^3;\ \mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \ \text{ in } \Omega,\ \mathrm{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{n} = 0,\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega\},\\
&\mathcal{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega) \oplus \mathbf{L}^p(\Omega), \qquad \text{for all } 1 \le p \le \infty,\\
&\mathcal{H}^m(\Omega) = H^m(\Omega) \oplus \mathbf{H}^m(\Omega), \qquad \text{for all } 0 \le m.
\end{aligned}$$

を用意する。明らかに、$C_n^\infty(\Omega)$は$H^s(\Omega)$ $(s \ge 0)$で稠密であり、$\mathbf{C}_{\sigma,b}^\infty(\Omega)$は$\mathbf{H}_{\sigma,b}(\Omega)$で稠密である。

まず、$\int_\Omega \Phi(x)dx = 0$という条件のもとで楕円形偏微分方程式(7)を考えると次の補題が得られる。

補題 1 $\psi \in H^2(\Omega)$、$\mathbf{A} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\sigma,b}(\Omega)$とする。この時、境界値問題

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi = f(\psi, \mathbf{A}), &(8)\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, &(9)\\
&\int_\Omega \Phi(x)dx = 0, &(10)
\end{aligned}$$

ここで$f(\psi,\mathbf{A}) = \mathrm{div}\{\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\mathbf{D}_A\psi) - \psi(\overline{\mathbf{D}_A\psi})\}\} \in L^2(\Omega)$とする。この時、一意解 $\Phi(\psi,\mathbf{A}) \in H^2(\Omega)$が存在する。

以下、補題1によって得られた解を$\Phi(\psi, \mathbf{A})$と表記することにする。次に放物型偏微分方程式(5)と(6)を考える。式(5)と(6)は次の$\mathcal{L}^2(\Omega)$上の発展方程式

$$\frac{d}{dt}U + \mathcal{A}U = \mathcal{B}(U), \tag{11}$$

$$U(0) = U_0 = (\psi_0,\ \mathbf{A}_0)^t, \tag{12}$$

と表すことができる。ここで$U = (\psi, \mathbf{A})^t$であり、$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\Delta + I & 0 \\ 0 & -\Delta + \beta I \end{pmatrix}$, $D(\mathcal{A}) \equiv H^2(\Omega) \oplus (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\sigma,r}(\mathrm{div}0; \Omega))$ であり、$\beta > 0$である。 非線形項は

$$\mathcal{B}(U) = \begin{pmatrix} \psi - 2i(\mathbf{A} \cdot \nabla\psi) - |\mathbf{A}|^2\psi + \lambda(1 - |\psi|^2)\psi + i\Phi(\psi, \mathbf{A})\psi \\ \beta\mathbf{A} - P(\frac{i}{2}\{\overline{\psi}(\nabla\psi) - \psi(\overline{\nabla\psi})\} - |\psi|^2\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

$D(\mathcal{B}) \supset D(\mathcal{A}^\gamma)$ $(\gamma > 3/4)$ となる。

定義 1 強解の定義
式(11)、(12)を満足するUで

$$U(t,x) \in C([0,T); D(\mathcal{A}^\gamma)) \cap C^1(0,T; \mathcal{L}^2(\Omega)),$$
$$U(t,x) \in D(\mathcal{A}), \qquad \textit{for all } t \in (0,T).$$

を満足するものを式(11)、(12)の強解と呼ぶ。

$-\mathcal{A}$が$\mathcal{L}^2(\Omega)$上の解析半群の生成作用素になっていることを利用し作用素$\mathcal{A}$の分数ベキ$\mathcal{A}^\gamma$を定義する。非線形項$\mathcal{B}(U)$を$\mathcal{A}^\gamma U$で評価することによって次の結果を得た。

定理 1 局所一意強解の存在定理
境界条件(3)及び初期条件(4)を満足するGinzburg-Landau方程式(5)(6)は
$U_0 \in D(\mathcal{A}^\gamma)$, $(\gamma > \frac{3}{4})$に対して一意な強解が存在する。

3 定理の証明

以下の4つの命題を用いて証明する。

命題 1 $-\mathcal{A}$はC_0半群の生成作用素である。

命題 1 の証明の概要
最初に関数空間

$$\mathcal{H}^1_\sigma(\Omega) = H^1(\Omega) \oplus (\mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\sigma,b}(\Omega)). \tag{13}$$

を定義し、$\mathcal{H}^1_\sigma(\Omega) \times \mathcal{H}^1_\sigma(\Omega)$ 上の歪双線形形式を

$$a(U,V) = \int_\Omega \nabla\psi \cdot \overline{\nabla\varphi} dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{B}\ dx + (\psi,\varphi)_{L^2} + \beta(\mathbf{A},\mathbf{B})_{\mathbf{L}^2} + \lambda(U,V)_{\mathcal{L}^2} \tag{14}$$

と定義する。これが強圧的であることを示す。次に、$-\mathcal{A}$ が消散的作用素であることを示す。明らかに $D(\mathcal{A})$ は $\mathcal{L}^2(\Omega)$ で稠密であり、任意の正の実数νに対して $R(\nu I + \mathcal{A}) = \mathcal{L}^2(\Omega)$ が成り立つことを示す。あとは $Lumer - Phillips$ の定理を用いる。(終)

命題 2 $-\mathcal{A}$ は解析半群の生成作用素である。

田辺広城「発展方程式」参照のこと。
次に作用素 $\mathcal{A}$ の分数べキを

$$\mathcal{A}^\alpha U \equiv \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \mathcal{A}(tI + \mathcal{A})^{-1} U\ dt, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{15}$$

で定義する。すると次の命題が成り立つ。

命題 3 $\gamma > 3/4$ なるγに対してγとΩに依存した定数Cが存在し

$$\|U\|_{\mathcal{L}^\infty} \le C\|\mathcal{A}^\gamma U\|_{\mathcal{L}^2}, \qquad for\ U \in\ D(\mathcal{A}). \tag{16}$$

が成り立つ。

$Gagliardo - Nirenberg$の不等式と $\|U\|_{\mathcal{L}^2} \le C\|\mathcal{A}U\|_{\mathcal{L}^2}$ $(C > 1)$ であることを用いて示した。

命題 4 $\gamma > 3/4$ かつ $U \in D(\mathcal{A})$ とする。この時 $\mathcal{B}(U)$ は *well-defined* であり

$$\|\mathcal{B}(U)\|_{\mathcal{L}^2} \le C\|\mathcal{A}^\gamma U\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{17}$$

が成り立つ。その上、もし $U,V \in D(\mathcal{A})$ ならば

$$\|\mathcal{B}(U) - \mathcal{B}(V)\|_{\mathcal{L}^2} \le C\|\mathcal{A}^\gamma U - \mathcal{A}^\gamma V\|_{\mathcal{L}^2}, \tag{18}$$

が成り立つ。ここでCはγとΩに依存した定数である。

命題 4 の証明の概要
非線形項の $\mathcal{L}^2$ 評価は以下のようにして行う。

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(U)-\mathcal{B}(V)\|_{\mathcal{L}^2} &\le C\{\|\psi-\varphi\|_{L^2}+\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad+\|\mathbf{A}\cdot\nabla\psi-\mathbf{B}\cdot\nabla\varphi\|_{L^2}+\||\mathbf{A}|^2\psi-|\mathbf{B}|^2\varphi\|_{L^2} \\
&\quad+\|(1-|\psi|^2)\psi-(1-|\varphi|^2)\varphi\|_{L^2}+\|\Phi_1\psi-\Phi_2\varphi\|_{L^2} \\
&\quad+2\|\psi(\overline{\nabla\psi})-\varphi(\overline{\nabla\varphi})\|_{\mathbf{L}^2}+\||\psi|^2\mathbf{A}-|\varphi|^2\mathbf{B}\|_{\mathbf{L}^2}\} \\
&= C\{I_0+I_1+I_2+I_3+I_4+2I_5+I_6\},
\end{aligned}$$

ここで C は λ に依存した定数であり、

$$\begin{aligned}
I_0 &= \|\psi-\varphi\|_{L^2}+\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_{\mathbf{L}^2}, \\
I_1 &= \|\mathbf{A}\cdot\nabla\psi-\mathbf{B}\cdot\nabla\varphi\|_{L^2}, \\
I_2 &= \||\mathbf{A}|^2\psi-|\mathbf{B}|^2\varphi\|_{L^2}, \\
I_3 &= \|(1-|\psi|^2)\psi-(1-|\varphi|^2)\varphi\|_{L^2}, \\
I_4 &= \|\Phi_1\psi-\Phi_2\varphi\|_{L^2}, \\
I_5 &= \|\psi(\overline{\nabla\psi})-\varphi(\overline{\nabla\varphi})\|_{\mathbf{L}^2}, \\
I_6 &= \||\psi|^2\mathbf{A}-|\varphi|^2\mathbf{B}\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

である。I_1, I_5 に関しては命題 3 の不等式を用いて評価する。I_2, I_3, I_6 に関しては *Sobolev* の定理を用いて評価する。あとは I_4 に関してであるが簡単な計算によって I_5 と I_6 の和で評価することができる。(終)
よって命題 4 で得た評価を用いると藤田-加藤の結果 [4] から局所解の存在を示すことができる。(定理の証明終わり)

参考文献

[1] R.Temam, *Navier-Stokes Equations* : Theory and Numerical Analysis - North-Holland, Amsterdam, NewYork. (1977).

[2] P.Constantin and C.Foias, *Navier-stokes Equations* - Chicago Lecture in Mathematics.(1989).

[3] M.Tsutsumi and H.Kasai, *The Time Dependent Ginzburg-Landau Maxwell Equations* – submitted.

[4] H.Fujita and T.Kato, *On the Navier Stokes initial value problem I.* – Arch. Rat. Mech. and Anal. 16 (1964) 269-315.

[5] A.Friedman, *Partial differential equations* – Holt, Reinhart, and Winston, NewYork. (1969).

[6] K.Yosida, *Functional analysis (6th edition)* – Springer Verlag.

[7] S.Agmon, *Elliptic boundary value problems* – Van Nostrand (1965).

[8] A.Schmid, *A time dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state* – Phys. konden.Materie 5 (1966) 302-317.

[9] L.P.Gor'kov and G.M.Eliashberg, *Generalization of Ginzburg-Landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities* – Soviet Phys. J.E.P.T. 27 (1968) 328-334.

[10] Z.Chen and K.H.Hoffmann, *Numerical studies of Non-Stationary Ginzburg-Landau Model for Superconductivity* – Advances in Mathematical Sciences and Applications 5 (1995) 363-389.

[11] Qi Tang, *On Evolution System of Ginzburg-Landau Equations with Fixed Total Magnetic Flux* – Commun. in Partial Differntial Equations 20 (1995) 1-36.

[12] Qi Tang and S.Wang, *Time dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity* – Physica D 88 (1995) 139-166.

[13] 田辺　広城, 発展方程式 – 岩波書店.

L_P AND BESOV MAXIMAL ESTIMATES FOR SOLUTIONS TO THE SCHRÖDINGER EQUATION

SEIJI FUKUMA
TSUKUBA UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

It is well known that the solution to the Schrödinger equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\Delta u, \qquad u(0,x) = f(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}),$$

is given by

$$Tf(x,t) = u(x,t) = (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^n} e^{i\{(x-y)\xi + t|\xi|^2\}} f(y) d\xi dy. \tag{1.1}$$

In this note we shall consider estimates of L_2 -norm and Besov type norm of integrals of this kind by means of Besov norm of f, and give L_p -estimates of their maximal functions.

Our first results are the following theorems:

Theorem 1. *Let σ be a positive number, I be a interval $[0,1]$ and let $\gamma > 1, 1 \le q \le \infty$. Assume that $h(t,\xi)$ is real-valued, measurable, and C^∞ in t and the inequality*

$$\left|\frac{\partial^k h(t,\xi)}{\partial t^k}\right| \le C_k(1 + |\xi|^{k\gamma}) \tag{1.2}$$

holds for any positive integer k, where C_k is a constant independent of t and ξ. Then, the operator T_1 defined by

$$T_1 f(x,t) = c_n \iint_{\mathbb{R}^n} e^{i\{(x-y)\xi + h(t,\xi)\}} f(y) d\xi dy, \tag{1.3}$$

where $c_n = (2\pi)^{-n}$, is bounded from $B^{\gamma\sigma}_{2,q}(\mathbb{R}^n)$ to $B^{\sigma}_{2,q}(I; L_2(\mathbb{R}^n))$.

Theorem 2. *Let h be a real-valued function satisfying the conditions* (1.2). *Then, the operator T_1 defined by* (1.3) *is bounded from $B^{\gamma/2}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ to $L_2(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))$, i.e.*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|T_1 f(x,\cdot)\|^2_{L_\infty(I)} dx\right)^{1/2} \le C\|f\|_{B^{\gamma/2}_{2,1}}. \tag{1.4}$$

Theorem 3. *Let $a > 1$. Then, the operator T_2 defined by*

$$T_2 f(x,t) = c_n \iint_{\mathbb{R}^n} e^{i\{(x-y)\xi + t|\xi|^a\}} f(y) d\xi dy, \tag{1.5}$$

is bounded from $B_{2,1}^{an/4}(\mathbb{R}^n)$ to $L_2(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))$, i.e.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|T_2 f(x,\cdot)\|_{L_\infty(I)}^2 dx\right)^{1/2} \le C\|f\|_{B_{2,1}^{an/4}}.$$

Theorem 4. *Let $a > 1$, $I = (0,1)$ and let $1 \le p \le \infty$,*

$$\sigma = \min\{\frac{1}{2} + (n-1)|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|, \frac{n}{4} + \frac{n}{2}|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|\}.$$

Then, the operator T_2 defined by (1.5) is bounded from $B_{p,1}^{a\sigma}$ to $L_p(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))$, i.e.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|T_2 f(x,\cdot)\|_{L_\infty(I)}^p dx\right)^{1/p} \le C\|f\|_{B_{p,1}^{a\sigma}}.$$

For the operators of the type (1.5) on Sobolev spaces H^s , there are the several papers. Carbery and Cowling have proved that T_2 is bounded from $H^s(\mathbb{R}^n)$ to $L_2(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))$ for $s > a/2$, Theorem 2 is an improvement of their result . P. Sjölin[5] has proved that if $a > 1$ then $s > an/4$ is a sufficient condition for all n and if $n = 1$ then $s \ge a/4$ is a necessary condition. Noting that $H^s \subset B_{2,1}^{an/4}$ if $s > an/4$, Theorem 3 is an improvement of theorem in Sjölin[5]. S. Fukuma has proved that T_2 is bounded from $H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^n)$ to $L^q(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))$ if $n \ge 2, q = 4n/(2n-1)$ and f is radial. C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega ([2]) have indicated the application of the estimate to the dispersive equations.

Notation: $\partial_t = \partial/\partial_t, \partial_j = \partial/\partial_{x_j}, \nabla = (\partial_1, \cdots, \partial_n), \Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2, x = (x_1, \cdots, x_n); \partial^\alpha = \prod_{j=1}^n \partial^{\alpha_j}, x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j$; H^s denotes the Sobolev space defined by $H^s = \{f \in S'; \|f\|_{H^s} = \{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\}^{1/2} < \infty\}$; $B_{p,q}^s$ denotes the Besov space with norm $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$ which is explained in [6]; $\mathcal{L}(X,Y)$ denotes space of linear bounded operators from Banach space X to Y; $L_p(\cdot; X)$ denotes L_p - space of X - valued functions.

2. PROOF OF THEOREM 1

First consider the case where $q = 2$ and σ is a non-negative integer m. Notice that $B_{2,2}^m = H^m$. It is easy to see that

$$\partial_t^k T_1 f = C_n \iint e^{i\{(x-y)\xi + h(t,\xi)\}} H_k(t,\xi) f(y) d\xi dy$$

with $|H_k(t,\xi)| \le C_k'(1+|\xi|^{k\gamma})$. Hence, by Parseval's formula we have

$$\|T_1 f\|_{L_2(I;L_2(\mathbb{R}^n))}^2 \le C_0 \int_0^1 \|f\|_{L_2}^2 dt = C_0\|f\|_{L_2}^2,$$

and

$$\|\partial_t^k T_1 f\|^2_{L_2(I;L_2(\mathbb{R}^n))} \leq C_k \int_0^1 dt \|(1+|\xi|^{k\gamma})\hat{f}(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C_k \|f\|^2_{H^{k\gamma}}(\mathbb{R}^n).$$

Combining these facts, we obtain that

$$\|T_1 f\|^2_{H^m(I;L_2(\mathbb{R}^n))} \leq C_m \|f\|_{H^{m\gamma}}(\mathbb{R}^n).$$

Finally, we recall that the Besov space are identical with the real interpolation of the Sobolev spaces:

$$(L_2(\Omega;X), H^m(\Omega;X))_{\theta,q} = B^{m\theta}_{2,q}(\Omega;X),$$

Here, X is a Banach space and $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ denotes the real interpolation spaces. Therefore, the conclusion of the theorem follows from interpolation of linear operators and the fact that T_1 is bounded from $H^{m\gamma}(\mathbb{R}^n)$ to $H^m(I;L_2(\mathbb{R}^n))$ for any non-negative integer m.

3. PROOF OF THEOREM 2

To get L_2 maximal estimates for the operators of type (1.3) we need the following

Lemma 1. *Let $I=(0,1), 1 \leq q \leq p \leq \infty$, and let σ be a positive number. Then, the Besov space $B^\sigma_{p,q}(I;L_p(\mathbb{R}^n))$ is continuously imbedded in the space $L_p(\mathbb{R}^n;B^\sigma_{p,q}(I))$.*

Proof. Consider first the case where $0<\sigma<1$. Assume that $u(t,x) \in B^\sigma_{p,q}(I;L_p(\mathbb{R}^n))$. Then, by Minkowsky's inequality we see that

$$\begin{aligned}
&\|\{|u(t,x)|_{B^\sigma_{p,q}(I)}\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|[\|\{\|u(t+s,x)-u(t,x)\|_{L_p((0,1-s))}s^{-\sigma}\}\|_{L^*_q(I)}]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|[\{\|(\|u(t+s,x)-u(t,x)\|_{L_p((0,1-s))}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\}s^{-\sigma}]\|_{L^*_q(I)} \\
&\leq \|[\{\|(\|u(t+s,x)-u(t,x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\|_{L_p((0,1-s))}\}s^{-\sigma}]\|_{L^*_q(I)} \\
&= |u|_{B^\sigma_{p,q}(I;L_p(\mathbb{R}^n))}.
\end{aligned}$$

Here $L^*_q(I) := L_q(I, ds/s)$. In the same way we get for the case where $\sigma = 1$;

$$\begin{aligned}
&\|\{|u(t,x)|_{B^1_{p,q}(I)}\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|[\|\{\|u(t+2s,x)-2u(t+s,x)+u(t,x)\|_{L_p((0,1-2s))}s^{-1}\}\|_{L^*_q(I)}]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|[\|\{\|u(t+2s,x)-2u(t+s,x)+u(t,x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\}\|_{L_p((0,1-2s))}s^{-1}]\|_{L_q(I)} \\
&= |u|_{B^1_{p,q}(I;L_p(\mathbb{R}^n))}.
\end{aligned}$$

Consider now the case where $\sigma = k + \theta, k$ is a positive integer, and $0 < \theta \leq 1$. By the facts proved above we have

$$\begin{aligned} \|\{|u(t,x)|_{B^{\sigma}_{p,q}(I)}\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &= \|\{|\partial_t^k u(t,x)|_{B^{\theta}_{p,q}(I)}\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq |\partial_t^k u|_{B^{\theta}_{p,q}(I;L_p(\mathbb{R}^n))} \\ &= |u|_{B^{\sigma}_{p,q}(I;L_p(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

Noting that the norm of $B^{\sigma}_{p,q}(I;X)$ is given by $\|\cdot\|_{W^k_p(I;X)} + |\cdot|_{B^{\sigma}_{p,q}(I;X)}$ (see T. Muramatu[3]), these estimates gives the proof of Lemma 1. From Lemma 1 amd the imbedding theorem $B^{1/2}_{2,1}(I) \subset L_\infty(I)$ (see T. Muramatu[4]) it follows that

$$B^{1/2}_{2,1}(I;L_2(\mathbb{R}^n)) \subset L_2(\mathbb{R}^n;B^{1/2}_{2,1}(I)) \subset L_2(\mathbb{R}^n;L_\infty(I)),$$

with continuous inclusions, which, combined with Theorem 1, gives Theorem 2.

4. PROOF OF THEOREM 3

Next, Theorem 3 has been proved if we have show that the operator S defined by

$$Sf(x) = \iint e^{i\{(x-y)\xi + t(x)|\xi|^a\}} f(y)d\xi dy,$$

where $t(x)$ is a measurable function of $x \in \mathbb{R}^n$ with $0 \leq t(x) \leq 1$, is bounded from $B^{an/4}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ to $L_2(\mathbb{R}^n)$ and its norm is estimated by a constant independent of $t(x)$.

To prove this we need the following partion of unity in ξ-space. Let $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ be functions such that

$$\varphi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \quad 0 \leq \varphi(\xi) \leq 1,$$

$$\mathrm{supp}(\varphi_0) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| < 2\}, \quad \mathrm{supp}(\varphi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{2} < |\xi| < 2\}.$$

Put $\varphi_j := \varphi(2^{-j}\xi), \ \ \psi_0 := \varphi_0(\xi/2)$, and

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &:= \varphi(\frac{\xi}{2}) + \varphi(\xi) + \varphi(2\xi), \\ \psi_j(\xi) &:= \psi(2^{-j}\xi) \qquad \text{for} \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Then,

$$\mathrm{supp}(\psi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{4} < |\xi| < 4\}, \quad \psi(\xi) = 1 \quad \text{if} \quad \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2,$$

and for $j = 0, 1, 2, \cdots$, $\psi_j(\xi) = 1$ holds for any $\xi \in \mathrm{supp}(\varphi_j)$. Hense, it follows that

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\xi)\varphi_(\xi) = 1. \tag{4.1}$$

From this identity we see that

$$Sf(x) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j f_j(x),$$

where

$$S_j g(x) = C_n \int e^{i\{x\xi + t(x)|\xi|^a\}} \psi_j(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi, \tag{4.2}$$

$$f_j(x) = C_n \int e^{ix\xi} \varphi_j(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi. \tag{4.3}$$

To estimate $\|S_j\|_{\mathcal{L}(L_2,L_2)}$, we need the following

Lemma 2. *Let $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with support contained in the set $\{\xi; 1/4 < |\xi| < 4\}$, $t(x)$ a measurable function of $x \in \mathbb{R}^n$ with $0 \le t(x) \le 1$, j a positive integer, and let $a > 1$. Define the operator S_j by* (4.2). *Then,*

$$\|S_j\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n),L_2(\mathbb{R}^n))} \le C2^{jan/4}, \tag{4.4}$$

where C is a constant independent of j and $t(x)$.

From this lemma we can immediately prove Theorem 3, that is,

$$\|Sf\|_{L_2} \le \sum_{j=0}^{\infty} \|S_j f_j\|_{L_2} \le C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{an/4}\|f_j\|_{L_2} \le C'\|f\|_{B_{2,1}^{an/4}(\mathbb{R}^n)}.$$

5. PROOF OF THEOREM 4

To prove Theorem 4 we start with

Lemma 3. *Let $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with support contained in the set $\{\xi; 1/4 < |\xi| < 4\}, |t| \le 1$, and let $N \ge 1, a > 1, 1/N \le |x| \le 2a(4N)^{a-1}$. Then*

$$\left|\int e^{i\{x\xi + t|\xi|^a\}} \psi(\frac{\xi}{N})d\xi\right| \le C(n,a,\psi)N^{n/2}|x|^{-n/2}.$$

Lemma 4. *Let $\psi \in C^\infty$ with support contained in the set $\{\xi; 1/4 < |\xi| < 4\}, j$ a positive integer, $I = (0,1), 1 \le p \le \infty$, and let $a > 1$. Defined the operator T_j by*

$$T_j : g \to \int e^{i\{x\xi + t|\xi|^a\}} \psi(2^{-j}\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi.$$

Then,

$$\|T_j\|_{\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n),L_p(\mathbb{R}^n;L_\infty(I)))} \le C2^{jan/2},$$

where C is a constant independent of j.

Proof. We consider T_j as an integral operator with $\mathcal{L}(\mathbb{C}, L_\infty(I))$-valued kernel, that is,

$$T_j f(x) = \int \vec{K}_j(x-y) f(y) dy,$$

where

$$\vec{K}_j(x) = K_j(t,x) = \int e^{i\{x\xi + t|\xi|^a\}} \psi(2^{-j}\xi) d\xi.$$

Hence, the conclusion follows from the estimates

$$\int \|\vec{K}_j(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}, L_\infty(I))} dx = \int \operatorname*{ess.sup}_{|t|\le 1} |K_j(t,x)| dx \le C(n,a,\psi) 2^{jan/2}.$$

It is clear that

$$|K_j(t,x)| \le \int |\psi(2^{-j}\xi)| d\xi = 2^{jn} \|\psi\|_{L_1}$$

holds for any x. Also we have as in poof of Lemma 5 that

$$|K_j(t,x)| \le C(n,a,\psi) 2^{j(n-2m)} |x|^{-2m},$$

holds for any $|x| \ge 2a 2^{(2+j)(a-1)}$, where m is an integer such that $2m > n$. Hence, by Lemma 3 we obtain that

$$\begin{aligned}\int \operatorname*{ess.sup}_{|t|\le 1} |K_j(t,x)| dx \le C(n,a,\psi) \{ & \int_{|x|\le 2^{-j}} 2^{jn} dx \\ & + \int_{2^{-j}\le |x| \le 2a2^{(2+j)(a-1)}} 2^{jn/2} |x|^{-n/2} dx \\ & \quad + \int_{|x|\ge 2a2^{(2+j)(a-1)}} 2^{j(n-2m)} |x|^{-2m} dx \} \\ \le C'(n,a,\psi) 2^{jan/2}. &\end{aligned}$$

The results for the case $p = 2$ are given in Theorem 2 and Theorem 3.

Next, consider the case where $p = 1$. It follows from the identity (4.1) that

$$Tf = \sum_{j=0}^{\infty} T_j f_j,$$

where

$$T_j : g \to v(t,x) = C_n \int e^{i\{x\xi + t|\xi|^a\}} \psi_j(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi,$$

$$f_j(x) = C_n \int e^{ix\xi} \varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

By this formula see that

$$\|Tf\|_{L_1(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))} \le \sum_{j=0}^{\infty} \|T_j f_j\|_{L_1(\mathbb{R}^n; L_\infty(I))},$$

which gives with the aid of Lemma 4 that

$$\|Tf\|_{L_1(\mathbb{R}^n;L_\infty(I))} \leq C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jan/2}\|f_j\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|f\|_{B^{an/2}_{1,1}(\mathbb{R}^n)},$$

In the same way we have

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n;L_\infty(I))} &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\|T_jf_j\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n;L_\infty(I))}\\ &\leq C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jan/2}\|f_j\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq C'\|f\|_{B^{an/2}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

For the case $1 < p < 2$ (the case $2 < p < \infty$) the result follows from that for the cases $p = 1, 2$ (the cases $p = 2, \infty$) and the complex interpolation:

$$[B^{\sigma_0}_{p_0,q_0}, B^{\sigma_1}_{p_1,q_1}]_\theta = B^{\sigma}_{p,q}$$

with $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1, \quad \dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}, \quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}.$

References

1. S. Fukuma, *Radial functions and maximal estimates for radial solutions to the Schrödinger equation*, preprint
2. C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle* Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), no. 4, 527–620.
3. T. Muramatu, *On Besov spaces of functions defined in general regions.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6 (1970/71), 515–543.
4. ______ *On imbedding theorems for Besov spaces of functions defined in general regions,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 7 (1971/72), 261–285.
5. P. Sjölin, *Global maximal estimate for solutions to the Schrödinger equation,* Studia Math. 110 (2) (1994), 105–114
6. H. Triebel, *Multiplication properties of the spaces $B^s_{p,q}$ and $F^s_{p,q}$ Quasi-Banach algeblas of function,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 113 (1977), 33-42

Gevrey wellposedness of the Cauchy problem for the hyperbolic equations of the 3-d order

Tamotu Kinoshita

Institute of Mathematics,
University of Tukuba,
Ibaraki 305, Japan

§1. Introduction

For the hyperbolic equations of the 2-nd order, F. Colombini, E. De Giorgi, E. Jannelli and S. Spagnolo got the results concerned with the relation between the Gevrey wellposedness and the regularity of the coefficients(see [2], [3] and see also [4], [6], [10]). In this paper we shall extend their results to the hyperbolic equations of the 3-d order.

We shall first consider the equation of the 3-d order in $[0,T]\times\mathbf{R}^n_x$

$$
\left\{\begin{array}{l} u_{ttt}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t)u_{ttx_i}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(t)u_{tx_ix_j}=0 \\ u(0,x)=u_0(x),\quad u_t(0,x)=u_1(x),\quad u_{tt}(0,x)=u_2(x), \end{array}\right. \tag{1}
$$

where the coefficients satisfy

$$
\begin{array}{lll} a_i(t)\in C^{\frac{k+\alpha}{2}}([0,T]) & \text{if } k=0,1 \text{ and } 0\le\alpha\le 1 & \\ |a_i(t)|\in C^{\frac{k+\alpha}{2}}([0,T]) & \text{if } k=2,3,\cdots \text{ and } 0\le\alpha\le 1 & (i=1,\cdots,n) \end{array} \tag{2}
$$

and

$$
b_{ij}(t)\in C^{k+\alpha}([0,T]) \qquad k=0,1,2,\cdots \text{ and } 0\le\alpha\le 1 \quad (i,j=1,\cdots,n). \tag{3}
$$

Now we assume the restricted type of the weakly hyperbolic condition for the 3-d order equation (1)

$$
\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(t)\xi_i\xi_j\le 0 \qquad \text{for } {}^\forall t\in[0,T],\quad {}^\forall\xi\in\mathbf{R}^n_\xi. \tag{4}
$$

In general, the suitable weakly hyperbolic condition for the 3-d order equation (1) is

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\xi_i\right)^2 - 4\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geq 0 \qquad \text{for } {}^\forall t \in [0,T], \quad {}^\forall \xi \in \mathbf{R}^n_\xi. \tag{5}$$

We can easily see that the condition (4) is stronger than the condition (5). The 3-d order equations have 3 real characteristic roots $\lambda_1(t,\xi), \lambda_2(t,\xi), \lambda_3(t,\xi)$ such that $\lambda_1(t,\xi) \leq \lambda_2(t,\xi) \leq \lambda_3(t,\xi)$ for ${}^\forall t \in [0,T]$, ${}^\forall \xi \in \mathbf{R}^n_\xi$. Thanks to the condition (4), we find that the characteristic roots of the equation (1) satisfy

$$\lambda_1(t,\xi) \leq 0, \quad \lambda_2(t,\xi) \equiv 0, \quad \lambda_3(t,\xi) \geq 0.$$

This fact gives many benefits in the treatment of the hyperbolic equations of the 3-d order. In this paper we don't use the condition (5). Actually changing the characteristic direction, any type of weakly hyperbolic equations of the 3-d order can be reduced to the equation (1) under the condition (4).

Then we shall introduce the following theorem.

THEOREM 1. *Let $T > 0$, $\mu_0 > 0$. The coefficients satisfy (2), (3) and (4). Then for any u_0, u_1 and $u_2 \in \gamma^s$, the Cauchy problem (1) has a unique (global) solution $u \in C^3([0,T],\gamma^s)$, provided*

$$1 \leq s < 1 + \frac{k+\alpha}{2}. \tag{6}$$

Moreover when u_0, u_1 and $u_2 \in \gamma_0^s$ $(s > 1)$, there exist the constant $\nu > 0$ and the positive function $\mu(t)$ satisfying $\mu(0) = \mu_0$, such that

$$\begin{aligned} &e^{\mu(t)\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{4}{2+k+\alpha}}|\hat{u}| + \langle\xi\rangle_\nu^{\frac{2}{2+k+\alpha}}|\hat{u}_t| + |\hat{u}_{tt}|\right) \\ &\qquad\qquad \leq^{\exists}\, C e^{\mu_0\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^2|\hat{u}_0| + \langle\xi\rangle_\nu|\hat{u}_1| + |\hat{u}_2|\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Remark 1: If $k = \alpha = 0$, (6) doesn't make sense. However whenever the coefficients $a_i(t)$, $b_{ij}(t)$ belong to $C^0([0,T])$, or even to $L^1([0,T])$, the Cauthy problem (1) is wellposed in γ^1(see [7] and see also [2]).

Remark 2: If one replaced the weakly hyperbolic condition (4) by the condition (5), the same regularity as the coefficients $b_{ij}(t)$ would be needed for the coëfficients $a_i(t)$, i.e., $a_i(t)$ or $|a_i(t)| \in C^{k+\alpha}([0,T])$.

Remark 3: Precisely the positive function $\mu(t)$ is a strictly decreasing function. Therefore $\mu(T)$ is less than $\mu_0(= \mu(0))$. However if we take large enough $\nu > 0$, $\mu(T)$ can be chosen arbitrarily close to μ_0.

With a different method, Y.Ohya and S. Tarama got this kind of result for the weakly hyperbolic equations of the higher order(see [11]). They assume that all the coefficients of the higher order equations belong to the same Hölder class respect to time. For the 3-d order equation (1) whose coefficients satisfy (2), (3) when $k = 0$, we relax the regularity of the coefficients $a_i(t)$ from C^α to $C^{\frac{\alpha}{2}}$. Moreover according to their result, in order that the Cauthy problem for the weakly hyperbolic equations of the 3-d order is well-posed in γ^s, it is necessary that the Gevrey exponent s satisfies

$$1 \leq s < 1 + \frac{\alpha}{r} \quad (\text{ the multiplicity } r = 3). \tag{8}$$

The multiplicity of the characteristic roots for the equation (1), is also 3, but the range (6) when $k = 0$ is wider than the range (8). We know that the range (6) for the 3-d order equation (1) coincises the range for the 2-nd order equations(see [3]). This improvement is due to the fact that one of the characteristic roots is identically equal to 0 and the regularities of the other two characteristic roots become more smooth.

We shall next consider the strictly hyperbolic case. Instead of the weakly hyperbolic condition (4), we assume the restricted type of the strictly hyperbolic condition for the 3-d order equation (1)

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t)\xi_i\xi_j < -\delta < 0 \quad ({}^\exists\delta > 0) \qquad \text{for } {}^\forall t \in [0,T], \quad {}^\forall\xi \in \mathbf{R}^n_\xi. \tag{9}$$

In this case we don't need to consider the smooth coefficients in comparison to the weakly hyperbolic case. Therefore we shall suppose $k = 0$ in (2), (3).

Then we can get the following theorem.

THEOREM 2. *Let $T > 0$, $\mu_0 > 0$ and $k = 0$. The coefficients satisfy (2), (3) and (9). Then for any u_0, u_1 and $u_2 \in \gamma^s$, the Cauchy problem (1) has a unique (global) solution $u \in C^3([0,T],\gamma^s)$, provided*

$$1 \leq s < \frac{1}{1-\alpha}. \tag{10}$$

Moreover when u_0, u_1 and $u_2 \in \gamma^s_0$ $(s > 1)$, there exist the constant $\nu > 0$ and the positive function $\mu(t)$ satisfying $\mu(0) = \mu_0$, such that

$$e^{\mu(t)\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^2|\hat{u}| + \langle\xi\rangle_\nu|\hat{u}_t| + |\hat{u}_{tt}|\right) \leq^\exists C e^{\mu_0\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^2|\hat{u}_0| + \langle\xi\rangle_\nu|\hat{u}_1| + |\hat{u}_2|\right). \tag{11}$$

As it is well known, the order (dimension) of the strictly hyperbolic equations (systems) is independent of the range of the Gevrey exponent s. Therefore the range (10) coincises the results of [2] for the strictly hyperbolic equations of the 2-nd order and [1] for the strictly hyperbolic equations of the higher order and [8] for the strictly hyperbolic systems. In the strictly hyperbolic case we only improve the assumption of the regularity for the coefficients $a_i(t)$.

We also consider the more general equation of the 3-d order in $[0,T]\times \mathbf{R}^n_x$

$$(12)\qquad \begin{cases} Lu = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} d_i(t)u_{tx_i} + e(t)u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)u_{x_i} + g(t)u_t + h(t)u \\ u(0,x)=u_0(x), \quad u_t(0,x)=u_1(x), \quad u_{tt}(0,x)=u_2(x), \end{cases}$$

where L is the operator defined as $L=\partial_t^3+\sum_{i=1}^n a_i(t)\partial_t^2\partial_{x_i}+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(t)\partial_t\partial^2_{x_ix_j}$, and the coefficients of the lower terms satisfy

$$(13)\qquad c_{ij}(t),\ d_i(t),\ e(t),\ f_i(t),\ g(t),\ h(t)\in L^1([0,T]) \quad (i,j=1,\cdots,n).$$

In this case we also assume the restricted type of the weakly hyperbolic condition (4). Generally the lower terms influence on the wellposedness of the Cauthy problem for the weakly hyperbolic equations(see [3], [5], [9], [12], etc.). Therefore we shall assume the following conditions corresponding to a sort of Levi condition for the weakly hyperbolic equation of the 3-d order (12).

$$(14)\qquad \Big|\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)\xi_i\xi_j\Big| \le \sigma_1(t,\xi)\Big\{-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t)\xi_i\xi_j\Big\}^{\beta_1},$$

$$(15)\qquad \Big|\sum_{i=1}^{n} d_i(t)\xi_i\Big| \le \sigma_2(t,\xi)\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\xi_i\Big)^2-4\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t)\xi_i\xi_j\Big\}^{\beta_2},$$

$$(16)\qquad \Big|\sum_{i,j=1}^{n} f_i(t)\xi_i\Big| \le \sigma_3(t,\xi)\Big\{-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t)\xi_i\xi_j\Big\}^{\beta_3},$$

for some $\sigma_1(t,\xi)$, $\sigma_2(t,\xi)$ and $\sigma_3(t,\xi)$ such that

$$(17)\qquad \sup_{\xi\in\mathbf{R}^n_\xi}\int_0^T \sigma_1(t,\xi)\langle\xi\rangle^{2\beta_1-2}dt<+\infty,$$

$$(18)\qquad \sup_{\xi\in\mathbf{R}^n_\xi}\int_0^T \sigma_l(t,\xi)\langle\xi\rangle^{2\beta_l-1}dt<+\infty \ (l=2,3).$$

Then we can get the following corollary.

COROLLARY 3. *Let* $T > 0$, $\mu_0 > 0$, *and* $\beta_1 \in [0, 1]$, $\beta_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ and $\beta_3 \in [0, \frac{1}{2}]$. *The coefficients of the principal part satisfy (2), (3) and (4). Furthermore the coefficients of the lower terms satisfy (13), (14), (15) and (16). Then for any* u_0, u_1 *and* $u_2 \in \gamma^s$, *the Cauchy problem (12) has a unique (global) solution* $u \in C^3([0,T], \gamma^s)$, *provided*

$$1 \leq s < 1 + \min\left\{\frac{k+\alpha}{2}, \frac{1}{2-2\beta_1}, \frac{1}{1-2\beta_2}, \frac{2}{1-2\beta_3}\right\}, \tag{19}$$

Moreover when u_0, u_1 *and* $u_2 \in \gamma_0^s$ $(s > 1)$, *there exist the constant* $\nu > 0$ *and the positive function* $\mu(t)$ *satisfying* $\mu(0) = \mu_0$, *such that*

$$\begin{aligned} &e^{\mu(t)\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^{2\omega}|\hat{u}| + \langle\xi\rangle_\nu^{\omega}|\hat{u}_t| + |\hat{u}_{tt}|\right) \\ &\qquad \leq^{\exists} C e^{\mu_0\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^2|\hat{u}_0| + \langle\xi\rangle_\nu|\hat{u}_1| + |\hat{u}_2|\right), \end{aligned} \tag{20}$$

where

$$\omega = \max\left\{\frac{2}{2+k+\alpha}, \frac{2-2\beta_1}{3-2\beta_1}, \frac{1-2\beta_2}{2-2\beta_2}, \frac{1-2\beta_3}{3-2\beta_3}\right\}. \tag{21}$$

From this corollary we can see the followings.

i) for $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$ and $\beta_3 = \frac{1}{2}$ we can get the same result as Theorem 1.

ii) the lower term $\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t)u_{x_ix_j}$ influences on the γ^s-wellposedness if $s \geq \frac{3}{2}$.

iii) the lower term $\sum_{i=1}^n d_i(t)u_{tx_i}$ influences on the γ^s-wellposedness if $s \geq 2$.

iv) the lower term $\sum_{i=1}^n f_i(t)u_{x_i}$ influences on the γ^s-wellposedness if $s \geq 3$.

v) the lower terms $e(t)u_{tt}$, $g(t)u_t$ and $h(t)u$ don't influence on the γ^s-wellposedness.

Notations

$\langle\xi\rangle_\nu = (|\xi|^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}}$ $(\nu > 0)$. $\langle\xi\rangle = (|\xi|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (= \langle\xi\rangle_1)$.

$C^{k+\alpha}([0,T])$ $(k \in \mathbf{N}^1,\ 0 \leq \alpha \leq 1)$ is the space of functions $f(t)$ having k derivatives continuous, and the k-th derivative Hölder continuous with exponent α on $[0,T]$.

$\gamma^s(\mathbf{R}_x^n)(s \geq 1)$ is the space of Gevrey functions $f(x)$ satisfying for any compact set $K \subset \mathbf{R}^n$,

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha f(x)| \leq C_K \rho_K^{|\alpha|}|\alpha|^s! \quad \text{for} \quad {}^\forall\alpha \in \mathbf{N}^n.$$

$\gamma_0^s(\mathbf{R}_x^n)(s > 1)$ is the space of Gevrey functions $f(x)$ of the order s having compact support.

§2. Sketch of The Proof of Theorem 1

When $s=1$, the problem(1) is well-posed in γ^1 which is the topological vector space of analytic functions on $\mathbf{R}^n$(see [2] for the weakly hyperbolic equations of the 2-nd order and see [7] for the weakly hyperbolic systems which include the 3-d order equations). Therefore we can suppose $s>1$ for the proof.

In virtue of Holmgren's theorem we get the uniqueness of solutions to (1) and can suppose that $u_0(x)$, $u_1(x)$ and $u_2(x)$ belong to γ_0^s. Hence by Paley-Wiener theorem we shall assume that $e^{\mu_0\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\left(\langle\xi\rangle_\nu^2|\hat{u}_0|+\langle\xi\rangle_\nu|\hat{u}_1|+|\hat{u}_2|\right)<+\infty$.

Moreover Ovciannikov theorem gives the existence of solutions(see [3], [8]). Our task is to investigate the regularity for x of the solution, namely, to derive the energy inequality (7).

By Fourier transform the Cauchy problem (1) is changed to

$$\begin{cases} v_{ttt}+ia(t,\xi)v_{tt}-b(t,\xi)v_t=0 \\ v(0,\xi)=v_0(\xi), \quad v_t(0,\xi)=v_1(\xi), \quad v_{tt}(0,\xi)=v_2(\xi), \end{cases}$$

where $v=\hat{u}$, and $v_l=\hat{u}_l$ $(l=0,1,2)$, and $a(t,\xi)=\sum_{i=1}^n a_i(t)\xi_i$, $b(t,\xi)=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(t)\xi_i\xi_j$.

We modify the coefficients $a(t,\xi)$ and $b(t,\xi)$ as follows.

$$a_{\varepsilon,k}(t,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} a(t+\tau,\xi)\varphi\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)d\tau & \text{if } k=0,1, \\ a(t,\xi) & \text{if } k=2,3,\cdots, \end{cases}$$

$$b_{\varepsilon,k}(t,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} b(t+\tau,\xi)\varphi\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)d\tau & \text{if } k=0,1, \\ b(t,\xi) & \text{if } k=2,3,\cdots, \end{cases}$$

$(0<\varepsilon<1)$, where $\varphi(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}_t^1)$ satisfies $0\le\varphi(t)<\infty$ and $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=1$.

We shall define the following energy.

$$\begin{aligned}(22)\ E_{\varepsilon,k,\nu}(t,\xi)^2=&e^{\rho(t)\langle\xi\rangle_\nu^{\frac{1}{s}}}\Big\{|v_{tt}+ia_{\varepsilon,k}(t,\xi)v_t-b_{\varepsilon,k}(t,\xi)v+\varepsilon^\alpha\langle\xi\rangle_\nu^2 v|^2 \\ &+\Big|v_{tt}+\frac{i}{2}a_{\varepsilon,k}(t,\xi)v_t\Big|^2+\Big(\frac{a_{\varepsilon,k}(t,\xi)^2}{4}-b_{\varepsilon,k}(t,\xi)+\varepsilon^\alpha\langle\xi\rangle_\nu^2\Big)|v_t|^2\Big\}.\end{aligned}$$

Defferentiating (22) in t, we can derive the energy inequality. Thanks to the conditions (4) and the term $\varepsilon^\alpha\langle\xi\rangle_\nu^2$, this energy can be bounded from below and above by the absolute values of v, v_t and v_{tt}. Therefore the energy inequality based on (22) can be changed into the one based on the absolute values of them.

REFERENCES

[1] M. Cicognani, On the strictly hyperbolic equations which are Hölder continuous with respect to time, Preprint.

[2] F. Colombini, E. De Giorgi, S. Spagnolo, Sur les équations hyperboliques avec des ccoefficients qui ne dépendent que du temps, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa, 6 (1979), 511-559.

[3] F. Colombini, E. Jannelli, S. Spagnolo, Wellposedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a non strictly hyperbolic equation with coefficients depending on time, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa, 10 (1983), 291-312.

[4] P. D'ancona , Gevrey well posedness of an abstract Cauchy problem of weakly hyperbolic type, Publ. RIMS Kyoto Univ.,24 (1988), 433-449.

[5] V. Ya. Ivrii, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes, Siberian. Math., 17 (1976), 921-931.

[6] E. Jannelli, Gevrey well-posedness for a class of weakly hyperbolic equations. J. Math. Kyoto. Univ. 24-4 (1984), 763-778.

[7] E. Jannelli, Linear Kovalevskian systems with time dependent coefficients. Comm. P.D.E. 9 (1984), 1373-1406.

[8] E. Jannelli, Regularly hyperbolic systems and Gevrey classes, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. CXL (1985), 133-145.

[9] K. Kajitani, The well posed Cauchy problem for hyperbolic operators, Exposé au Séminaire de Vaillant du 8 février, (1989).

[10] T. Nishitani, Sur les équations hyperboliues à coefficients hölderiens en t et de classes de Gevrey en x, Bull. Sci. Math.,107 (1983), 739-773.

[11] Y. Ohya, S. Tarama, Le probléme de Cauchy à caractéristiques multiples -coefficients hölderiens en t- , Proc. Taniguchi Intern. Sympos. on Hyperbolic Equations and Related Topics 1984.

[12] M. Reissig, K. Yagdjian, Levi conditions and global Gevrey regularity for the solutions of quasilinear weakly hyperbolic equations, Mathematische Nachrichten 178 (1996), 285-307.

Degenerate Kirchhoff Equation in Ultradifferentiable Class

筑波大学数学研究科 廣澤史彦

1 Introduction

Kirchhoff type の準線形双曲型方程式

$$\partial_t^2 u(t,x) - \Phi\left(\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u(t,x)|^2 dx\right) \Delta u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

の Cauchy 問題を考える. ここで, $|\nabla u(t,x)|^2 = \sum_{j=1}^n |\partial_{x_j} u(t,x)|^2$, $\Phi(\eta) \in C^0([0,\infty))$, $\Phi \geq 0$ である.

本来, 方程式 (K) は, $\Phi(\eta) = \eta + 1$, $n = 1$ で Dirichret 境界条件を与え, 弾性弦の振動を記述するモデルとして考えられたものである. この方程式の最大の特徴は主部に対して非退化の条件：

$$\Phi(\eta) \geq \exists const > 0 \tag{2}$$

を仮定すると, 特に $f \equiv 0$ ならば, energy の時間大域的有界性, すなわち,

$$e(t) \equiv \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2\right\} = const \tag{3}$$

が成り立つということである. ここで, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ である. 実際 (2) より,

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t,x)\|^2 + \int_0^{\|\nabla u(t,\cdot)\|^2} \Phi(\eta) d\eta\right\} \equiv E(0) \tag{4}$$

となることがわかる. Φ が退化する場合, すなわち $\Phi(\eta) \geq 0$ の仮定しか与えられていない時にも,

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) d\eta = \infty \tag{5}$$

ならば, (3) が成立することがわかる. ちなみに, (5) を仮定しない場合でも, ある $T > 0$ に対して (1) の解が存在し, $u(t,x) \in C^2([0,T]; H^1)$ ならば,

$$\Phi\left(\|\nabla u(t,\cdot)\|^2\right) \in L^1([0,T]) \tag{6}$$

となることが知られている (cf.[3]). ところが, 時間大域的な可解性については, 通常の Sobolev 空間ではおろか Gevrey class の場合でさえもわかっていない. Large data の場合, 現在のところ大域可解性が成り立つことがわかっているクラスは, realanalytic class 或いは quasi-analytic class のみである.(cf. [1][3][5][6][9]) 実際 (1) に対して, 特に $\Phi \in C^1$ を仮定した場合, hyperbolic energy：

$$E_j(t)^2 = \frac{1}{2}\left\{\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{j-1}^2 + \Phi(\|\nabla u(t,\cdot)\|^2)\|\nabla u(t,\cdot)\|_{j-1}^2\right\} \tag{7}$$

$(\|\cdot\|_j = \|\cdot\|_{H^j})$ を考えると, $j \geq 2$ ならば,

$$\begin{aligned}
2E_j(t)E_j'(t) &= \Re\left(\nabla u_t(t,\cdot), \nabla u(t,\cdot)\right)\Phi'(\|\nabla u(t,\cdot)\|)\|\nabla u(t,\cdot)\|_{j-1}^2 \\
&\leq const\,\|\Delta u(t,\cdot)\|\|\nabla u(t,\cdot)\|_{j-1}^2 \\
&\leq const\,\|\Delta u(t,\cdot)\|E_{j-1}(t)^2
\end{aligned}$$

という評価が成り立つことがわかる. ここで, $\|\Delta u(t,\cdot)\| \leq const\,E_2(t)$ であるが, この場合 $E_j(t)$ の有界性は局所的にしかいえない. だがその一方で, 大域的な非可解性を示した結果も知られていない.

一方, $\Phi \in C^1$ が退化する場合, すなわち Φ が零点を持つ場合, Sobolev 空間上での局所可解性を示した結果 [10] がある. しかし, Φ が non-Lipschitz continuous の場合, Φ の退化, 非退化にかかわらず, 大域可解性は勿論, 局所可解性に関する結果も知られていない.

ここでは, quasi-analytic class における大域的可解性, および非線形部分 Φ が退化し, かつ non-Lipschitz continuous の場合の局所可解性に関する結果を報告する.

2 Linear weakly hyperbolic problem of second order

非線形方程式 (1) の可解性を考える場合, 次の線形弱双曲型方程式

$$u_{tt} - \Psi(t)\Delta u(t,x) = f(t,x) \tag{8}$$

の wellposedness の結果は重要である.

Theorem 1 ([2]) $\alpha \in (0,1)$, $s > 1$, $T > 0$, $\Psi_0 > 0$ はそれぞれ任意の定数, $\Psi(t) \geq 0$, $\Psi(t) \in C^\alpha([0,T])$, $f(t,x) \in C^0([0,T];\gamma^s(\mathbf{R}^n))$ であるとする. この時, $\frac{\alpha}{2}+1 > s$ ならば, (8) は, $\gamma^s(\mathbf{R}^n)$ *globally wellposed*, $\frac{\alpha}{2}+1 = s$ ならば, *locally wellposed* である. 更に, $\Psi(t) \geq \Psi_0$, $\frac{\alpha}{1-\alpha}+1 > s$ ならば, (8) は $\gamma^s(\mathbf{R}^n)$ *globally wellposed*, $\frac{\alpha}{1-\alpha}+1 = s$ ならば, *locally wellposed* となる. ここで, C^α は, *order* α の *Hölder class*, γ^s は, *order* s の *Gevrey class* である. 特に $\Psi(t) \in L^1([0,T])$ ならば, $\gamma^1(\mathbf{R}^n)$ *wellposed*, すなわち $C^\omega(\mathbf{R}^n)$ *globally wellposed* となる. ここで, $C^\omega(\mathbf{R}^n)$ は, $\mathbf{R}^n$ 上の *realanalytic function* の *class* である.

ところで, 非線型方程式 (1) の realanalytic class における大域可解性 [3] は, 上の線形の結果に帰着させることで得られる. 実際, 次のような energy :

$$E_0(t)^2 = \frac{1}{2}\left\{\|\partial_t u(t,\cdot) + u(t,\cdot)\|^2 + \|u(t,\cdot)\|^2 + \int_0^{\|\nabla u(t,\cdot)\|^2} \Phi(\eta)d\eta\right\}$$

を導入することにより, $\Phi(\|\nabla u(t,\cdot)\|^2) \in L^1$ が得られるからである (cf.[3][5]). だが realanalytic ではない class, すなわち Gevrey class などには, この証明は適用できない.

3 Function spaces and results

Theorem 1 に紹介した線形の結果をふまえ, ここでは $L^2(\mathbf{R}^n)$ の Gevrey class を含む次のような ultradifferentiable class での解を考えてゆく.

正の数列 $\{M_j\}$ と定数 $\rho > 0$ に対して, ultradifferentiable class $C^\sharp\{M_j\}_\rho$ を次のように定義する.

$$C^\sharp\{M_j\}_\rho = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}^n);\ \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^n} \frac{\rho^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \|\partial^\alpha f(\cdot)\| < \infty \right\}.$$

ここで, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ とする. また数列 $\{M_j\}$ に対して, しばしば logarithmically convexity

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} \le \frac{M_{j+1}}{M_j} \quad (0 \le \forall i \le \forall j)$$

を仮定する.

Example 1 $\{M_j\} = \{j!^s\}$ $(s > 1)$ ならば, $\bigcup_{\rho>0} C^\sharp\{j!^s\}_\rho = L^2(\mathbf{R}^n) \bigcup \gamma^s(\mathbf{R}^n)$, $\{M_j\} = \{j!\}$ ならば, $\bigcup_{\rho>0} C^\sharp\{j!\}_\rho = L^2(\mathbf{R}^n) \bigcup C^\omega(\mathbf{R}^n)$, となる. また, $\{M_j\}$ が *logarithmically convex(=l.c.)*, かつ *quasi-analytic conditon :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_j/M_{j+1} = \infty \tag{9}$$

を満たすならば, $\bigcup C^\sharp_{\rho>0}\{M_j\}_\rho$ は, *quasi-analytic class* となる. *(Denjoy-Carleman(cf.[8]))*.

線形問題に対する結果 Theoren 1 では, 係数 Ψ の Hölder continuity と wellposed となる Gevrey class の関係が与えられている. ここでは, Gevrey class を一般化した ultradiferentiable class に対応する一般化された Hölder class を次のように定義することにする.

ω は $[0,1]$ で定義された連続関数で,

$$\omega : \text{strictly increasing},\ \omega(0) = 0, \quad \text{and} \quad \lim_{t \to +0} \frac{\tau}{\omega(\tau)} < \infty \tag{10}$$

を満たしているとする. この時, $I \in \mathbf{R}$ 上での generalized Hölder class $\Lambda_\omega(I)$ を

$$\Lambda_\omega(I) = \left\{ f \in C^0(I);\ \sup_{s,t \in I, 0<|s-t|\le 1} \left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{\omega(|s-t|)} \right\} < \infty \right\}$$

で定義することにする. この時 (1) に対する可解性を示した次の結果を得る.

Theorem 2 (Global solvability in quasi-analytic class [6][9]) $\rho_0 > 0$, $T > 0$ は任意の定数, $\{M_j\}$ は正値 *l.c. sequaence*, $\Phi \in C^1$ は (2) を満たしているとする. この時, $u_0, u_1 \in C^\sharp\{M_j\}_{\rho_0}$, $f(t,x) \in C^0\left([0,T]; C^\sharp\{M_j\}_{\rho_0}\right)$ に対して, $T_0 > 0$, $\rho(t) > 0$ $(t \in [0, T_0])$ と, (1) の *unique solution* $u(t,x)$

$$u(t,x) \in C^2\left([0,T_0]; C^\sharp\{M_j\}_{\rho(t)}\right)$$

が存在する. 更に, $\{M_j\}$ が *quasi-analyic conditon* (9) を満たすならば, $T_0 = T$ となる.

Theorem 3 (Local solvability to the weakly hyperbolic problem [7]) $\rho_0 > 0, T > 0$ は任意の定数. ω は (10) を満たし, $\{M_j\}$ はある $\sigma > 0$ に対して,

$$\left\{ j!^{-\sigma}\omega(j^{-1})^{-\frac{1}{2}}M_j \right\} \ : l.c., \ and \ \sup_j \left\{ \omega(j^{-1})^{\frac{1}{2}} M_j / jM_{j-1} \right\} < \infty \tag{11}$$

を満たしているとする. この時, (5) を満たす $\Phi \in \Lambda_\omega([0,\infty))$, $u_0, u_1 \in C^\sharp\{M_j\}_{\rho_0}$, $f(t,x) \in C^0\left([0,T]; C^\sharp\{M_j\}_{\rho_0}\right)$ に対して, $T_0 > 0$, $\rho(t) > 0$ $(t \in [0,T_0])$ と, (1) の解 $u(t,x)$

$$u(t,x) \in C^2\left([0,T_0]; C^\sharp\{M_j\}_{\rho(t)}\right)$$

が存在する.

Theorem 4 (Local solvability to strictly hyperbolic problem [7]) $\rho_0 > 0$, $T > 0$ は任意の定数, ω は (10) を満たし, $\{M_j\}$ はある $\sigma > 0$ と$\delta_j \to \infty$ $(j \to \infty)$ なる 正値数列 $\{\delta_j\}$ に対して,

$$\left\{ j!^{-\sigma} M_j \right\} \ : l.c., \ and \ \sup_j \left\{ \omega(\delta_j^{-1}) M_j / jM_{j-1} \right\} < \infty. \tag{12}$$

を満たしているとする. この時, (2) を満たす $\Phi \in \Lambda_\omega([0,\infty))$, $u_0, u_1 \in C^\sharp\{M_j\}_{\rho_0}$, $f(t,x) \in C^0\left([0,T]; C^\sharp\{M_j\}_{\rho_0}\right)$ に対して, *Theorem 3* と同様の結果が得られる.

Example 2 Φ が *Hölder continuous* すなわち$\omega(\tau) = \tau^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, かつ $\{M_j\} = \{j!^s\}$ $(s > 1)$ とする. この時$\frac{\alpha}{2} + 1 \geq s$ ならば (11) を, また $\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1 \geq s$ ならば (12) を満たしている. また, $\omega(\tau) = (1 - \log\tau)^{-\frac{1}{\beta}}$ $(\tau \in (0,1])$, $\omega(0) = 0$, $\beta > 0$, $\{M_j\} = \prod_{k=1}^{j}(1 + \log k)^{\frac{1}{2\beta}}$ は, (9), (10), (11) を満たしている.

4 Sketch of the proof

これらの定理は, 次の形の ultradifferentiable class に対する infinite order energy の energy estimate を導くことによって証明される.

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^j}{M_j} E_j(t) \tag{13}$$

ここで, $E_j(t)$ は (7) で定義された Sobolev space 上での hyperbolic energy である. まず Theorem 2, すなわち $\Phi \in C^1$ かつ非退化の場合について考える. Theorem 3, 4 の証明はかなりテクニカルになるが, 大筋では Theorem 2 の証明に準じた形で行われる.

(13) で定義された $\mathcal{E}(t)$ に対して, first order energy の保存 (4) より, $\mathcal{E}'(t)$ は次のように評価されることがわかる.

$$\mathcal{E}'(t) \leq const \, \|\Delta u\| \mathcal{E}(t). \tag{14}$$

この時, $\|\Delta u(t,x)\|(=\||\cdot|^2\hat{u}(t,\cdot)\|)$ の評価が問題になる. ただし, $|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$, $\hat{u}$ は, u の Fourier image であるとする. 今 $\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|\geq 1$ と仮定する. この時,

$$\left\||\cdot|^2\hat{u}(t,\cdot)\right\|=\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\xi|^2\frac{\||\xi|\hat{u}(t,\xi)|^2}{\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|^2}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

となる. ここで, 次の Lemma を導入する.

Lemma 1 (Hardy-Littlewood-Polya) Ω は $\mathbf{R}^n$ 上の可測集合, μ, N, $N\circ\mu^{-1}$ はそれぞれ, 区間 $[(-\infty\leq)I_1,I_2(\leq\infty)]$ で連続, 非負の狭義単調増大関数であるとする. この時, $I_1\leq q(\xi)\leq I_2$ *a.e.* $\xi\in\Omega$, $\int_\Omega p(\xi)\xi=1$, $p>0$ をそれぞれ満たす任意の p, q に対して

$$\mu^{-1}\left(\int_\Omega \mu(q(\xi))p(\xi)d\xi\right)\leq N^{-1}\left(\int_\Omega N(q(\xi))p(\xi)d\xi\right) \tag{16}$$

が成り立つ.

ここで, $\Omega=\mathbf{R}^n$, $\mu(s)=s^{\frac{1}{2}}$, $q(\xi)=|\xi|$, $p(\xi)=\||\xi|\hat{u}(t,\xi)|^2/\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|^2$, と考えると, $\lambda\to N(\lambda^{\frac{1}{2}})$: convex なる任意の狭義単調増大な連続関数 N に対して,

$$\left\||\cdot|^2\hat{u}(t,\cdot)\right\|\leq const\, N^{-1}\left(\left\|N(\||\cdot|)^{\frac{1}{2}}|\cdot|\hat{u}(t,\xi)\right\|^2\right) \tag{17}$$

が成り立っていることがわかる.($\||\cdot|\hat{u}(t,\xi)\|<1$ の場合も, ほぼ同様の手法で (17) が示される.) ここで, N を次のように定義する.

$$N(r)=\frac{\rho^{2k}}{M_k^2}r^{2(k-1)},\quad r\in\left[\frac{M_k}{\rho M_{k-1}},\frac{M_{k+1}}{\rho M_k}\right),\quad (k=2,3,\cdots),$$

この時,

$$\begin{aligned}\left\|N(|\cdot|)^{\frac{1}{2}}|\cdot|\hat{u}(t,\xi)\right\|^2 &= \sum_{k=2}^{\infty}\left\|N(|\cdot|)^{\frac{1}{2}}|\cdot|\hat{u}(t,\xi)\right\|^2_{\frac{M_k}{\rho M_{k-1}}\leq|\xi|\leq\frac{M_{k+1}}{\rho M_k}}\\ &\leq \mathcal{E}(t)^2\end{aligned}$$

となるので, 結果

$$\left\||\cdot|^2\hat{u}(t,\cdot)\right\|\leq const\, N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)$$

となり, $\mathcal{E}(t)^2$ に関する常微分不等式

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)\leq const\,\mathcal{E}(t)^2N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right) \tag{18}$$

を得る. このことから, 時間大域的な $\mathcal{E}(t)$ の有界性が成り立つための N の条件は, $\mathcal{E}(0)<\infty$ とすると,

$$\int_{const}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda N^{-1}(\lambda)}=\infty \tag{19}$$

であることがわかる. ここで N の定義より, $M(\lambda) = \sup_{j\geq 1}\left\{\frac{\lambda^j}{M_j}\right\}$ とすると, $N(r) = M(\rho r)^2$ であることに注意すると, (19) は

$$\int_{const}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda M^{-1}(\lambda)} = \infty \tag{20}$$

と同値であることがわかる. この条件は Denjoy-Carleman の定理より, quasi-analytic condition (9) と同値である.

Φ : non-Lipschitz continuous, degenerate の場合, 次のような infinite order energy を導入する.

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho(t)^j}{M_j} e_j(t), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} e_j(t)^2 &= \Phi_j(\eta(t;\hat{u}))\||\cdot|^j\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2 + j^2\||\cdot|^{j-1}\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2 \\ &\quad + \||\cdot|^{j-1}\hat{u}_t(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2 + \omega(j^{-1})\||\cdot|^j\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2, \end{aligned} \tag{22}$$

ここで, $\eta(t;\hat{u}) = \int_{\mathbf{R}^n}|\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi$, $\rho(t)\in C^1$, $\rho'(t)\geq 0$, $\Phi_j(\eta) = \chi_{\frac{1}{j}} * \Phi(\eta)$, $\chi*$: Friedrichs' mollifier, $\Omega_j = \Omega_j(\rho(t)) = \{\xi\in\mathbf{R}^n; |\xi|\geq L_j/\rho(t)L_{j-1}\}$, $L_j = M_j/\omega(j^{-1})^{\frac{1}{2}}$ とする. ここで, $\rho'(t)\leq 0$ より $\frac{d}{dt}\|w(t,\cdot)\|^2 \leq 2\Re(w_t(t,\cdot), w(t,\cdot))$ となることに注意すると, 次の評価を得る.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}'(t) \leq const \left\||\cdot|^2\hat{u}(t,\cdot)\right\|_{\Omega_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho(t)^j}{L_j} j \left\||\cdot|^j\hat{u}(t,\cdot)\right\|_{\Omega_j}^2. \tag{23}$$

ここで Lemma 1 より, $\||\cdot|^j\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}$ は次のように評価できることがわかる.

$$\begin{aligned} \left\||\cdot|^j\hat{u}(t,\cdot)\right\|_{\Omega_j} &= \||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}\left(\int_{\Omega_j}|\xi|^{2(j-1)}\frac{||\xi|\hat{u}(t,\xi)|^2}{\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j} N_j^{-1}\left(\int_{\Omega_j}N_j(|\xi|)\frac{||\xi|\hat{u}(t,\xi)|^2}{\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2}d\xi\right)^{j-1} \\ &\leq \||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j} N^{-1}\left(\int_{\Omega_j}N(|\xi|)\frac{||\xi|\hat{u}(t,\xi)|^2}{\||\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\Omega_j}^2}d\xi\right)^{j-1}, \end{aligned}$$

ここで, $N_j(r;\rho) = \frac{\rho^{2j}r^{2(j-1)}}{L_j^2}$ $(r\in[0,\infty))$, N は, $N\left(N_j^{-1}(s)\right) = N\left(s^{1/2(j-1)}\right)$: covex on $s\in\{s\in[0,\infty); s=|\xi|, \xi\in\Omega_j\}$ となる任意の連続な狭義単調増大な関数である. 今, 特に N を

$$N(r) = N(r;\rho) = \frac{\rho^{2k}r^{2(k-1)}}{L_k^2}, \quad r\in\left[fracL_k\rho L_{k-1}, \frac{L_{k+1}}{\rho L_k}\right) \ (k=2,3,\cdots),$$

で定義する. この時,

$$\int_{\Omega_j} N(|\xi|)\,||\xi|\hat{u}(t,\xi)|^2\,d\xi \;=\; \sum_{i=j}^{\infty}\left\|N(|\cdot|)^{\frac{1}{2}}|\cdot|\hat{u}(t,\cdot)\right\|_{\Omega_i\setminus\Omega_{i+1}}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=j}^{\infty}\left(\frac{\rho^i}{L_i}\left\||\cdot|^i\hat{u}(t,\cdot)\right\|^2_{\Omega_i\setminus\Omega_{i+1}}\right)^2 \\
&\le \mathcal{E}(t)^2,
\end{aligned}
$$

となることに注意すると, $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t)$ は次のように評価できることがわかる.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &\le const \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(t)^j}{L_j}jN^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)^j \\
&\le const \sum_{j=1}^{\infty}\sup_k\left\{\frac{\left(\rho(t)N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)^k\right.}{k^{-3}L_k}\right\}j^{-2} \\
&\le const \sup_k\left\{\frac{\left(\rho(t)N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)^k\right.}{k^{-3}L_k}\right\} \\
&\le const \left(\rho(t)N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)\right)^{\left[\frac{3}{\sigma}\right]+1}L\left(\rho(t)N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

ここで, L は $\{L_j\}$ の随伴関数 : $L(r)=\sup_{j\ge1}\{r^j/L_j\}$, $[\cdot]$: Gauss symbol, $\sigma>0$ は (11) で与えられた定数である. ここで N の定義より, $\mathcal{E}(t)^2$ に関する常微分方程式

$$
\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(t))^2 \le const\, N^{-1}\left(\mathcal{E}(t)^2\right)^{\left[\frac{3}{\sigma}\right]+1}\mathcal{E}(t)^2 \tag{24}
$$

を得る. これより, 時間局所的な a priori estimate を得る.

参考文献

[1] S.Bernstein, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 4 (1940), 17-26.

[2] F.Colombini-E.Jannelli-S.Spagnolo, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. 10, 291-312 (1983).

[3] P.D'Ancona-S.Spagnolo, Invent. Math. 108 (1992), 247-262.

[4] G.H.Hardy-J.E.Littlewood-G.Polya, Cambridge UP, Cambridge,1952.

[5] F.Hirosawa, Tsukuba J.Math. 21(1997), 483-503.

[6] F.Hirosawa, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. Sci. (to appear).

[7] F.Hirosawa, (preprint).

[8] G.Krantz-H.R.Parks, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin (1992).

[9] K.Nishihara, Tokyo J.Math. 7(1984),437-459.

[10] Y.Yamada, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 11, No. 10, 1155-1168 (1987).

Global Smooth Solutions of Semilinear Weakly Hyperbolic Equations

HARUHISA ISHIDA

Institute of Mathematics
University of Tsukuba

In this paper we shall consider the following Cauchy problem for semilinear weakly hyperbolic equations of second order

$$u_{tt} = a(t) \sum_{j,k=1}^{n} \left(a_{jk}(x)u_{x_j}\right)_{x_k} + f(u) \quad \text{in} \quad [0,T] \times \mathbb{R}^n_x, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where

$$0 \le a(t) \in C^\omega([0,\infty)), \tag{3}$$

$C^\infty(\mathbb{R}^n) \ni a_{jk}(x) = a_{kj}(x)$ $(j,k = 1,2,\cdots,n)$ are real valued functions and suppose that

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \ge 0 \quad \text{for all} \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}. \tag{4}$$

Moreover we assume that $f(u) \in C^\infty$ and for each $j = 0,1,\cdots,N$ there exist some constants $A_j, B_j \ge 1$ such that

$$\begin{cases} |f(u)| \le B_0|u|\log(A_0 + |u|), \\ |f^{(j)}(u)| \le B_j(A_j + |u|)^{-j+1}\log(A_j + |u|), \end{cases} \tag{5}$$

where $N = [n/2] + 1$. Then we have the following result.

Theorem. Suppose that (3), (4) and (5). Then for any $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ there is a unique solution $u(t,x) \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n_x)$ to the Cauchy problem (1), (2).

We remark that in the cases of $n = 1,2$, P. D'Ancona[3] has already obtained the analogous result under the assumption

$$\begin{cases} |f(u)| \le B|u|\log(A + |u|), \\ |f'(u)| + |f''(u)| \le B\log(A + |u|), \end{cases} \tag{5'}$$

which is more relaxed than (5) for $n = 2$. In his proof a refined Sobolev inequality due to H. Brézis-T. Gallouet[1] plays a substantial role. The inequality is also established for general n (see Theorem 1 in H. Brézis-S. Wainger[2]) but his method cannot be applied to our theorem any longer. So we shall derive an ordinary differential inequality with global solvability from the condition (5) by using a Gagliardo-Nirenberg type inequality, observe the boundedness of solutions to the differential inequality via the comparison theorem and hence prove the boundedness of an energy for solutions to the problem (1), (2) in arbitrary order Sobolev space.

As for the existence of time global C^∞ solutions to semilinear weakly hyperbolic equations we know the paper P. D'Ancona[4].

Proof of Theorem. Since $a'(t)$ is real analytic on $[0,T]$, the interval $[0,T]$ can be decomposed into finite subintervals in which either $a'(t) \geq 0$ or $a'(t) \leq 0$ holds. Therefore it suffices to handle the two cases

Case I: $a'(t) \geq 0$ on [0,T] and Case II: $a'(t) \leq 0$ on [0,T]

from the beginning. For the sake of simplicity we assume that solutions are real valued as well.

Case I: $a'(t) \geq 0$ on $[0,T]$. In this case we shall employ a trick due to O. A. Oleĭnik[8]. Let us consider the linear equation

$$u_{tt} = a(t) \sum_{j,k=1}^{n} \left(a_{jk}(x)u_{x_j}\right)_{x_k} + f(t,x) \tag{6}$$

and suppose for the moment that $u(t,x)$ is a solution of (6) with null data $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$. For any fixed $\tau \in [0,T]$, define the auxiliary function

$$U(t,x) = \int_t^\tau u(s,x)\,ds,$$

multiply (6) by $U(t,x)$ and integrate the resulting equation over $[0,\tau] \times \mathbb{R}^n_x$. Then we obtain three terms and next calculate them respectively.

For the first one, integrating by parts in t, we have because of $U_t = -u$ and $u_t(0,x) = U(\tau,x) = 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int u_{ss}U(s,x)\,dxds &= \int_0^\tau \int u_s u(s,x)\,dxds \\ &= \int_0^\tau \int \frac{1}{2}\left(|u|^2\right)_s dxds = \frac{1}{2}\int |u(\tau,x)|^2\,dx.\end{aligned} \tag{7}$$

As to the second term, in view of integration by parts in x

$$\int_0^\tau \int a(s) \sum_{j,k=1}^{n} \left(a_{jk}(x)u_{x_j}\right)_{x_k} U(s,x)\,dxds = \int_0^\tau \int a(s) \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)U_{x_j s}U_{x_k}\,dxds$$

$$= \int_0^\tau \int \left(a(s) \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)U_{x_j}U_{x_k}\right)_s dxds - \int_0^\tau \int a'(s) \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)U_{x_j}U_{x_k}\,dxds$$

$$- \int_0^\tau \int a(s) \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)U_{x_j}U_{x_k s}\,dxds,$$

so that

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & 2\int_0^\tau \int a(s) \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) U_{x_j s} U_{x_k}\, dxds \\
&= \int \Big(a(\tau) \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) U_{x_j} U_{x_k} - a(0) \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) U_{x_j} U_{x_k} \Big)\, dx \\
&- \int_0^\tau \int a'(s) \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) U_{x_j} U_{x_k}\, dxds \le 0
\end{aligned}
$$

because $U_{x_j}(\tau, x) = a(0) = 0$, $a' \ge 0$ and (4). The last term gives

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad & \int_0^\tau \int f(s,x) U(s,x)\, dxds \\
& \le \frac{1}{2} \int_0^\tau \int |f(s,x)|^2\, dxds + \frac{1}{2} C(T) \int_0^\tau \int |u(s,x)|^2\, dxds.
\end{aligned}
$$

Thus, putting (7), (8) and (9) together, we get

$$
\int |u(\tau,x)|^2\, dx \le C(T) \int_0^\tau \int |u(s,x)|^2\, dxds + \int_0^\tau \int |f(s,x)|^2\, dxds
$$

and if we denote

$$
e_0(\tau) = \int_0^\tau \int |u(s,x)|^2\, dxds,
$$

then this inequality may be expressed by

$$
e_0'(\tau) \le C(T) e_0(\tau) + \int_0^\tau \int |f(s,x)|^2\, dxds.
$$

In the similar way, we can lead a priori estimates of higher order for the solution $u(t,x)$. Indeed, we operate ∂_x^α with $|\alpha| = j$ to the equation (6), multiply it by

$$
\partial_x^\alpha U(t,x) = \int_t^\tau \partial_x^\alpha u(s,x)\, ds
$$

and apply the same computations as above to the resulting three terms; if we write

$$
e_j(\tau) = \int_0^\tau \int |\partial_x^j u(s,x)|^2\, dxds = \int_0^\tau \int \sum_{|\alpha|=j} |\partial_x^\alpha u(s,x)|^2\, dxds,
$$

then

$$
(10) \qquad e_j'(\tau) \le C(T) e_j(\tau) + \int_0^\tau \int |\partial_x^j f(s,x)|^2\, dxds,
$$

which is established under the hypothesis that the initial data $u(0,x)$ and $u_t(0,x)$ were vanishing, however. In order to deal with the general case of arbitrary initial data (2), it is sufficient to pick

$$v(t,x) = u(t,x) - u_0(x) - tu_1(x)$$

and to verify that, if $u(t,x)$ solves (6), then $v(t,x)$ does

$$v_{tt} = a(t)a^\sharp(x,\partial_x)v + \tilde{f}(t,x), v(0,x) = v_t(0,x) = 0,$$

where

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t,x) &= f(t,x) + a(t)\big(a^\sharp(x,\partial_x)u_0 + ta^\sharp(x,\partial_x)u_1\big),\\ a^\sharp(x,\partial_x) &= \sum_{j,k=1}^{n} \{a_{jk}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k} + (\partial_{x_j}a_{jk}(x))\partial_{x_k}\}.\end{aligned}$$

Hence, adapting the estimate (10) to $v(t,x)$, we have

$$\begin{aligned}e_j'(\tau) \le C(T)e_j(\tau) &+ \int_0^\tau \int |\partial_x^j f(s,x)|^2\,dxds\\ &+ C(T,\|a\|_{L^\infty})\left(\int |\partial_x^{j+2}u_0|^2\,dx + \int |\partial_x^{j+2}u_1|^2\,dx\right).\end{aligned}$$

Finally, we note that the same procedure allows us to obtain analogous estimates also for the time derivatives and so all the derivatives $\partial_{t,x}^\alpha u$. In fact, if we differentiate (6) with respect to the time variable t, then we get an equation similar to (6) for the time derivative of u, plus some lower order terms, for which we have already showed L^2–estimates. Thus, in conclusion, standing for

$$e_{j,k}(\tau) = \int_0^\tau \int |\partial_x^k\partial_s^j u(s,x)|^2\,dxds,$$

we know

$$(11)\qquad e_{j,k}'(\tau) \le C_{j,k}(T,\|a\|_{W^{j,\infty}})\left(\|f(s,x)\|^2_{H^{j+k}(G(\tau))} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{k+2}(\mathbb{R}^n)}\right),$$

where $G(\tau) = [0,\tau]\times\mathbb{R}^n_x$. The estimate (11) may be written more briefly as

$$(12)\qquad \begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\|u\|^2_{H^m(G(\tau))} &\le C_m(T,\|a\|_{W^{m,\infty}})\\ &\times\left(\|f(s,x)\|^2_{H^m(G(\tau))} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned}$$

Now we apply the estimate (12) to the nonlinear equation (1) and then it holds that

$$\frac{d}{d\tau}\|u\|^2_{H^m(G(\tau))} \le C_m\left(\|f(u)\|^2_{H^m(G(\tau))} + \|(u_0,u_1)\|^2_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Here, employing the Gagliardo-Nirenberg type inequality (16), we find

$$\|f(u)\|^2_{H^m(G(\tau))} \leq C_1(m)\varphi_m(\|u\|^2_{L^\infty})\|u\|^2_{H^m(G(\tau))}$$
$$\leq C_2(m)\varphi_m(\|u\|^2_{H^m(G(\tau))})\|u\|^2_{H^m(G(\tau))}$$

with $\varphi_m(s) = \sum_{j=0}^{m-1} s^j$ since $H^m(G(\tau)) \subset L^\infty(G(\tau))$ for $m > n/2$. Therefore we have for $m > n/2$

$$\frac{d}{d\tau}\|u\|^2_{H^m(G(\tau))} \leq \psi_m(\|u\|^2_{H^m(G(\tau))}) + \|(u_0, u_1)\|^2_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)},$$

where $\psi_m(s) = C_m \sum_{j=1}^{m} s^j$. Thus, by Gronwall's inequality we obtain

$$(13) \qquad \|u\|_{H^m(G(\tau))} \leq C(m, T, \|(u_0, u_1)\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)}) \quad \text{on} \quad [0, \tau_m]$$

for some $\tau_m \in (0, T]$ provided $m > n/2$.

Now it follows from standard arguments(for instance, the Faedo-Galerkin finite dimensional approximation method; see, in detail, J. L. Lions-E. Magenes[7], §8.2) that the estimate (13) implies the existence of a unique local solution to the problem (1), (2), belonging to H^m for $0 \leq t \leq \tau_m$ when $m > n/2$ (but it may happen that $\tau_m \to 0$ as $m \to \infty$).

We shall next prove that the solution actually exists and is C^∞ on the whole interval $[0, T]$.

To this end, we introduce the energy of order j for a solution $u(t, x)$ by

$$E_j(t) = \|u_t(t, \cdot)\|^2_{H^j} + a(t)(a^\sharp(x, D_x)u(t, \cdot), u(t, \cdot))_{H^j} + M_j\|u(t, \cdot)\|^2_{H^j}$$

for $j = 0, 1, \cdots$, where M_j is a positive constant determined as below : Since there is a positive continuous function $C_j(t)$ on $[0, T]$ such that

$$(a^\sharp(x, D_x)u(t), u(t))_{H^j} \geq -C_j(t)\|u(t)\|^2_{H_j}$$

thanks to the Fefferman-Phong inequality(see, *e.g.*, C. Fefferman-D. H. Phong[5]), we take $M_j \geq 1$ as $M_j \geq \max_{t\in[0,T]} a(t)C_j(t)$ so that $E_j(t) \geq 0$ on $[0, T]$.

First of all, differentiating $E_j(t)$ with respect to t and using the equation (1), we get

(14)
$$E_j'(t) \leq a'(t)(a^\sharp(x, D_x)u, u)_{H^j} + 2M_j \operatorname{Re}(u, u_t)_{H^j} + 2\operatorname{Re}(f(u), u_t)_{H^j}$$
$$\leq a'(t)(a^\sharp(x, D_x)u, u)_{H^j} + M_j E_j(t) + 2\|f(u)\|_{H^j}\sqrt{E_j(t)}.$$

Here, note from the assumption $a'(t) \geq 0$ on $[0, T]$ (unless $a \equiv 0$) that

$$a(t) \geq a(\tau_j) > 0 \quad \text{on} \quad [\tau_j, T].$$

Thereby

$$(15) \qquad a'(t)(a^\sharp(x, D_x)u, u)_{H^j} \leq \frac{a'(t)}{a(t)}E_j(t) \quad \text{on} \quad [\tau_j, T].$$

Now let us estimate the third term in the right hand side in (14). Adopting the formula

$$\partial_x^\alpha f(u) = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_k=\alpha \\ |\beta_i|>0}} \frac{\alpha!}{\beta_1!\cdots\beta_k!} (\partial_x^{\beta_1} u)\cdots(\partial_x^{\beta_k} u)$$

and the Gagliardo-Nirenberg type inequality

$$\|\partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u\|_{L^2} \le c(\ell)\|u\|_{L^\infty}^{k-1} \sum_{|\gamma|=\ell} \|\partial^\gamma u\|_{L^2} \tag{16}$$

for $|\beta_1|+\cdots+|\beta_k| = \ell$(see Corollary 6.4.4 and its Remark in L. Hörmander[6]), we admit by (5)

(17)

$$\begin{aligned}
\|f(u)\|_{H^j} &\le C_{j1}(t) \sum_{|\alpha|\le j} \|\partial_x^\alpha f(u)\|_{L^2} \\
&\le C_{j2}(t) \sum_{|\alpha|\le j} \sum_{k=1}^{|\alpha|} \|f^{(k)}(u)\|_{L^\infty} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_k=\alpha \\ |\beta_i|>0}} \|\partial_x^{\beta_1} u \cdots \partial_x^{\beta_k} u\|_{L^2} \\
&\le C_{j3}(t) \sum_{|\alpha|\le j} \sum_{k=1}^{|\alpha|} \frac{B_k \log(A_k + \|u\|_{L^\infty} + C)}{(A_k + \|u\|_{L^\infty})^{k-1}} \|u\|_{L^\infty}^{k-1} \sum_{|\beta|=|\alpha|} \|\partial_x^\beta u\|_{L^2} \\
&\le C_{j4}(t)\|u\|_{H^j} \log(A_j' + \|u\|_{L^\infty} + C).
\end{aligned}$$

Set $F(t) = \sum_{j=0}^N \sqrt{E_j(t)}$ and observe by Sobolev's embedding theorem that $\|u(t)\|_{L^\infty} \le C_n\|u(t)\|_{H^N} \le C_n' F(t)$ on $[0,T]$. Thus, from (14), (15) and (17) we deduce the ordinary differential inequality

$$F'(t) \le F(t)\left(\frac{\|a'\|_{L^\infty(0,T)}}{a(\tau_m)} + \tilde{M}_N + \tilde{C}_N(t)\log(\tilde{A}_N + F(t) + \tilde{C})\right) \quad \text{on} \quad [\tau_m, T].$$

By the way, we recall that a unique solution $u(t,x)$ exists on $[0,\tau_m]$ and belongs to $H^m([0,\tau_m]\times\mathbb{R}_x^n)$ as long as $m > n/2$; So, for $m > n/2$ we notice by trace theorems

$$u(\tau_m,\cdot) \in H^{m-1/2}(\mathbb{R}^n), u_t(\tau_m,\cdot) \in H^{m-3/2}(\mathbb{R}^n)$$

and hence $F(\tau_m) < \infty$ if we retake m like $m \ge N + 3/2$. Further, comparing $F(t)$ with the solution $\rho(t)$ of the ordinary differential equation

$$\rho'(t) = \rho(t)\left(\frac{\|a'\|_{L^\infty(0,T)}}{a(\tau_m)} + \tilde{M}_N + \tilde{C}_N(t)\log(\tilde{A}_N + \rho(t) + \tilde{C})\right), \rho(\tau_m) = F(\tau_m)$$

which exists and which is finite on $[\tau_m, \infty)$, we arrive at

$$F(t) \le \rho(t) < \infty \quad \text{on} \quad [0,T] \tag{18}$$

because of (13). Therefore we conclude by standard procedures that u can be prolonged on $[0,T]$ and

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le C_n \|u(t)\|_{H^N} \le C_n' F(t) \quad \text{on} \quad [0,T]. \tag{19}$$

Up to now, we have proved that a unique H^N solution u exists on $[0,T]$ and satisfies the estimate (13). It remains to check that u lies in the $C^\infty-$ class. For this purpose we resort to the estimate (14) : Then, on account of (15)

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E_j(t)} \le \left(\frac{a'(t)}{a(t)} + M_j\right)\sqrt{E_j(t)} + \|f(u)\|_{H^j}$$

for $t > 0$ and once more taking advantage of (16) as in (17), we find

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E_j(t)} \le \left(\frac{a'(t)}{a(t)} + M_j\right)\sqrt{E_j(t)} + C_j\varphi_j(\|u\|_{L^\infty})\sqrt{E_j(t)}.$$

Hence, by virtue of (18) and (19) we gain that for $t > 0$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E_j(t)} \le \left(\frac{a'(t)}{a(t)} + M_j\right)\sqrt{E_j(t)} + \tilde{C}_j\sqrt{E_j(t)}. \tag{20}$$

Now we can combine (13) with (20) : By choosing m as $m \ge \max\{j+1, N+3/2\}$, (13) implies that

$$\sqrt{E_j(t)} < \infty \quad \text{on} \quad [0,\tau_m];$$

Meanwhile, since

$$\frac{a'(t)}{a(t)} \le \frac{\|a'\|_{L^\infty(0,T)}}{a(\tau_m)} \quad \text{on} \quad [\tau_m, T],$$

an application of Gronwall's inequality to (20) gives

$$\sqrt{E_j(t)} < \infty \quad \text{on} \quad [\tau_m, T].$$

Thus we have showed that all the energies $E_j(t)$ are bounded on $[0,T]$ and so the solution u belongs to the $C^\infty-$ class.

Case II: $a'(t) \le 0$ on $[0,T]$. We shall use again the same energies $E_j(t)$ as the ones in Case I. Differentiating $E_j(t)$ in t and proceeding as before, we obtain from (14)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{E_j(t)} &\le (1 - a'(t))M_j\sqrt{E_j(t)} + \|f(u)\|_{H^j} \\ &\le M_j'\sqrt{E_j(t)} + \|f(u)\|_{H^j}\end{aligned} \tag{21}$$

because $a'(t) \le 0$. Moreover, by (17)

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E_j(t)} \le M_j'\sqrt{E_j(t)} + C_{j5}(t)\sqrt{E_j(t)}\log(A_j'' + \sqrt{E_j(t)} + C'),$$

so that

$$F'(t) \le F(t)\big(\tilde{M}'_N + \tilde{C}'_N(t)\log(\tilde{A}'_N + F(t) + \tilde{C}')\big) \quad \text{on} \quad [0,T].$$

Since the solution $\sigma(t)$ of the ordinary differential equation

$$\sigma'(t) = \sigma(t)\big(\tilde{M}'_N + \tilde{C}'_N(t)\log(\tilde{A}'_N + \sigma(t) + \tilde{C}')\big), \sigma(0) = F(0)$$

exists and is finite on $[0,\infty)$, we enjoy

$$F(t) \le \sigma(t) < \infty \quad \text{on} \quad [0,T],$$

which means

$$\|u(t)\|_{L^\infty} < \infty \quad \text{on} \quad [0,T].$$

Now we are in a position to estimate the higher order energies owing to (16). From (17) and (21)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{E_j(t)} &\le M'_j\sqrt{E_j(t)} + C_{j6}(t)\sqrt{E_j(t)} \\ &\le C(j,T)\sqrt{E_j(t)}\end{aligned}$$

hold. Applying Gronwall's inequality, we get the boundedness of $\sqrt{E_j(t)}$ for all $j = 0, 1, \cdots$:

$$\sqrt{E_j(t)} \le C'(j,T)\sqrt{E_j(0)} \quad \text{on} \quad [0,T] \quad \text{for} \quad j = 0, 1, \cdots. \tag{22}$$

Hence, thanks to the a priori estimates (22), we can show in standard ways the existence of a unique C^∞ solution $u(t,x)$ on $[0,T] \times \mathbb{R}^n_x$ to the problem (1), (2).

References

[1]. H. Brézis and T. Gallouet, *The nonlinear Schrödinger evolution equation*, J. Nonlinear Anal. **4** (1980), 677–681.

[2]. H. Brézis and S. Wainger, *A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 773–789.

[3]. P. D'Ancona, *On a semilinear weakly hyperbolic equation with logarithmic nonlinearity*, Differential and Integral Equations **7** (1994), 121–132.

[4]. ———, *A note on a theorem of Jörgens*, Math. Z. **218** (1995), 239–252.

[5]. C. Fefferman and D. H. Phong, *On positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **75** (1978), 4673–4674.

[6]. L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Math. and Appl., vol. 26, Springer-Verlag, 1997.

[7]. J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I*, Grundlehren math. Wissensch., vol. 181, Springer-Verlag, 1972.

[8]. O. A. Oleĭnik, *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 569–586.

準線形発展方程式に対する陰的 RUNGE-KUTTA 法の誤差解析

中口 悦史 (阪大・工・応用物理)

§1. 問題設定と主定理.

Banach 空間 X の上の準線形抽象発展方程式

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u)u = f(u), \quad 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

の近似解を，陰的 Runge-Kutta 法を用いて求めることを考える．ここで $-A(u)$ は X の上の解析的半群の生成素で，$K = \{u \in Z; \|u - u_0\|_Z < r\}$ で定義されているとする．また Z は X の中に連続的に埋め込まれた Banach 空間である．

方程式 (1.1) に関して以下の条件を仮定する．

(A1) レゾルヴェント集合 $\rho(A(u))$ は角領域 $\mathbb{C} \setminus S_\varphi$ を含み，かつレゾルヴェント $(\lambda - A(u))^{-1}$ は

$$\|(\lambda - A(u))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_A}{|\lambda| + 1}, \quad \lambda \notin S_\varphi,\ u \in K.$$

を満たす．ここで $0 < \varphi < \pi/2$ かつ $S_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \varphi\}$.

(A2) $A(u)$ の定義域は一定 $\mathcal{D}(A(u)) \equiv \mathcal{D}$ で，$A(u)$ は次の Lipschitz 条件を満たす．

$$\|\{A(u) - A(v)\}A(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le L_A\|u - v\|_Z, \quad u, v \in Z.$$

(Sp) ある指数 $0 < \alpha < 1$ があって，$\mathcal{D}(A(u)^\alpha)$ は Z の中に連続的に埋め込まれる．

(F) 関数 $f(u)$ は K で定義され，次の Lipschitz 条件を満たす．

$$\|f(u) - f(v)\|_X \le L_f\|u - v\|_Z, \quad u, v \in K.$$

(In) 初期値 u_0 は $\mathcal{D}$ の元である．

Runge-Kutta 法は段数 s と，係数の組 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,s}, \mathcal{B} = \mathrm{diag}[b_1, \dots, b_s], \mathcal{C} = \mathrm{diag}[c_1, \dots, c_s]$, で定義される．刻み幅を h として，このスキームを常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(t, y), 0 < t \le T, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

に適用したときの近似解 $\{Y_n\}_{n=0,1,\dots,N}$, $N\cdot h \le T$, は，初期条件 $Y_0=y_0$ と繰り返し計算

$$Y_{n+1}=Y_n+h\sum_{j=1}^{s} b_j F(t_n+hc_j, W_{n,j}), \quad n=0,1,\dots,N-1,$$

で与えられる．ただし $t_n=n\cdot h$. $W_{n,i}$, $i=1,\dots,s$, は s 元連立非線形方程式

$$W_i=Y_n+h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} F(t_n+hc_j, W_j), \quad i=1,\dots,s,$$

の解である．Runge-Kutta 法は，$\mathcal{A}$ が狭義下三角のとき陽的，そうでないとき陰的とよばれる．

F が十分滑らかなときに $Y_1-y(h)=O(h^{p+1})$ とできるとき，このスキームは p 次であるという．スキームが p 次になるための必要十分条件が a_{ij}, b_j, c_j の間の代数的関係式で与えられることは，Butcher [1] によって示されている．

関数 $R(z)=1-ze^T\mathcal{B}(\mathcal{I}+z\mathcal{A})^{-1}e$ を，このスキームの安定関数という．ただし $e=[1,\dots,1]^T$. ある $0<\theta\le\pi/2$ があって，閉角領域 $\overline{S_\theta}$ を含むある領域で $(\mathcal{I}+z\mathcal{A})^{-1}$ が正則，$\overline{S_\theta}$ 上で $|R(z)|\le 1$ となるとき，スキームは $A(\theta)$-安定であるという．スキームが $A(\theta)$-安定であって，さらに $R(\infty)=1-e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}e$ の絶対値が 1 より小さいとき，$A(\theta)$-強安定であるという．

方程式 (1.1) に Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ を適用すると，次の計算式を得る．

$$(1.2) \qquad \begin{cases} U_{n+1}=U_n+he^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{V}_n+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n)\}, \\ \boldsymbol{V}_n=eU_n+h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{V}_n+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n)\}, \\ U_0=u_0. \end{cases}$$

ただし $e=[1,\dots,1]^T$, $\boldsymbol{V}_n=[V_{n,1},\dots,V_{n,s}]$, また $\boldsymbol{V}=[V_1,\dots,V_s]$ に対して $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V})=\mathrm{diag}[A(V_1),\dots,A(V_s)]$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V})=[f(V_1),\dots,f(V_s)]^T$ とする．

主定理となる解の存在定理と収束定理を次に示す．

定理 1.1. $0<\eta<1-\alpha$ をひとつとり，$0<h\le S\le T$, $N\le S/h$ として，

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_h(S)=\{\mathcal{U}=[U_0,\dots,U_N,\boldsymbol{V}_0,\dots,\boldsymbol{V}_{N-1}]\in Z^{N+1+s\cdot N};U_0=u_0,\\ \|U_n-u_0\|_Z\le r/2, \|U_n-U_m\|_Z\le |(n-m)h|^\eta,\\ \|V_{n,j}-u_0\|_Z\le r/2, \|V_{n,j}-U_n\|_Z\le h^\eta\}\end{aligned}$$

とおく．ある $\varphi<\theta\le\pi/2$ に対して Runge-Kutta 法が $A(\theta)$-強安定なら，S と h を十分小さくとると，(1.2) は $\mathcal{K}_h(S)$ の中で一意な解 $\mathcal{U}=[U_0,\dots,U_N,\boldsymbol{V}_0,\dots,\boldsymbol{V}_{N-1}]$ を持つ．また $\mathcal{U}$ は

$$\|U_n\|_X,\ \|A(U_n)U_n\|_X\le C,$$

を満たす．

定理 1.2. Runge-Kutta 法は $A(\theta)$-強安定かつ $p\geq 2$ 次であると仮定する. (1.1) の解 u が $u\in\mathcal{C}^{p+1}([0,S];\mathcal{D})$ なら, 誤差 $E_n=U_n-u(t_n)$, $n=0,1,\dots,N$, は, $h>0$ が十分小のとき,

$$\|E_n\|_X\leq C\left(h^p\|u^{(p+1)}\|_{L^1(0,S;X)}+h^{q+1}\|A(u_0)u^{(q+1)}\|_{L^1(0,S;X)}\right),$$

$$\|A(u_0)E_n\|_X\leq C\Big(h^p\|A(u_0)u^{(p+1)}\|_{L^1(0,S;X)}$$
$$+\omega^{-1}h^{q+1}\|A(u_0)u^{(q+1)}\|_{\mathcal{C}^\omega([0,S];X)}\Big),$$

で評価される. ただし, $0<\omega<1$ は任意, $q\leq p-1$ は, $0\leq k\leq q$ で $\mathcal{A}\mathcal{C}^{k-1}e=\mathcal{C}^k e/k$ が成立するような整数とする.

§2. 放物型離散半群と基本解.

$\varphi<\theta\leq\pi/2$ とし, 有理関数 $R(z)=1-ze^T\mathcal{B}(\mathcal{I}+z\mathcal{A})^{-1}e$ を, $A(\theta)$-強安定な陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ の安定関数とする.

補題 2.1. $R(z)$ の特異点は, 閉領域

$$\Sigma=\{z\in\mathbb{C};\ \|\mathcal{A}\|^{-1}\leq|z|\leq\|\mathcal{A}^{-1}\|,\ |\arg z|\geq\theta\}$$

に含まれる.

補題 2.2. 適当な $\delta>0$, $\delta^{-1}>\max\{\|\mathcal{A}\|,\|\mathcal{A}^{-1}\|\}$, を選べば, 任意の $0<\theta'<\theta$ に対して, 次の評価が成立するような定数 $0<\kappa<1$, $\nu>0$, $\mu>0$ をとることができる.

$$|R(z)|\leq\begin{cases}\kappa, & |z|\geq\delta^{-1},\\ \kappa, & \delta\leq|z|\geq\delta^{-1},\ |\arg z|\leq\theta',\\ e^{-\nu|z|}, & |z|\leq\delta,\ |\arg z|\leq\theta',\\ e^{\mu|z|}, & |z|\leq\delta,\ |\arg z|\geq\theta'.\end{cases}$$

証明は [2] にならって, $R(z)$ が指数関数 e^z の近似であることと, Σ の外で正則であることを用いる.

$w\in K$ に対して,

$$R(hA(w))=1-he^T\mathcal{B}A(w)(\mathcal{I}+h\mathcal{A}A(w))^{-1}e$$

とおく.

補題 2.3. $J_h(w)=(\mathcal{I}+h\mathcal{A}A(w))^{-1}$ は X^s 上の有界作用素として存在し, w について一様に

$$\|A(w)^\rho J_h(w)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\leq C_\rho h^{-\rho},\quad 0\leq\rho\leq 1,$$

を満たす.

証明. 適当な有界閉積分路 Γ をとって,

$$J_h(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\mathcal{I}+z\mathcal{A})^{-1}\left(\frac{z}{h}-A(w)\right)^{-1}\frac{dz}{h}$$

と表されることを示せばよい.

補助定理 2.4. 各 $w \in K$ について，半群 $\{R(hA(w))^n\}_{n=0,1,\ldots}$ は放物型離散半群である，すなわち，

$$\|R(hA(w))^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le C,$$

$$\|A(w)^\rho\{R(hA(w))^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C_\rho((n+1)h)^{-\rho}, \quad 0 \le \rho \le 1,$$

$$\|A(w)^\rho \boldsymbol{J}_h(w)\boldsymbol{e}R(hA(w))^n\|_{\mathcal{L}(X)},\ \|A(w)^\rho R(hA(w))^n \boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\boldsymbol{J}_h(w)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \le C_\rho((n+1)h)^{-\rho}, \quad 0 \le \rho \le 1,$$

が成立する．さらにこれらは w について一様である．

証明. 補題 2.3 の証明と同様に，

$$R(hA(w))^n = R(\infty)^n + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R(z)^n \left(\frac{z}{h} - A(w)\right)^{-1} \frac{dz}{h}$$

が成立する．ここで各 n に対して

$$\Gamma = \Gamma_n = \{z;\ |z| = \delta^{-1},\ |\arg z| \ge \psi\} \cup \{z;\ \delta \le |z| \le \delta^{-1},\ \arg z = \pm\psi\} \\ \cup \{z;\ \delta/n \le |z| \le \delta,\ \arg z = \pm\psi\} \cup \{z;\ |z| = \delta/n,\ |\arg z| \ge \psi\}$$

として [5]，補題 2.2 を用いる．

次に $\mathcal{W} = [W_0, \ldots, W_N, \boldsymbol{Y}_0, \ldots, \boldsymbol{Y}_{N-1}] \in \mathcal{K}_h(S)$ に対して，離散基本解を構成する．上述のように，各 $A(W_n)$ に対しては，放物型離散半群 $\{R(hA(W_n))^n\}_{n=0,1,\ldots}$ を構成することができる．これと同様にして，次のような作用素の族を考える．

$$\Phi_h(\mathcal{W}; n, m) = \begin{cases} 1, \quad n = m, \\ \{1 - h\boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_{n-1})\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_{n-1})\boldsymbol{e}\} \\ \quad \cdots \{1 - h\boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_m)\boldsymbol{e}\}, \quad 0 \le m < n \le N. \end{cases}$$

ただし $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}) = (1 + h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}))^{-1}$.

補題 2.5. $h > 0$ は十分小とする．$\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)$ は X^s 上の有界作用素であって，やはり $\mathcal{W}$ に関して一様に

$$\|A(W_n)^\rho \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C_\rho h^{-\rho}, \quad 0 \le \rho \le 1,$$

を満たす．

証明は等式 $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n) - \boldsymbol{J}_h(W_n) = h\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\mathcal{A}\{A(W_n) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\}\boldsymbol{J}_h(W_n)$ と補題 2.3 による．

補助定理 **2.6.** 離散基本解 $\Phi_h(\mathcal{W};n,m)$ は，$\mathcal{U}=[U_0,\dots,U_N,\boldsymbol{V}_0,\dots,\boldsymbol{V}_{N-1}]$ の方程式

$$
(2.1)\qquad \begin{cases} U_{n+1}=U_n+h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_n)\}, \\ \boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{e}U_n+h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_n)\}, \\ U_0=u_0, \end{cases}
$$

に関する基本解であって，以下の評価を満足する．

$$\|\Phi_h(\mathcal{W};n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}\le C,$$

$$\|A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W};n,m)A(W_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\le C,$$

$$
\begin{aligned}
&\|A(W_n)^\rho\Phi_h(\mathcal{W};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)},\\
&\qquad\|A(W_n)^\rho\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{e}\Phi_h(\mathcal{W};n,m)\|_{\mathcal{L}(X,X^s)}\le C_\rho((n-m)h)^{-\rho},\quad 0\le\rho\le1,
\end{aligned}
$$

$$\|\{\Phi_h(\mathcal{W};n,m)-1\}A(W_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\le C(n-m)h.$$

これらの評価も $\mathcal{W}$ に依存しない．さらに，(2.1) の解 $\mathcal{U}$ は次のように表される．

$$
(2.2)\qquad \begin{cases} U_n=\Phi_h(\mathcal{W};n,m)w_0+h\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W};n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_l), \\ \boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\{\boldsymbol{e}U_n+h\mathcal{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_n)\}. \end{cases}
$$

証明．定義より

$$
\begin{aligned}
&\Phi_h(\mathcal{W};n,m)-R(hA(W_m))^{n-m}\\
&\quad=h\sum_{l=m}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W};n,l+1)\boldsymbol{b}^T\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\{\mathcal{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l)A(W_m)^{-1}\}\\
&\qquad\qquad\times A(W_m)\boldsymbol{J}_h(W_m)\boldsymbol{e}R(hA(W_m))^{l-m}.
\end{aligned}
$$

これより $\|\Phi_h(\mathcal{W};n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}$ に関する Volterra 型離散積分不等式

$$\|\Phi_h(\mathcal{W};n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}\le C+Ch\sum_{l=m}^{n-1}\|\Phi_h(\mathcal{W};n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X)}((l-m+1)h)^{\eta-1}$$

が得られるから，これを解いて第 1 の評価が得られる．ほかの不等式についても同様．
(2.2) は，(2.1) から $\boldsymbol{V}_n$ を消去して得られる U_n の漸化式から，直ちに導かれる．

§3. 定理 1.1 の証明.

Yagi [7] の方針に従って，縮小写像の原理を応用する．$\mathcal{W} = [W_0, \dots, W_N, Y_0, \dots, Y_{N-1}] \in \mathcal{K}_h(S)$ に対し，初期値問題

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} U_{n+1} = U_n + he^T\mathcal{B}\{-A(Y_n)V_n + f(Y_n)\}, \\ V_n = eU_n + h\mathcal{A}\{-A(Y_n)V_n + f(Y_n)\}, \\ U_0 = u_0, \end{cases}
$$

の解 $\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, V_0, \dots, V_{N-1}] \in X^{N+1+s\cdot N}$ を対応させる写像を $\mathcal{T}_h$ と書く．補助定理 2.6 で見たように，$\mathcal{U}$ は次のように表すことができる．

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} U_n = \Phi_h(\mathcal{W}; n, 0)u_0 + h\sum_{l=0}^{n-1} \Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}J_h(Y_l)\mathcal{A}f(Y_l), \\ V_n = J_h(Y_n)\{eW_n + h\mathcal{A}f(Y_n)\}. \end{cases}
$$

この表現と §2 の結果より，以下の補助定理が示される．

補助定理 3.1. S が小さいとき，$\mathcal{T}_h$ は $\mathcal{K}_h(S)$ からその中への写像である．

補助定理 3.2. $\mathcal{T}_h$ は Lipschitz 連続であり，その Lipschitz 係数は，S を小さくとると，1 より小さくできる．

これによって，$\mathcal{T}_h$ が $\mathcal{K}_h(S)$ 上の縮小写像であることが示される．$\mathcal{T}_h$ の一意な不動点が (1.2) の解であることは明らかである．

§4. 定理 1.2 の証明.

Lubich & Ostermann [3] の方法に従う．$u(t)$ を (1.1) の解とし，$\tau_n = (t_n\mathcal{I} + h\mathcal{C})e$, また $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_s]^T$ に対して $u(\tau) = [u(\tau_1), \dots, u(\tau_s)]^T$, $u'(\tau) = [u'(\tau_1), \dots, u'(\tau_s)]^T$ とおく．

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} e_n = u(t_{n+1}) - u(t_n) - he^T\mathcal{B}u'(\tau_n), \\ d_n = u(\tau_n) - eu(t_n) - h\mathcal{A}u'(\tau_n), \end{cases}
$$

とすると，陰的 Runge-Kutta 法が p 次であるから，

$$
e_n = \int_0^h \left(\frac{(h-t)^p}{p!}u^{(p+1)}(t_n + t) - \frac{h(h-t)^{p-1}}{(p-1)!}e^T\mathcal{B}\mathcal{C}^p u^{(p+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})e) \right) dt,
$$

同様に，

$$
d_n = \int_0^h \left(\frac{(h-t)^q}{q!}\mathcal{C}^q - \frac{h(h-t)^{q-1}}{(q-1)!}\mathcal{A}\mathcal{C}^{q-1} \right) u^{(q+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})e)dt
$$

が成立する．式 (4.1)，(1.1)，(1.2) より，誤差 $E_n = U_n - u(t_n)$, $D_n = V_n - u(\tau_n)$ は次の初期値問題の解として与えられる．

$$
\begin{cases} E_{n+1} = E_n - he^T\mathcal{B}A(V_n)D_n + he^T\mathcal{B}g(V_n, u(\tau_n)) - e_n, \\ D_n = eE_n - h\mathcal{A}A(V_n)D_n + h\mathcal{A}g(V_n, u(\tau_n)) - d_n, \\ E_0 = 0. \end{cases}
$$

ただし $g(V,v) = -\{A(V) - A(v)\}v + \{f(V) - f(v)\}$. すなわち，$E_n$, D_n は次式で与えられる．

$$\begin{cases} E_n = h\sum_{l=0}^{n-1} \Phi_h(\mathcal{U}; n, l+1) e^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1} J_h(V_l) \mathcal{A} g(V_l, u(\tau_l)) \\ \qquad + \sum_{l=0}^{n-1} \Phi_h(\mathcal{U}; n, l+1) \big[h e^T \mathcal{B} A(V_l) J_h(V_l) d_l - e_l \big], \\ D_n = J_h(V_n) \big[e E_n + h \mathcal{A} g(V_n, u(\tau_n)) - d_n \big]. \end{cases}$$

ここで，$g(\cdot,\cdot)$ の Lipschitz 連続性 $\|g(V,v)\|_{Z^s} \le C\|V - v\|_{Z^s}$ と，§2 に示された基本解 $\Phi_h(\mathcal{U};\cdot,\cdot)$ に関する評価を用いると，$\|D_n\|_{Z^s}$ に関する Volterra 型離散積分不等式

$$\|D_n\|_{Z^s} \le Ch\sum_{l=0}^{n-1} ((n-l)h)^{-\alpha} \|D_l\|_{Z^s}$$
$$+ C\|A(u_0) d_n\|_{X^s} + C\sum_{l=0}^{n-1} ((n-l)h)^{-\alpha} \big[h\|A(u_0) d_l\|_{X^s} + \|e_l\|_X \big]$$

が得られる．これを解いて，$\|E_n\|_X$, $\|A(u_0)E_n\|_X$ の評価式に代入すれば，所望の結果を得る．

References

[1] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.

[2] M. Crouzeix, S. Larsson, S. Piskarev and V. Thomée, *The stability of rational approximations of analytic semigroup*, BIT **33** (1993), 74–84.

[3] Ch. Lubich and A. Ostermann, *Runge-Kutta approximation of quasi-linear parabolic equations*, Math. Comp. **64** (1995), 601–627.

[4] E. Nakaguchi and A. Yagi, *Error estimates of implicit Runge-Kutta methods for quasilinear abstract equations of parabolic type in Banach spaces*, submitted to J. Math. Soc. Japan.

[5] C. Palencia, *Stability of rational multistep approximations of holomorphic semigroups*, Math. Comp. **64** (1995), 591–599.

[6] H. Tanabe, *Equation of Evolution*, Iwanami, Tokyo, 1975 (in Japanese); English translation, Pitman, London, 1979.

[7] A. Yagi, *Abstract quasilinear evolution equations of parabolic type in Banach spaces*, Bolletino Uno. Mat. Ital. **5-B** (1991), 341–368.

[8] A. Yagi, *Norm behavior of solutions to a parabolic system of chemotaxis*, Math. Japonica **45** (1997), 241–265.

〒565 大阪府吹田市山田丘 2-1

E-mail address: `nakaguti@ap.eng.osaka-u.ac.jp`