第8回
発展方程式若手セミナー
報　告　集

1987年4月

序

”第８回　発展方程式若手セミナー”は、発展方程式振興会の援助のもとに、１９８６年８月４日から７日まで新潟県越後湯沢で開かれました。　この報告集は、そのセミナーにおける講演の内容をもとに講演者に執筆していただいた原稿をまとめたものです。

”発展方程式及びその周辺分野の将来の方向を探る若手研究者の勉強会”という趣旨で開かれているこのセミナーも、今回で８回目となりました。

今回は、中央大学理工学部の石井仁司先生に特別講演をお願いし

”Ｉｎｔｒｏｄｕｃｔｉｏｎ　ｔｏ　Ｈａｍｉｌｔｏｎ－Ｊａｃｏｂｉ ｅｑｕａｔｉｏｎｓ”

という題で、Ｈａｍｉｌｔｏｎ－Ｊａｃｏｂｉ方程式のｖｉｓｃｏｓｉｔｙ ｓｏｌｕｔｉｏｎについての入門的な事から最近のトピックスまでを、延べ３時間にわたり講演していただきました。　また、

伊藤正幸氏（徳島大　総科）：　特異摂動法について（入門的お話）
水町竜一氏（東京大　理）：　非圧縮性流体（最近のｔｏｐｉｃｓについて）

の両氏に、上記の題目でそれぞれの専門分野における最近の話題について、それぞれ１時間の特別講演を提供していただきました。　さらに１５の一般講演があり、様々な方面からの議論がなされ有意義なセミナーを行うことができました。

このようなセミナーが今後とも引き継がれ、発展方程式及びその関連分野の将来のためにすこしでも寄与できますように願っています。

今回のセミナーに参加して下さいました方々及び今回のセミナーを開くにあたり協力して下さいました多くの方々に、この場を借りて深く感謝いたします。

１９８７年　４月　第８回発展方程式若手セミナー幹事　堤　誉志雄

参加者名簿

村上　悟	（八戸高専）	柴田　良弘	（筑波大　数学）
寶　隆博	（筑波大　数学）	柿原　康子	（筑波大　数学）
剣持　信幸	（千葉大　教育）	重田　多恵子	（都立大　理）
桔梗　洋子	（早大　理工）	大本　隆	（早大　理工）
蚊戸　宣幸	（早大　教育）	石井　仁司	（中央大　理工）
福田　勇	（国士館大　工）	福田　賢一	（都立医療技術短大）
細谷　正憲	（東京理大　理）	浅川　秀一	（東京理大　理）
倉田　和浩	（学習院大　理）	水町　竜一	（東大　理）
山崎　昌男	（東大　理）	佐々木　徹	（東大　理）
山本　昌宏	（東大　教養）	久保　雅弘	（東大　教養）
小川　卓克	（東大　教養）	山口　勝	（東海大　理）
楢崎　隆	（東海大　理）	大谷　光春	（東海大　理）
小林　和夫	（相模工大　工）	菊地　慶祐	（相模工大　工）
丹羽　芳樹	（日立製作所）	小薗　英雄	（名大　工）
芹沢　久光	（新潟大　教養）	竹仲　俊美	（中部大　工）
押目　頼昌	（和歌山大　経済短大）	朴　東根	（阪大　理）
丸尾　健二	（阪大　工）	山田　直記	（神戸大　理）
中桐　信一	（神戸大　工）	中村　元	（広島大　理）
堤　誉志雄	（広島大　総科）	小山　哲也	（広島工大）
伊藤　正幸	（徳島大　総科）	仙葉　隆	（福岡大　理）

目次

序

参加者名簿

特別講演

一般講演

ハミルトン・ヤコビ方程式の解の存在と一意性について

中央大 理工 石井仁司

§1. ハミルトン・ヤコビ方程式

変分法、幾何光学、最適制御、微分ゲーム等において重要なハミルトン・ヤコビ方程式

$$u_t(t,x) + H(t,x,Du) = 0 \qquad t>0,\quad x \in \mathbb{R}^N$$

の大域解の存在と一意性について考える。ここで

$u: [0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が未知関数,

$H: [0,\infty)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は既知関数,

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\quad Du = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_N})$.

定常問題

$$\lambda u + H(x,Du) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

も重要である. ただし, $\lambda \geq 0$ は定数とする. 変分法、幾何光学におけるハミルトニアン H は

$$H(x,p) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)p_i p_j - V(x)$$

の形をしている. 最適制御に現れるハミルトン・ヤコビ方程式はベルマン (Bellman) 方程式と呼ばれ、そのハミルトニアンは

$$H(x,p) = \max\{-g(x,a)\cdot p - f(x,a) : \ a \in A\}$$

の形をしている. 微分ゲームにおけるものはアイザックス (Isaacs) 方程式と呼ばれ、そのハミルトニアンは

2

$$H(x,p) = \max_{a\in A}\min_{b\in B}\{-g(x,a,b)\cdot p - f(x,a,b)\}$$

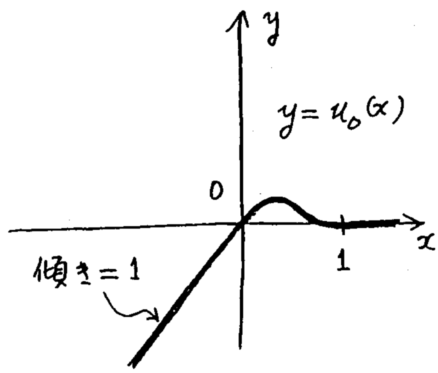
の形をしている．ただし、AとBは集合で，fとgはそれぞれ$\mathbb{R}$と$\mathbb{R}^N$に値をとる関数である。

まず簡単な例をいくつか考えてみる。

例 1. 初期値問題

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}|Du|^2 = 0 & \text{in } [0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

は C^1 解を持たない。ただし、u_0 のグラフは右図の形をしているものとする。



補題. $v\in C^1([0,\infty)\times[a,b])$ が

$$\begin{cases} v_t + \frac{1}{2}|Dv|^2 = 0 & (t\geq 0,\ a\leq x\leq b) \\ v(0,x) = 0 \end{cases}$$

をみたすならば，$v(t,x)=0 \quad (t\geq 0,\ a\leq x\leq b)$ が成立する.

証明. $T>0$、$Q=[0,T]\times[a,b]$ とし、

$$M = \max\{|Dv(t,x)| : (t,x)\in Q\},$$

$$\omega(r) = \max\{|Dv(t,x)-Dv(s,y)| : (t,x),(s,y)\in Q,\ |t-s|^2+|x-y|^2\leq r^2\}$$
$$(r\geq 0)$$

$$\Delta = \left\{(t,x)\in Q : \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2} - \frac{M}{2}t\right\}$$

とおく。$(t,x)\in\Delta$ に対して

$$\dot{X}(s) = \frac{1}{2}Dv(s,X(s)), \qquad X(t) = x$$

は解を $0 \leq s \leq t$ でもつ。 $|\dot{X}(s)| \leq \frac{M}{2}$ より

$$|X(s) - x| \leq \frac{M}{2}(t-s).$$

従って、 $(s, X(s)) \in \Delta$.

$$\frac{d}{ds} v(s, X(s)) = v_t + Dv \cdot \dot{X}(s) = 0$$

だから, $v(t,x) = v(0, X(0)) = 0$. こうして

$$v \equiv 0 \quad \text{on } \Delta.$$

$M=0$ ならば、これで OK だから、以下 $M>0$ とする。 $\varepsilon>0$ を $\omega(\varepsilon) < M$ ととる。 Δ_ε により Δ の ε-近傍を表わす。 $\Delta_\varepsilon \cap Q$ 上で $|Dv| \leq \omega(\varepsilon)$ となることに注意すれば、前と同様にして、

$$v \equiv 0 \quad \text{on } \Delta_\varepsilon \cap \left\{(t,x) \in Q : \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2} - \frac{\omega(\varepsilon)}{2}t\right\}.$$

これをくり返して

$$v \equiv 0 \quad \text{on } \left\{(t,x) \in Q : \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2} - \frac{\omega(\varepsilon)}{2}t\right\}.$$

$\varepsilon \searrow 0$ として, $v \equiv 0$ on Q. □

<u>例1の証明</u> C^1 解 u があったとする. 補題より

$$u \equiv 0 \quad \text{on } [0,\infty) \times [1,\infty).$$

$w(t,x) = u(t, x+t) - x - \frac{t}{2}$ $(t \geq 0,\ x \leq 0)$ とおく。

$$\begin{cases} w_t + \frac{1}{2}|Dw|^2 = u_t + Du - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|Du-1|^2 = u_t + \frac{1}{2}|Du|^2 = 0 \\ w(0,x) = u(0,x) - x = 0 \end{cases}$$

となり、補題より $w \equiv 0$ on $[0,\infty) \times (-\infty, 0]$. 従って

$$0 = w(1,0) = u(1,1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

これは矛盾. □

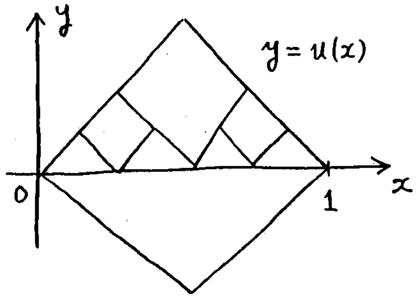
例1により古典解を期待することは一般に無理がある。また部分積分を利用して弱解を定義するのも方程式の形から無理である。

<u>例2</u>. $|Du| = 1$ a.e. in $(0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$

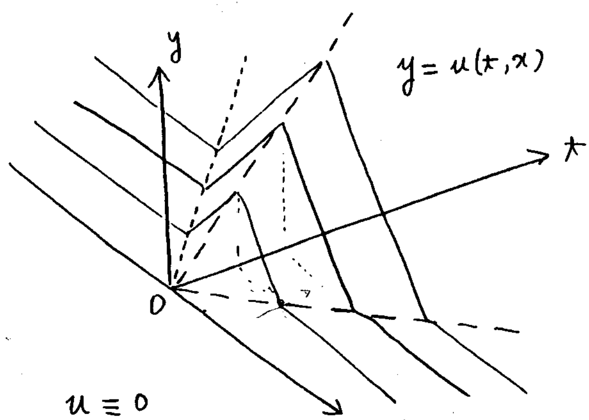
をみたす絶対連続な解は一意的に定まらない。下の図を参照のこと。

<u>例3</u>. $u_t - |Du|^2 = 0$ a.e. in $(0, \infty) \times R$, $u(0, x) = 0$ $x \in R$

をみたす絶対連続な解は一意的に定まらない。下の図を参照のこと。



(例2)



$u \equiv 0$

$u(t, x) = \max\{t - |x|, 0\}$

(例3)

この解の一意存在に対する最初の解答は Kružkov [29], Douglis [18] 等により与えられた。そこでの弱解の定義は解に対して semiconcave 性と方程式を a.e. でみたすことを要求する。ただし，$u(x)$ が semiconcave であるとはある正数 C に対して

$$u(x-h)-2u(x)+u(x+h) \leqq C|h|^2 \quad (x, h \in \mathbb{R}^N)$$

が成立することである。この考えは種々の問題に有効であったが、例えばハミルトニアン $H(x,p)$ が p について凸でない場合(微分ゲーム)には解の存在が言えなくなった。この難点を解決する、より自然な弱解が Crandall-Lions [12] により導入された粘性解である。以下ではこの粘性解の存在と一意性について考えて行く。

§2. 粘性解の定義と性質

Ω を $\mathbb{R}^N$ の開集合とし、一階偏微分方程式

$$F(x, u, Du) = 0 \qquad in \ \Omega$$

に対してその粘性解を定義する。

<u>定義</u>. $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $y \in \Omega$ とする。u の y における劣微分 $D^-u(y)$, 優微分 $D^+u(y)$ を次のように定義する。

$$D^-u(y) = \{p \in \mathbb{R}^N : u(x) \geqq u(y) + p\cdot(x-y) + o(x-y) \quad (x\to y)\},$$

$$D^+u(y) = \{p \in \mathbb{R}^N : u(x) \leqq u(y) + p\cdot(x-y) + o(x-y) \quad (x\to y)\}.$$

次のことはすぐ判る。

u が y で微分可能 $\Rightarrow$ $D^-u(y) = D^+u(y) = \{Du(y)\}$,

$D^-u(y) \cap D^+u(y) \neq \phi$ $\Rightarrow$ u は y で微分可能.

<u>命題 2.1</u>. (i) $p \in D^+u(y) \Leftrightarrow$ ある $\varphi \in C^1(\Omega)$ に対して

$u-\varphi$ は y で極大となり，さらに $D\varphi(y)=p$.

(ii) $p \in D^{-}u(y) \Leftrightarrow$ ある $\varphi \in C^1(\Omega)$ に対して $u-\varphi$ は y で極小となり，さらに $D\varphi(y)=p$.

<u>証明</u>. ($\Leftarrow$) は容易である. (i) についてのみ ($\Rightarrow$) を示す.

$p \in D^{+}u(y)$ とすれば，ある $\delta>0$ と $\theta \in C([0,\infty))$（ただし，$\theta(0)=0$）に対して

$$u(x) \leqq u(y) + p\cdot(x-y) + \theta(|x-y|)|x-y| \qquad \forall x \in B(y,\delta)$$

が成立する. θ は非減少関数としてよい.

$$\rho(r) = \int_0^r \theta(s)\,ds \qquad (r \geqq 0)$$

により $\rho \in C^1([0,\infty))$ を定義すると，

$$\theta'(0)=0, \qquad \rho(2r) \geqq \int_r^{2r} \theta(s)\,ds \geqq \theta(r)\,r$$

が成立する.

$$\varphi(x) = u(y) + p\cdot(x-y) + \rho(2|x-y|)$$

とおくと，$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ と $D\varphi(y)=p$ が成立し，さらに $u-\varphi$ は y で $B(y,\delta)$ における最大値をとる. ■

$u \in C(\Omega)$ のとき，$\{x : D^{+}u(x) \neq \phi\}$ は Ω で稠密となる. なぜなら，$y\in\Omega$ とするとき関数 $x \to u(x) - \frac{1}{\varepsilon}|x-y|^2$ $(\varepsilon>0)$ が ε を十分に小さく取ることによりいくらでも y に近いところで極大を取るように出来る. これと到る所で微分可能でない連続関数が存在するという事実を考え合せると，劣微分と優微分の導入の重要さが感じられる.

<u>定義</u>. $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ は連続とする。

(i) $u\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)\leqslant 0$ in Ω の粘性解

$\Leftrightarrow$ $F(x,u(x),p)\leqslant 0$ $\forall x\in\Omega$, $\forall p\in D^+u(x)$.

(ii) $u\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)\geqslant 0$ in Ω の粘性解

$\Leftrightarrow$ $F(x,u(x),p)\geqslant 0$ $\forall x\in\Omega$, $\forall p\in D^-u(x)$.

(iii) $u\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)=0$ in Ω の粘性解

$\Leftrightarrow$ u が $F(x,u,Du)\leqslant 0$, $F(x,u,Du)\geqslant 0$ in Ω の粘性解.

命題 2.1 より次のことが判る。

<u>命題 2.2</u>. (i) $u\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)\leqslant 0$ in Ω の粘性解

$\Leftrightarrow$ $\forall\varphi\in C^1(\Omega)$ に対して、$u-\varphi$ が $y\in\Omega$ で極大となるならば $F(y,u(y),D\varphi(y))\leqslant 0$ が成立する。

(ii) $u\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)\geqslant 0$ in Ω の粘性解

$\Leftrightarrow$ $\forall\varphi\in C^1(\Omega)$ に対して、$u-\varphi$ が $y\in\Omega$ で極小となるならば $F(y,u(y),D\varphi(y))\geqslant 0$ が成立する。

上の命題において「$y\in\Omega$ で極大(極小)となる」を, φ を $\varphi+\psi$ (ただし、$D\psi(y)=0$, $\psi\in C^1(\Omega)$) により置き替えて, 「$y\in\Omega$ で最大(最小)となる」, 「$y\in\Omega$ で最大(最小)値 0 を取る」, 「$y\in\Omega$ で狭義の最大(最小)をとる」等と言い換えてもよい。

$u\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)\leqslant 0$ in Ω の粘性解であることと $v=-u$ が $-F(x,-v,-Dv)\geqslant 0$ in Ω の粘性解である

ことに注意する。

命題 2.3. $\varepsilon > 0$, $F_\varepsilon \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ とし、$u^\varepsilon \in C^2(\Omega)$ が

$$-\varepsilon \Delta u^\varepsilon + F_\varepsilon(x, u^\varepsilon, Du^\varepsilon) \leq 0 \quad in \quad \Omega$$

をみたすとする。ある $u \in C(\Omega)$ と $F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ に対して、$\varepsilon \searrow 0$ とするとき, $u^\varepsilon(x) \to u(x)$ (Ω 上で広義一様) $F_\varepsilon(x, r, p) \to F(x, r, p)$ ($\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上で広義一様) となるとする。このとき、u は $F(x, u, Du) \leq 0$ in Ω の粘性解である。

証明 $\varphi \in C^2(\Omega)$, $y \in \Omega$ とし、$u - \varphi$ は y で狭義の最大をとるとする。ε が十分に小さければ, $u^\varepsilon - \varphi$ もまた y の近くの点 y_ε において極大を取る。$y_\varepsilon \to y$ ($\varepsilon \searrow 0$) としてよい。

$$-\Delta(u^\varepsilon - \varphi)(y_\varepsilon) \geq 0, \qquad D(u^\varepsilon - \varphi)(y_\varepsilon) = 0$$

となるから,

$$-\varepsilon \Delta \varphi(y_\varepsilon) + F_\varepsilon(y_\varepsilon, u^\varepsilon(y_\varepsilon), D\varphi(y_\varepsilon)) \leq 0$$

が成立する。$\varepsilon \searrow 0$ として、$F(y, u(y), D\varphi(y)) \leq 0$ を得る。次に, すべての $\varphi \in C^1(\Omega)$ に対して同じ事が言えることをみる。$\varphi \in C^1(\Omega)$ とし, $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset C^2(\Omega)$ を $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$, $D\varphi_j(x) \to D\varphi(x)$ (Ω 上で広義一様) となるように選ぶ。$u - \varphi$ は $y \in \Omega$ で狭義の最大をとるとする。j が十分大きいならば, $u - \varphi_j$ も y の近くの y_j で極大をとる。$y_j \to y$ ($j \to \infty$) としてよい。上に示した事から,

$$F(y_j,\ u(y_j),\ D\varphi_j(y_j)) \leqq 0$$

となり、$j\to\infty$ として $F(y, u(y), D\varphi(y)) \leqq 0$ を得る。 □

この証明の後半は命題 2.2 において「$\varphi\in C^\infty(\Omega)$」としてもよいことを示している。次の命題は上の命題と同じように証明出来る、証明は省略する。

命題 2.4. $\{u_k\}\subset C(\Omega)$, $\{F_k\}\subset C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ とし、u_k は $F_k(x, u, Du)\leqq 0$ in Ω の粘性解とする。さらに

$$u_k(x) \longrightarrow u(x) \qquad (\Omega\text{で広義一様})$$

$$F_k(x,r,p) \to F(x,r,p) \quad (\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\text{で広義一様})$$

がある $u\in C(\Omega)$ と $F\in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ に対して成立するとする。このとき，u は $F(x,u,Du)\leqq 0$ in Ω の粘性解である。

次の粘性解の性質もすぐに確められる。証明は略す。

命題 2.5. $F\in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, $u\in C(\Omega)$ とする。

(i) u が $F(x,u,Du)\leqq 0$ in Ω の粘性解であり、$\Omega'\subset\Omega$ が開集合ならば、u は $F(x,u,Du)\leqq 0$ in Ω' の粘性解である。

(ii) 各 $y\in\Omega$ について，ある開近傍 Ω_y があり u が $F(x,u,Du)\leqq 0$ in Ω_y の粘性解ならば，u は $F(x,u,Du)\leqq 0$ in Ω の粘性解である。

命題 2.6. $F\in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ とする。$u, v\in C(\Omega)$ が $F(x,u,Du)\leqq 0$ in Ω の粘性解ならば、$w(x)=\max\{u(x), v(x)\}$

とおくとき、$w \in C(\Omega)$ も $F(x, u, Du) \leq 0$ in Ω の粘性解である。

<u>証明</u>. $\varphi \in C^1(\Omega)$, $y \in \Omega$ とし、$w - \varphi$ が y で最大となるとする。例えば、$w(y) = u(y)$ であるとすると、$u - \varphi$ は y で最大となる。u は $F \leq 0$ in Ω の粘性解だから, $F(y, u(y), D\varphi(y)) \leq 0$. 従って、$F(y, w(y), D\varphi(y)) \leq 0$. □

§3. 最適制御との関連

次のような最適制御の問題を考える。まず、$A \subset \mathbb{R}^m$ はコンパクト集合とし、連続関数 $g : \mathbb{R}^N \times A \to \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \times A \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。$\mathcal{A} = \{\alpha : \ \alpha : [0, \infty) \to A$ は可測$\}$ と書くことにする。$x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して、初期値問題

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = g(X(t), \alpha(t)) & (t > 0), \\ X(0) = x \end{cases}$$

の解を $X(t) = X(t\,; x, \alpha)$ と書くことにする。さらに

$$J(x, \alpha) = \int_0^\infty e^{-t} f(X(t\,; x, \alpha), \alpha(t))\, dt,$$

$$V(x) = \inf\{J(x, \alpha) : \ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

とおく。問題は次の (i), (ii) である。(i) $V(x) = J(x, \alpha)$ となる $\alpha \in \mathcal{A}$ を求める。(ii) $V(x)$ を求める。ここでは (ii) を考える。なお、最適制御の用語では, $\alpha \in \mathcal{A}$ は control,

$\dot{X} = g(X(t), \alpha(t))$ は dynamics 又は state equation, $J(x,\alpha)$ は cost function, $V(x)$ は value function などと呼ばれる。f と g に次の仮定をおく。

(A) ある $M>0$ に対して

$$|g(x,a)-g(y,a)| \leq M|x-y|, \quad |g(x,a)| \leq M, \quad |f(x,a)| \leq M,$$
$$|f(x,a)-f(y,a)| \leq M|x-y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^N, \quad a \in A)$$

が成立する。

<u>命題 3.1.</u> (A) を仮定する。このとき, $V \in UC(\mathbb{R}^N)$ となりさらに V は

$$(3.1) \qquad V + \max_{a \in A} \{-g(x,a)\cdot DV - f(x,a)\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の粘性解である。

制御の方面では (3.1) は Bellman 方程式と呼ばれる。定理 6.1 によれば V は (3.1) の一意解ということになる。これを上に挙げた問題 (ii) への解答ということにする。

<u>補題</u> (Dynamic programming principle) $x \in \mathbb{R}^N$, $h>0$ に対して

$$V(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^h e^{-t} f(X(t;x,\alpha), \alpha(t))\,dt + e^{-h} V(X(h;x,\alpha)) \right\}$$

が成立する。

<u>略証</u>. $X(t) = X(t;x,\alpha)$, $\beta(t) = \alpha(t+h)$, $Y(t) = X(t+h)$ $(t \geq 0)$ とおく。このとき, $Y(t) = X(t; X(h), \beta)$ $(t \geq 0)$. さらに

$$J(x,\alpha) = \int_0^h e^{-t} f(X(t),\alpha(t))\,dt + \int_h^\infty e^{-t} f(X(t),\alpha(t))\,dt$$
$$= \int_0^h e^{-t} f(X(t),\alpha(t))\,dt + e^{-h}\int_0^\infty f(Y(t),\beta(t))\,dt$$

$$= \int_0^h e^{-t} f(X(t), \alpha(t))\,dt + e^{-h} J(X(h), \beta).$$

これより容易に結論が得られる。 ∎

<u>命題 3.1 の証明</u>. $V \in UC(\mathbb{R}^N) \equiv \{\mathbb{R}^N$ 上で一様連続な関数$\}$ の証明は省略する。例えば, Lions [30] を参照せよ。

背理法で V が粘性解であることを示す。$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\max_{\mathbb{R}^N} (V - \varphi) = (V - \varphi)(y) = 0,$$

$$V(y) + \max_a \{-g(y,a)\cdot D\varphi(y) - f(y,a)\} > 0$$

が成立すると仮定する。 $a \in A$ と $\delta > 0$ を

$$\varphi(x) - g(x,a)\cdot D\varphi(x) - f(x,a) > 0 \qquad \forall x \in B(y,\delta)$$

が成立するようにとる。 $\alpha(t) = a \quad (t \geq 0)$ とおき, $X(t) = X(t : y, \alpha)$ とする。ある $h > 0$ に対して, $X(t) \in B(y,\delta) \quad (0 \leq \forall t \leq h)$ となる。従って

$$\varphi(X(t)) - g(X(t),a)\cdot D\varphi(X(t)) - f(X(t),a) > 0 \qquad (0 \leq t \leq h)$$

となる。これを e^{-t} 倍し、$[0,h]$ 上で積分して

$$\int_0^h \left\{ -\frac{d}{dt} e^{-t}\varphi(X(t)) - e^{-t} f(X(t),a) \right\} dt > 0.$$

従って

$$V(y) = \varphi(y) > e^{-h}\varphi(X(h)) + \int_0^h e^{-t} f(X(t),a)\,dt \geq$$
$$\geq e^{-h} V(X(h)) + \int_0^h e^{-t} f(X(t),a)\,dt.$$

これは補題に矛盾する。次に, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\min (V - \varphi) = (V - \varphi)(y) = 0,$$

$$V(y) + \max_a \{-g(y,a)\cdot D\varphi(y) - f(y,a)\} < 0$$

と仮定する．ある $\delta>0$ に対して

$$\varphi(x)+\max_a\{-g(x,a)\cdot D\varphi(x)-f(x,a)\}<-\delta \qquad {}^\forall x\in B(y,\delta)$$

となる。ある $h>0$ に対して

$$X(t;y,\alpha)\in B(y,\delta) \qquad (0\leq {}^\forall t\leq h,\quad {}^\forall\alpha\in\mathcal{A})$$

となる。$\alpha\in\mathcal{A}$ を固定する．$X(t)=X(t:y,\alpha)$ とおく。

$$\varphi(X(t))-g(X(t),\alpha(t))\cdot D\varphi(X(t))-f(X(t),\alpha(t))<-\delta \qquad (0\leq t\leq h)$$

が成立する。前と同様にして

$$\begin{aligned} V(y)=\varphi(y) &< -\delta\int_0^h e^{-t}dt+e^{-h}\varphi(X(h))+\int_0^h e^{-t}f(X(t),\alpha(t))dt \\ &\leq -\delta\int_0^h e^{-t}dt+e^{-h}V(X(h))+\int_0^h e^{-t}f(X(t),\alpha(t))dt. \end{aligned}$$

α は任意だから、これより

$$V(y)<\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\int_0^h e^{-t}f(X(t;y,\alpha),\alpha(t))dt+e^{-h}V(X(h;y,\alpha))\right\}.$$

これは補題に矛盾する． □

§4．粘性解の定義の一般化

不連続な関数にまで粘性解の定義を拡張し，命題2.6 を一般化する。Ω は $\mathbb{R}^N$ の開集合とし，$F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ は連続とする。局所有界な $u:\Omega\to\mathbb{R}$ に対して

$$u^*(x)=\lim_{r\searrow 0}\sup\{u(y):\ |y-x|\leq r\},$$

$$u_*(x)=\lim_{r\searrow 0}\inf\{u(y):\ |y-x|\leq r\}$$

とおき，u^*，u_* を定義する。u^*, u_* はそれぞれ upper semicontinuous envelope, lower semicontinuous envelope と呼ばれる。u^* は上半連続であり、u_* は下半連続である。$u_* \leqslant u \leqslant u^*$ on Ω が成立する。$u^* \leqslant u_*$ on Ω が成立することと $u \in C(\Omega)$ となることは同値である。また

$$u^*(x) = \inf\{v(x) : v \in C(\Omega),\quad v \geqslant u \quad \text{on } \Omega\},$$

$$u_*(x) = \sup\{v(x) : v \in C(\Omega),\quad v \leqslant u \quad \text{on } \Omega\}$$

と表すこともできる。

<u>定義</u>. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ とする。(i) u が $F(x, u, Du) \leqslant 0$ in Ω の粘性解であるとは、u が局所有界でありさらに

$$F(x, u^*(x), p) \leqslant 0 \qquad {}^\forall x \in \Omega,\ {}^\forall p \in D^+u^*(x)$$

が成立することとする。(ii) u が $F(x, u, Du) \geqslant 0$ in Ω の粘性解であるとは、u が局所有界でありさらに

$$F(x, u_*(x), p) \geqslant 0 \qquad {}^\forall x \in \Omega,\ {}^\forall p \in D^-u_*(x)$$

が成立することとする。(iii) u が $F(x, u, Du) = 0$ in Ω の粘性解であるとは、$F(x, u, Du) \leqslant 0$ in Ω, $F(x, u, Du) \geqslant 0$ in Ω の粘性解であることとする。

<u>命題 4.1</u>. $\mathcal{S}$ を $F(x, u, Du) \leqslant 0$ in Ω の粘性解のある族とする。

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}\} \qquad ({}^\forall x \in \Omega)$$

とおく。u が Ω 上局所有界であれば、$F(x, u, Du) \leqslant 0$ in Ω の粘性解である。

<u>証明</u>. u は局所有界であるとする。 $\varphi \in C^1(\Omega)$, $y \in \Omega$,
$\max_\Omega (u^* - \varphi) = (u^* - \varphi)(y) = 0$ とする。$(u^* - \varphi)(x) \leqq -|x-y|^2$ としてよい。u^* の定義より、ある $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ に対して $(u-\varphi)(x_n) > -\frac{1}{n}$, $x_n \to y$ が成り立つ。u の定義より、ある $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ に対して $u(x_n) - \frac{1}{n} < v_n(x_n)$ が成り立つ。
このとき、

$$(v_n - \varphi)(x_n) > -\frac{2}{n}, \qquad (v_n - \varphi)(x) \leqq -|x-y|^2 \quad (x \in \Omega).$$

従って, n が十分に大きければ,ある $y_n \in \Omega$ に対して

$$\max_\Omega (v_n^* - \varphi) = (v_n^* - \varphi)(y_n)$$

となる。$-\frac{2}{n} < (v_n^* - \varphi)(y_n) \leqq -|y_n - y|^2$ だから、

$$y_n \to y, \qquad v_n^*(y_n) \to \varphi(y) \qquad (n \to \infty).$$

一方、

$$F(y_n, v_n^*(y_n), D\varphi(y_n)) \leqq 0.$$

$n \to \infty$ として, $F(y, \varphi(y), D\varphi(y)) \leqq 0.$ $\blacksquare$

§5. 解の存在

これまでの解の構成法としては次の二つを挙げることができる。(i) vanishing viscosity 法 (ii) 微分ゲーム(最適制御)の value function として解を作る。ここでは最も簡単な (iii) Perron の方法 を紹介する。

定理5.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は開集合であり、$F \in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ であるとする。$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ は $f \leq g$ on Ω をみたし、

$$F(x, f, Df) \leq 0 \leq F(x, g, Dg) \quad \text{in } \Omega$$

の粘性解であるとする。$x \in \Omega$ に対して

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \leq g \text{ on } \Omega,\ v \text{ は } F(x, v, Dv) \leq 0 \text{ in } \Omega \text{ の粘性解}\}$$

とおく。このとき、u は $F(x, u, Du) = 0$ in Ω の粘性解である。さらに、$f \leq u \leq g$ on Ω が成立する.

$u \in C(\Omega)$ とは限らないことを強調しておく。後で $u \in C(\Omega)$ となる十分条件を与える.

証明. $f \leq u \leq g$ on Ω はすぐに判る。特に u は局所有界である。命題4.1より u は $F(x, u, Du) \leq 0$ in Ω の粘性解である.

$F(x, u, Du) \geq 0$ in Ω の粘性解であることを背理法で示す。ある $\varphi \in C^1(\Omega)$ とある $y \in \Omega$ に対して

$$\min(u_* - \varphi) = (u_* - \varphi)(y) = 0, \qquad F(y, u_*(y), D\varphi(y)) < 0$$

が成立するとする. 定義より、$u \leq g$ on Ω. 従って、$u_* \leq g_*$ on Ω となる。$u_*(y) < g_*(y)$ を示すために、$u_*(y) = g_*(y)$ と仮定してみる。すると、$g_* - \varphi$ は y で最小値 0 をとり、従って $F(y, u_*(y), D\varphi(y)) = F(y, g_*(y), D\varphi(y)) \geq 0$ となる。これは矛盾である。故に $u_*(y) < g_*(y)$. $\delta = \frac{1}{2}(g_* - u_*)(y)$ と

おく。 $\{x : (g_* - \varphi)(x) > \delta\}$ は y の近傍である。連続性により、ある $r > 0$ があって

$$F(x, \varphi(x) + s, D\varphi(x)) \le 0 \qquad \forall x \in B(y, r),\ 0 \le \forall s \le r$$

$$\varphi(x) + \delta \le g(x) \qquad \forall x \in B(y, r)$$

が成り立つ。一方、

$$\varphi(x) + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \le u_*(x) \le u(x) \qquad \forall x \in \Omega \setminus B(y, \tfrac{r}{2})$$

が成り立つ。 $\varepsilon = \min\{r, \delta, (\frac{r}{2})^2\}\ (>0)$ とおくと、

$$F(x, \varphi(x) + \varepsilon, D\varphi(x)) \le 0 \qquad x \in B(y, r),$$

$$\varphi(x) + \varepsilon \le g(x) \qquad x \in B(y, r),$$

$$\varphi(x) + \varepsilon \le u(x) \qquad x \in \Omega \setminus B(y, \tfrac{r}{2}).$$

$w(x) = \max\{u(x), \varphi(x) + \varepsilon\}$ とおくと、命題 4.1 より w は

$$F(x, w, Dw) \le 0 \quad \text{in} \quad B(y, r)^\circ$$

の粘性解である。また、 $w = u$ on $\Omega \setminus B(y, \frac{r}{2})$ だから、 w は

$$F(x, w, Dw) \le 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus B(y, \tfrac{r}{2})$$

の粘性解である。命題 2.5 より、 w は $F(x, w, Dw) \le 0$ in Ω の粘性解となる。 $w(y) = u_*(y) + \varepsilon$, $w \le g$ on Ω に注意すると、 w は u の定義に矛盾する。 ∎

<u>例</u> 定理 5.1 において、 f は $\overline{\Omega}$ で下半連続、 g は $\overline{\Omega}$ で上半連続とし、 $f = g$ on $\partial\Omega$ とする。さらに

$$\lim_{R \to \infty} \inf\{F(x, r, p) : (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R},\ |p| \ge R\} > 0$$

とする。定理 5.1 で与えられる解 u を $u(x) = g(x)$ on $\partial\Omega$ とお

いて $\overline{\Omega}$ に拡張すれば，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{0,1}(\Omega)$ となる。

<u>証明</u>. $u \leq g$ on Ω であり、g は上半連続だから、$u^* \leq g$ on Ω. u^* も $F(x,u,Du) \leq 0$ in Ω の粘性解だから、$u^* = u$ on Ω が判る。u が $\partial\Omega$ の各点で連続なことは、f,g が半連続なことと不等式 $f \leq u \leq g$ on $\overline{\Omega}$ より判る。

$C > 0$ を

$$F(x,r,p) > 0 \qquad x \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}, \quad |p| \geq C$$

が成立するようにとる。$z \in \Omega$ とし、$\delta > 0$ を $B(z,3\delta) \subset \Omega$ となるようにとる。$x, y \in B(z,\delta)$ ならば

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|$$

となることを示せば十分である。$\theta \in C^1([0,2\delta))$ を

$$\theta(r) = Cr \quad (0 \leq r \leq \delta), \quad \theta'(r) \geq C \quad (0 \leq r < 2\delta), \quad \lim_{r \nearrow 2\delta} \theta(r) = \infty$$

が成立するようにとる。$y \in B(z,\delta)$ を固定し，

$$v(x) = u(y) + \theta(|x-y|)$$

とおく。$v \in C^1(B(y,2\delta)^\circ \setminus \{y\})$ であり

$$F(x,r,Dv(x)) > 0 \qquad x \in B(y,2\delta)^\circ \setminus \{y\}, \quad r \in \mathbb{R}$$

をみたす。$\sup_{B(y,2\delta)^\circ}(u-v) > 0$ と仮定すると、u は上半連続だから、$\sup(u-v) = (u-v)(\xi)$ となる $\xi \in B(y,2\delta)^\circ \setminus \{y\}$ が存在する。u が粘性解であることから、$F(\xi, u(\xi), Dv(\xi)) \leq 0$. これは矛盾である。従って、$u \leq v$ on $B(y,2\delta)^\circ$. 特に，$u(x) \leq u(y) + C|x-y|$ ($x, y \in B(z,\delta)$) が成立する。 $\square$

§6. 解の比較

<u>命題 6.1.</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界な開集合とする。$F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ とする。$u : \Omega \to \mathbb{R}$ は $F(x, u, Du) \leq 0$ in Ω の粘性解とする。$v \in C^1(\Omega)$ は $F(x, r, Dv(x)) > 0$ $(x \in \Omega,\ r \in \mathbb{R})$ をみたすとする。さらに

$$\limsup_{\Omega \ni x \to y} (u^* - v)(x) \leq 0 \qquad (y \in \partial\Omega)$$

とする。このとき，$u \leq v$ on Ω が成立する。

<u>証明.</u> $\sup_\Omega (u^* - v) > 0$ と仮定すると、ある $y \in \Omega$ に対して $(u^* - v)(y) = \sup(u^* - v)$ が成立する。u が粘性解であることから、$F(y, u^*(y), Dv(y)) \leq 0$ を得るが、これは v に対する仮定に反する。従って、$u^* \leq v$ on Ω. ∎

この命題を基本として、

(SP) $$u + H(x, u, Du) = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

(CP) $$u_t + H(t, x, u, Du) = 0 \qquad \text{in } (0, T) \times \Omega$$

の解に対する比較定理を考える。ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の開集合、$T > 0$, $Du = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_N})$ とする。まず H に対する仮定を述べる。

(H0) $$H \in C([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

(H1) $r \to H(t, x, r, p)$ は $\mathbb{R}$ 上で非減少関数である。

(H2) 各 $R \geq 0$ に対して、$\sigma_R(0) = 0$ をみたす連続関数 $\sigma_R : [0, \infty) \to [0, \infty)$ があって

$$|H(t,x,r,p)-H(t,x,r,q)|\leq\sigma_R(|p-q|)$$

が $0\leq t\leq T$, $x\in\mathbb{R}^N$, $r\in\mathbb{R}$, $p,q\in B(0,R)$ に対して成立する。

(H3)　$m(0)=0$ をみたす連続関数 $m:[0,\infty)\to[0,\infty)$ があって

$$|H(t,x,r,p)-H(t,y,r,p)|\leq m(|x-y|(|p|+1))$$

が $0\leq t\leq T$, $x,y\in\mathbb{R}^N$, $r\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^N$ に対して成立する。

(SP) における H の場合には、H を t に依存しない (t,x,r,p) の関数と考えて、上の条件をあてはめればよい。

まず $\Omega=\mathbb{R}^N$ の場合の結果を述べる。

<u>定理 6.1</u>. $\Omega=\mathbb{R}^N$ とする。(H0)〜(H3) を仮定する。

(i) u と v は $u+H(x,u,Du)\leq 0$ in Ω と $v+H(x,v,Dv)\geq 0$ in Ω の粘性解であるとする。ある定数 $C>0$ に対して

$$u(x)\leq C(|x|+1),\qquad v(x)\geq -C(|x|+1)\qquad x\in\overline{\Omega}$$

が成立しているとする。このとき、$u\leq v$ in Ω となる。

(ii) $u:[0,T)\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ は上半連続で、$u_t+H(t,x,u,Du)\leq 0$ in $(0,T)\times\Omega$ の粘性解であるとする。$v:[0,T)\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ は下半連続で、$v_t+H(t,x,v,Dv)\geq 0$ in $(0,T)\times\Omega$ の粘性解であるとする。ある定数 $C>0$ に対して

$$u(t,x)\leq C(|x|+1),\quad v(t,x)\geq -C(|x|+1)\qquad (t,x)\in[0,T)\times\overline{\Omega}$$

が成立しているとする。$u(0,x)\leq v(0,x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ が成り立ち、さらに $u(0,\cdot)\in UC(\overline{\Omega})$ 又は $v(0,\cdot)\in UC(\overline{\Omega})$ であると

する。このとき、$u \leqslant v$ on $(0,T)\times \mathbb{R}^N$ が成立する。

(i) の証明. 簡単のため、$H = H(x,p)$ とする。$w(x,y) = u^*(x) - v_*(y)$ とおくとき、w は $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上で上半連続である。w は

$$w + H(x, D_x w) - H(y, -D_y w) \leqslant 0 \qquad in \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

の粘性解となり、

$$w(x,y) \leqslant C(|x| + |y| + 2) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

をみたす。

$$\tilde{H}(x,y,p,q) = H(x,p) - H(y,-q)$$

とおく。$A, B > 0$ を定数とし、$z(x,y) = A\langle x-y\rangle + B$ とおく。ただし、$\langle x\rangle = (|x|^2+1)^{1/2}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} z + \tilde{H}(x,y,Dz) &= z + H\left(x, A\frac{x-y}{\langle x-y\rangle}\right) - H\left(y, A\frac{x-y}{\langle x-y\rangle}\right) \\ &\geqslant z + H(x,0) - H(y,0) - 2\sigma_A(A) \qquad (\because (H2)) \\ &\geqslant z - m(|x-y|) - 2\sigma_A(A) \qquad (\because (H3)) \end{aligned}$$

m は非減少な concave 関数としてよい。そうしたとき

$$m(r) \leqslant m(\varepsilon) + \frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon} r \qquad (r \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0)$$

が成立する。$\varepsilon = 1$ としてこの不等式を使えば

$$z + \tilde{H}(x,y,Dz) \geqslant (A - m(1))\langle x-y\rangle + B - m(1) - 2\sigma_A(A).$$

$A = m(1)$, $B = m(1) + 2\sigma_A(A) + 1$ と固定する。各 $R > 0$ について、$g_R \in C^1(\mathbb{R})$ を

$$0 \leqslant g_R'(r) \leqslant 1, \quad g_R(r)/r \nearrow 1 \ (r \to \infty), \quad g_R(r) = 0 \quad (r \leqslant R)$$

が成立するようにとる。$R > 0$ とし、

$$z_1(x,y) = A\langle x-y\rangle + B + (C+1)[g_R(|x|) + g_R(|y|)]$$

とおく。このとき、

$$z_1 + \widetilde{H}(x,y,Dz_1) \geqslant z + \widetilde{H}(x,y,Dz) - 2\sigma_{A+C+1}(C+1)$$
$$> -2\sigma_{A+C+1}(C+1).$$

$R_1 > R$ を R に応じて十分大きくとると、

$$w(x,y) \leqslant z_1(x,y) + 2\sigma_{A+C+1}(C+1) \qquad (x,y) \in \partial B(0,R_1)$$

が成立するようにできる。命題 6.1 を用いて、$B(0,R_1)$ 上で w と $z_1 + 2\sigma_{A+C+1}(C+1)$ を比較すると

$$w(x,y) \leqslant z_1(x,y) + 2\sigma_{A+C+1}(C+1) \qquad (x,y) \in B(0,R_1)$$

が得られる。$|x| \leqslant R$, $|y| \leqslant R$ ならば、$z(x,y) = z_1(x,y)$ だから、$R \to \infty$ として

$$w(x,y) \leqslant A\langle x-y\rangle + B \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

を得る。そこで

$$C_1 = \sup\{w(x,y) : |x-y| \leqslant 1\} \quad (<\infty)$$

とおく。A, γ, δ, $\alpha > 0$ を定数とし（ただし、$\gamma \leqslant 1$）,

$$z(x,y) = A\langle x-y\rangle_\delta^\gamma + \alpha \quad \left(\text{但し、} \langle x\rangle_\delta = (|x|^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

とおく。$\varepsilon > 0$ とし、$|x-y| \leqslant 1$ とすれば

$$z + \widetilde{H}(x,y,Dz) = z + H(x, \gamma A\langle x-y\rangle_\delta^{\gamma-2}(x-y)) - H(y, \gamma A\langle x-y\rangle_\delta^{\gamma-2}(x-y))$$
$$\geqslant z - m(|x-y|(\gamma A\langle x-y\rangle_\delta^{\gamma-1} + 1)) \qquad (\because (H3))$$
$$\geqslant z - m(\varepsilon) - \frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon}(\gamma A\langle x-y\rangle_\delta^\gamma + \langle x-y\rangle_\delta^\gamma) \qquad (\because |x-y| \leqslant 1)$$
$$= \left\{\left(1 - \frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon}\gamma\right)A - \frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}\langle x-y\rangle_\delta^\gamma + \alpha - m(\varepsilon).$$

$\varepsilon > 0$ を固定し、$\alpha = m(\varepsilon)+\varepsilon$, $\gamma = \min\{\frac{\varepsilon}{2m(\varepsilon)}, 1\}$, $A = \max\{C_1, \frac{2m(\varepsilon)}{\varepsilon}\}$ ととる。$\beta > 0$, $R > 0$ とし

$$z_1(x,y) = z(x,y) + \beta g_R(|x|)$$

とおく。$|x-y| \leq 1$ ならば

$$z_1 + \hat{H}(x,y,Dz_1) \geq z + \tilde{H}(x,y,Dz) - \sigma_{L+\beta}(\beta) > -\sigma_{L+\beta}(\beta)$$

となる。ただし; $L = \gamma A \delta^{\gamma-1}$ とする。$R_1 > R$ を十分大きくとり、命題 6.1 を用いて $\{(x,y): |x-y|<1, |x|<R_1\}$ 上で w と $z_1 + \sigma_{L+\beta}(\beta)$ を比較すれば

$$w(x,y) \leq z_1(x,y) + \sigma_{L+\beta}(\beta) \qquad (|x-y| \leq 1, \ |x| \leq R_1)$$

を得る。$R \to \infty$, $\beta \searrow 0$, $\delta \searrow 0$ として

$$u^*(x) - v_*(y) \leq m(\varepsilon) + \varepsilon + A|x-y|^\gamma \qquad (|x-y| \leq 1)$$

を得る。特に、$x = y$ とし，$\varepsilon \searrow 0$ とすると、$u^* \leq v_*$ on $\mathbb{R}^N$ が判る。 □

<u>補題</u>　$H = H(t,x,p)$ とする。定理 6.1, (ii) の仮定の下で、$w(t,x,y) = u(t,x) - v(t,y)$ とおけば，w は

$$w_t + H(t,x,D_x w) - H(t,y,-D_y w) \leq 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$$

の粘性解である。

<u>証明</u>.　$\varphi \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^{2N})$ とし，$w - \varphi$ は $(\bar{t},\bar{x},\bar{y}) \in (0,T)\times\mathbb{R}^{2N}$ で狭義の最大をとるとする。$0 < r < \min\{\bar{t}, T-\bar{t}\}$ ととる。$B((\bar{t},\bar{t},\bar{x},\bar{y}), r) \subset (0,T)\times(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上で，関数

$$\Phi_n(t,s,x,y) = u(t,x) - v(s,y) - \varphi(t,x,y) - n(t-s)^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を考える。Φ_n は (t_n, s_n, x_n, y_n) で最大をとるとすると

$$u(t_n, x_n) - v(s_n, y_n) - \varphi(t_n, x_n, y_n) \geqslant u(t_n, x_n) - v(s_n, y_n) - \varphi(t_n, x_n, y_n)$$
$$- n(t_n - s_n)^2 \geqslant u(\bar{t}, \bar{x}) - v(\bar{t}, \bar{y}) - \varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$$

が成立する。これより，$t_n - s_n \to 0$ $(n \to \infty)$ が判る。また，列 $\{(t_n, s_n, x_n, y_n)\}$ は収束部分列をもつ。その極限を (t_0, s_0, x_0, y_0) とすれば、$t_0 = s_0$ となる。さらに上の不等式より，

$$u(t_0, x_0) - v(t_0, y_0) - \varphi(t_0, x_0, y_0) \geqslant u(\bar{t}, \bar{x}) - v(\bar{t}, \bar{y}) - \varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}).$$

これは $(t_0, x_0, y_0) = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ を意味する。一方，u と v は粘性解だから，

$$\varphi_t(t_n, x_n, y_n) - 2n(t_n - s_n) + H(t_n, x_n, D_x\varphi(t_n, x_n, y_n)) \leqslant 0,$$
$$+2n(s_n - t_n) + H(s_n, y_n, -D_y\varphi(t_n, x_n, y_n)) \geqslant 0$$

が得られる。これらの差をとり、部分列について $n \to \infty$ とすれば、

$$\varphi_t(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) + H(\bar{t}, \bar{x}, D_x\varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})) - H(\bar{t}, \bar{y}, -D_y\varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})) \leqslant 0$$

が判る。 □

<u>(ii) の証明</u>　$H = H(t, x, p)$ と仮定する。$w(t, x, y) = u(t, x) - v(t, y)$, $\hat{H}(t, x, y, p, q) = H(t, x, p) - H(t, y, -q)$ とおく。補題より w は

$$w_t + \hat{H}(t, x, y, Dw) \leqslant 0 \quad \text{in} \quad (0, T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

の粘性解である．T を $0 < T_1 < T$ で置き換えることにより，w は $[0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ で上半連続であるとしてよい。$\varepsilon > 0$ とし、$w^\varepsilon(t, x, y) = w(t, x, y) - \dfrac{\varepsilon}{T - t}$ とおく。w^ε は

$$w^\varepsilon_t + \widetilde{H}(t,x,y,Dw^\varepsilon) \leq 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$$

の粘性解である。$R>0$ とし，g_R を (i) の証明と同じにとる。$A, B>0$ を定数とし、

$$z(t,x,y) = e^t(A\langle x-y\rangle + B) + (C+1)(g_R(|x|) + g_R(|y|))$$

とおく。

$$z_t + \widetilde{H}(t,x,y,Dz) \geq A\langle x-y\rangle + B - m(|x-y|) - 2\sigma_{Ae^T+C+1}(C+1)$$

$$\geq (A-m(1))\langle x-y\rangle + B - m(1) - 2\sigma_{Ae^T+C+1}(C+1)$$

となる。例えば $u(0,\cdot)\in UC(\mathbb{R}^N)$ とし，

$$m_0(r) = \sup\{u(0,x)-u(0,y) : x,y\in\mathbb{R}^N, |x-y|\leq r\} \quad (r\geq 0)$$

とおく。

$$w^\varepsilon(0,x,y) \leq u(0,x)-u(0,y)+u(0,y)-v(0,y) \leq m_0(|x-y|)$$

となる。$A=\max\{m(1), m_0(1)\}$, $B=\max\{2\sigma_{Ae^T+C+1}(C+1)+1, m_0(1)\}$ とおく。

$$w^\varepsilon(0,x,y) \leq z(0,x,y), \qquad z_t + \widetilde{H}(t,x,y,Dz) > 0$$

が成立する。命題 6.1 により w^ε と z を $(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ の適当な有界領域で比較し，$R\to\infty$ とすれば

$$w^\varepsilon(t,x,y) \leq e^T(A\langle x-y\rangle + B)$$

が判る。特に

$$C_1 \equiv \sup\{w^\varepsilon(t,x,y) : 0\leq t<T,\ x,y\in\mathbb{R}^N,\ |x-y|\leq 1\} < \infty.$$

$A, R, \alpha, \beta, \delta>0$, $0<\gamma\leq 1$ を定数とし、

$$z(t,x,y) = e^t(A\langle x-y\rangle_\delta^\gamma + \alpha) + \beta g_R(|x|)$$

とおく。$\eta>0$ とするとき，$|x-y|\le 1$ ならば

$$z_t+\tilde{H}(t,x,y,Dz)\ge A\langle x-y\rangle_\delta^\gamma+\alpha$$
$$-m(|x-y|(e^T\gamma A\langle x-y\rangle_\delta^{\gamma-1}+1))-\sigma_{L+\beta}(\beta)$$
$$\ge\left\{\left(\frac{A}{2}-\frac{m(\eta)}{\eta}\right)+A\left(\frac{1}{2}-\frac{m(\eta)}{\eta}e^T\gamma A\right)\right\}\langle x-y\rangle_\delta^\gamma+\alpha-m(\eta)-\sigma_{L+\beta}(\beta)$$

となる。ただし、$L=e^T\gamma A\delta^{\gamma-1}$ である。$\eta>0$ を固定し、

$$w^\varepsilon(0,x,y)\le m_0(|x-y|)\le m_0(\eta)+\frac{m_0(\eta)}{\eta}|x-y|$$

に注意し、$\alpha=\max\{m(\eta)+\eta,\ m_0(\eta)\}$，$A=\max\{C_1,\frac{2m(\eta)}{\eta},\frac{m_0(\eta)}{\eta}\}$，$\gamma=\min\{1,\frac{\eta}{2m(\eta)}e^{-T}\}$ と定める。$\beta>0$ を十分小さくとれば $\sigma_{L+\beta}(\beta)<\eta$ となり、

$$z_t+\tilde{H}(t,x,y,Dz)>0\quad in\ (0,T)\times\{(x,y):\ |x-y|\le 1\}$$

が成立する。命題 6.1 を使って、w^ε と z を $(0,T)\times\{(x,y):|x-y|<1\}$ の適当な有界領域で比較し、$R\to\infty$, $\beta\searrow 0$, $\delta\searrow 0$, $\varepsilon\searrow 0$ とすれば

$$u(t,x)-v(t,y)\le\alpha+A|x-y|^\gamma\qquad(|x-y|\le 1)$$

を得る。特に、$x=y$ とし、$\eta\searrow 0$ として、$u\le v$ on $[0,T)\times\mathbb{R}^N$. $\square$

<u>注意</u> Ω が一般の場合には、定理 6.1 における条件を次のように変更すればよい。(i) のときには条件

$$\lim_{r\searrow 0}\ \sup\{u(x)-v(y):\ x,y\in\overline{\Omega},\ |x-y|\le r,\ dist(x,\partial\Omega)\le r\}\le 0$$

を追加すればよい。(ii) のときにも条件

$$\lim_{r\searrow 0}\ \sup\{u(t,x)-v(t,y):\ 0\le t<T,\ \ x,\ y\in\overline{\Omega},$$

$$|x-y|\leq r,\ dist(x,\partial\Omega)<r\}\leq 0$$

を追加すればよい。

次に定理5.1で与えられる解が連続になるための十分条件を述べる。

<u>定理6.2</u>. $(H0)\sim(H3)$ を仮定する。$\Omega=\mathbb{R}^N$ とする。

(i) (SP) は $UC(\mathbb{R}^N)$ で粘性解を持つ。

(ii) $u_0\in UC(\mathbb{R}^N)$ とする。(CP) は初期条件 $u(0,x)=u_0(x)$ をみたし、$u\in C([0,T)\times\mathbb{R}^N)$ かつ

$$\lim_{r\downarrow 0}\sup\{|u(t,x)-u(t,y)|: 0\leq t<T,\ |x-y|\leq r\}=0$$

をみたす粘性解を持つ。

<u>証明</u> (i) $A, B>0$ を定数とし、

$$g(x)=A\langle x\rangle+B$$

とおく。

$$g+H(x,Dg)\geq g+H(x,0)-\sigma_A(A)\geq g+H(0,0)-m(|x|)-\sigma_A(A)$$
$$\geq(A-m(1))\langle x\rangle+B+H(0,0)-\sigma_A(A)$$

となる。$A=m(1)$, $B=|H(0,0)|+\sigma_A(A)$ ととれば

$$g+H(x,Dg)\geq 0\quad in\ \mathbb{R}^N.$$

$f(x)=-A\langle x\rangle-B$ とおくと、

$$f+H(x,Df)\leq 0\quad in\ \mathbb{R}^N.$$

定理5.1より、$f\leq u\leq g$ on $\mathbb{R}^N$ となる (SP) の粘性解が存在する。定理6.1の証明より、任意の $\varepsilon>0$ に対して、$0<\gamma\leq 1$

と $A>0$ を適当に取ると

$$u^*(x)-u_*(y)\leqq \varepsilon + A|x-y|^\gamma \quad (|x-y|\leqq 1)$$

が言える。これは $u\in UC(\mathbb{R}^N)$ を意味する。

(ii) (CP) の代りに

(CP)′ $\qquad u_t+u+H(t,x,u,Du)=0 \quad in \quad (0,T)\times\mathbb{R}^N$

を考える。$A_1, B_1>0$ を十分大きくとるとき，$f_1(t,x)=-A_1\langle x\rangle - B_1$，$g_1(t,x)=A_1\langle x\rangle + B_1$ は

$$f_{1t}+f_1+H(t,x,f_1,Df_1)\leqq 0,\quad g_{1t}+g_1+H(t,x,g_1,Dg_1)\geqq 0$$

をみたし、$f_1(0,x)\leqq u_0(x)\leqq g_1(0,x)$ をみたすとしてよい。

$$m_0(r)=\sup\{u_0(x)-u_0(y):\ x,y\in\mathbb{R}^N,\ |x-y|\leqq r\}\quad (r\geqq 0)$$

とおくと，$m_0(0)=0$，$m_0\in C([0,\infty))$ であり、さらに m_0 は非減少かつ concave である。$0<\varepsilon<1$ とする。

$$A_\varepsilon = \sup\{g_1(t,x):\ 0\leqq t\leqq T,\ |x|\leqq \tfrac{1}{\varepsilon}+2\},$$

$$B_\varepsilon = \max\{\frac{m_0(\varepsilon)}{\varepsilon},\ 2A_\varepsilon\},$$

$$C_\varepsilon = A_\varepsilon + \sup\{|H(t,x,r,p)|:\ 0\leqq t\leqq T,\ |x|\leqq \tfrac{1}{\varepsilon}+2,\ |r|\leqq A_\varepsilon,\ |p|\leqq B_\varepsilon\}$$

とおき，$y\in\mathbb{R}^N$ に対して

$$v_{\varepsilon,y}(t,x)=u_0(y)+m_0(\varepsilon)+B_\varepsilon|x-y|+C_\varepsilon t$$

とおく。$|y|\leqq\frac{1}{\varepsilon}$ ならば，$v=v_{\varepsilon,y}$ は

$$v_t+v+H(t,x,v,Dv)\geqq 0 \quad in \quad (0,T)\times B(0,\tfrac{1}{\varepsilon}+2)$$

の粘性解であり、

$$v\geqq g_1 \qquad on \quad [0,T]\times(\mathbb{R}^N\setminus B(y,1))$$

をみたす。さらに

$$v_{\varepsilon,y}(0,y) = u_0(y) + m_0(\varepsilon), \quad v_{\varepsilon,y}(0,\cdot) \geq u_0 \quad \text{on } \mathbb{R}^N$$

が成立する。そこで

$$g(t,x) = \min\{g_1(t,x),\ \inf\{v_{\varepsilon,y}(t,x) : 0<\varepsilon<1,\ |y| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}\}$$

とおく。命題 4.1 より，g は

$$g_t + g + H(t,x,g,Dg) \geq 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^N$$

の粘性解であることが判る。さらに，g は $[0,T]\times\mathbb{R}^N$ 上で上半連続であり、$g(0,x) = u_0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ をみたす。

同様に，$0<\varepsilon<1$，$y \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$w_{\varepsilon,y}(t,x) = u_0(y) - m_0(\varepsilon) - B_\varepsilon|x-y| - C_\varepsilon t$$

とおき

$$f(t,x) = \max\{f_1(t,x),\ \sup\{w_{\varepsilon,y}(t,x) : 0<\varepsilon<1,\ |y| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}\}$$

と定義すれば、f は

$$f_t + f + H(t,x,f,Df) \leq 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^N$$

の粘性解である。さらに、f は $[0,T]\times\mathbb{R}^N$ 上で下半連続であり、$f(0,x) = u_0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ をみたす。定理 5.1 より、$f \leq u \leq g$ in $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ をみたす $(CP)'$ の粘性解が存在する。$u_1 : [0,T)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ と $v_1 : [0,T)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$u_1(t,x) = \begin{cases} u^*(t,x) & (0<t<T) \\ u_0(x) & (t=0) \end{cases} \qquad v_1(t,x) = \begin{cases} u_*(t,x) & (0<t<T) \\ u_0(x) & (t=0) \end{cases}$$

により定義すると、u_1 は上半連続であり、v_1 は下半連続で

ある。定理 6.1 の証明から

$$u_1(t,x)-v_1(t,y)\leq \varepsilon + A|x-y|^{\gamma} \qquad (|x-y|\leq 1)$$

が任意の $\varepsilon>0$ とある $0<\gamma\leq 1$, $A>0$ に対して成立することが判る。これは u を $u(0,x)=u_0(x)$ とおいて $t=0$ にまで拡張したものが $[0,T)\times \mathbb{R}^N$ 上で連続で，さらに

$$\lim_{r\downarrow 0}\sup\{|u(t,x)-u(t,y)|: 0\leq t<T,\ |x-y|\leq r\}=0$$

をみたすことを示している。 ∎

あとがき

本文中で文献引用をあまりしなかった。ここで、文献に触れておこう。§2 の内容は Crandall-Lions [12], Crandall-Evans-Lions [10] に含まれている。§3 の内容は Lions [30] にある。命題 3.1 の証明には Ishii [25] の方法を使った。§4,5 の内容は主に Ishii [26] にある。半連続な関数にまで粘性解の定義を拡げる考えは既に [10] に見られる。Crandall-Ishii-Lions [11] も大いに関係している。解の構成法について補足する。微分ゲームを用いて解を作ることに関しては、Crandall-Lions [16], Evans-Souganidis [21], [25] を参照のこと。半群理論によるアプローチは Aizawa [1] により初めてなされたが、粘性解についてのこのアプローチは [10] にみら

れる。§6では[11]に従った。ただし、ハミルトニアンHに対する仮定はここではより強いものに置き替えて記述を簡単にした。定理6.1に関連した研究としては、Crandall-Lions [12, 14, 15], Ishii [23, 24]を参照のこと。定理6.2に関連したものとしては、Barles [4], Crandall-Lions [12, 14, 16, 17], Ishii [22, 24, 26], Souganidis [35]を参照のこと．応用等に関連して、Barron-Evans-Jensen [6], Capuzzo Dolcetta-Evans [7], Capuzzo Dolcetta-Ishii [8], Crandall-Lions [13], Evans-Ishii [20], Koike [28], Souganidis [36]を挙げておく。もう一つ，Bardi [3].

今後の研究の方向を少し考えてみる。発展方程式の研究という立場から見るとバナッハ空間上でのハミルトン・ヤコビ方程式の研究は面白そうである．例えば，Barbu-Da Prato [2]を参照のこと．粘性解の立場からの扱いはCrandall-Lions [15, 16, 17]にある。制御の立場から言えば、偏微分方程式の制御の問題に相当する．応用上重要だろう。ハミルトン・ヤコビ方程式は一階の偏微分方程式であり境界条件としてDirichlet条件を課すのは無理がある．Neumann条件についても同じである。Lions [32]はNeumann条件に代る自然な条件を考察している。このような境界条件をどのように設定するかというテーマも重要であろう。Soner [34], Barles-

Perthame [5], Ishii [27] を参照のこと。解の滑らかさ、特異性、不連続性の問題も興味深い。例えば、Tsuji [33] を参照のこと。数値解析の重要さは言うまでもない。Crandall-Lions [13] を参照してほしい。

文献

1. S. Aizawa, A semigroup treatment of the Hamilton-Jacobi equation in several space varables, Hiroshima Math. J. 6 (1976), 15 - 30.

2. V. Barbu and G. Da Prato, Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces, Pitman, Boston, 1983.

3. M. Bardi, An asymptotic formula for the Green's function for an elliptic operator, preprint.

4. G. Barles, Existence results for first order Hamilton-Jacobi equations, Ann. IHP, Analyse non lineaire, 1 (1984), 325 - 340.

5. G. Barles and B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, preprint.

6. N. E. Barron, L. C. Evans and R. Jensen, Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls, J. Diff. Eq. 53 (1984), 213 - 233.

7. I. Capuzzo Dolcetta and L. C. Evans, Optimal switching for ordinary differential equations, SIAM J. Optim. Control 22 (1984), 143 -161.

8. I. Capuzzo Dolcetta and H. Ishii, Approximate solutions of the Bellman equation in deterministic control theory, Appl. Math. Optim. 11 (1984), 151 - 181.

9. I. Capuzzo Dolcetta and P. L. Lions, to appear.

10. M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 487 - 502.

11. M. G. Crandall, H. Ishii and P. L. Lions, Uniqueness of viscosity solutions revisited, preprint.

12. M. G. Crandall and P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1 - 42.

13. M. G. Crandall and P. L. Lions, Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Math. Comp. 43 (1984), 1 - 19.

14. M. G. Crandall and P. L. Lions, On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Nonlinear Anal. TMA. 10 (1986), 353 - 370.

15. M. G. Crandall and P. L. Lions, Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, I: Uniqueness of viscosity solutions, J. Func. Anal. 62 (1985), 379 - 396.

16. M. G. Crandall and P. L. Lions, Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, II: Existence of viscosity solutions, J. Func. Anal. 65 (1986), 368 - 406.

17. M. G. Crandall and P. L. Lions, Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, III, to appear in J. Func. Anal.

18. A. Douglis, The continuous dependence of generalized solutions of non linear partial differential equations upon initial data, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 267 - 284.

19. L. C. Evans and H. Ishii, Differential games and nonlinear first order PDE on bounded domains, Manuscripta Math. 49 (1984), 109 - 139.

20. L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, Ann. IHP, Analyse non lineaire, 2 (1985), 1 - 20.

21. L. C. Evans and P. E. Souganidis, Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 773 - 797.

22. H. Ishii, Remarks on existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ. 26 (19883), 5 - 24.

23. H. Ishii, Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 721 - 748.

24. H. Ishii, Existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Funkcial. Ekvac. 29 (1986).

25. H. Ishii, Representation of solutions of Hamilton-Jacobi equations, to appear in Nonlinear Anal. TMA.

26. H. Ishii, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, to appear in Duke Math. J.

27. H. Ishii, A boundary value problem of the Dirichlet type for Hamilton-Jacobi equations, preprint.

28. S. Koike, An asymptotic formula for solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, to appear in Nonlinear Anal. TMA.

29. S. N. Kruzkov, Generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type, I, Math. Sb. 27 (1975), 406 - 446.

30. P. L. Lions, Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, Pitman, Boston, 1982.

31. P. L. Lions, existence results for first-order Hamilton-Jacobi equations, Ric. Mat. Napoli 32 (1983), 3 - 23.

32. P. L. Lions, Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations, Duke Math. J. 52 (1985), 345 - 390.

33. M. Tsuji, Propagation of singularities for Hamilton-Jacobi equations, Advances in Microlocal Analysis (H. G. Garnir, ed.), 323 - 331, Reidel, 1986.

34. H. M. Soner, Optimal control with state-space constraints, I, SIAM J. Optim. Control, to appear.

35. P. E. Souganidis, Existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, J. Diff. Eq. 56 (1985), 345 - 390.

36. P. E. Souganidis, Min-max representations and product formulas for the viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with applications to differential games, Nonlinear Anal. TMA. 9 (1985), 217 - 257.

特異摂動法入門

徳島大. 総合科学　伊藤正幸

1. 序.

微小パラメータ ε を含む問題

$$(1.1.\varepsilon) \qquad f(x,\varepsilon)=0$$

が与えられた時. その解の ε に関する漸近展開を求めることは, 解のさまざまな性質を知る上で重要である。また漸近展開は, 解の存在を知らなくとも, しばしば直感的考察にもとづいて形式的に得られるが, これを用いて解の存在を証明できる場合も少なくない。この様な解の存在証明は, 構成的であるという点で優れている。

ところで, $(1.1.\varepsilon)$ の近似問題として.

$$(1.1.0) \qquad f(x,0)=0$$

が候補に登るが, (1.1.0) が問題として well defined でない場合や, (1.1.0) の解が, $(1.1.\varepsilon)$ の解の近似を与えない場合がある。このような問題 $(1.1.\varepsilon)$ を (広い意味で) 特異摂動問題という。簡単な例を挙げる。

例 1.

$$(1.2.\varepsilon) \qquad \varepsilon x^2 + ax + b = 0$$

は解 $x_\pm = (-a \pm \sqrt{a^2-4\varepsilon b})/2\varepsilon$ 即ち

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} x_+ &= -\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^3}\varepsilon + \cdots \\ x_- &= -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^3}\varepsilon + \cdots \end{aligned}$$

を持つが,

$$(1.2.0) \qquad ax+b=0$$

は x_+ の展開の初期 $-b/a$ しか与えず, x_- に関する情報をもたない。

例 2

$$(1.4.\varepsilon) \qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{du}{dx} = 0 & 0<x<1 \\ u(0)=a,\ u(1)=b \end{cases}$$

(1.4, ε) は 解

$$u(x,\varepsilon) = \frac{b(1-e^{-x/\varepsilon}) - a(e^{-1/\varepsilon} - e^{-x/\varepsilon})}{1-e^{-1/\varepsilon}}$$

$$= \begin{cases} b + (a-b)e^{-x/\varepsilon} + o(e^{-1/\varepsilon}) & \varepsilon \downarrow 0 \\ a + (b-a)e^{-(1-x)/|\varepsilon|} + o(e^{-1/|\varepsilon|}) & \varepsilon \uparrow 0 \end{cases}$$

を持つが

$$(1.4.0) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = 0 \\ u(0) = a \quad u(1) = b \end{cases}$$

は過剰決定系であり $a = b$ でない限り解をもたない。
しかし (1.4.0) から境界条件のどちらか一方を除いたものは、解 $u \equiv a$ or b をもち、$u \equiv a$ ($u \equiv b$) は (1.3, ε) の解を $\varepsilon \uparrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) で $x = 0$ ($x = 1$) の近傍を除きよく近似している。(1.4, ε) の解のように境界近傍（境界層と呼ぶ）で急峻な変動がまじることを境界層現象とよぶ。境界層での解の近似は（例えば $\varepsilon > 0$ のとき）$\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ ($\varepsilon \downarrow 0$) により

$$(1.5) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\xi^2} + \dfrac{du}{d\xi} = 0 & \xi > 0 \\ u(0) = a, \quad u(+\infty) = b \end{cases}$$

で得られる。この例の様に解の一様近似のためにいくつかにわけた部分領域で異なる漸近展開が必要となる問題を（狭い意味で）特異摂動問題という。

本稿では、特異摂動問題で、漸近展開をもちいた解の構成的存在証明法について簡単な例を用いて解説する。

2. 漸近展開 と陰関数定理

前節 例1 の摂動展開法を復習する。

$$(1.2.\varepsilon) \qquad f(x,\varepsilon) = \varepsilon x^2 + ax + b = 0$$

において $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$ を代入し，等べキの項をまとめると，ε の0次の係数方程式が (1.2.0) であった．以下高次の方程式を逐次解けば x_+ の漸近展開は得られるが，x_- の情報はなにも得られない。

一方 $x = \xi/\varepsilon$ とおくと (1.2.ε) は

$$(2.1.\varepsilon) \qquad F(\xi,\varepsilon) = \xi^2 + a\xi + \varepsilon b = 0$$

となる。これは低次の項のみに ε を含み，"普通"の摂動問題である。
$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \cdots$ を代入，等べきの項をまとめ，

$$\varepsilon^0 \; ; \quad \xi_0^2 + a\xi_0 = 0$$
$$\varepsilon^1 \; ; \quad (2\xi_0 + a)\xi_1 + b = 0$$
$$\varepsilon^2 \; ; \quad (2\xi_0 + a)\xi_2 + \xi_1^2 = 0$$
$$\cdots\cdots$$

ε^0 の係数方程式から $\xi_0 = 0$ 又は a が得られるが，それぞれに対し高次の係数方程式を逐次求め， $x = \varepsilon^{-1}(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \cdots)$ とすれば (1.3) の漸近展開がもれなく得られる。

さて上述の Key は

#1. 適当な変換により，特異摂動問題を"普通"の摂動問題に帰着させた

ことにある。また

#2. 漸近展開の係数決定のアルゴリズムが解の存在証明も与えている

ことにも注意して欲しい．この事情を少していねいに説明しよう。まず次の陰関数定理に注意する。

定理1. $F(\xi,\varepsilon)$ は $\xi\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ で定義され ξに関してC^1級 εに関して連続とする。 $\xi(\varepsilon)\in\mathbb{R}$, $(\varepsilon>0)$ が存在して

i) $|F_\xi(\xi(\varepsilon),\varepsilon)| = O(|\varepsilon|^k)$ $(k>0)$

ii) $|F_\xi(\xi(\varepsilon),\varepsilon)^{-1}| = O(|\varepsilon|^{-\ell})$ $(\ell\geq 0)$

iii) $|F_\xi(\xi(\varepsilon)+y,\varepsilon) - F_\xi(\xi(\varepsilon)+z,\varepsilon)| = \mathrm{const.}\,|y-z|^\alpha$ $(\alpha>0)$

とする. $k-\ell>\ell/\alpha$ ならば. $k-\ell>\beta>\ell/\varepsilon$ なる βに対し

$$F(\xi(\varepsilon)+y,\varepsilon)=0 \quad の$$

の解で $|y|<\mathrm{const}\,\varepsilon^\beta$ なるものを一意的にもつ。

証明は. map $y\longrightarrow y-F_x(x(\varepsilon),\varepsilon)^{-1}F(x(\varepsilon)+y,\varepsilon)$ の縮少性を示せばよい. 読者の演習とする。

注意. F を Banach 空間間の map に自明な拡張することができる。

さて. 定理1に基づき. 前述の2)を説明しよう。 例1では ξの漸近展開係数が逐次求められた。$k-1$次までの展開を $\xi(\varepsilon)$ 即ち $\xi(\varepsilon)=\xi_0+\varepsilon\xi_1+\cdots+\varepsilon^{k-1}\xi_{k-1}$ とすれば i)は成立する。 iii)は自明である。 ii)も例1では $F_\xi(\xi,\varepsilon)=2\xi-a$ より容易であるが, 一般の問題では ii)の検証が一番難かしい。

ii)の検証という立場から. 漸近展開の係数決定アルゴリズムを見なおしてみよう。 ε の i次 $(i\geq 1)$の係数方程式は いずれも

$$F_\xi(\xi(0),0)\xi_i = g_i \quad (g_i \text{ は } \xi_0,\cdots,\xi_{i-1} \text{ で決まる.})$$

という形である。これが解けたことは とりもなおさず $F_\xi(\xi(0),0)$の可逆性を示している. しかも これは εに無関係だから $|F_\xi(\xi(0),0)|=O(1)$ である. $|\xi(\varepsilon)-\xi(0)|=O(\varepsilon)$ と $F_\xi(\xi,\varepsilon)$のεに関する連続性より $|F_\xi(\xi(\varepsilon),\varepsilon)^{-1}| = O(1)$ 即ち ii)が $\ell=0$ で成立していることが導びかれる。

また, kは任意に大きくとれるから $k-\ell>\ell/\alpha$ と出来る。

定理1の iii) は F の regularity の条件で与えられた問題に依存するが他の条件は上の例でみたように，漸近展開の係数決定アルゴリズムが得られたという事実によって自動的に成立しているのである。これが #2 意味である。

注意　上の例を含め"普通の"摂動問題や，多くの特異摂動問題（例2を含む）では 定理1の ii) の l は $l=0$ でよいが，$l\neq 0$ が本質的となる特異摂動問題もある。それを次節で解説する。

3. 内部遷移層

境界値問題

$$
(3.1.\varepsilon)\qquad
\begin{cases}
\varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + f(u,x)=0 & -1<x<1 \\
u(-1)=0\ ,\ u(+1)=3
\end{cases}
$$

を $P(u,\varepsilon)=0$ と書く。ここで $f(u,x)=u(u-1)(2+x-u)$。

$\varepsilon=0$ とすると (3.1.ε)の才1式 $f(u,x)=0$ は $u=0,\ 1,\ 2+x$ の三つの解をもつ。しかも $u=0$, $u=2+x$ は それぞれ $x=-1,\ 1$ での境界条件を満す。例2の境界層現象から類推して，$u=0,\ 2+x$ はある局所領域を除き (3.1.ε)の解をよく近似しているものと思われる。しかもこの局所領域では解が $u=0$ から $2+x$ へ急激な変動をしている可能性がある ― 内部遷移層現象（図1参照）。この領域はどのようにきまるのであろうか。

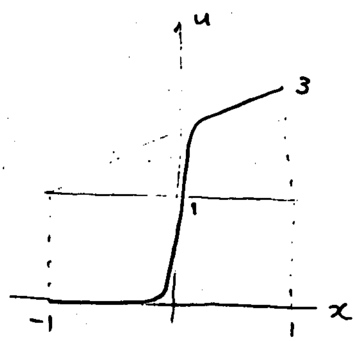


図1. 内部遷移層現象

$x=x_0$（未知）近傍でこの遷移があると仮定すると，$\xi=\dfrac{x-x_0}{\varepsilon}$ をもちいて $\forall d$ fixed に対し $|x-x_0|<d$ で (3.1.ε) を変換し（スローガン #1！），

6

$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば,

$$(3.2)\begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\xi^2} + u(u+1)(2+x_0-u)=0 & -\infty<\xi<+\infty \\ u(-\infty)=0, \quad u(+\infty)=2+x_0 \end{cases}$$

をうる。これは (u, u_ξ) 相平面での鞍点 $(0,0)$ と $(0, 2+x_0)$ を結ぶ軌道を求める問題で, 2点が渦点 $(0,1)$ に対称のとき, (3.2)は解をもつ。すなわち $x_0=0$ のときである。

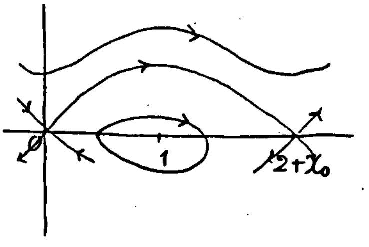


図 2

(3.2)の解は平行移動の自由度をもつから $u(0)=1$ を課した時の解を $T(\xi)$ とかくと 一般に $u(\xi)=T(\xi-a_0)$ (a_0 は任意)が (3.2)の解である。即ち

$$u \sim \begin{cases} 0 & -1<x<0 \\ T(\frac{x}{\varepsilon}-a_0) & x \approx 0 \\ x+1 & 0<x<1 \end{cases}$$

が (3.1.ε)の解の才0近似の候補である。

これが正しいことを前節 #2 の視点から, 漸近展開を求めることにより示そう。上で見たように $x=0$ の近傍での漸近展開(内部展開)とその他の領域での漸近展開(外部展開)では異なる形が要求される ― 複合展開。

1) 外部展開

$$u \sim \begin{cases} U^l \equiv U_0^l + \varepsilon U_1^l + \varepsilon^2 U_2^l + \cdots & -1<x<0 \\ U^r \equiv U_0^r + \varepsilon U_1^r + \varepsilon^2 U_2^r + \cdots & 0<x<1 \end{cases}$$

を仮定し (3.1.ε)に代入, ε の等べきの係数を求めると

ε^0 : $f(U_0, x)=0$

ε^1 : $f_u(U_0, x)U_1 = 0$.

$$\varepsilon^2 ;\quad f_u(u_0, x)u_2 + 2 f_{uu}(u_0, x)u_1^2 + \frac{d^2u_0}{dx^2} = 0$$

$\cdots\cdots$

（添字 l, r はつけないときは両者に共通）より　$u_0^l \equiv 0$, $u_0^r = 2+x$ をとり

$u_1 \equiv u_2 \equiv \cdots \equiv 0$ をうる。

2) 内部展開

$\eta = \xi - a_0$　($\xi = x/\varepsilon$) を用い (3.1.ε) を変換する。これに

$u \sim \hat{u}(\eta) = t(\eta)(2+x) + \varepsilon\hat{u}_1(\eta) + \varepsilon^2\hat{u}_2(\eta) + \cdots$　　　　$t(\eta) = T(\eta)/T(+\infty)$

即ち　$\hat{u} = T(\eta) + \varepsilon(\eta + a_0)t(\eta) + \varepsilon\hat{u}_1(\eta) + \varepsilon^2\hat{u}_2(\eta) + \cdots$

を代入し，等べきの係数方程式を求める。

$$\varepsilon^0 ;\quad \frac{d^2T}{d\eta^2} + f(T, 0) = 0 \qquad \cdots (3.3)$$

$$\varepsilon^1 ;\quad \frac{d^2\hat{u}_1}{d\eta^2} + f_u(T,0)\hat{u}_1 = -\frac{d^2}{d\eta^2}\Big((\eta+a_0)t(\eta)\Big) + f_u(T,0)(a_0+\eta)t(\eta) + f_x(T,0)(a+\eta) \equiv g_1(\eta) \qquad \cdots (3.4)$$

$\cdots\cdots$

一方，内部展開と外部展開は同一の関数の表現だから $u^l - \hat{u} \to 0$ $(\eta \to -\infty)$ および $u^r - \hat{u} \to 0$ $(\eta \to +\infty)$ が必要である — 整合条件。即ち

$$\varepsilon^0 \quad T(-\infty) = 0,\ T(+\infty) = 2 \qquad \cdots (3.5)$$

$$\varepsilon^1 \quad \hat{u}_1(\pm\infty) = 0 \qquad \cdots (3.6)$$

$\cdots\cdots$

(3.3)(3.5) は T の定義より成立。(3.4)(3.6) は　$T' = \frac{dT}{d\eta}$ が

$$\frac{d^2}{d\eta^2}T' + f_u(T,0)T' = 0$$

を満すことに注意すると，$\hat{u}_1$ の可解性のためには

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\eta)\, T'(\eta)\, d\eta$$

即ち

(3.7) $$a_0 \int_0^2 f_x(u,0)\,du + \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f_x(T,0)\eta + t(\eta) \} T'(\eta)\, d\eta = 0$$

が必要である。これより a_0 が決定され、(3.4)(3.6)の解 $\hat{u}_1$ は

$$\hat{u}_1 = a_1 T' + \bar{u}_1$$

(a_1 は任意, $\bar{u}_1$ は $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_1 T\, d\eta = 0$ を満す (3.4)(3.6)の一意解) と表わされる。

以下同様に $\hat{u}_i = a_i T'(\eta) + \bar{u}_i(\eta)$ の形で内部展開の係数 $(a_{i-1}, \bar{u}_i)$ $i=2,3\cdots$ が逐次決定される。

さて 上の方法で複合形の漸近展開の係数決定のアルゴリズムが得られたが 解の存在も定理1(バナッハ空間への拡張形)に基づいて示される。ただし ii) の l は $l=-1$ となる。このことを概説する。

係数決定の第$(i+1)$ステップでは、ε^{i+1}の係数 u_{i+1}, $\bar{u}_{i+1}$ と ε^{i} の係数 a_i が決定されたことに注意しよう。それらは第0近似のまわりでの線形化作用素の可逆性を示している。ε^n次までの展開を $u(\varepsilon)$でかくと そこでの線形化作用素 $P(u(\varepsilon), \varepsilon)$ の可逆性は

(3.8) $$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + f_u(u(\varepsilon), \varepsilon)\varphi = F \\ \varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

(F: given $\|F\|_0 = O(1)$, $\|\ \|_0$ は max ノルム) の可解性にほかならず、これはまた漸近展開法で求めることが出来る。すなわち

外部展開

$$\varphi \sim \begin{cases} \Phi^l = \Phi_0^l + \varepsilon \Phi_1^l + \cdots & -1 < x < 0 \\ \Phi^r = \Phi_0^r + \varepsilon \Phi_0^r + \cdots & 0 < x < 1 \end{cases}$$

内部展開

$$\varphi \sim (1-x)\Phi^{l} + x\Phi^{r} + \frac{b_{-1}}{\varepsilon}T' + (b_0 T' + \bar{\varphi}_0) + \varepsilon(b_1 T' + \bar{\varphi}_1) + \cdots$$

を仮定すれば $\Phi_i, b_{i-1}, \bar{\varphi}_i$ は $U^{i+1}, a_i, \bar{u}_{i+1}$ $(i=0,1,2\cdots)$ とまったく同様のアルゴリズムで得られる。ε^{-1}の項の存在は $\|\varphi\|_0 = O(\varepsilon^{-1})$ 即ち $\|P_u(u(\varepsilon),\varepsilon)^{-1}\| = O(\varepsilon^{-1})$ を意味し．定理1で…

$\xi(\varepsilon) \equiv u(\varepsilon), \cdots F(\xi,\varepsilon) \equiv P(u,\varepsilon)$ としてバナッハ空間に拡張して適当すれば ii) の l は $l=-1$ である。

4．終りに．

この稿の主題は 2節のスローガン #2 にあるが この視点からの主張は，二変数反応拡散系に対しては 弁者

[1] 「特異摂動論における漸近展開法」 数学 38 No.2 岩波

また 神経系の方程式に対しては

[2] Traveling train solutions for FitzHugh-Nagumo systems. to appear

で展開されている。また 講演では，上の主張を正面に出さず，歴史的な形式手法を述べたが この点に関しては，[1]の参考文献を参照してほしい。

非圧縮流体：最近の topics について

水町 竜一（東大 理）

§1. 非圧縮流体についての数学的研究は，Leray, Wolibner 以来現在も盛んである。大きな問題の一つは，3次元流体に於る解の一意存在（時間的に大域的な）である。2次元流体については，初期値の正則性を仮定すれば，一意解の存在は保障される。正則性の仮定を弱める事，解の粘性依存性を詳しく調べる事が，興味を引いている。境界層の問題も研究が続けられているが，一応の解決を見るのは，まだ先のことかと思われる。この稿では，境界がない場合，即 $\mathbb{R}^2$ 全体を占める二次元流体に関する最近の topics を簡単に紹介し，今後の方向をさぐりたい。

考えるべき方程式は，未知関数 $u=(u_1(x,t), u_2(x,t))$ $p=p(x,t)$ $x\in\mathbb{R}^2$, $t\in[0,T)$ に関する次の方程式系である：

$$
(1.1)_\nu \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u^{(\nu)} - \nu\Delta u^{(\nu)} + (u^{(\nu)}\cdot\nabla)u^{(\nu)} + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,T) \\ \operatorname{div} u^{(\nu)} = 0 & \quad " \\ u^{(\nu)}\big|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases}
$$

但し，$T\,(>0)$ は任意定数，ν は粘性と呼ばれる非負のパラメーターである。$(1.1)_\nu$ は $\nu>0$ で Navier-Stokes 方程式，$\nu=0$ では Euler 方程式と呼ばれる。

ここでは、次の漸近挙動に関する条件を付加して考える。

$$(1.2) \qquad \lim_{|x|\to\infty} u^{(2)}(x,t) = 0$$

uは速度場であり、pは圧力である。$\mathrm{rot}\, u := \frac{\partial}{\partial x_2}u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}u_2$ を渦と呼ぶ。$\omega_0 := \mathrm{rot}\, u_0$ が、$\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であるという仮定のもとで、$(1.1)_\nu - (1.2)$ は次の (1.3) と同等になる：

$$(1.3)_\nu \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega - \nu\Delta\omega + u^{(2)}\cdot\nabla\omega = 0 \\ \omega\big|_{t=0} = \omega_0 \\ u^{(2)} = F_2[\omega] \end{cases}$$

但、F_2 は次で与えられる積分作用素 $\bigcup_{\alpha<\beta} B_T^\beta \to V_T$ である。

$$F_2[\omega](x,t) = \iint \frac{(-x_2+y_2,\ x_1-y_1)}{2\pi\,|x-y|^2}\,\omega(y,t)\,d^2y.$$

但、$\iint \cdots d^2y$ で $\mathbb{R}^2$ 上の積分を表す。

最近のいくつかの研究の結果にふれよう。

Giga−Osada−Miyakawa は，$\nu>0$ の場合に，ω_0 が有限なRadon測度である場合に $(1.3)_\nu$ の解の存在を示した。ω_0 が'小さい'場合には一意性も導かれた。解の構成に於て基本的に大事な役割を果したのは，放物型方程式

$$(1.4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\omega - \nu\Delta\omega + u\cdot\nabla\omega = 0$$

の基本解 $P(x.t:y.s)$ が，$\operatorname{div} u = 0$ の時に，次の評価式

$$(1.5)\qquad C_1(t-s)^{-1}\exp\left(-\frac{C_2|x-y|^2}{|t-s|}\right) \leqq P(x.t:y.s) \leqq C_3(t-s)\exp\left(-\frac{C_4|x-y|^2}{|t-s|}\right)$$

を満たすという事実である。但 $C_1\sim C_4$ は，$\|\omega_0\|$ と ν による定数。(1.5) は Osada によって得られた。Osadaは，ν が大きい時に，$(1.3)_\nu$ と次の確率微分方程式の関係をつけた：

$$(1.6)\qquad dZ_t^i = \sigma dB_t + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} c_j^{(n)}(\nabla^\perp G)(Z_t^i - Z_t^j)\,dt,\quad i=1,\dots,n$$

但 $\nabla^\perp G$ は積分作用素 F_1 の積分核である。$\sigma=\sqrt{2\nu}$

とし、$C_j^{(n)}$ を適当にとり、$n \to \infty$ とすることによって、$(1.6)_n$ の解から $(1.3)_\nu$ の解を構成したのである。但、ω_0 は連続性を要求している。

他方、$(1.1)_\nu$ ないし $(1.3)_\nu$ の解の ν 依存性…$\nu \downarrow 0$ とする時の収束の問題…でも多少の進展があった。T. Kato, Masuda, Kato−Lai らの手により、$u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$（但 $s>2$）の時に、$(1.1)_\nu$ の解 $u^{(\nu)}$ は $L^\infty(0,T;H^s(\mathbb{R}^2))$ に於て一意に存在し $\nu \downarrow 0$ で $u^{(0)}$ に収束する事などが証明された。Ponce は $u_0 \in L^2 \cap W^{s,p}$ 但、$(s,p) \in [2,\infty) \times [2,\infty)$, $(s,p) \neq (2,2)$. なる条件下で、$u^{(\nu)}$ の $\nu \geq 0$ での有界性…$L^\infty(0,T;L^2 \cap W^{s,p})$ に於る…を示した。本稿の著者は、ω_0 が Hölder 連続即 $\alpha>0$ に対して $\omega_0 \in C^\alpha \cap L^1$ なる場合に、$(1.3)_\nu$ の解の $L^\infty(0,T;C^\alpha \cap L^1)$ での有界性、$\nu \downarrow 0$ での収束をある程度くわしく調べた。

これらの方向の研究で残されている問題として、$(1.3)_\nu$ で ω_0 が Radon 測度 $\sim H^1$（又は $C \cap L^1$）の間の正則性をもつ場合に (イ) $\nu>0$ での解の　，一様有界性．(ロ) $\nu \downarrow 0$ での収束　(ハ) $\nu=0$ での解の一意性，存在．等を調べること，を上げることができる。

§2. 著者の結果についてふれる。使用する空間，ノルムとセミノルム，作用素など，記号をまず定義する。

定義.（セミノルム） $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{\ell}$ （$\ell=1$ or 2） に対し，

$$\|f\|_0=\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|f(x)|, \qquad \|f\|_1=\max_{i=1,2}\|\partial_{x_i}f\|_0$$

$$\|f\|_{L^1}=\iint|f(x)|\,d^2x.$$

$$\|f\|_{\beta}=\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\beta}} \qquad \text{for} \quad 0<\beta<1,$$

$$\|f\|_{\beta,\,loc}=\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y\\ |x-y|\le 1}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\beta}} \qquad \text{for} \quad 0<\beta<1,$$

$$\|f\|_{1+\beta}=\max_{i=1,2}\|\partial_{x_i}f\|_{\beta} \qquad \text{for} \quad 0<\beta<1,$$

で各々左辺のセミノルムを定義する。又．$g:\mathbb{R}^2\times[0,T)\to\mathbb{R}^{\ell}$ （$\ell=1$ or 2） に対して．

$$\|g\|_{0,T}=\sup_{0\le t<T}\|g(\cdot,t)\|_0\,,$$

のように，上で定義したセミノルムに対し．添字 T をつけて g に対するセミノルムを定義する。

定義 （空間） $0\leqq\beta<1$ に対して，

$$\|f\|_{B^{\beta}}=\|f\|_0+\|f\|_{\beta}+\|f\|_{L^1}$$

$$B^{\beta}=\{f\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\ \|f\|_{B^{\beta}}<\infty\}$$

$$B_T^\beta = \{ g \in C(\mathbb{R}^2 \times [0.T), \mathbb{R}) : \|g\|_{B^\beta;T} < \infty \}$$

とする。又．　$0<\beta<1$ として，

$$V = \{ v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \|v\|_1 < \infty,\ \mathrm{div}\, v = 0 \}$$

$$V^\beta = \{ v \in V : \|v\|_{1+\beta} \}$$

で左辺の空間を定義する。　又．

$$V_T = \{ u \in C(\mathbb{R}^2 \times [0.T), \mathbb{R}^2) : u(\cdot\, t) \in V \quad 0 \le t < T \quad \sup_{0\le t<T} \|u(\cdot\, t)\|_1 < \infty \}.$$

とする。

定義：（Lagrange 座標）　$u \in V_T$ に対し，次の微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_{t.s}\, x = u(U_{t.s}\, x.\, t) & 0 \le s < T \\ U_{s.s}\, x = x & 0 \le t < T \end{cases}.$$

の解　$U_{t.s} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　，$0 \le t.s < T$　を Lagrange 座標と呼ぶ．u 依存性を明確にする必要がある時は．$U_{t.s}[u]$　と書く。

定義：空間 $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{ U \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2);\ U \text{ は diffeo},\ |\mathrm{Jac}\, U| \equiv 1,\ \|U\|_1 < \infty,\ \|U^{-1}\|_1 < \infty \}$$

定義(作用素).

$\nu \geqq 0$ に対し. $F_2^{(\nu)}$ を. 次で定める. 又. $F^{(\nu)} = F_2^{(\nu)} \circ F_1$ とする.

$$F_2^{(\nu)}: \quad \begin{array}{ccc} V_T & \longrightarrow & \overset{\circ}{B}_T \\ \Psi & & \Psi \\ u & & \omega \end{array}$$

但し ω は. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\omega - \nu\Delta\omega + (u \cdot \nabla)\omega = 0 \\ \qquad\qquad \omega\big|_{t=0} = \mathrm{rot}\, u_0 \end{array} \right.$

の有界な一意解である.

定義(積分作用素等). $\lambda > 0$ をパラメーターとする.

$$I_\lambda : \overset{\circ}{B} \to \overset{\circ}{B}, \quad I[f](x) = \iint \frac{1}{4\pi\lambda} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda}} f(y)\, d^2y$$

$$J_{\lambda,v} : \overset{\circ}{B} \to \overset{\circ}{B}, \quad J[f](x) = \iint \phi_{\lambda,v}(x,y)\, f(y)\, d^2y$$

但し. $v \in V$ に対して定義され. $\phi_{\lambda,v}$ は次の通り:

$$\phi_{\lambda,v}(x,y) = \frac{(x-y)\cdot(v(y)-v(x))}{2\lambda} \frac{1}{4\pi\lambda} e^{-\frac{|x-y|^2}{\lambda}}.$$

又. $\nu > 0$, $u \in V_T$ に対して 函数 $W_{\nu,u}$ 作用素 $\Phi_{\nu,u}$, $\Psi_{\nu,u}$ を

$$W_{\nu,u}(x,t) = J_{4\nu t,\, u(\cdot,t)}[\omega_0 \circ U_{t,0}^{-1}](x).$$

$$\Phi_{\nu,u}[g](x,t) = \int_0^t I_{4\nu(t-s)}[g(U_{t,s}^{-1}(\cdot), s)](x)\, ds$$

$$\Psi_{\nu,u}[g](x,t) = \int_0^t J_{4\nu(t-s),\, u(\cdot,t)}[g(U_{t,s}^{-1}(\cdot), s)](x)\, ds$$

で定める.

主要定理は次の定理である．

定理．　$u_0 \in B^{\alpha}$，$\nu\alpha > 0$ とする．このとき，(1.1)$_\nu$–(1.2) は，$\nu \geqq 0$ に対して，$u^{(\nu)} \in V_T$，$\mathrm{rot}\, u^{(\nu)} \in B^{\alpha}_T$ なる一意解をもつ。又，α，T，$\|\omega_0\|_{B^\alpha}$ による定数 c が存在し，次をみたす。

$$\|\mathrm{rot}\, u^{(\nu)} - \mathrm{rot}\, u^{(0)}\|_{0,T} \leqq c\, \nu^{\alpha/2}. \tag{2.1}$$ ∎

ここでは，小さい ν に対する解の存在と ν 一様な有界性を簡単に示し，次いで (2.1) を示そう。

命題1．　$u \in V_T$ とする。$\nu > 0$ に対して，$F^{(\nu)}_\nu[u]$ は

$$F^{(\nu)}_\nu[u](\cdot, t) = I_{4\nu t}[\omega_0 \circ U^{-1}_{t,0}] + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{\nu,u}(\Phi_{\nu,u})^j N_{\nu,u}$$

で与えられる。又，$\nu = 0$ に対しては，

$$F^{(0)}_\nu[u](\cdot, t) = \omega_0 \circ U^{-1}_{t,0}.$$ ∎

補題2．　$0 < \beta' \leqq \beta < 1$ とする。又 $v \in V$ とする．このとき，

$$\|I_\lambda[f]\|_\beta \leqq \|f\|_\beta \qquad (\lambda > 0)$$

$$\|J_{\lambda,v}[f]\|_{\beta'} \leqq c\, \lambda^{\frac{\beta-\beta'}{2}} \|v\|_1 \|f\|_\beta$$

ここで $f \in B^\beta$ は任意． ∎

補題3. $R>0$ とする. ある $\delta>0$, $M_1>0$ があって (R と T に依存する), $\varsigma\in B_T^0$ $\|\varsigma\|_{B_T^0}\le R$ ならば

$$\|U_{t,s}[F_1[\varsigma]]\|_{\delta.loc}\le M_1 \qquad 0\le t.s<T \blacksquare$$

命題4. $0<\gamma\le 1$ とする. $\nu>0$ に対し.

$$\|F_2^{(\nu)}[u]\|_{\alpha\gamma,T}\le c\left(\sup_{0\le t<T}\|U_{t.0}^{-1}\|^{\alpha}_{\gamma\alpha.loc}+1\right)\|\omega_0\|_{B^\alpha} + (\nu T)^{\frac{\alpha-\alpha\gamma}{2}}\|\omega_0\|_\alpha\ \varphi(c\alpha T\|u\|_{1,T})$$

但. c はすべて正定数, $\varphi(\rho)=e^{\rho}(e^{\rho e^{\rho}}-1)$. ■

以上の証明は略す. *Schauder* 不動点定理により解の存在…$F^{(\nu)}$ の不動点の存在を示す. ($u^{(\nu)}$ が解 $\Leftrightarrow$ rot $u^{(\nu)}$ が $F^{(\nu)}$ の不動点) $\beta>0$, $M>0$ に対して,

$$\mathcal{S}_{\beta.M}=\{\varsigma\in B_T^\beta:\|\varsigma\|_{0,T}\le\|\omega_0\|,\ \|\varsigma\|_{\mathcal{L}^1,T}\le\|\omega_0\|_{\mathcal{L}^1},\ \|\varsigma\|_{\beta,T}\le M\}$$

とする. $F^{(\nu)}$ が $\bigcup_{0<\beta<\alpha}B_T^\beta\to B_T^0$ で *compact, continuous* であることは, "*standard argument*" による. $F^{(\nu)}[\mathcal{S}_{\beta,M}]\subset\mathcal{S}_{\beta,M}$ なる $0<\beta<\alpha$. M の存在を示そう. $(1.3)_\nu$ の解に対して成り立つ保存則より, 任意の $u\in V_T$ に対して $\|F_2^{(\nu)}[u]\|_{0,T}\le\|\omega_0\|_0$, $\|F_2^{(\nu)}[u]\|_{\mathcal{L}^1,T}\le\|\omega_0\|_{\mathcal{L}^1}$, $(\nu\geqq 0)$. $R=\|\omega_0\|_0+\|\omega_0\|_{\mathcal{L}^1}$ に対して, 補題3 の δ. M_1 をとり, $\beta=\alpha\delta$, $M=C(M_1^\alpha+1)\|\omega_0\|_{B^\alpha}$

10

とすると，十分小さな ν に対し，$F^{(\nu)}[\mathcal{S}_{\beta,M}] \subset \mathcal{S}_{\beta,M}$ である。
Schauder の定理より，$F^{(\nu)}$ は（このような ν … $0 \le \nu \le \nu_1$，$\nu_1 > 0$）
B_T^β に不動点 $\omega^{(\nu)}$ をもち，$u := F_1[\omega^{(\nu)}]$ は $(1.1)_\nu$−(1.2) の
解である。命題4 を $\alpha = 1$ で使って，$\omega^{(\nu)} \in B_T^\alpha$ も出る。

以上が存在定理の証明のあらましである。一意性の証明は略すが，収束を示す際にも使用する道具を導入しておく。

定義：（Diffeomorphism の空間）．以下で $\mathcal{D}$ を定義する。

$$U \in \mathcal{D} \overset{def}{\Longleftrightarrow} U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \text{diffeomorphism},\ \|U\|_1 < \infty,$$
$$\|U^{-1}\|_1 < \infty,\ |\mathrm{Jac}\, U| \equiv 1.$$

定義．$U, V \in \mathcal{D}$ に対し，

$$A_{\omega_0}(U, V)(x) = \iint k(U(x) - V(y))\, \omega_0(y)\, d^2y$$

で $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ の作用素 A_{ω_0} を定める。

補題5. $U, V, W \in \mathcal{D}$ に対し，

$$\|A_{\omega_0}(U, V) - A_{\omega_0}(W, V)\|_0 \le C \|\omega_0\|_{B^\beta} \|U - W\|_0$$
$$\|A_{\omega_0}(U, V) - A_{\omega_0}(U, W)\|_0 \le C \|\omega_0\|_{B^\beta} \|V - W\|_0$$

但，C は $\|V^{-1}\|_1$ による定数． ∎

収束の証明の概略を示そう.

補題6. $0<\beta<1$ とする. $U \in \mathcal{D}$, $\|U\|_{1+\beta}<\infty$, $v \in V^{1+\beta}$ とする. このとき, $\|v\|_{1+\beta}$, $\|U\|_{1+\beta}$, $\|U^{-1}\|_1$ による定数 C があって,

$$\left|\iint k(x-Uy)\,\phi_{\lambda,v}(y,z)\,f(z)\,d^2y\,d^2z\right| \leqq C\|f\|_{B^\beta}\left(\lambda^2+\lambda^{\frac{1+\beta}{2}}\right),\quad \lambda>0$$

但し. $\phi_{\lambda,v}(y,z)=\dfrac{(y-z)(v(z)-v(y))}{2\lambda}\cdot\dfrac{1}{4\pi\lambda}e^{-\frac{|y-z|^2}{\lambda}}$. ∎

命題7. $0<\beta<\alpha$ とする. 又 $0<\nu\leq\nu_1$ とする. このとき,

$$\|u^{(\nu)}(\cdot,t)-u^{(0)}(\cdot,t)\|_0 \leqq C(\nu t)^{\frac{1+\beta}{2}}+C\|U^{(\nu)}_{t,0}-U^{(0)}_{t,0}\|_0$$

但し. $U^{(\nu)}_{t,0}=U_{t,0}[u^{(\nu)}]$ $(\nu\geqq 0)$, C は $\alpha,\beta,T,\nu_1,\|\omega_0\|_{B^\alpha}$ に依存する定数. ∎

命題7の証明の概略.

$$\begin{aligned} u^{(\nu)}-u^{(0)} &= F_1\left[\omega_0\circ U^{(\nu)^{-1}}_{t,0}-\omega_0\circ U^{(0)^{-1}}_{t,0}\right] \\ &\quad + F_1\left[I_{4\nu t}\left[\omega_0\circ U^{(\nu)^{-1}}_{t,0}\right]-\omega_0\circ U^{(\nu)^{-1}}_{t,0}\right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} F_1\,\Phi_\nu\,\Psi_\nu^j\,W_\nu \end{aligned}$$

である. 但. $\Phi_\nu=\Phi_{\nu,u^{(\nu)}}$ 等. 各項評価する. 第一項は

12

補題5により，第3項は補題6及 F_1 と Φ_ν の「交換」を使って評価される。又第2項は積分順序交換でよる。 ∎

命題8. $0<\beta<\alpha$ とする。α, β, T, ν_1, $\|\omega_0\|_{\beta\alpha}$ による定数 C があって，$0\leq\nu\leq\nu_1$ に対し，

$$\|U_{t,0}^{(\nu)} - U_{t,0}^{(0)}\|_0 \leq C t (\nu t)^{\frac{1+\beta}{2}} \quad , 0\leq t<T.$$

証明：$\frac{d^+}{dt}$ を右上微分とすれば，$U^{(\nu)}$ の定義式より，

$$\frac{d^+}{dt}\|U_{t,0}^{(\nu)} - U_{t,0}^{(0)}\|_0 \leqq \|u^{(\nu)}(\cdot,t) - u^{(0)}(\cdot,t)\|_0$$
$$+ \|u^{(0)}(\cdot,t)\|_1 \|U_{t,0}^{(\nu)} - U_{t,0}^{(0)}\|_1$$

Gronwall の不等式と，命題7より命題8を得る ∎

定理の証明（収束に関して）の概略.

$$\omega^{(\nu)}(\cdot,t) - \omega^{(0)}(\cdot,t) = \{I_{\nu t}[\omega_0\circ U_{t,0}^{(\nu)-1}] - \omega_0\circ U_t^{(\nu)-1}\}$$
$$+\{\omega_0\circ U_{t,0}^{(\nu)-1} - \omega_0\circ U_{t,0}^{(0)-1}\}$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_\nu \Phi_\nu^{j} W_\nu \quad .$$

第1項，第3項は補題2と $\|U_{t,0}^{(\nu)}\|_1$ の ν 一様な有界性によって評価される。第2項は，命題8の $\beta=\alpha/2$ とした適用と，分布函数の Hölder 連続性により，評価できる ∎

§3. 今後の問題について二、三ふれる。

1). 基本解に関する Osada の評価は、漸近展開の形で改良できないか。もしそれができるものならば、命題4の改良版 — $\omega_0 \in B^\alpha$ の仮定をはずす — が可能になるか。

2). ($\nu = 0$ の場合) Euler 方程式は、Banach Space の部分集合上で定義された常微分方程式

$$(3.1)\quad \frac{d}{dt} U_t = A_{\omega_0}(U_t, U_t) \qquad 0 < t.$$
$$U_0 = id$$

に還元「できる」。($\omega_0 \in B^\alpha$ ならば O.K.)
ω_0 の regularity が良くない場合の問題は、A_{ω_0} は弱い位相でも Lipschitz にならない事、$\mathcal{D}$ の弱い位相に関する閉包の特徴付けをどう与えればいいのか、などがある。Foias 達は、weakly volume preserving map を $\int_\Omega g \circ U = \int_\Omega g \quad \forall g \in C_0^\infty(\Omega)$ なる U として定義した。こういう U 達の空間で (3.1) を解けるか、一意性はどうか。$\nu \to 0$ の極限として得られる解は一意か、など沢山問題がある様である。

地球物理学にあらわれる1つの逆問題について

山本 昌宏（東大・教養）

(Yamamoto, M.: On an Inverse Problem in Geophysics)

§1. Introduction. In this report, we consider an inverse spectral problem for a Sturm-Liouville's operator (A_α) with a piecewise continuous coefficient $\alpha(x)$:

$$
(A_\alpha)\begin{cases}
-\dfrac{d}{dx}\left(\alpha(x)\dfrac{du}{dx}\right) = \lambda^2 u & 0 < x < 1,\quad x \neq d_j \ (1 \le j \le m) \\
\dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0 & \\
u(d_j+) = u(d_j-), & (1 \le j \le m), \\
\alpha(d_j+)\dfrac{du}{dx}(d_j+) = \alpha(d_j-)\dfrac{du}{dx}(d_j-) & (1 \le j \le m),
\end{cases}
$$

where

$$0 = d_0 < d_1 < \cdots < d_m < d_{m+1} = 1,$$

$$\alpha \in C^2[d_j, d_{j+1}] \qquad (0 \le j \le m).$$

Our problem is closely related to the following one in geophysics : The eigenfrequencies $\omega_n(\ell)$ $(\ell, n = 1, 2, \cdots)$ of the torsional oscillations of a spherically symmetric, non-rotating, elastic and isotropic model for the earth can be given by the eigenvalue problem :

$$(1.1)\quad -\frac{d}{dr}\left(r^4\rho(r)\beta^2(r)\frac{du}{dr}\right) + (\ell+2)(\ell-1)r^2\rho(r)\beta^2(r)u = \omega_n(\ell)^2 r^4\rho(r)u \qquad (R_c < r < R_m,\ R_m < r < R)$$

$$(1.2)\quad \frac{du}{dr}(R_c) = \frac{du}{dr}(R) = 0$$

with the continuity conditions at R_m ,

$$(1.3)\quad \begin{aligned} &u(R_m+) = u(R_m-) \\ &\rho(R_m+)\beta(R_m+)^2\,\frac{du}{dr}(R_m+) = \rho(R_m-)\beta(R_m-)^2\,\frac{du}{dr}(R_m-) \end{aligned}$$

Here $\rho(r)$ and $\beta(r)$ denote the density of the earth and the velocity of the S-wave at distance r from the center of the earth, respectively, and let us assume that both functions are positive and have unique twice continuously differentiable extensions for $R_c \le r \le R_m$ and $R_m \le r \le R$. Further R and R_c are the radii of the earth and the core, respectively, and R_m corresponds to the distance from the center of the earth to the Mohorovičić discontinuity. The equation (1.1) is derived from the one in Alterman, Jarosch and Pekeris [1] (cf. Hald [3]) and the conditions (1.3) come from the continuity of the displacement and the stress at the interface.

In investigating the interior structure of the earth, we have to determine $\rho(r)$ (or $\beta(r)$) on the basis of the data on the eigenfrequencies $\omega_n(\ell)$, that is, we have to consider an inverse spectral problem for the Sturm-Liouville problem (1.1) - (1.3) with interior discontinuities. In [3], an inverse problem of another type is considered for a similar Sturm-Liouvile problem.

§2. Formulation of our problem. We note that there is a countable set of eigenvalues $\{\lambda_n(\alpha)^2\}_{n\ge1}$ of (A_α). Here $\lambda_n(\alpha) \ge 0$. Thus we can introduce

Definition. Let $\phi_n(x) = \phi_n(x;\alpha)$ be the eigenfunction of (A_α) associated with an eigenvalue $\lambda_n(\alpha)^2$ satisfying $\phi_n(0;\alpha) = 1$. Then we set

$$(2.1)\quad \rho_n \equiv \rho_n(\alpha) \equiv \int_0^1 \phi_n(x)^2 \, dx \qquad (n \ge 1)$$

and we call $\{\lambda_n(\alpha)^2, \rho_n(\alpha)\}_{n\ge1}$ the 'spectral characteristics' of (A_α).

Since $(\phi_n)_{n\ge1}$ is a complete orthogonal basis in $L^2(0,1)$, we obtain Parseval's equality :

$$(2.2)\quad (u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u,\phi_n)\overline{(v,\phi_n)}}{\rho_n}, \quad \text{for each } u, v \in L^2(0,1).$$

Here $(\cdot,\cdot)$ denotes the inner product in $L^2(0,1)$ and $\bar{a}$ is the

2

complex conjugate of $a \in \mathbb{C}$.

As is seen from Gel'fand and Levitan [2], we get

Theorem 0. Let $\alpha, \beta \in C^2[0, 1]$. Then $\lambda_n(\alpha)^2 = \lambda_n(\beta)^2$ $(n \geq 1)$ and $\rho_n(\alpha) = \rho_n(\beta)$ $(n \geq 1)$ imply $\beta(x) = \alpha(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$.

Thus we can state our problem as follows : Does the conclusion of Theorem 0 hold true for $\alpha, \beta \notin C^2[0, 1]$?

For the above question, we obtain the affirmative answer ($\longrightarrow$ Theorem 1).

§3. Main Result. We get

Theorem 1. Let us consider two Sturm-Liouville problems (A_α) and (A_β) :

$$(3.1)\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(\alpha(x)\dfrac{du}{dx}) = \lambda^2 u & 0 < x < 1, \quad x \neq d_1 , \\ \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0 & \\ u(d_1+) = u(d_1-) , & \\ \alpha(d_1+)\dfrac{du}{dx}(d_1+) = \alpha(d_1-)\dfrac{du}{dx}(d_1-) , & \end{cases}$$

where $\alpha \in C^2[0, d_1]$, $\alpha \in C^2[d_1, 1]$, and α is right continuous on $[0, 1]$.

$$(3.2)\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(\beta(x)\dfrac{dv}{dx}) = \lambda^2 v & 0 < x < 1, \quad x \neq e_1 , \\ \dfrac{dv}{dx}(0) = \dfrac{dv}{dx}(1) = 0 & \\ v(e_1+) = v(e_1-) , & \\ \beta(e_1+)\dfrac{dv}{dx}(e_1+) = \beta(e_1-)\dfrac{dv}{dx}(e_1-) , & \end{cases}$$

where $\beta \in C^2[0, e_1]$, $\beta \in C^2[e_1, 1]$, and β is right continuous on $[0, 1]$.

Then the conditions

$$(3.3)\quad \lambda_n(\alpha)^2 = \lambda_n(\beta)^2 \quad \text{and} \quad \rho_n(\alpha) = \rho_n(\beta) \quad (n \geq 1)$$

imply

$$(3.4)\quad \beta(x) = \alpha(x) \qquad (0 \leq x \leq 1) ,$$

In §4 and §5, we sketch its proof.

Remark. Also for the case where the number of discontinuities in the interval $(0, 1)$ is greater than one, our argument holds true.

§4. Proof of Theorem 1. First, we have

Lemma. In (3.1) and (3.2), let us assume that

$$\lambda_n(\alpha)^2 = \lambda_n(\beta)^2 \qquad (n \geq 1) . \tag{4.1}$$

Then we have

$$\ell_1 = \ell_2 \tag{4.2}$$

and either of the six cases (4.3) - (4.8) holds :

$$a_1 = 1 \quad \text{and} \quad h_2 = 0, \text{ or } \ell_1 , \tag{4.3}$$

$$a_2 = 1 \quad \text{and} \quad h_1 = 0, \text{ or } \ell_1 ; \tag{4.4}$$

$$a_2 = a_1 = 1 , \tag{4.5}$$

$$h_1 = 0, \text{ or } \ell_1 \quad \text{and} \quad h_2 = 0, \text{ or } \ell_1 , \tag{4.6}$$

$$a_2 = a_1 \quad \text{and} \quad h_2 = h_1 , \tag{4.7}$$

$$a_2 = a_1^{-1} \quad \text{and} \quad h_2 + h_1 = \ell_1 . \tag{4.8}$$

Here we set

$$\ell_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{(\alpha(\xi))^{1/2}} , \quad \ell_2 = \int_0^1 \frac{d\xi}{(\beta(\xi))^{1/2}} ,$$

$$a_1 = \left(\frac{(\alpha(d_1+)}{(\alpha(d_1-)}\right)^{1/4} , \quad a_2 = \left(\frac{(\beta(e_1+)}{(\beta(e_1-)}\right)^{1/4}$$

$$h_1 = \int_0^{d_1} \frac{d\xi}{(\alpha(\xi))^{1/2}} , \quad \text{and} \quad h_2 = \int_0^{e_1} \frac{d\xi}{(\beta(\xi))^{1/2}} .$$

In view of this lemma, we have only to show the following two propositions. In fact, when either of the cases (4.3) - (4.6) in this lemma holds, we can apply Proposition 1, while either of the cases (4.7) and (4.8) holds, we can apply Proposition 2.

<u>Proposition 1</u>. Let us assume that

$$(4.9)\quad \alpha,\ \beta \in C^0[0,\ 1] \quad ,$$

$$(4.10)\ \begin{cases} \alpha \in C^2[d_j,\ d_{j+1}] & (0 \le j \le m_1), \\ \beta \in C^2[e_j,\ e_{j+1}] & (0 \le j \le m_2) \end{cases}$$

where

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{m_1} < d_{m_1+1} = 1$$

and

$$0 = e_0 < e_1 < e_2 < \cdots < e_{m_2} < e_{m_2+1} = 1 \quad .$$

Then the conditions

$$(4.11)\ \lambda_n(\alpha)^2 = \lambda_n(\beta)^2 \quad \text{and} \quad \rho_n(\alpha) = \rho_n(\beta) \qquad (n \ge 1)$$

imply $\beta(x) = \alpha(x)$ $(0 \le x \le 1)$.

<u>Proposition 2</u>. Let us assume that

$$(4.12)\quad \begin{cases} \alpha \in C^2[d_j,\ d_{j+1}], & \\ \beta \in C^2[e_j,\ e_{j+1}] & (0 \le j \le m), \end{cases}$$

and α, β are right continuous on $[0,\ 1]$.

where

$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_m < d_{m+1} = 1$ and

$0 = e_0 < e_1 < e_2 < \cdots < e_m < e_{m+1} = 1$.

$$(4.13) \quad \int_0^{d_j} \frac{d\xi}{(\alpha(\xi))^{1/2}} = \int_0^{e_j} \frac{d\xi}{(\beta(\xi))^{1/2}} \qquad (1 \le j \le m+1) ,$$

$$(4.14) \quad \frac{\alpha(d_j+)}{\alpha(d_j-)} = \frac{\beta(e_j+)}{\beta(e_j-)} \qquad (1 \le j \le m) .$$

Then the conditions

(4.15) $\lambda_n(\alpha)^2 = \lambda_n(\beta)^2$ and $\rho_n(\alpha) = \rho_n(\beta)$ $(n \ge 1)$

imply $\beta(x) = \alpha(x)$ $(0 \le x \le 1)$.

Appendix I. Outline of the proof of Lemma. Let $\psi_1(\cdot, \mu)$ and $\psi_2(\cdot, \mu)$ be the solutions to (I.1) and (I.2), respectively;

$$(\mathrm{I}.1) \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(\alpha(x)\dfrac{d\psi_1}{dx}) = \mu\psi_1(x) & 0 < x < 1 , \; x \ne d_1 , \\ \psi_1(0) = 1 , \quad \dfrac{d\psi_1(0)}{dx} = 0 . & \\ \psi_1(d_1+) = \psi_1(d_1-) & \\ \alpha(d_1+)\dfrac{d\psi_1(d_1+)}{dx} = \alpha(d_1-)\dfrac{d\psi_1(d_1-)}{dx} & \end{cases}$$

and

$$(\mathrm{I}.2)\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(\beta(x)\dfrac{d\phi_2}{dx}) = \mu\phi_2 & 0 < x < 1\ ,\ x \neq e_1\ , \\ \phi_2(0) = 1\ , \quad \dfrac{d\phi_2(0)}{dx} = 0 & \\ \phi_2(e_1+) = \phi_2(e_1-) & \\ \beta(e_1+)\dfrac{d\phi_2(e_1+)}{dx} = \beta(e_1-)\dfrac{d\phi_2(e_1-)}{dx} & \end{cases}$$

Furthermore let us set

$$(\mathrm{I}.3) \quad \Psi_i(\mu) = \frac{d\phi_i(1,\ \mu)}{dx} \qquad (i = 1,\ 2)\ .$$

Then, by an argument similar to the one in Levitan and Gasymov [5], we see that the eigenvalues of (3.1) and (3.2) coincide with the zeros of the entire functions $\Psi_1(\mu)$ and $\Psi_2(\mu)$, respectively, and furthermore $\Psi_1(\mu)$ and $\Psi_2(\mu)$ are functions of order one half. Therefore, by Hadamard's theorem (Levin [4], for example), we have

$$(\mathrm{I}.4) \quad \Psi_2(\mu) = c\Psi_1(\mu)$$

for some non-zero constant c .

Moreover, applying an argument in Mizutani [6] with modifications, we can get the asymptotic behavior of Ψ_1 and Ψ_2 :

$$(\mathrm{I}.5) \quad \Psi_i(\mu) = -\sqrt{\mu}\,\Big(\frac{a_i + a_i^{-1}}{2}\cdot\sin\sqrt{\mu}\,\ell_i + \frac{a_i - a_i^{-1}}{2}\cdot\sin\sqrt{\mu}\,(2h_i-\ell_i)\Big) + O(1) \qquad (i = 1,2)$$

as $|\mu| \to \infty$.

Combining (I.5) with (I.4), we reach the conclusion of Lemma.

Appendix II. <u>Outline of the proof of Propositions 1 and 2</u>.

The proof is composed of the three steps ;

<u>First Step</u>. We transform (A_α) and (A_β) into another systems

(A_α^0) and (A_β^0) of first order, respectively. That is, by defining

$$z = z(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{(\alpha(\xi))^{1/2}}, \quad \phi_\pm(z) = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{2}\lambda i u(x) \\ \frac{1}{2}(\alpha(x))^{1/2}\frac{du(x)}{dx} \end{pmatrix},$$

$(i = \sqrt{-1})$,

$\tilde{\alpha}(z) = \alpha(x)$, $\ell = z(1)$, and $\tilde{d}_j = z(d_j)$ $(1 \le j \le m)$ in (A_α), we get

$$(A_\alpha^0)\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{d\phi_\pm}{dz} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dz}\tilde{\alpha}(z)/2\tilde{\alpha}(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\phi_\pm = \pm\lambda i \phi_\pm \\ \qquad\qquad 0 < z < \ell, \ z \ne \tilde{d}_j \quad (1 \le j \le m) \\ \phi_\pm^{(2)}(0) = \phi_\pm^{(2)}(\ell) = 0, \\ (\alpha(d_j+))^{1/2}\phi_\pm^{(2)}(\tilde{d}_j+) = (\alpha(d_j-))^{1/2}\phi_\pm^{(2)}(\tilde{d}_j-) \quad (1 \le j \le m) \\ \phi_\pm^{(1)} \in C^0[0, \ell], \\ \phi_\pm^{(2)} \in C^0[\tilde{d}_j, \tilde{d}_{j+1}] \qquad (1 \le j \le m). \end{cases}$$

<u>Second Step</u>. For the systems (A_α^0) and (A_β^0), we construct a 'deformation formula', which is a transformation from each eigenfunction of (A_α^0) into one of (A_β^0). In comparison with a deformation formula in Yamamoto [7], its construction is more difficult because of the discontinuity of the coefficients of (A_α^0) and (A_β^0).

<u>Third Step</u>. We apply an argument in [2] with modifications, so that we reach $\beta(x) = \alpha(x)$ $(0 \le x \le 1)$.

References.

[1] Alterman,Z., Jarosch,H. and C.L.Pekeris, Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, 252 (1959), 80 - 95.
[2] Gel′fand,I.M. and B.M.Levitan, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1 (1955), 253 - 304.
[3] Hald,O.H., Comm. Pure Appl. Math., 37(1984), 539 - 577.
[4] Levin,B.J., Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
[5] Levitan,B.M. and M.G.Gasymov, Russian Math. Surveys, 19 (1964), 1 - 63.
[6] Mizutani,A., J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 31 (1984), 319 - 350.
[7] Yamamoto,M., Kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ., 562 (1985), 132 - 166.

On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems

By Y. Shibata, Institute of Mathematics, University of Tsukuba, Ibaraki 305

Here, I report our joint work [1] with H. Iwashita, Tsukuba University. Let Ω be an unbounded domain in the d-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^d$ having a boundary Γ which is a C^∞ and compact hypersurface. Let $A(\partial)$ ($\partial = (\partial_1,\ldots,\partial_n)$, $\partial/\partial x_j = \partial_j$) be a dxd matrix of differential operators of the form:

$$A(\partial)\vec{u}(x) = -\Sigma_{m,n=1}^{d} \partial_m(A_{mn}\partial_n\vec{u}(x)) \quad (\vec{u} = \text{the transpose vector of } (u_1,\ldots,u_d))$$

We consider the following boundary value problem with spectral parameter k:

$$(1) \qquad (A(\partial) - k^2)\vec{u}(x) = \vec{f}(x) \text{ in } \Omega,\ B(x,\partial)\vec{u} = 0 \text{ on } \Gamma,$$

where $B(x,\partial)\vec{u} = \vec{u}$ or $= \Sigma_{m,n=1}^{d} \nu_m(x)A_{mn}\partial_n\vec{u}$ ($\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_d)$ denotes the unit outer normal of Γ). The former and the latter are called the displacement and traction boundary conditions, respectively.

Put $A_{mn} = (A_{mpnq};\ p \to 1,\ldots,d,\ q \to 1,\ldots,d)$ and $A(\xi) = \Sigma_{m,n=1}^{d} A_{mn}\xi_m\xi_n$ for $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_d) \in \mathbb{R}^d$. The A_{mpnq} are real numbers and satisfy the following assumptions.

(A.1)(Hyperelasticity) $A_{mpnq} = A_{pmnq} = A_{nqmp}$ $(m,n,p,q = 1,\ldots,d)$.

(A.2)(Stability) There exists a constant $c > 0$ such that the inequalities:

$$\Sigma_{m,n,p,q=1}^{d} A_{mpnq}\, s_{nq}\, \overline{s_{mp}} \geq c\, \Sigma_{m,p=1}^{d} |s_{mp}|^2$$

hold for any Hermitian matrix $s = (s_{mp};\ m \to 1,\ldots,d,\ p \to 1,\ldots,d)$.

(A.3) The characteristic roots of $A(\xi)$ have constant multiplicity for all $\xi \neq 0$.

By (A.1), $A(\xi)$ is a symmetric matrix. Let N denote the number of distinct roots $\lambda_j(\xi)$ of $A(\xi)$. Then, the $\lambda_j(\xi)$ are all real and by (A.3) N is independent of $\xi \neq 0$. It can be shown that the $\lambda_j(\xi)$ can be enumerated so as to form N distinct and analytic branches in the following way: $\lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \cdots < \lambda_N(\xi)$. With this enumeration the roots $\lambda_j(\xi)$ are in $C^\infty(\mathbb{R}^d - \{0\})$ and homogeneous of degree 2. By (A.2) $A(\partial)$ is in particular strongly elliptic. Thus, there exists a positive constant c' such that $\lambda_j(\xi) \geq c'|\xi|^2$, $j = 1,\ldots,N$. Put $\Sigma_j = \{ \xi \in \mathbb{R}^d;\ \lambda_j(\xi) = 1 \}$, $j = 1,\ldots,N$, which are called slowness surfaces. According to Wilcox [2], the Σ_j

are bounded and non-intersecting closed and C^∞ hypersurfaces, enclosing the origin. It is assumed that

(A.4) the Gaussian curvatures of the sheets Σ_j, $j = 1,\dots,N$, do not vanish. Finally, we assume that

(A.5) $d \geqq 3$.

Vainberg [3] proved that there exists a bounded linear operator $R(k)$ from $L^2_a(\Omega)$ to $H^2_e(\Omega)$ which depends meromorphically on the parameter $k \in D$ and $R(k)\vec{f}$ satisfies (1) for $k \notin \Lambda$. Here, Λ denotes the set of all poles of $R(k)$ in D, $D = C^1$ when d is odd and $= \{ k \in C^1 : -3\pi/2 < \arg k < \pi/2 \}$ when d is even, $L^2_a(\Omega) = \{ \vec{u} :$ the $u_j \in L^2(\Omega)$ and vanish for $|x| > a \}$ and $H^2_e(\Omega) = \{ \vec{u} : \exp(-|x|^2)\partial^\alpha_x u_j \in L^2(\Omega)$ for all $|\alpha| \leqq 2$ and $j = 1,\dots,d \}$. Furthermore, in [3] it is proved that Λ is discrete. In [1], we get

Theorem A. <u>Assume that (A.1)-(A.5) are valid. Then, the following three assertions are valid.</u>

(a) <u>The intersection of Λ and the set: $\{ k \in C^1 : \operatorname{Im} k \leq 0, k \neq 0 \}$ is empty.</u>

(b) <u>If d is odd, then $R(k)$ is a holomorphic in some neighborhood of $k = 0$.</u>

(c) <u>If d is even, then $R(k)$ can be represented in the form:</u>

$$R(k) = \Sigma^\infty_{m,n=0} \; R_{mn}(k^{d-2}\log k)^m k^n \quad \text{in some neighborhood of } k = 0$$

<u>where the R_{mn} are bounded linear operators from $L^2_a(\Omega)$ to $H^2_e(\Omega)$ and the double series converges uniformly in the operator norm.</u>

Example. Put $A(\partial)\vec{u} = \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u})$ where $\Delta\vec{u} = \Sigma^3_{j=1}\, \partial^2_j\vec{u}$, $\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) =$ the transpose vector of $(\partial_1(\Sigma^3_{j=1}\partial_j u_j), \partial_2(\Sigma^3_{j=1}\partial_j u_j), \partial_3(\Sigma^3_{j=1}\partial_j u_j))$ and it is assumed that $\mu > 0$ and $3\lambda + 2\mu > 0$. Then, the $A(\partial)$ satisfies all assumptions (A.1)-(A.4) if $d = 3$.

Combining Theorem A, the results due to Vainberg [4] and Yamamoto [5] we get that the local energy of solutions to the linearied equation of dynamic elasticity decays exponentially. Namely, we get

Theorem B. <u>Assume that $d = 3$ and that the complement of Ω is convex. Let $\vec{u}(t,x)$ be a solution to the following equations:</u>

$$\partial^2_t\vec{u}(t,x) - \{\mu\Delta\vec{u}(t,x) + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}(t,x))\} = 0 \text{ in } R^1 \times \Omega,$$

$$\vec{u} = 0 \text{ on } \mathbb{R}^1 \times \Gamma, \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x) \text{ and } \partial_t \vec{u}(0,x) = \vec{u}_1(x) \text{ in } \Omega.$$

Here, it is assumed that $\mu > 0$ and $3\lambda + 2\mu > 0$. Then, for any large numbers R and R' there exist constants c_1 and c_2 such that

$$\int_{\Omega_R} \{|\partial_t \vec{u}(t,x)|^2 + |\nabla \vec{u}(t,x)|^2\}\, dx$$
$$\leq c_1(\exp -c_2|t|)\{ \|\nabla \vec{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{u}_1\|_{L^2(\Omega)}\}$$

for any $\vec{u}_0 \in H^1(\Omega)$ and $\vec{u}_1 \in L^2(\Omega)$ which vanish for $|x| > R'$. Here, $\Omega_R = \{x \in \Omega: |x| < R\}$.

References.

[1] H. Iwashita and Y. Shibata, On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems, to appear in Glasnik Mat, 1986.

[2] C.H. Wilcox, Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics, Arch. Rational Mech. Anal. 22 (1960), 37-78.

[3] B.R. Vainberg, On the analytical properties of the resolvent for a certain class of operator-pencils, Mat. Sb. 77 (1968), 259-295; Math. USSR Sbornik 6 (1968), 241-273.

[4] B.R. Vainberg, On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of non-stationary problems, Usp. Mat. Nauk 30 (1975), 3-55; Russian Math. Survey 30 (1975), 1-58.

[5] K. Yamamoto, Theorems on singularities of solutions to systems of differential equations, to appear.

非線形 Klein-Gordon 方程式の強解の大域的存在について

1.

籾(モタイ) 隆博 (筑波大数学)

§1 Introduction and Result.

次の方程式の Cauchy 問題を考える。

$$
(NKG)\quad \begin{cases} \partial_t^2 W(x,t) - \Delta W(x,t) + W(x,t) + |W(x,t)|^{p-1} W(x,t) = 0, & p>1 \\ W(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t W(x,0) = \psi(x) \end{cases}
$$

$$(x,t) \in R^n \times R$$

以後 $f(W) = |W|^{p-1}W$ と書く。

強解とは次のことを言う。

$$W(x,t) \in C(\mathbb{R}, H^2) \cap C^1(\mathbb{R}, H^1) \cap C^2(\mathbb{R}, L_2)$$

H^1, H^2 はソボレフ空間

すなわち L_2 sense で (NKG) をみたす解のことである。

(NKG) の大域的解の存在については次のことが知られている。

Weak solution の存在

$$
(WNKG)\quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\langle W(t), v\rangle + \langle W(t), -\Delta v + v\rangle + \langle f(W(t)), v\rangle = 0 \\ \langle W(0), v\rangle = \langle \varphi, v\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle W(0), v\rangle = \langle \psi, v\rangle \end{cases}
$$

$$v \in C_0^\infty(R^n)$$

なる $W(t)$ の存在は $p>1$ $(n \geq 1)$ に対し

Segal [8], Lions [5], Strauss [9], Reed [7] 等で示されている。

weak solution の一意性と regularity

- $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ $(n \geq 1)$ に対する初期値 $(\varphi, \psi) \in H^1 \times L_2$ の $w(t) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^1)$ なる weak solution は一意である。
  さらにこの解は $w(t) \in C(\mathbb{R}, H^1) \cap C^1(\mathbb{R}, L_2)$ で
  エネルギー保存、すなわち
  $$E(t) \equiv \frac{1}{2}\|\partial_t w(t)\|_2 + \frac{1}{2}\|w(t)\|_{1,2} + \frac{1}{p+1}\int |w(t)|^{p+1} dx.$$
  とおくと、 $E(t) = E(0)$ for $t \in \mathbb{R}$
  が成り立つ。 Ginibre, Velo [3] による。

Strong solution の存在

- $1 < p \leq \frac{n}{n-2}$ に対し Strong sol が存在。 Heinz, von Wahl [4].

- Pecher [6], Brenner von Wahl [2] 等では $g \in C^r(\mathbb{R})$ $r \geq 3$ なる非線形項に対し研究している。 遠方で

$$|g^{(j)}(u)| \leq C(1+|u|)^{p-j} \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

を仮定し

$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ $(n \leq 9)$ で classical solution

$$1 < p < \begin{cases} \frac{n+2}{n-2} & n = 10 \\ 1 + \frac{4n}{(n-2)(n+1)} & n = 11, 12 \\ 1 + \frac{2(n+1)}{(n-2)(n-4)} & n \geq 13 \end{cases}$$

で Strong solution の存在を示している。

この仮定の下では、$f(u)=|u|^{p-1}u$ なる非線形項は含まれない。原点での regularity が悪いためである。しかし Heinz, von Wahl [4] により、p が 1 に近いところでは強解の存在は示されているので、原点の近傍で非線形項を滑らかにすることは本質的なことではないと思われる。Pecher [6], Brenner, von Wahl [2] では ある程度 regular な局所解の存在を縮小写像の原理を使って示し、先験評価を得ることにより大域的存在を導いている。非線形項 $f(u)$ に対する強解について同程度の結果を導くことが今回の目標なのだが、同じ方法を適用すると局所存在で $p\geq 2$ が必要となってしまい、$n\geq 6$ で $\frac{n+2}{n-2}\leq 2$ なので高次元を扱うことができない。しかし weak solution の大域的存在はわかっているので その近似解の regularity を調べることにより、weak solution を strong solution まで上げることができるのではないか、これが今回のアイディアである。このアイディアは既に Ginibre Velo [3] や非線形 Schrödinger 方程式に対し、Y. Tsutsumi [11] で使われている。次の結果が得られた。

Theorem

初期値 $(\varphi,\psi)\in H^{2+\sigma}\times H^{1+\sigma}$ に対し

(NKG) は global strong solution をもつ。但し $\sigma=p-1-\varepsilon$,

ε: 十分小

p は次をみたす。

$$1<p<\begin{cases} \dfrac{n+2}{n-2} & (1\leq n\leq 10) \\[2mm] \dfrac{99-\sqrt{3111}}{30} & (n=11) \\[2mm] \dfrac{(n^2-2n-2)(n-1)-\sqrt{(n^2-2n-2)^2(n-1)^2-4n(n-2)(n+3)(n^2-1)}}{2n(n+3)} & (n\geq 12)\end{cases}$$

Remark

(1) $n \leq 5$ については Heinz, von Wahl [4], Pecher [6] の評価の方法を使えば $\sigma = 0$ とできる。

(2) $n = 11$ のときは $1 + \frac{4n}{(n-2)(n+1)}$ の拡張となっている。
$\frac{99 - \sqrt{3111}}{30} \sim 1.4407$ である。

Notation

- $\| \cdot \|_p$: L_p ノルム

- Sobolev 空間 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = H_p^s = \{ u \in \mathcal{S}' ; \ \|u\|_{s,p} \equiv \| \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)) \|_p < \infty \}$$

$p=2$ のときは、2を略す。

Besov 空間

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \{ \tfrac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \}, \quad \varphi > 0 \text{ on } \tfrac{1}{2} < |\xi| < 2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1 \quad (\xi \neq 0)$$

をとってくる。

$$\varphi_k(\xi) \equiv \varphi(2^{-k}\xi), \quad \varphi_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\xi)$$ とおく。

Besov ノルムを $\|u\|_{B_{p,q}^s} = \|u\|_{s,p,q} \equiv \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \| \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k(\xi)\hat{u}(\xi)) \|_p \right)^q \right\}^{1/q}$
で与える。

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = B_{pq}^s = \{ u \in \mathcal{S}' ; \ \|u\|_{s,p,q} < \infty \}$$

Triebel [10] 参照。

§2 Proof of Theorem

以下 先の Remark より 次元は 6以上 とする。

<u>regularized equation</u>

$h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, even, $\int h(x)dx = 1$ を取ってきて

$h_j(x) \equiv j^n h(jx)$ とする。

$f_j(u(x)) \equiv h_j * f(h_j * u(x))$ とし、次の方程式を考える。

$$(2.1)\quad \begin{cases} \partial_t^2 W_j(t) - \Delta W_j(t) + W_j(t) + f_j(W_j(t)) = 0 \\ W_j(0) = h_j * \varphi(x), \quad \partial_t W_j(0) = h_j * \psi(x), \quad (\varphi, \psi) \in H^1 \cap L_{p+1} \times L_2 \end{cases}$$

<u>Lemma 2.1</u>

$p > 1$ とし、各 $j = 1, 2 \cdots$ に対し (2.1) は 大域解

$$W_j(t) \in C^2(\mathbb{R}, H^k) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{k+1}) \cap C(\mathbb{R}, H^{k+2}) \quad {}^\forall k \in \mathbb{Z}_+$$

を一意にもち、(2.1) および 積分方程式

$$(2.2)\quad W_j(t) = W_j^0(t) - \int_0^t H^{-1}\sin H(t-s) f_j(W_j(s))ds$$

$$W_j^0(t) = \cos Ht\, h_j * \varphi + H^{-1}\sin Ht\, h_j * \psi$$

を満たす。 ここで $H^{-1}\sin Ht\, u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin\langle\xi\rangle t}{\langle\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\right)$ in $\mathcal{S}'$

$\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in \mathcal{S}'$

とする。さらに エネルギー 保存則

$$(2.3)\quad E_j(t) = E_j(0) \quad t \in \mathbb{R}$$

をみたす。 但し

(2.4) $E_j(t) = \frac{1}{2}(\|\partial_t W_j(t)\|_2^2 + \|W_j(t)\|_{1,2}^2) + \int F(h_j * W_j(t))\,dx$

$$F(u) \equiv \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$$

とする。

proof

Reed [7] Chap 1 Th 1.2 を適用すればよい。

Lemma 2.2

Lemma 2.1 で求めた $\{W_j(t)\}$ に対し

$W(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, H^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}, L_{p+1}) \cap C_w(\mathbb{R}, H^1) \cap C_L(\mathbb{R}, L^2)$

が存在して、任意の有限閉区間 I に対し次のような部分列が存在する。

(2.5) $W_j(t) \longrightarrow W(t)$ in $\mathcal{D}'$ uniformly on I

(2.6) $f_j(W_j(t)) \longrightarrow f(W(t))$ weakly in $L_{\frac{p+1}{p}}$ a.e $t \in I$.

proof

Segal [8], Reed [7] 等参照.

上の 2つの Lemma より次の weak solution の存在を得る。

Theorem 2.3

$1 < p < \infty$, 初期値 $(\varphi, \psi) \in H^1 \cap L_{p+1} \times L_2$ に対し

$W(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, H^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}, L_{p+1}) \cap C_w(\mathbb{R}, H^1) \cap C_L(\mathbb{R}, L_2)$

$\partial_t W(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, L_2) \cap C_w(\mathbb{R}, L_2)$

が存在して (WNKG) をみたす。さらにエネルギー不等式

(2.7) $E(t) \leq E(0)$ $t \in \mathbb{R}$

をみたす。また $f(W(t)) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^{-1})$ ならば積分方程式

$$(2.8)\qquad W(t) = W^0(t) - \int_0^t H^{-1}\sin H(t-s) f(w(s))\,ds \quad \text{in } L^2$$

$$W^0(t) = \cos Ht\,\varphi + H^{-1}\sin Ht\,\psi$$

をみたす。

proof

Lemma 2.1, 2.2 を使えばよい。

この weak solution を regularized equation の解 $W_j(t)$ を使って regularity をあげる。それには次の (KG) の基本解の $B^s_{pq} - B^{s'}_{p'q}$ 評価が重要となる。

Lemma 2.4

$1 \le p \le 2 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad , \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{p'}$ とする。

$$(2.9)\qquad \| H^{-1}\sin Ht\, g \|_{s',p',q} \le K(t)\, \| g \|_{s,p,q}$$

$$K(t) = C\begin{cases} t^{1+s-s'-2n\delta} & 0 < t \le 1 \\ t^{-(n-1+\theta)\delta} & t \ge 1 \end{cases}$$

但し $\delta(n+1+\theta) \le 1+s-s'$, $\quad 0 \le \theta \le 1$

proof

Brenner [1] Appendix 2 参照。

上の Lemma 2.4 および以下の Lemma をつみ重ねて $W_j(t)$ の regularity を調べる。次の 2つの Lemma は本質的に Brenner, von Wahl [2] による。

Lemma 2.5

$W_j(t)$ を Lemma 2.1 で得られたものとする。初期値は $(\varphi, \psi) \in H^2 \times H^1$ とする。この時、任意の有限閉区間 I に対し $C(I, \varphi, \psi) > 0$ が存在し

8.

(2.10) $\qquad \| W_j(t) \|_{s', q', 2} \leq C(I, \varphi, \psi) \quad \text{for } t \in I$

が成り立つ。但し

(2.11) $\qquad \frac{n+1}{n-1} < p < \frac{n+2}{n-2}, \quad s' = p - \frac{n+1}{n-1}, \quad s = p-1-\varepsilon \quad \varepsilon$：十分小

$\delta_{q'}(n+1) = 1+s-s', \quad \delta_{q'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q'}$

とする。

Lemma 2.6

$n \geq 6$ とし、Lemma 2.5 の仮定の下で、$C(I, \varphi, \psi) > 0$ が存在して

(2.12) $\qquad \| W_j(t) \|_{1, r'} \leq C(I, \varphi, \psi) \quad \text{for } t \in I$

が成り立つ。但し $\frac{1}{r'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$

(2.13) $$\frac{n+1}{n-1} < p < \begin{cases} \dfrac{n+2}{n-2} & (6 \leq n \leq 10) \\ 1 + \dfrac{n^3-2n^2+n+4-\sqrt{(n^3-2n^2+n+4)^2-32(n^4-n^3-n^2+n}}{4(n^2-1)} & (n \geq 11) \end{cases}$$

Lemma 2.5 は Brenner, von Wahl [2] Cor III.4.1, Lemma 2.6 は Lemma II.5 による。

Lemma 2.6 より次を得る。

Lemma 2.7

初期値 $(\varphi, \psi) \in H^{2+\sigma} \times H^{1+\sigma}$ とし、I を任意の有限開区間とすると j に依存しない定数 $C(I, \varphi, \psi) > 0$ が存在して

(2.14) $\qquad \| W_j(t) \|_{s+\sigma, q'} \leq C(I, \varphi, \psi) \quad \text{for } t \in I$

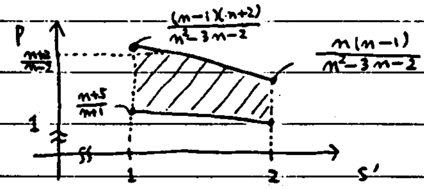
が成り立つ。

但し　$\sigma = p-1-\varepsilon$, ε: 十分小で　$\frac{1}{q'} = \frac{1}{2} - \frac{2-s'}{n+1}$ $(1 < s' < 2)$

とし、p は (2.13) および

(2.15) $$\frac{n+5}{n+1} - \frac{4(s'-1)}{n+1} < p < \frac{(n-1)(n+2)}{n^2-3n-2} - \frac{2(n-1)(s'-1)}{n^2-3n-2} \quad (1 < s' < 2)$$

をみたす。



<u>Lemma 2.8</u>

Lemma 2.7 の仮定の下でさらに

(2.16) $$1 < p < \frac{n^2-n+2(1-s') - \sqrt{(n^2-n+2(1-s'))^2 - 8(n+1)^2(n-2)}}{4(n+1)} \quad (1 < s' < 2)$$

とすると次が成立つ。$W(t)$ は Th 2.3 の weak solution である。

(2.17) $W(t) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^{s'+\sigma}_{q'})$

(2.18) $f(W(t)) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, L_2)$

(2.19) $W(t) \in C(\mathbb{R}, H^1)$

(2.20) $f(W(t)) \in C(\mathbb{R}, H^1)$

proof　(概略)

Lemma 2.9 より　$t \in I$ fixed するごとに $\{W_j(t)\}$ は $H^{s'+\sigma}_{q'}$ で j について一様有界。Lemma 2.2 (2.5) より $W_j(t)$ は $W(t)$ に弱収束する。よって $\|W(t)\|_{s'+\sigma, q'} \leq \varliminf_{j\to\infty} \|W_j(t)\|_{s'+\sigma, q'} \leq C$ ((I. 4. 4)).

これより (2.17) をえる。(2.17) より (2.18) が得られる。Th 2.3 より (2.8) を満たす。これより (2.19) が導け、(2.16) の条件の下で (2.20) を得る。

<u>Proof of Theorem</u>

(2.8), (2.20) より strong solution となる。(2.13) (2.15) (2.16) を比較することにより p のはん囲が求まる。

References

[1] Brenner, P., On scattering and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations. J. Diff. Equation. 56 (1985), 310-344.

[2] Brenner, P., von Whal, W., Global classical solutions of non-linear wave equations. Math. Z. 176 (1981) 87-121.

[3] Ginibre, J., Velo, G., The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation. Math. Z. 189 (1985) 487-50.

[4] Heinz, E., von Whal, W., Zu einem Satz von F. E. Browder über nichtlineare Wellengleichungen. Math. Z. 141 (1975) 33-45.

[5] Lions, J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod and Gauthier-Villars 1969

[6] Pecher, H., L^p-Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen I. Math. Z. 150 (1976) 159-183.

[7] Reed, M., Abstract nonlinear wave equation. Lecture notes in mathematics. 507 (1976) Springer-Verlag.

[8] Segal, I.E., The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction. Bull. Soc. Math. Fr. 91 (1963) 129-135.

[9] Strauss, W., On weak solutions of semilinear hyperbolic equations An. Acad. Bras. Cienc. 42 (1970) 645-651.

[10] Triebel, H., Interpolation theory, Function spaces, Differential Operators. North-Holland Publishing Company. 1978.

[11] Tsutsumi, Y., Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations. preprint.

The Hamilton-Jacobi-Bellman equation with a gradient constraint

Naoki Yamada

Department of Mathematics, Kobe University

1. Introduction

In this note we are concerned with the existence and uniqueness of solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation with a gradient constraint.

Let L^p, $p = 1,\dots,m$ be second order linear elliptic operators defined in a bounded domain Ω in R^N. For given non-negative functions f^p, $p = 1,\dots,m$ and g, we consider the Dirichlet problem

$$\begin{aligned} &\max\{L^1u - f^1, \dots, L^m u - f^m, |Du| - g\} = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ &u|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Here Du is the gradient of a function u.

Evans [2] was the first to treat the equation with a gradient constraint in the case $m = 1$ in (1.1). Relaxing the restrictions in [2], Ishii and Koike [9] have proved the existence of solutions in the space $W^{2,\infty}(\Omega)$ and the uniqueness in the class $W^{2,r}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ with $r > N$.

On the other hand, the HJB equation has been treated by many authors. Using a system of variational inequalities Evans and Friedman [6], Lions [10], and Evans et Lions [7] have proved the existence of solutions in the space $W^{2,\infty}(\Omega)$ for uniformly elliptic HJB equations. Moreover Evans [4], [5] has proved the existence of classical solutions for uniformly elliptic HJB equations (see also Gilbarg and Trudinger [8] Chapter 17). By defining an appropriate notion of weak or viscosity solution, Lions [11] has obtained uniqueness in the space $C(\overline{\Omega})$, with the aid of stochastic representation of solutions. In [11] it is not assumed that the operators are uniformly elliptic, but rather that they contain zero-th order terms with strictly positive coefficients. Note that our equation (1.1) is a non-uniformly elliptic HJB equation without zero-th order term.

2. Main result

Let Ω be a bounded domain in R^N with smooth boundary $\partial\Omega$. Consider second order elliptic operators

$$L^p v = -a^p_{ij} v_{x_i x_j} + b^p_i v_{x_i} + c^p v, \quad p = 1, \ldots, m, \tag{2.1}$$

where $m \geq 1$ is a given integer. We use the summation convention throughout this paper. We also follow normal usage to denote various function spaces such as $C^n(\Omega)$, $W^{n,r}(\Omega)$ or $W^{n,\infty}(\Omega)$ etc. $|Du|$ denotes the size of the gradient of u, i.e. $|Du|^2 = \Sigma_{i=1}^N u^2_{x_i}$.

We make the following assumptions on L^p:

$$a^p_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{2.2}$$

for some $\theta > 0$, all $\xi \in R^N$ and $p = 1, \ldots, m$,

$$a^p_{ij},\ b^p_i,\ c^p \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{2.3}$$

for $p = 1, \ldots, m$ and $1 \leq i, j \leq N$,

$$c^p \geq c_0 \tag{2.4}$$

for some constant $c_0 > 0$ in Ω, $p = 1, \ldots, m$,

$$a^p_{ij} = a^p_{ji} \tag{2.5}$$

for $p = 1, \ldots, m$, $1 \leqq i, j \leqq N$.

On given functions f^p, g on Ω, we impose the following assumptions:

$$f^p, g \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{2.6}$$

for $p = 1, \ldots, m$,

$$f^p, g \geqq 0 \tag{2.7}$$

in Ω for $p = 1, \ldots, m$.

Under these assumptions we may state our main theorem.

Theorem 2.1. (i) Under the assumptions (2.2) - (2.7), there exists a solution $u \in W^{2,\infty}_{\ell oc}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ of the equation

$$\begin{gathered} \max\{L^1u - f^1, \ldots, L^mu - f^m, |Du| - g\} = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

(ii) If, in addition, $g > 0$ in Ω, then the solution of (2.8) is unique in the class $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, where the solution is understood as a viscosity solution satisfying the boundary condition.

3. Approximate systems and a priori estimates

In this section we construct approximate systems for (2.8). Let $\psi \in C^\infty(R)$ be a function such that

$$\begin{gathered} \psi(t) = 0 \quad \text{if} \quad t \leqq 0, \quad \psi(t) = t-1 \quad \text{if} \quad t \geqq 2, \\ \psi'(t) \geqq 0, \quad \psi''(t) \geqq 0 \quad \text{on} \quad R. \end{gathered} \tag{3.1}$$

For $\varepsilon > 0$ we put $\beta_\varepsilon(t) = \gamma_\varepsilon(t) = \psi(t/\varepsilon)$. Note that

$$\beta_\varepsilon(t) \leqq t\beta'_\varepsilon(t) \quad \text{on} \quad R. \tag{3.2}$$

We consider the following approximate systems:

$$L^p u_\varepsilon^p + \beta_\varepsilon(|Du_\varepsilon^p|^2 - g^2) + \gamma_\varepsilon(u_\varepsilon^p - u_\varepsilon^{p+1}) = f^p \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{3.3}$$

$$u_\varepsilon^p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p = 1, \ldots, m, \quad \text{where} \quad u_\varepsilon^{m+1} = u_\varepsilon^1.$$

To prove the solvability of (3.3) we apply the Schauder fixed point theorem. For this purpose, we choose the Banach space $E = (C^1(\Omega))^m$ and convex set

$$K = \{v = (v^1, \ldots, v^m) \mid \|v^i\|_{C^1(\Omega)} \leq C,\ v^i \geq 0,\ \text{in} \quad \Omega,$$
$$v^i|_{\partial\Omega} = 0\},$$

where C is an appropriate constant to be selected.

For $v \in E$, define $u = Tv$ by a solution of the system of equations;

$$L^p u^p + \beta_\varepsilon(|Du^p|^2 - g^2) + \gamma_\varepsilon(u^p - v^{p+1}) = f^p \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

$$u^p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p = 1, \ldots, m, \quad \text{where} \quad v^{m+1} = v^1.$$

The applicability of the fixed point theorem follows from a priori estimates below and linear elliptic theory.

In the following we shall state some a priori estimates for solutions u_ε^p, $p = 1, \ldots, m$, of (3.3) which are independent of $\varepsilon > 0$. The proofs of these estimates are found in [12].

Lemma 3.1. We have

$$0 \leq u_\varepsilon^p \leq C \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{3.5}$$

$$0 \leq \frac{\partial u_\varepsilon^p}{\partial n} \leq C \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{3.6}$$

Here and hereafter capital C denotes various constants depending on known constants and $\partial/\partial n$ denotes the inward normal derivative on $\partial\Omega$.

Lemma 3.2. We have

$$\|u_\varepsilon^P\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C. \tag{3.7}$$

Lemma 3.3. We have

$$\|u_\varepsilon^P\|_{W^{2,\infty}_{\ell oc}(\Omega)} \leq C. \tag{3.8}$$

4. Proof of the main result

In this section we shall prove the existence of solutions in $W^{2,\infty}_{\ell oc}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ and the uniqueness of the viscosity solution in the class $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, which completes the proof of Theorem 2.1.

Lemma 4.1. There exists a solution u of (2.8) belonging to $W^{2,\infty}_{\ell oc}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$.

Proof. From a priori estimates in the preceding section, we can choose a sequence ε_j (which we simply denote ε) such that

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon^P \longrightarrow u^P \ \text{ in } C(\overline{\Omega}),\quad Du_\varepsilon^P \longrightarrow Du^P \text{ compact uniformly in } \Omega, \\ &D^2u_\varepsilon^P \longrightarrow D^2u^P \ \text{ weakly in } L^r_{\ell oc}(\Omega) \text{ with } r < \infty. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Since $\gamma_\varepsilon(u_\varepsilon^P - u_\varepsilon^{P+1})$ are locally bounded, it follows that u^P defined in (4.1) satisfy $u^1 = \ldots = u^m \equiv u \in W^{2,\infty}_{\ell oc}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. We shall prove that u solves (2.8).

First we note that $L^Pu_\varepsilon^P - f^P \leq 0$ a.e. in Ω. Hence we have $L^Pu - f^P \leq 0$ a.e. in Ω, $p = 1, \ldots ,m$. Since

$\beta_\varepsilon(|Du_\varepsilon^p|^2 - g^2)$ are also locally bounded, we get

$$\max(L^1u - f^1, \dots, L^m u - f^m, |Du| - g) \leq 0 \quad \text{a.e. in} \quad \Omega. \quad (4.2)$$

To prove the inequality in the opposit direction, it is sufficient to show that u is a viscosity supersolution of (2.8). Let $\varphi \in C^2(\Omega)$ and assume that $u - \varphi$ takes its local strict minimum at $x_0 \in \Omega$. We shall show

$$\max_{p=1,\dots,m} \{-a_{ij}^p \varphi_{ij} + b_i^p \varphi_i + c^p u - f^p, |D\varphi| - g\} \geq 0 \quad \text{at} \quad x_0. \quad (4.3)$$

Since $|D\varphi(x_0)| \geq g(x_0)$ implies (4.3), we may assume $|D\varphi(x_0)| < g(x_0)$. Since u_ε^p converges to u uniformly, there exists a sequence $\{x_\varepsilon^p\} \subset \Omega$ such that

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon^p = x_0$ for any $p = 1, \dots, m$,

(ii) $u_\varepsilon^p - \varphi$ attains its local minimum at x_ε^p,

(iii) $|D\varphi(x_\varepsilon^p)| \leq g(x_\varepsilon^p)$.

For each ε, let $p(\varepsilon)$ be such that

$$(u_\varepsilon^{p(\varepsilon)} - \varphi)(x_\varepsilon^{p(\varepsilon)}) = \min_{p=1,\dots,m} (u_\varepsilon^p - \varphi)(x_\varepsilon^p). \quad (4.4)$$

Since p varies in a finite set there exists $\bar{p}$ which appears infinitely many times in (4.4). Consider such $\bar{p}$ and ε such that $p(\varepsilon) = \bar{p}$. Then we have $\beta_\varepsilon(|Du_\varepsilon^{\bar{p}}|^2 - g^2) = 0$ and $\gamma_\varepsilon(u_\varepsilon^{\bar{p}} - u_\varepsilon^{\bar{p}+1}) = 0$ at $x_\varepsilon^{\bar{p}}$. Since $u_\varepsilon^{\bar{p}}$ is also a viscosity supersolution of (3.3), we get

$$-a_{ij}^{\bar{p}} \varphi_{ij} + b_i^{\bar{p}} \varphi_i + c^{\bar{p}} u_\varepsilon^{\bar{p}} \geq f^{\bar{p}} \quad \text{at} \quad x_\varepsilon^{\bar{p}}.$$

Passing to the limit as $\varepsilon \to 0$, along which we take $\bar{p} = p(\varepsilon)$, we have (4.3).

Lemma 4.2. Assume $g > 0$ in Ω. Then the viscosity solution of (2.8) is unique in the class $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Proof. By Lemma 4.1 we have a solution u belonging to $W^{2,\infty}_{\ell oc}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ and approximate solutions u^p_ε which converge to u along a subsequence. In the following we fix such a u and convergent approximate solutions $u^p_{\varepsilon_j}$ (simply we denote u^p_ε).

Let v be any viscosity solution of (2.8) which belongs to $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

First we claim that $v \leqq u$ in Ω. If not, there exist $x_0 \in \Omega$ and p_0 such that

$$(v - u^{p_0}_\varepsilon)(x_0) = \max_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ p=1,\dots,m}} (v - u^p_\varepsilon)(x) > 0. \tag{4.5}$$

Since v is a viscosity subsolution, we have

$$\begin{aligned} &-a^{p_0}_{ij} u^{p_0}_{\varepsilon,ij} + b^{p_0}_i u^{p_0}_{\varepsilon,i} + c^{p_0} v \leqq f^{p_0} \quad \text{at } x_0, \\ &|Du^{p_0}_\varepsilon(x_0)| \leqq g(x_0). \end{aligned} \tag{4.6}$$

The second inequality in (4.6) implies $\beta_\varepsilon(|Du^{p_0}_\varepsilon|^2 - g^2) = 0$ at x_0 and (4.5) implies $\gamma_\varepsilon(u^{p_0}_\varepsilon - u^{p_0+1}_\varepsilon) = 0$ at x_0. Hence we have

$$-a^{p_0}_{ij} u^{p_0}_{\varepsilon,ij} + b^{p_0}_i u^{p_0}_{\varepsilon,i} + c^{p_0} u^{p_0}_\varepsilon = f^{p_0} \quad \text{at } x_0.$$

Subtracting this from the first inequality in (4.6), we get

$$c^{p_0}(x_0)(v - u^{p_0}_\varepsilon)(x_0) \leqq 0,$$

which is a contradiction.

Next we show that $\rho u \leqq v$ in Ω for $0 < \rho < 1$. If not, there exist $\rho \in (0,1)$ and $x_0 \in \Omega$ such that

$$(v - \rho u)(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} (v - \rho u) < 0. \tag{4.7}$$

Since $v \in C^1(\Omega)$ we have $|Dv(x_0)| = \rho |Du(x_0)| < g(x_0)$.

Then there exists a ball U with center x_0 satisfying

$$|Dv| < g \quad \text{in} \quad U. \tag{4.8}$$

This implies that v is a viscosity supersolution of

$$\max_{p=1,\dots,m} \{L^p v - f^p\} = 0 \quad \text{in} \quad U. \tag{4.9}$$

Consequently v is a viscosity solution of (4.9) in U. Considering (4.9) with boundary condition $\phi = v|_{\partial U}$, it is known (Evans [4], [5], Gilbarg and Trudinger [8] Chapter 17) that (4.9) has a smooth solution. On the other hand it is also known (Lions [11]) that the viscosity solution of (4.9) is unique. Therefore we can conclude that v is the smooth solution of (4.9) in U.

By a selection lemma, there exists a measurable function $p:U \longrightarrow \{1, \dots ,m\}$ such that

$$L^{p(x)}v - f^{p(x)} = 0 \quad \text{a.e. in } U.$$

Since u is a subsolution of (4.9) we have

$$L^{p(x)}(v - \rho u)(x) - (1 - \rho)f^{p(x)} \geq 0 \quad \text{a.e. in } U. \tag{4.10}$$

On the other hand by Bony's maximum principle we get

$$\lim_{x \to x_0} \text{ess inf } (-a_{ij}^{p(x)}(v-\rho u)_{ij} + b_i^{p(x)}(v-\rho u)_i) \leq 0. \tag{4.11}$$

Combining (4.10) and (4.11) we have

$$c^{p(x_0)}(x_0)(v - \rho u)(x_0) - (1 - \rho)f^{p(x_0)}(x_0) \geq 0$$

which contradicts (4.7).

Since ρ is arbitraly in $(0,1)$ we have $v \equiv u$ in Ω. This completes the proof.

By Lemmas 4.1 and 4.2 we have completed the proof of Theorem 2.1.

References

[1] A. Bensoussan et J. L. Lions; "Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique", Dunod, Paris, 1978.

[2] L. C. Evans; A second order elliptic equation with gradient constraint, Comm. Partial Differential Equations, 4 (1979), 555 - 572.

[3] ___________; Correction to "A second order elliptic equation with gradient constraint", ibid., 4 (1979), 1199.

[4] ___________; Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), 333 - 363.

[5] ___________; Classical solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for uniformly elliptic operators, Trans. Amer. Math. Soc., 275 (1983), 245 - 255.

[6] L. C. Evans and A. Friedman; Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation, Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1979), 365 - 389.

[7] L. C. Evans et P. L. Lions; Résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman pour des opérateurs uniformément elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980), 1049 - 1052.

[8] D. Gilbarg and N. S. Trudinger; "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

[9] H. Ishii and S. Koike; Boundary regularity and uniqueness for an elliptic equation with gradient constraint, Comm. Partial Differential Equations, 8 (1983), 317 - 346.

[10] P. L. Lions; Résolution analytiques des problèmes de Bellman-Dirichlet, Acta Math., 146 (1981), 151 - 166.

[11] ____________; Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part II: Viscosity solutions and uniqueness, Comm. Partial Differential Equations, 8 (1983), 1229 - 1276.

[12] N. Yamada; The Hamilton-Jacobi-Bellman equation with a gradient constraint, MRC Technical Summary Report #2927, March 1986, Mathematics Research Center, University of Wisconsin-Madison.

No. 1

Date

Structural Theory for Functional Differential Equations in Banach Spaces

中桐信一　神戸大・工

1. Introduction

最近時間遅れを含む偏微分方程式の研究が盛んになって来た。いくつかの例を挙げてみよう。例えば、生態系における Volterra-Hutchinson model に拡散の影響を考慮した $u_t = d\Delta u + a(1-u(t-h,x)/K)u$, h, a, K, d は定数(正の)なる population growth の方程式，又は prey-predator の時間遅れ拡散モデル

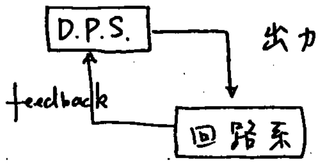
$$\begin{cases} u^1_t = d_1\Delta u^1 + u^1(a_1 - b_1 u^1 - c_1 u^2(t-h_1,x)) \\ u^2_t = d_2\Delta u^2 + u^2(-a_2 - b_2 u^2 + c_2 u^1(t-h_2,x)) \end{cases} , a_i, b_i, c_i, h_i : \text{正定数}$$

などがある。これらは非線形だが、定常解(あるとして)のまわりで線形化(の類似)を行なうと遅れの項をもつ線形の偏微分方程式となり、そのスペクトル解析が、解の漸近挙動などを調べるのに大いに役立つ。

もう一つの工学からの例を考える。熱伝導を表わす分布系(D.P.S)が与えられており、この系の制御を考えよう。

$\boxed{\text{D.P.S}: u_t = \Delta u + f}$　f: control として、f をうまく動かしてやって熱分布 u を望ましい状態(例えば安定)にせよ！

この問題を解くため次の様な feed back システムを考える。



出力 $\tilde{u} = Eu$; E : 測定を表わす作用素

回路系 : 電気的素子からなり 積分器 ($\int_{-h}^{0} a(s)\tilde{u}(t+s)ds$) と遅れ要素 ($\tilde{u}(t-h)$) から構成される.

この様な回路を用いるフィードバックにより上の問題は, 例えば, 方程式

$$u_t = \Delta u + Eu(t-h,x) + \int_{-h}^{0} a(s)\, Eu(t+s,x)\,ds$$

の解の安定性の問題に帰着される. 応用上は E が有界作用素になる場合が多い.

以上の事より, 我々の考える方程式は, 次の様なものとする.

$h>0$ として, $I_h = [-h, 0]$ とおく. reflexive な Banach space X 上の関数微分方程式

(F.D.E.)

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + \displaystyle\int_{-h}^{0} d\eta(s)\, x(t+s), & t>0 \\ x(0) = g^0, \quad x(s) = g^1(s) & \text{a.e. } s \in [-h, 0) \end{cases}$$

を考える. ここで $g = (g^0, g^1) \in X \times L_p(I_h; X) \triangleq M_p$, $1<p<\infty$, A_0 : C_0-半群 $T(t)$ の i.g.,

Stieltjes measure η は.

$$-\eta(s) = \sum_{r=1}^{m} \chi_{(-\infty, -h_r]}(s)\, A_r + \int_{s}^{0} A_I(\xi)\,d\xi \quad , \quad s \in I_h \ ;$$

$0 < h_1 < \cdots < h_m = h$, $A_r \in \mathcal{L}(X)$, $A_I \in L_1(I_h; \mathcal{L}(X))$, χ_E は E の特性関数,

で与えられているとする. 言い換えると (E) の delay term は. 標準的な形

$$\sum_{r=1}^{m} A_r x(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s)\, x(t+s)\,ds \qquad \text{で与えられている.}$$

$X = R^n$ の場合, Bernier, Manitius, Delfour (以下 [B-M-D] と記す) (1978 ~ 82) が

が一連の論文で積空間 $R^n \times L_p$ 上で状態空間理論 (i.e., 半群による取り扱い) を展開し、基礎理論や F.D.E. の制御理論、システム論に応用し数多くの重要な結果を得た。彼らの結果は、言わば、我々の望む結論の model case であり、それらの結果を無限次元に拡張したいというのが研究の動機になっている。

結論から言うと、去年退化理論を話させて頂いたときに導入した (E) の基本解を用いると、殆んど完全に成功する。無限次元ゆえの複雑さはあるが、[B-M-D] の状態空間理論がそのまま (E) に対してもなりたつ。ここでは、この事を解説したい。また新しい関係式や函数解析をフルに使うことにより理論の簡素化をはかることもできた。

以下で理論の骨子とその応用を簡単に述べたい。(完全な証明等は文献 [2] 参照。)

2. Structural Theory

(E) の基本解 $W(t)$ を $T(t)$ の delay perturbation, i.e.,

$$W(t) = \begin{cases} T(t) + \int_0^t T(t-s) \int_{-h}^0 d\eta(\xi) W(s+\xi)\, ds, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

の解として定義する。$W(t)$ は $t>0$ で強連続になる。$A_I \in L_{p'}(J_h; \mathcal{L}(X))$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ とすると作用素

$$U_t(s) = \sum_{r=1}^{m} W(t-s-h_r) A_r \chi_{[-h_r,0]}(s) + \int_{-h}^{s} W(t-s+\xi) A_I(\xi)\, d\xi \quad \text{a.e. } s \in J_h$$

は、Hausdorff-Young により $\in L_{p'}$ となり、従がって

$$x(t; g) = W(t) g^0 + \int_{-h}^{0} U_t(s) g^1(s)\, ds, \quad t \geq 0$$

は well-defined かつ $\in C(R^+;X)$. この $x(t;g)$ を(E)の mild sol. という. $x(t;g)$ は $T(t)$ による(E)の積分 form の unique sol. になっている. 次に retarded resolvent を導入する. これは $\Delta(\lambda)=\lambda I-A_0-\int_{-h}^{0}e^{\lambda s}d\eta(s)$ の有界な逆と定義する. $R(\lambda;A_0,\eta)=\Delta(\lambda)^{-1}$ とかく. 有界な逆を持たない時, 3種類の retarded spectrum が通常の場合と同様に定義される. $R(\lambda;A_0,\eta)$ は resolvent と類似の性質を持つ. 例えば $W(t)$ の Laplace 変換は $R(\lambda;A_0,\eta)$ になる.

(E)の mild sol. $x(t;g)$ を用いて, M_p 上の半群 $S(t)$ を translation

$$S(t)g=(x(t;g),x_t(\cdot;g)),\qquad g\in M_p$$

ここで $x_t(s;g)=x(t+s;g)$, $s\in I_h$ により定義する. このとき次の補題が成立する.

<u>Prop. 1</u> (i) $S(t)$ は M_p 上の C_0-半群.

(ii) A: $S(t)$ の i.g. とすると,

$$D(A)=\{g=(g^0,g^1)\in M_p: g^1\in W_p^{(1)},\ g^1(0)=g^0\in D(A_0)\}$$

$$A(g^0,g^1)=\left(A_0g^0+\int_{-h}^{0}d\eta(s)g^1(s),\ \frac{dg^1}{ds}\right),\qquad (g^0,g^1)\in D(A).$$

さて遅れを表現する構造作用素 $F:M_p\to M_p$ を

$$Fg=(g^0,F_1g^1),\quad F_1g^1(s)=\int_{-h}^{s}d\eta(\xi)g^1(\xi-s)\quad \text{a.e. } s\in I_h$$

により定義する. Fubini の定理を用いると, mild sol. $x(t+s;g)$ は,

$$x(t+s;g)=W(t+s)g^0+\int_{-h}^{0}W(t+s+\xi)F_1g^1(\xi)d\xi,\qquad t+s\geq 0$$

と表現される. よって2番目の構造作用素 $G_t:M_p\to M_p$, $t\geq 0$ を次の様に定義すれば, $t\geq h$ で $S(t)$ は, $S(t)=G_tF$ と分解される:

$$\begin{cases} [G_t g]^1(s) = W(t+s)g^0 + \int_{-h}^{0} W(t+s-\xi)g^1(\xi)d\xi, & s \in I_h \\ [G_t g]^0 = [G_t g]^1(0). \end{cases}$$

特に $G = G_h$ とおくと，$S(h) = GF$ となる。

A の spectrum の構造を決定してやろう。そのためにレゾルベント方程式 $(\lambda I - A)g = \phi$ を解こう。$g \in W_p^{(1)}$ なので連続であることに注意して，Prop. 1 (ii) の表示より

$$\begin{cases} \lambda g(0) - A_0 g(0) - \int_{-h}^{0} d\eta(s) g(s) = \phi^0, & g(0) \in D(A_0) \\ \lambda g(s) - \frac{d}{ds} g(s) = \phi^1(s), & s \in I_h. \end{cases} \tag{1}$$

2番目の式を初期値 $g(0)$ のもとで解くと，

$$g(s) = e^{\lambda s} g(0) + \int_s^0 e^{\lambda(s-\xi)} \phi^1(\xi) d\xi, \tag{2}$$

ここで $E_\lambda : X \to M_p$, $T_\lambda : M_p \to M_p$ を

$$\begin{cases} [E_\lambda z]^0 = z, & z \in X \\ [E_\lambda z]^1(s) = e^{\lambda s} z, & s \in I_h \end{cases} ; \quad \begin{cases} [T_\lambda \phi]^0 = 0, & \phi \in M_p \\ [T_\lambda \phi]^1(s) = \int_s^0 e^{\lambda(s-\xi)} \phi^1(\xi) d\xi, & s \in I_h \end{cases}$$

により定義すると，$g = (g(0), g) = E_\lambda g(0) + T_\lambda \phi$ とかける。

(2) を (1) の第1式に代入して，Fubini の定理を使うと，

$$\Delta(\lambda) g(0) = \int_{-h}^{0} d\eta(s) \int_s^0 e^{\lambda(s-\xi)} \phi^1(\xi) d\xi + \phi^0 = \phi^0 + \int_{-h}^{0} e^{\lambda s} \int_{-h}^{s} d\eta(\xi) \phi^1(\xi - s) ds = H_\lambda F \phi,$$

ここで $H_\lambda : M_p \to X$ は finite Laplace transform により定義される

$$H_\lambda \phi = \phi^0 + \int_{-h}^{0} e^{\lambda s} \phi^1(s) ds, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in M_p$$ のこととする。

$\phi = 0$ なら $H_\lambda F \phi = 0$ なので，上の表示式より

$\sigma_p(A)=\sigma_p(A_0,\eta)$ (点スペクトル), $\sigma_c(A)=\sigma_c(A_0,\eta)$ (連続), $\sigma_R(A)=\sigma_R(A_0,\eta)$ (剰余)

なることがわかる。同時に、$\lambda\in\rho(A)=\rho(A_0,\eta)$ に対して、

$$R(\lambda;A)=E_\lambda R(\lambda;A_0,\eta)H_\lambda F+T_\lambda \quad , \quad \lambda\in\rho(A)$$

なる表現を得る。今や $\lambda\in\sigma_p(A)$ として A の一般化固有空間 $\mathcal{M}_\lambda=\bigcup_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{Ker}(\lambda I-A)^\ell$ の構造を決定できる。

$$\mathcal{A}_\ell(\lambda)=\mathcal{A}_\ell=\begin{pmatrix}\Delta(\lambda) & \Delta'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(\ell-1)!}\Delta^{(\ell-1)}(\lambda)\\ 0 & \Delta(\lambda) & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \Delta(\lambda)\end{pmatrix}$$ とおく。

<u>Theorem 1.</u> $\mathrm{Ker}(\lambda I-A)^\ell=\left\{\phi\in M_p : \phi=\sum_{j=0}^{\ell-1}\frac{1}{j!}(E_\lambda y_{j+1})^{(j)} \text{ where } \mathcal{A}_\ell\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_\ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

上の空間は $\Delta(\lambda)$ を用いて具体的に計算できる空間になっている。

さて、M_p のスペクトル分解を得るために λ: isolated singular point of $(\lambda I-A)^{-1}$ として Projection P_λ を

$$P_\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda}R(\mu;A)\,d\mu$$ により定義する。

Γ_λ

この時 Yosida [5, p.228-231] により、次の定理がなりたつ。

<u>Theorem 2.</u> λ : $R(\lambda;A_0,\eta)$ の位数 k_λ の pole

$\Rightarrow$ $\lambda\in\sigma_p(A)$; $M_p=\mathrm{Ker}(\lambda I-A)^{k_\lambda}\oplus \mathrm{Im}(\lambda I-A)^{k_\lambda}$, $\mathcal{M}_\lambda=P_\lambda M_p=\mathrm{Ker}(\lambda I-A)^{k_\lambda}$.

以上の様に、A のスペクトルの構造は、ほぼ完全にわかっているとして良い。

次に $A_0\to A_0^*$, $\eta\to\eta^*$ とした adjoint space M_p^* 上の transposed eq. (E^T) を

考えよう。即ち、

$$(E^T)\quad \begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = A_0^* z(t) + \displaystyle\int_{-h}^{0} d\eta^*(s) z(t+s), & t>0 \\ z(0) = f^0, \quad z(s) = f^1(s) \quad \text{a.e. } s\in[-h,0) \end{cases}$$

であり、$f=(f^0,f^1)\in M_p^* = X^*\times L_{p'}(I_h; X^*)$、また M_p と M_p^* の duality は、

$$\langle f, g\rangle_{M_p} = \langle f^0, g^0\rangle + \int_{-h}^{0} \langle f^1(s), g^1(s)\rangle ds \quad ; \quad \langle\, ,\,\rangle \text{ は } X \text{ と } X^* \text{ との duality pairing},$$

で与えられる。

(E^T) より生成される M_p^* 上の半群 $S_T(t)$ の generator A_T は、A 同様良くわかっている。(E^T) の基本解は、$W^*(t)$ で与えられることに注意して、duality $\langle\, ,\,\rangle_{M_p}$ を用いた直接計算により、共役作用素 $F^*, G_t^*: M_p^* \to M_p^*$ は、F, G_t の定義において、$\eta\to\eta^*$, $W(t)\to W^*(t)$ としたものになる。従がって $S_T(t) = G_t^* F^*$, $t\geq h$; $S_T(h) = G^* F^*$ がわかる。

G, G^* は、基本解より導かれた"たちの良い"作用素で、次の性質をもつ。

<u>Prop.2.</u> $\mathrm{Ker}\, G = \{0\}$, $\mathrm{Ker}\, G^* = \{0\}$; $\mathrm{cl}(\mathrm{Im}\, G) = M_p$, $\mathrm{cl}(\mathrm{Im}\, G^*) = M_p^*$.

3. Adjoint Semigroups and Applications

(E) に対する adjoint theory や制御理論への応用を考える際に adjoint semigroup $S^*(t)$ は重要になるが、$S^*(t)$ を実現する (E) のタイプの方程式の存在は知られていない。これは、最適性 etc. を記述するための adjoint equation を直接には作れないことを意味し、大いに不便である。このことを次の簡単な例で考えてみよう。

U：制御変数 u の作る Banach space とし、$B_0: U\to X$ は有界とする。

(E)の第1式に control term $B_0u(t)$ をつけ加えた方程式－制御系は、通常の方法により遅れのない M_p 上の発展方程式

$$(ME)\quad \frac{dX(t)}{dt} = AX(t)+Bu(t),\quad B: U\to M_p,\quad Bu=(B_0u,0),\ u\in U$$

にうめこむことができるが、(ME)の可制御性、つまり(E)$+B_0u(t)$ なる制御系の M_p-space での可制御性は、次の条件として定義される：

$$cl\left\{\int_0^t S(t-s)Bu(s)ds : t>0,\ u\in U\right\} = M_p .$$

duality theorem を使うとこの条件は、次の諸条件と同値：

$$(cl\{-\})^{\perp}=\{0\} \iff B^*S^*(t)f=0,\ t\in[0,\infty) \Rightarrow f=0 \text{ in } M_p^*$$

$$\iff B^*R(\lambda;A^*)f=0,\ \lambda\in\rho(A^*) \Rightarrow f=0 \text{ in } M_p^*$$

(by Laplace 変換)

$\sigma(A^*)$ が pole のみならば projection を考えて

$$\Rightarrow \left(B^*\phi=0\ \ \forall\phi\in\mathcal{M}_\lambda(A^*) \Rightarrow \phi=0 \text{ in } \mathcal{M}_\lambda(A^*)\right)\ \ \forall_{\lambda\in\sigma(A^*)} . \quad (3)$$

もし A^* の generalized eigenfunctions が完備 i.e., $cl\left(\bigcup_{\lambda\in\sigma(A^*)}\mathcal{M}_\lambda(A^*)\right) = M_p^*$ ならば(3)において ⇐ も正しい。(3)は、A^* のスペクトルの構造が明らかになれば、可制御性のための条件を B^* とこれらにより表現できることを言っている。所で、意外な感じがするが、共役作用素 A^* の characterization が求められたのは、そんなに古い事でなく（$X=R^n$ として、Vinter が1978年に初めて与えた）、その表現は、今の場合

$$D(A^*)=\left\{f=(f^0,f^1)\in M_p^*: w(f)\in W_{p'}^{(1)},\ w(f)(-h)=0,\ f^0\in D(A_0^*)\right\},\quad w(f)(s)=\int_{-h}^{s} d\eta^*(\xi)f^0 - f^1(s),$$

$$A^*f=\left(A_0^*f^0+f^1(0),\ \frac{d}{ds}w(f)\right),\quad f\in D(A^*) \qquad (4)$$

となり，Aと比較すると，それ程簡単ではない。従がって A^* の性質を，よく構造のわかった A_T の性質を用いて表現できれば，それは大変望ましい事である。実は構造作用素 F^*, G^* は，A_T, A^* の左右の commutator を与える。$\sigma_d(A)=\{\lambda\in\sigma_p(A): \dim \mathcal{M}_\lambda<+\infty\}$ とおく。

<u>Theorem 3.</u> (i) $F^*A_T=A^*F^*$, $A_TG^*=G^*A^*$; $F^*S_T(t)=S^*(t)F^*$, $S_T(t)G^*=G^*S^*(t)$.

(ii) $\forall\lambda\in\sigma_p(A^*)=\sigma_p(A_T)$; $Ker(\lambda I-A^*)^\ell=F^*Ker(\lambda I-A_T)^\ell$

$\forall\lambda\in\sigma_d(A^*)=\sigma_d(A_T)$; $G^*Ker(\lambda I-A^*)^\ell=Ker(\lambda I-A_T)^\ell$　$\ell=1,2,\cdots$;

特に　$\mathcal{M}_\lambda(A^*)=F^*\mathcal{M}_\lambda(A_T)$, $\lambda\in\sigma_p(A^*)$.

[B-M-D] は，(i)を証明するために大層長い議論を行なっているが，その様な議論は，不用で，新しい関係式　$S(t)G=G_{t+h}$ を示せば証明は，大変容易になる。そしてこの関係は，$S(t)S(h)=S(t)GF=S(t+h)=G_{t+h}F$ において F を cansalate した式になっている。（厳密な証明は[2]をみよ。）よって同様に　$S_T(t)G^*=G^*_{t+h}$ となり $S_T(t)G^*=G^*S^*(t)$.

F^* の方は：　$G^*S^*(t)F^*=S_T(t)G^*F^*=S_T(t)S_T(h)=S_T(h)S_T(t)=G^*F^*S_T(t)$

Prop. 2 より $Ker\,G^*=\{0\}$ なので，$S^*(t)F^*=F^*S_T(t)$ となる。

(i)の前半は，これらより明らか。

(ii)の証明の前にこの結果の意味づけをしてみよう。先の例で述べた様に，可制御性という概念を調べる場合，A^* の一般化固有空間 (g.e.) $\mathcal{M}_\lambda(A^*)$ が必要になるが，この空間は，A_T の g.e. $\mathcal{M}_\lambda(A_T)$ に比べるとそれ程良くわかっている空間ではない。しかし (ii)で言っている事は，$\sigma_p(A^*)=\sigma_p(A_T)$ かつ $\mathcal{M}_\lambda(A^*)=F^*\mathcal{M}_\lambda(A_T)$，言い換えると (E^T) から具体的に

構成される A_T の構造がわかれば、それに F^* をひっかけてやると A^* の構造が浮かび上ってくる訳である。さて証明であるが、簡単のため $\ell=1$ とする。$A^*F^*=F^*A_T$ であるから

$(\lambda I-A^*)F^*=F^*(\lambda I-A_T)$，この関係式は inclusion $F^*\,\mathrm{Ker}(\lambda I-A_T)\subset \mathrm{Ker}(\lambda I-A^*)$ を導く。従がって逆の inclusion を示すとよい。$f\in \mathrm{Ker}(\lambda I-A^*)$ とすると (4) より

$$\begin{cases} \lambda f^0-A_0^*f^0-f^1(0)=0\\ \lambda f^1(s)-\frac{d}{ds}w(f)(s)=0.\end{cases}$$

2番目の $w(f)$ についての微分方程式を $w(f)(-h)=0$ のもとで解き最初の式に代入すると、

$\Delta_T(\lambda)f^0=(\lambda I-A_0^*-\int_{-h}^0 e^{\lambda s}d\eta(s))f^0=0$，$f=F^*E_\lambda f^0$ と書き下せる。

つまり $E_\lambda f^0\in \mathrm{Ker}(\lambda I-A_T)$ なので $f=F^*\psi$, $\psi\in \mathrm{Ker}(\lambda I-A_T)$ となり逆の inclusion が示された。G^* の方は、もう少し面倒な議論が必要になる。

次に A^* の g.e. の完備性を考えてみよう。完備のための条件を $\sigma(A^*)$ が $R(\lambda;A_0^*,\eta^*)$ の pole のみなる条件のもとで導いてみよう。duality theorem を用いると、

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\sigma_p(A^*)}\mathcal{M}_\lambda(A^*)\Big)^\perp=\bigcap_{\lambda\in\sigma_p(A^*)}\mathcal{M}_\lambda(A^*)^\perp=\bigcap_{\lambda\in\sigma_p(A^*)}(\mathrm{Im}\,P_\lambda(A^*))^\perp$$

$$=\bigcap_{\lambda\in\sigma_p(A^*)}\mathrm{Ker}\,P_\lambda(A^*)^*=\bigcap_{\lambda\in\overline{\sigma_p(A^*)}}\mathrm{Ker}\,P_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\sigma_p(A)}\mathrm{Ker}\,P_\lambda$$

所で $g\in \mathrm{Ker}\,P_\lambda \leftrightarrow P_\lambda g=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda}R(\mu;A)g\,d\mu=0$

$\leftrightarrow \underset{E_\lambda R(\mu;A_0,\eta)H_\mu F g+T_\mu g}{\underset{\|}{R(\mu;A)g}}$ が $\mu=\lambda$ で holomorphic であるから，

結局

A^* の g.e. が完備 $\Leftrightarrow \{g\in M_p : R(\lambda;A_0,\eta)H_\lambda Fg \text{ is entire}\}=\{0\}$.

同様の解析により. $\sigma(A)$ が $R(\lambda; A_0, \eta)$ の pole のみであるならば.

$$A \text{ の g.e. が完備} \Longleftrightarrow \{f \in M_p^* : R(\lambda; A_0^*, \eta^*) H_\lambda f \text{ is entire}\} = \{0\}.$$

$X = R^n$ のときは. もっと簡明な完備性のための条件を与えることができる。この場合.

$\sigma(A) = \{\lambda : \det \Delta(\lambda) = 0\}$ で点スペクトルのみ。D.Henry の補題の M_p-modification により.

$$t \geq nh \quad \text{のとき} \quad cl(S(t)M_p) = cl(\bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathcal{M}_\lambda)$$

(証明は略 : [6] をみよ) であるから.

$$\begin{aligned} A \text{ の g.e. が完備} &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} S^*(t) = \{0\}, \quad t \geq nh \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} S^*(h) = \operatorname{Ker} F^* G^* = \{0\} \quad (\text{by semigroup 性}) \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} F^* = \{0\} \quad (\text{by } \operatorname{Im} G^* = D(A^*) = W_p^{(1)}) \end{aligned}$$

特に measure η が積分遅れを持たなければ

$$\operatorname{Ker} F^* = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} A_m^* = \{0\} \Longleftrightarrow \det A_m \neq 0 \qquad \text{である.}$$

最後に control theory への先程の応用をのべる。条件(3)の解析により. 次の結果が得られる。

<u>Theorem 4.</u> $\sigma(A) = \sigma_d(A)$, A_T の g.e. が完備;

controller $B_0 : U = \mathbb{C}^N \to X$ が $B_0 u = \sum_{i=1}^N u_i g_i^0$, $u = (u_1, \cdots, u_N) \in \mathbb{C}^N$, $g_1^0, \cdots, g_N^0 \in X$;

$$\operatorname{rank}\left(\langle g_i^0, \psi_{\lambda j}(0) \rangle : \begin{matrix} i \to 1, \cdots, N \\ j \downarrow 1, \cdots, D_\lambda \end{matrix} \right) = D_\lambda \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

ここで $\{\psi_{\lambda j} : j = 1, \cdots, D_\lambda\}$ は $\mathcal{M}_{\bar\lambda}(A_T)$ の正規化された base, $D_\lambda = \dim \mathcal{M}_{\bar\lambda}(A_T)$;

$\Rightarrow$ $(E) + B_0 u(t)$ なる control system は. M_p で可制御.

以上の外に. observability, stabilizability, identifiability などについても. 同様の結論を導くことができる. これらについては [3,4] を参照されたい.

1987.1.6.

References

[1] S. Nakagiri: Optimal control of linear retarded systems in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. (1986), in press.

[2] S. Nakagiri: Structural theory for functional differential equations in Banach spaces, to appear.

[3] S. Nakagiri and M. Yamamoto: Remarks on identifiability of linear retarded systems in Banach spaces. to appear.

[4] S. Nakagiri and M. Yamamoto: Function space controllability and stabilization of functional differential equations in Banach spaces, to appear.

[5] K. Yosida: Functional Analysis, Third Edi., Springer-Verlag, 1971.

[6] D. Henry: Small solutions of linear autonomous functional differential equations, J. Differential Equations, 8 (1970), 494-501.

Stability for functional differential equations with infinite delay in Banach spaces

八戸高専　　村上悟

（要旨）無限遅れをもつ関数微分方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t, x_t)$ の解の安定性を調べる。ここで A はあるバナッハ空間上の有界線形作用素からなるあるコンパクト半群の無限小生成作用素で，F は $[0,\infty)$ とある基本的な公理系をみたす関数空間 B との積空間上で定義された連続関数である。

1. 相空間 B.　X をある複素バナッハ空間で $|\cdot|$ をそのノルムとする。x が $(-\infty, a)$ から X への関数のとき各 $t \in (-\infty, a)$ に対し切片 $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ を $x_t(s) = x(t+s)$, $s \leq 0$, で定義する。B を $(-\infty, 0]$ 上から X への関数 $\phi, \psi, \cdots$, からなるある複素バナッハ空間でそのノルム $|\cdot|_B$ は次の性質をもつとする。

(H1) 関数 $x : (-\infty, \sigma+a) \longrightarrow X$, $a>0$, が $[\sigma, \sigma+a)$ で連続で $x_\sigma \in B$ であれば (i) 各 $t \in [\sigma, \sigma+a)$ に対し $x_t \in B$, (ii) 対応 $t \to x_t$ は $[\sigma, \sigma+a)$ から B への連続写像である。

(H2) 正値連続関数 $K(r)$, $M(r)$, $r \geq 0$, が存在して，(H1) のような任意の x に対し

$$|x_t|_B \leq K(t-\sigma) \sup\{|x(s)| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t-\sigma)|x_\sigma|_B, \quad \sigma \leq t < \sigma+a.$$

(H3) ある定数 K_1 に対し $|\phi(0)| \leq K_1 |\phi|_B$,　$\phi \in B$。

空間Bの代表的なモデルとして空間C_γ（γは実数）があげられる。それは$\lim_{\theta\to-\infty}(\exp\gamma\theta)\phi(\theta)$が存在するような$(-\infty, 0]$上のX値連続関数の族で$|\phi|_{C_\gamma}=\sup\{\exp(\gamma\theta)|\phi(\theta)|:\ \theta\leqq 0\}$でノルムを与える。空間Bの他の例については[2]参照。

さてAをX上のコンパクト半群$T(t)$の無限小生成作用素，Fを$[0,\infty)\times B$からXへの連続写像として関数微分方程式

(E) $\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t, x_t)$

を考える。与えられた$(\sigma,\phi)\in[0,\infty)\times B$に対して，$x_\sigma=\phi$ かつ$[\sigma,\sigma+a)$上で連続で

$$x(t) = T(t-\sigma)\phi(0) + \int_\sigma^t T(t-s)F(s,x_s)\,ds, \qquad \sigma\leqq t<\sigma+a,$$

を満たす関数$x:(-\infty,\sigma+a)\longrightarrow X$を$(\sigma,\phi)$を通る$[\sigma,\sigma+a)$における(E)の(mild)解という。標準的な方法(cf. [1, 7, 8])により解の存在等について次の結果を得る。

命題1. 任意の与えられた$(\sigma,\phi)\in[0,\infty)\times B$に対し (1) (σ,ϕ)を通る(E)の解がある区間$[\sigma,\sigma+a]$で存在する。(2) $F(t,\phi)$がϕに関し局所Lipschitz的ならばこのような解は一意である。(3) Fが$[0,\infty)\times B$内の各有界集合をX内の有界集合に写すなら，最大定義域$[\sigma,\tau)$をもつ(E)の解xに関して，$\tau<\infty$のとき$\lim_{t\to\tau}|x_t|_B=\infty$がなりたつ。

2. 解の分解。 本節では，ある定数k_1, k_2に対しFは

不等式 $|F(t,\phi)| \leq k_1 + k_2|\phi|_B$, $(t,\phi) \in [0,\infty) \times B$, を満たすとし、更に各 $(\sigma,\phi) \in [0,\infty) \times B$ に対し (E) の解が一意に存在するものとする。(σ,ϕ) を通る最大定義域をもつ解を $x(t,\sigma,\phi)$ と記すと、Gronwall の不等式によりある局所有界な関数 m が存在して $|x_t(\sigma,\phi)|_B \leq m(t,\sigma)|\phi|_B$, $t \geq \sigma$, $\phi \in B$, がなりたつ。それ故 $x(t,\sigma,\phi)$ の定義域は $[\sigma,\infty)$ である。

各 $t \geq \sigma$ に対し作用素 $U(t,\sigma)$, $S(t)$, $W(t,\sigma) : B \to B$ を次のように定める。

$$[U(t,\sigma)\phi](\theta) = x(t+\theta,\sigma,\phi), \quad \theta \leq 0,$$

$$[S(t)\phi](\theta) = \begin{cases} \phi(t+\theta), & t+\theta \leq 0, \\ T(t+\theta)\phi(0), & t+\theta > 0, \end{cases}$$

$$[W(t,\sigma)\phi](\theta) = \begin{cases} 0, & t+\theta \leq \sigma, \\ \int_\sigma^{t+\theta} T(t+\theta-s)F(s, x_s(\sigma,\phi))\,ds, & t+\theta > \sigma. \end{cases}$$

明らかに $U(t,\sigma) = S(t-\sigma) + W(t,\sigma)$, $t \geq \sigma$, がなりたつ。又 (H1) により、$S(t)$, $t \geq 0$, は B 上の有界線形作用素からなる C_0 半群である。$S(t)$ と $W(t,\sigma)$ の性質を述べよう。その準備として、あるバナッハ空間 Y の有界部分集合 Ω に対し

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d : {}^\exists\Omega_1,\cdots,\Omega_k \subset Y,\ \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i,\ \Omega_i \text{ の直径} \leq d\}$$

とおき Ω の Kuratowski measure of noncompactness（簡単に Ω の α 測度）とよぶ。Ω が相対コンパクトであることは $\alpha(\Omega) = 0$ と

同等である。Y上の有界線形作用素Tに対し

$$\alpha(T) = \inf\{k : \alpha(T\Omega) \leqq k\alpha(\Omega),\ \Omega\text{は有界部分集合}\}$$

とおく。$\alpha(T) \leqq \|T\|$ であり、Tがコンパクト作用素であることは $\alpha(T) = 0$ と同等である。スペクトル半径を与えるGelfandの公式に対応してTの真性スペクトル $\sigma_e(T)$ の半径 $r_e(T)$ はNussbaumの定理により

(1) $$r_e(T) = \lim_{n\to\infty} [\alpha(T^n)]^{1/n}$$

で与えられる([6])。$N(T) = \ker T$, $R(T) = \mathrm{range}\, T$ と記すと，λがTの正規固有値，即ち $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$ ならば，ある自然数kに対し $X = N[(T-\lambda I)^k] \oplus R[(T-\lambda I)^k]$, $\dim N[(T-\lambda I)^k] < \infty$ となり，各直和成分はTの不変部分空間である。特に $\lambda \in P_\sigma(T)$, 即ちλはTの点スペクトルである。

さて，ΩをBの有界部分集合とする。$T(t)$ が $t>0$ で作用素ノルムに関して連続なることを用いると各 $t \geqq \sigma$ に対し関数族 $\{[W(t,\sigma)\phi](\theta) : \phi \in \Omega\}$ は $[-t+\sigma, 0]$ 上θに関して同程度連続なることがわかる。更に各固定した $\theta \in [-t+\sigma, 0]$ に対して $\{[W(t,\sigma)\phi](\theta) : \phi \in \Omega\}$ のα−測度は零なることが示され，Ascoli-Arzelaの定理により $\{[W(t,\sigma)\phi](\cdot) : \phi \in \Omega\}$ は $C([-t+\sigma, 0]; X)$ 内で相対コンパクト，それ故(H1),(H2)により $W(t,\sigma)\Omega$ はB内の相対コンパクト集合になる。このように

命題2. 各 $t \geqq \sigma$ に対し写像 $W(t,\sigma)$ は完全連続である。

一方 $S(t)$ については

命題3. 任意の $\varepsilon>0$ に対し正定数 C_ε が存在して

$$d(S(t)) \leqq C_\varepsilon M(t-\varepsilon), \quad t>\varepsilon。$$

これは正定数 C_ε が存在して $\|S(\varepsilon)\| \leqq C_\varepsilon$ なることと，B 内の各有界集合 Ω に対し関数族 $\{[S(t)\phi](\cdot) : \phi\in\Omega\}$ が $C([-t+\varepsilon, 0]; X)$ 内で相対コンパクトなることにより導かれる。

さて $d(S(t))$ は $t\in[0,\infty)$ に関し局所有界かつ submultiplicative 故

$$\beta = \lim_{t\to\infty}\frac{\log d(S(t))}{t} = \inf_{t>0}\frac{\log d(S(t))}{t}$$

により定数 β, $-\infty \leqq \beta < \infty$, を定義できる。(1) により

(2) $$r_e(S(t)) = e^{\beta t}, \quad t>0,$$

がわかる。特に B が条件

(H2′) (H2) において $M(t)\to 0$ $(t\to\infty)$

を満たすなら命題3により $\beta<0$ がわかる。

3. 自励線形系の安定性. 本節では F が B から X への有界線形作用素の場合を考える。(E) が t に依存しないから $U(t,\sigma) = U(t-\sigma, 0)$, $W(t,\sigma) = W(t-\sigma, 0)$ であり，これらは B 上の有界線形作用素である。以下 $U(t-\sigma, 0) = U(t-\sigma)$ とおく。$U(t)$, $t\geqq 0$, は B 上の C_0 半群である。命題2と (2) により

命題4. $r_e(U(t)) = e^{\beta t}, \quad t>0$。.

固定した正数tに対し $e^{\beta t} < \delta$ なる数 δ を選ぶ。命題4により集合 $\sigma(U(t)) \cap \{\lambda : |\lambda| \geqq \delta\}$ ($\overset{\text{def.}}{=} \Sigma_\delta$) の点は $U(t)$ の正規固有値であり，それ故高々有限個である。$U(t)$ のスペクトル半径を調べるには Σ_δ を分析すればよい。A_U を $U(t)$ の無限小生成作用素とする。Hille－Phillips の定理（[3]）により $\exp[tP_\sigma(A_U)] = P_\sigma(U(t)) \setminus \{0\}$ であるから結局 $P_\sigma(A_U)$ を解析することに帰着される。そのためにBに条件，

(H4) $\{\phi^n\}$ がBにおける Cauchy 列で，ある ϕ に $(-\infty, 0]$ 上各コンパクト区間上一様収束するならば，実は $\phi \in B$ で $|\phi^n - \phi|_B \to 0$ $(n \to \infty)$,

を仮定しよう。各 $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$, 自然数 j に対し

$$[\omega_{j,\lambda} x](\theta) = [\theta^{j-1} e^{\lambda\theta}/(j-1)!]\, x, \qquad \theta \leqq 0,$$

とおく。$\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ なら $\omega_{j,\lambda} x \in B$ である（[5]）。$\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ のとき線形作用素 $\Delta(\lambda) : D(A) \to X$ を

$$\Delta(\lambda) x = Ax - \lambda x + F(\omega_{1,\lambda} x), \qquad x \in D(A),$$

で定義する。ある零でない $x \in D(A)$ に対し $\Delta(\lambda) x = 0$ がなりたつとき λ を特性値という。

命題5. $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ のとき，$\lambda \in P_\sigma(A_U)$ なることは λ が特性値なることと同等である。

（証明の概略） $\lambda \in P_\sigma(A_U)$ とする。ある零でない $\phi \in B$ が存在して $A_U \phi = \lambda \phi$。$(d/dt)U(t)\phi = U(t)A_U\phi = \lambda U(t)\phi$ だから

$\text{U}(t)\phi = e^{\lambda t}\phi$, $t \geq 0$. (H4) により $\phi = \omega_{1,\lambda}\phi(0)$ なることが示される。更に $\lim_{t\to 0^+}(1/t)[T(t)\phi(0) - \phi(0)] = \lim_{t\to 0^+}(1/t)[\text{U}(t)\phi - \phi](0)$ $-(1/t)\int_0^t T(t-s)F(x_s(0,\phi))ds = [A_U\phi](0) - F(\omega_{1,\lambda}\phi(0)) = \lambda\phi(0) -$ $F(\omega_{1,\lambda}\phi(0))$。このように $\phi(0) \in D(A)$ かつ $\Delta(\lambda)\phi(0) = 0$。

逆に零でない $x \in D(A)$ に対し $\Delta(\lambda)x = 0$ とする。$x(t) = e^{\lambda t}x$, $\phi = \omega_{1,\lambda}x$ とおくと $x(t) = x(t,0,\phi)$ が得られ，その結果 $\phi \in D(A_U)$ かつ $A_U\phi = \lambda\phi$ が示される。(証明終り)

$N[(A_U - \lambda I)^k]$ の構造と，その上での $\text{U}(t)$ の挙動を調べることができる。そのため次の記号を導入する。

$$P_{j+1} = P_{j+1}(\lambda) = (1/j!)\,\Delta^{(j)}(\lambda)$$

$$D_k = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_k \\ & P_1 & \cdots & P_{k-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & P_1 \end{pmatrix}$$

命題 6. $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ かつ $\lambda \in P_\sigma(A_U)$ とする。このとき

$$N[(A_U - \lambda I)^k] = \left\{\phi = \sum_{j=1}^{k}\omega_{j,\lambda}\eta_j : \eta_j \in D(A) \text{ かつ } D_k\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots \\ \eta_k\end{pmatrix} = 0\right\}$$

かつ

$$\text{U}(t)\phi = e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{l=1}^{j}\omega_{l,\lambda}t^{j-l}/(j-l)!\right]\eta_j, \quad t \geq 0.$$

命題 5, 6 により (E) の解の漸近的性質として次の定理を得ることができる。

定理1. $F: B \to X$ は有界線形作用素で，B は (H1), (H2') (H3), (H4) を満たすとき

(i) 実部が非負の特性値が存在しないなら，適当な正定数 M, k に対し $|U(t)\phi|_B \leqq M e^{-kt}|\phi|_B$, $t \geqq 0$, $\phi \in B$。

(ii) 実部が零の特性値が存在すれば，ある零でない $\phi \in B$ に対して $|U(t)\phi|_B = |\phi|_B$, $t \geqq 0$。

(iii) 実部が正の特性値が存在すれば，ある $\phi \in B$ に対して $|U(t)\phi|_B \to \infty$ $(t \to \infty)$。

4. 例. Ω を R^n 内の（十分なめらかな境界をもつ）有界領域とし，方程式

$$(\mathrm{PE}) \begin{cases} (\partial/\partial t) z(x,t) + \sum_{|\alpha| \leqq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha z(x,t) = b \int_{-\infty}^{0} g(\theta) z(x, t+\theta)\, d\theta, \\ \qquad\qquad x \in \Omega, \quad t \geqq 0, \\ z(\cdot, t) \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega), \quad t \geqq 0, \\ z(x,\theta) = \phi(x,\theta), \quad x \in \Omega, \quad \theta \leqq 0, \end{cases}$$

を考える。ここで $b \in R^1$, $\sum_{|\alpha| \leqq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ は Ω 内で一様強だ円型の微分作用素で，$a_\alpha(x)$ は十分なめらか，かつ $g(\theta) \geqq 0$ で，ある正定数 γ に対し $\int_{-\infty}^{0} g(\theta) e^{-2\gamma\theta} d\theta < \infty$ と仮定する。$X = L^2(\Omega)$, $B = C_\gamma(X)$ とおくと B は (H1), (H2'), (H3) (H4) をみたす。実際，$K_1 = K(t) = 1$, $M(t) = e^{-\gamma t}$。又

$$F(\phi)(x) = b\int_{-\infty}^{0} g(\theta)\,\phi(x,\theta)\,d\theta, \qquad \phi\in B, \quad x\in\Omega,$$

とおくと F は B から X への有界線形作用素になる。作用素、

A ;

$$Af = -\sum_{|\alpha|\leqq 2m} a_\alpha(x)\,D^\alpha f,$$

$$D(A) = H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega),$$

は X 上のコンパクト半群を生成するから (PE) の (mild) 解の安定性を調べるために定理 1 を適用できる。この場合

$$\Delta(\lambda)f = Af - \lambda f + b\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\theta} g(\theta)\,d\theta\cdot f, \qquad f\in D(A),$$

となり, λ が特性値なることは $\lambda - b\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\theta} g(\theta)\,d\theta$ が A の固有値なることと同等である。

例えば A = ラプラシアン のときは $\{-\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$, $0>-\mu_1>-\mu_2>\cdots$ をラプラシアンの固有値として

(3) $$\lambda - b\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\theta} g(\theta)\,d\theta = -\mu_i \quad (i=1,2,\cdots), \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0,$$

を解くことに帰着される。 $C = \mu_1/[\int_{-\infty}^{0} g(\theta)\,d\theta]$ とおく ($\int_{-\infty}^{0} g(\theta)\,d\theta = 0$ のときは $C=\infty$)。簡単な計算により次のことがわかる。

(i) $|b| < C$ のとき (3) の解は存在しない。

(ii) $b = C$ のとき (3) は一意解 $\lambda = 0$ をもつ。

(iii) $b > C$ のとき (3) は実部が正なる解をもつ。

特に定理 1 から $|b|<C$ ならば (PE) の零解は漸近安定, $b>C$ ならば不安定である。

5. 注意。 Nussbaumの定理を用いるために、Bをバナッハ空間として議論を進めたが、[4]における論法を用いるなら、Bとして商空間がバナッハ空間なる半ノルム空間の場合でも本報告の結果は成立する。半ノルム空間なる相空間は有限遅れの方程式を解析する際有効である。

References

1. W. E. Fitzgibbon, Monatsh. Math. 84 (1977), 275-288.
2. J. K. Hale and J. Kato, Funkcial. Ekvac. 21 (1978), 11-41.
3. E. Hille and R. S. Phillips, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1957.
4. S. Murakami, to appear in Funkcial. Ekvac.
5. T. Naito, J. Differential Equations 33 (1979), 74-91.
6. R. D. Nussbaum, Duke Math. J. 37 (1970), 473-478.
7. K. Schmacher, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), 261-290.
8. C. C. Travis and G. F. Webb, Trans. Amer. Math. Soc. 200 (1974), 395-418.

No. 1

$L^p(\Omega)$での放物型混合問題について

大阪大学理学部　朴　東　根

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + A(x,t,D)u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T \\ B_j(x,t,D)u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega \quad 0 < t \leq T, \quad j = 1, \cdots, m/2 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

の解のtに関する実解析性あるいはGevrey性を$L^p(\Omega)$の中で示す

Ω: R^Nの領域、一様にC^m級、局所的にC^{2m}級とする

$W^{m,p}(\Omega)$のnormを$\|\cdot\|_{m,p}$、$L^p(\Omega)$のnormは$\|\cdot\|_p$と表す。

各$t \in [0,T]$に対し

$A(x,t,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x,t) D^\alpha$ ：強楕円型、

$B_j(x,t,D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x,t) D^\beta$ ；境界作用素。

$1 < p < \infty$に対して$L^p(\Omega)$の中の作用素$A(t)$を次の様に定義する

$$\text{(1)} \begin{cases} D(A(t)) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : B_j(x,t,D)u(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \ j = 1, \cdots, m/2\} \\ (A(t)u)(x) = A(x,t,D)u(x) \qquad \text{for } u \in D(A(t)) \end{cases}$$

実際は上の定義はpに関係するので$A_p(t)$と書くべきであるが記号を簡単にするため単に$A(t)$と書く。

$\pi/2 < {}^\forall\varphi < 3\pi/2$に対して$\arg\lambda = \varphi$は S. Agmon の意味で$(A(t)-\lambda)^{-1}$のminimal growth の方向であると仮定する。([1]. p.253)

従って$-A(t)$は解析的半群$\exp(-\tau A(t))$を生成する。

$A(x,t,D)$の形式的共役(formal adjoint)；$A'(x,t,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a'_\alpha(x,t) D^\alpha$

と$\{B_j(x,t,D)\}$の$A(x,t,D)$に関する共役系$\{B_j'(x,t,D)\}$とが構成されるとする。

No. 2

(1)で $A(x,t,D)$, $\{B_j(x,t,D)\}$, P を $A'(x,t,D)$, $\{B'_j(x,t,D)\}$, P' で置き換えて定義される作用素を $A'(t)$ とすると

$$A(t)^* = A'(t)$$

ただし、$A(t)^*$ は $L^p(\Omega)$ で定義された作用素 $A(t)$ の共役作用素である。

$\{M_k : k=0,1,2\cdots\}$: Lions-Magenes (Ann. math. pura Appl. 69 (1965), 341-418) で述べている この数列とする。

i.e. $M_{k+1} \leq d_0^k M_k$, $M_k \leq M_{k+1}$, $k=0,1,2\cdots$

$$\binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leq d_1 M_k, \qquad 0 \leq j \leq k.$$

$$M_{j+k} \leq d_2^{j+k} M_j M_k, \qquad j, k = 0,1,2\cdots$$

$\forall |\alpha| \leq m$, $\forall |\gamma| \leq m - m_j$, $\forall |\beta| \leq m_j$, $j=1,\cdots,m/2$, $\forall l = 0,1,2\cdots$ に対し

$$|(\partial/\partial t)^l a_\alpha(x,t)| \leq B_0 B^l M_l,$$

$$|(\partial/\partial t)^l D_x^\gamma b_{j\beta}(x,t)| \leq B_0 B^l M_l$$

が成立するとする。

X, Y : Banach space

$B(X,Y)$: $X \to Y$ への有界線型作用素の全体。

$\| \ \|_{B(X,Y)}$: $B(X,Y)$ の norm.

以上の仮定のもとに次のことを示す [2]

$\exists K_0 > 0$, $\exists K > 0$, $\forall \lambda \in \Sigma$,

$\forall l = 0,1,2,\cdots$ に対し

$$\|(\partial/\partial t)^l (A(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^p, L^p)} \leq K_0 K^l M_l / |\lambda|$$

No. 3

$\eta \in \mathbb{C}^N$ とするとき

$$A(x,t,D+\eta) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x,t)(D+\eta)^\alpha$$

$$B_j(x,t,D+\eta) = \sum_{|\beta|\leq m_j} b_{j\beta}(x,t)(D+\eta)^\beta$$

とおく。作用素 $A^\eta(t)$, $A'^{\bar\eta}(t)$ を

$$\begin{cases} D(A^\eta(t)) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : B_j(x,t,D+\eta)u(x) = 0,\ j=1,\cdots,m/2,\ x \in \partial\Omega\} \\ (A^\eta(t)u)(x) = A(x,t,D+\eta)u(x) \quad \text{for } u \in D(A^\eta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(A'^{\bar\eta}(t)) = \{u \in W^{m,p'}(\Omega) : B'_j(x,t,D+\bar\eta)u(x) = 0,\ j=1,\cdots,m/2,\ x \in \partial\Omega\} \\ (A'^{\bar\eta}(t)u)(x) = A'(x,t,D+\bar\eta)u(x) \quad \text{for } u \in D(A'^{\bar\eta}(t)) \end{cases}$$

に由り定義する

$(A^\eta(t))^* = (A'^{\bar\eta}(t))$ が成立する。

δ を十分小さい正の数とすると $\lambda \in \Sigma$, $|\eta| \leq \delta|\lambda|^{1/m}$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A^\eta(t))$

$$\|(A^\eta(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^p,L^p)} \leq C_p/|\lambda|$$

$$\|(A^\eta(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^p,W^{m,p})} \leq C_p$$

$$\|(A'^{\bar\eta}(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^{p'},W^{m,p'})} \leq C_p$$

が成立する ([1] p.263-282)

prop1>

$\exists C_1>0$, $\exists C_2>0$, $\forall\lambda \in \Sigma$, $\forall l = 0,1,2\cdots$ に対し

$$\|(\partial/\partial t)^l (A^\eta(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^p,L^p)} \leq C_1 C_2^l M_l/|\lambda|$$

$$\|(\partial/\partial t)^l (A^\eta(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^p,W^{m,p})} \leq C_1 C_2^l M_l$$

$$\|(\partial/\partial t)^l (A'^{\bar\eta}(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^{p'},W^{m,p'})} \leq C_1 C_2^l M_l$$

No. 4

以下 $\|\ \|_{m,p}$, $\|\ \|_p$ を簡単に $\|\cdot\|_m$, $\|\ \|$ と書く。$f \in L^p(\Omega)$ に対し

$$u(t) = (A^p(t) - \lambda)^{-1} f$$

とおくと

$$\begin{cases} (2) & (A(x,t,D+\eta) - \lambda)\, u(x,t) = f(x), \quad x \in \Omega \\ (3) & B_j(x,t,D)\, u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega,\ j = 1, \dots, m/2 \end{cases}$$

$$u^l = (\partial/\partial t)^l u$$

$$A^l(x,t,D+\eta) = \sum_{|\alpha| \le m} (\partial/\partial t)^l a_\alpha(x,t)(D+\eta)^\alpha$$

$$B_j^l(x,t,D+\eta) = \sum_{|\beta| \le m_j} (\partial/\partial t)^l b_{j\beta}(x,t)(D+\eta)^\beta, \quad j = 1, \dots, m/2$$

とおく。

(2), (3) の両辺を t で l 回微分して

$$(A(x,t,D+\eta) - \lambda)\, u^l(x,t) = -\sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} A^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(x,t)$$

$$B_j(x,t,D+\eta)\, u^l(x,t) = -\sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_j^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(x,t)$$

これより

$$(A(x,t,D) - \lambda)\, u^l(x,t) = (A(x,t,D) - A(x,t,D+\eta))\, u^l(x,t) - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} A^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(x,t)$$

$$B_j(x,t,D+\eta)\, u^l(x,t) = -\sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_j^{(l-k)}(x,t,D+\eta)\, u^k(x,t)$$

[1] の Thm 19.9 (p.254) により

$$(4) \quad \sum_{i=0}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i \le C\Big\{ \|(A(x,t,D) - A(x,t,D+\eta))u^l(t) - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} A^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(t)\|$$
$$+ \sum_{j=1}^{m/2} |\lambda|^{(m-m_j)/m} \|(B_j(x,t,D) - B_j(x,t,D+\eta))\, u^l(t) - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_j^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(t)\|$$
$$+ \sum_{j=1}^{m/2} \|(B_j(x,t,D) - B_j(x,t,D+\eta))\, u^l(t) - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_j^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(t)\|_{m-m_j} \Big\}$$

$\delta \le 1$ としておいて、

$$\|(A(x,t,D) - A(x,t,D+\eta))\, u^l(t)\| \le C \sum_{i=0}^{m-1} |\eta|^{m-i} \|u^l(t)\|_i \le C\delta \sum_{i=0}^{m-1} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i$$

$$\|\sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} A^{l-k}(x,t,D+\eta)\, u^k(t)\| \le C \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=0}^{m} |\eta|^{m-i} \|u^k(t)\|_i$$
$$\le C \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=1}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^k(t)\|_i$$

$$\sum_{j=1}^{m/2} |\lambda|^{(m-m_j)/m} \|(B_j(x,t,D) - B_j(x,t,D+\eta))\, u^l(t)\| \le C\delta \sum_{i=0}^{m-1} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i$$

No. 5

$$\sum_{j=1}^{m/2} |\lambda|^{(m-m_j)/m} \left\| \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_j^{(l-k)}(x,t,D+\eta) u^k(t) \right\|$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{m/2} |\lambda|^{(m-m_j)/m} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=0}^{m_j} |\eta|^{m_j-i} \|u^{(k)}(t)\|_i$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=1}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^k(t)\|_i .$$

$$\sum_{j=1}^{m/2} \| B_j(x,t,D) - B_j(x,t,D+\eta)) u^l(t) \|_{m-m_j}$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{m/2} \sum_{i=0}^{m_j-1} |\eta|^{m_j-i} \|u^l(t)\|_{m-m_j} \leq C\delta \sum_{i=0}^{m_j-1} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i$$

$$\sum_{j=1}^{m/2} \left\| \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_j^{(l-k)}(x,t,D+\eta) u^k(t) \right\|_{m-m_j}$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{m/2} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=0}^{m_j} |\eta|^{m_j-i} \|u^k(t)\|_{m-m_j+i}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=0}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^k(t)\|_i$$

これらを (+) に代入して

$$\sum_{i=0}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i \leq C\left\{\delta \sum_{i=0}^{m-1} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i + \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=0}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^k(t)\|_i\right\}$$

必要ならば δ を小さくとり直して

$$\sum_{i=0}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^l(t)\|_i \leq C \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} \sum_{i=0}^{m} |\lambda|^{(m-i)/m} \|u^k(t)\|_i .$$

$\|u\|_i \leq C \|u\|_m^{i/m} \|u\|^{(m-i)/m}$ と Young 不等式より 上の不等式は

$$\|u^l(t)\|_m + |\lambda| \|u^l(t)\| \leq C \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} B_0 B^{l-k} M_{l-k} (\|u^k(t)\|_m + |\lambda| \|u^k(t)\|)$$

と同値である. [2] の p542 の議論により $\exists C_1 > 0,\ \exists C_2 > 0$ s.t.

$$\|u^{(l)}(t)\|_m + |\lambda| \|u^l(t)\| \leq C_1 C_2^l M_l \|f\|$$

これより 命題の結論を得る.

簡単のため $m > N/2$ とする. Sobolev's imbedding theorem より

$$(*) \quad \|u\|_\infty \leq \gamma \|u\|_{m,2}^{N/2m} \|u\|_2^{1-N/2m}$$

$\lambda, \mu \in \Sigma$, $|\eta| \leq \delta \min(|\lambda|^{1/m}, |\mu|^{1/m})$ とする

$(A(t)-\lambda)^{-1}(A(t)-\mu)^{-1}$ の核を $K_{\lambda,\mu}(x,y;t)$

$(A^\eta(t)-\lambda)^{-1}(A^\eta(t)-\mu)^{-1}$ の核を $K_{\lambda,\mu}^\eta(x,y;t)$ と表す.

予備定理1. $|(\partial/\partial x)^l k_{\lambda,\mu}^h(x,y;t)| \le \gamma^2 c_1^2 c_2^l d_1(l+1)M_l|\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1}$

証明. $(\partial/\partial x)^l\{(A^h(t)-\lambda)^{-1}(A^h(t)-\mu)^{-1}\} = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}(\partial/\partial x)^k(A^h(t)-\mu)^{-1}$

(5) と prop 1 により

$\|(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}f\|_\infty$

$\le \gamma \|(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}f\|_m^{N/2m}\|(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}f\|^{1-N/2m}$

$\le \gamma(c_1c_2^{l-k}M_{l-k}\|f\|)^{N/2m}(c_1c_2^{l-k}M_{l-k}\|f\|/|\lambda|)^{1-N/2m} = \gamma c_1c_2^{l-k}M_{l-k}|\lambda|^{\frac{N}{2m}-1}\|f\|$.

故に $\|(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^2,L^\infty)} \le \gamma c_1c_2^{l-k}M_{l-k}|\lambda|^{N/2m-1}$.

同様にして

$\|(\partial/\partial x)^k(A^{\bar h}(t)-\bar\mu)^{-1}\|_{B(L^2,L^\infty)} \le \gamma c_1 c_2^k M_k|\mu|^{N/2m-1}$

[1] の p.264 予備定理 1(17-19)により

$|(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}(\partial/\partial x)^k(A^h(t)-\mu)^{-1}$ の 核 $|$

$\le \|(\partial/\partial x)^{l-k}(A^h(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^2,L^\infty)}\|(\partial/\partial x)^k(A^{\bar h}(t)-\bar\mu)^{-1}\|_{B(L^2,L^\infty)}$

$\le \gamma c_1c_2^{l-k}M_{l-k}|\lambda|^{N/2m-1}\gamma c_1c_2^kM_k|\mu|^{N/2m-1}$

$=\gamma^2c_1^2c_2^lM_{l-k}M_k|\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1}$

従って

$|(\partial/\partial x)^l k_{\lambda,\mu}^h(x,y;t)|$

$\le \sum_{k=0}^l \binom{l}{k}\gamma^2c_1^2c_2^lM_{l-k}M_k|\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1}$

$\le \gamma^2c_1^2c_2^l d(l+1)M_l|\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1}$

予備定理2. $|(\partial/\partial x)^l k_{\lambda,\mu}(x,y;t)|$

$\le \gamma^2c_1^2c_2^ld_1(l+1)M_l|\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1}\{e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|}+e^{-\delta|\mu|^{1/m}|x-y|}\}$

証明.

$k_{\lambda,\mu}(x,y;t) = e^{-(x-y)h}k_{\lambda,\mu}^h(x,y;t)$ ([1] p.274)

故に h を real vector として

$|(\partial/\partial x)^l k_{\lambda,\mu}(x,y;t)| = |e^{-(x-y)h}(\partial/\partial x)^l k^h_{\lambda,\mu}(x,y;t)|$

$\le e^{-(x-y)h}\gamma^2c_1^2c_2^ld_1(l+1)M_l|\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1}$

右辺をλ,μに関する最小値で置き換えて

$$|(\partial/\partial t)^l k_{\lambda,\mu}(x,y;t)|$$

$$\le \gamma^2 c_1^2 c_2^l d_1 (l+1) M_l |\lambda|^{N/2m-1} |\mu|^{N/2m-1} e^{-\delta \min(|\lambda|^{1/m}, |\mu|^{1/m})|x-y|}$$

これと $e^{-\delta \min(|\lambda|^{1/m}, |\mu|^{1/m})|x-y|} \le e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|} + e^{-\delta|\mu|^{1/m}|x-y|}$

より予備定理の結論を得る。

$\exp(-\tau A(t))$ の核を $G(x,y,\tau;t)$ とする。

Proposition 2. $0 < {}^\exists\theta_1 < \pi/2$, ${}^\exists C_3 > 0$, ${}^\exists C_4 > 0$, ${}^\exists c > 0$, $|\arg {}^\forall\tau| \le \theta_1$, ${}^\forall l = 0,1,2,\cdots$ に対し

$$|(\partial/\partial t)^l G(x,y,\tau;t)| \le C_3 C_4^l M_l |\tau|^{-N/m} \exp\left(-c\frac{|x-y|^{m/(m-1)}}{|\tau|^{1/(m-1)}}\right)$$

proof.

$$\exp(-\tau A(t)) = \{\exp(-\tfrac{\tau}{2}A(t))\}^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\frac{\tau}{2}\lambda}(A(t)-\lambda)^{-1}d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\frac{\tau}{2}\mu}(A(t)-\mu)^{-1}d\mu$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma\int_\Gamma e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda+\mu)}(A(t)-\lambda)^{-1}(A(t)-\mu)^{-1}d\lambda\, d\mu$$

故に

$$G(x,y,\tau;t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma\int_\Gamma e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda+\mu)} k_{\lambda,\mu}(x,y;t)\, d\lambda\, d\mu$$

ここで Γを

$\Gamma_{x,y,\tau/2} = \{\lambda : |\arg\lambda| = \theta_0,\ |\lambda| \ge a\} \cup \{\lambda : \lambda = a e^{i\theta},\ |\theta| \ge \theta_0\}$ととる

ただし、

$$a = \epsilon\frac{|x-y|^{m/(m-1)}}{|\tau/2|^{m/(m-1)}} = \frac{\epsilon\rho}{|\tau/2|}, \quad \rho = \frac{|x-y|^{m/(m-1)}}{|\tau/2|^{1/(m-1)}}, \quad a^{1/m}|x-y| = \epsilon^{1/m}\rho.$$

予備定理2により

(6) $|(\partial/\partial t)^l G(x,y,\tau;t)| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}}\int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}} |e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda+\mu)}|\,|(\partial/\partial t)^l k_{\lambda,\mu}(x,y;t)|\,|d\lambda||d\mu|$

$$\le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}}\int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau}{2}\lambda} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau}{2}\mu} \gamma^2 c_1^2 c_2^l d_1(l+1) M_l |\lambda|^{N/2m-1}|\mu|^{N/2m-1} \times$$

$$\times \{e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|} + e^{-\delta|\mu|^{1/m}|x-y|}\}|d\lambda||d\mu|$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\gamma^2 c_1^2 c_2^l d_1(l+1)M_l \Big\{\int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}} |\lambda|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau}{2}\lambda} e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|}|d\lambda| \int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}} |\mu|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau}{2}\mu}|d\mu|$$

$$+ \int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}} |\lambda|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau}{2}\lambda}|d\lambda| \int_{\Gamma_{x,y,\tau/2}} |\mu|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau}{2}\mu} e^{-\delta|\mu|^{1/m}|x-y|}|d\mu|\Big\}.$$

No. 8

$0 < \varepsilon_0 < 1$ として τ は $\dfrac{|\mathrm{Im}\,\tau|}{\mathrm{Re}\,\tau} \leqq (1-\varepsilon_0)\dfrac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$ の範囲にあるとする.

この時 $\lambda = re^{\pm i\theta_0}\ (r>0)$ ならば

$$\mathrm{Re}\,\frac{\tau}{2}\lambda \geqq r\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau}{2}\,\varepsilon_0\cos\theta_0$$

故に $\exists c>0$, $\mathrm{Re}\,\frac{\tau}{2}\lambda \geqq cr\left|\frac{\tau}{2}\right|$ ([1] p.276)

$$\Gamma_1 = \{\lambda = re^{-i\theta_0}\ ;\ r \geqq a\}$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda = ae^{i\varphi}\ ;\ \theta_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi-\theta_0\}.$$

$$\Gamma_3 = \{\lambda = re^{i\theta}\ ;\ r \geqq a\}.$$

とする.

$$\Gamma_{x.y.\tau/2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

$$\int_{\Gamma_3} |\lambda|^{\frac{N}{2m}-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau\lambda}{2}} e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|}\,|d\lambda| \leqq \int_a^\infty r^{N/2m-1} e^{-cr\left|\frac{\tau}{2}\right|} e^{-\delta r^{1/m}|x-y|}\,dr.$$

$$\leqq e^{-ca^{1/m}|x-y|}\int_a^\infty r^{N/2m-1} e^{-cr\left|\frac{\tau}{2}\right|}\,dr$$

$$\leqq e^{-c\varepsilon^{1/m}\rho}\int_0^\infty \xi^{N/2m-1} e^{-\xi}\,d\xi \left(\frac{1}{c}\left|\frac{2}{\tau}\right|\right)^{N/2m}$$

$$\leqq \Gamma(N/2m)\left(\frac{1}{c}\left|\frac{2}{\tau}\right|\right)^{N/2m} e^{-\delta\varepsilon^{1/m}\rho}$$

$\displaystyle\int_{\Gamma_1} |\lambda|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau\lambda}{2}} e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|}\,|d\lambda|$ も同様する.

$$\int_{\Gamma_2} |\lambda|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau\lambda}{2}} e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|}\,|d\lambda|$$

$$\leqq a^{N/2m-1} e^{\left|\frac{\tau}{2}\right|a} e^{-\delta a^{1/m}|x-y|}\,2\pi a$$

$$= 2\pi a^{N/2m} e^{\left|\frac{\tau}{2}\right|a} e^{-\delta a^{1/m}|x-y|}$$

$$\leqq 2\pi\left(\frac{\varepsilon\rho}{|\tau/2|}\right)^{N/2m} e^{\varepsilon\rho} e^{-\delta\varepsilon^{1/m}\rho}. \leqq 2\pi\left|\frac{2}{\tau}\right|^{N/2m}\left(\frac{N}{2me}\right)^{N/2m} e^{2\varepsilon\rho} e^{-\delta\varepsilon^{1/m}\rho}.$$

(!) $x>0,\ b>0 \Rightarrow x^b \leqq \left(\frac{b}{e}\right)^b e^x$

以上合わせて

$$\int_{\Gamma_{x.y.\tau/2}} |\lambda|^{N/2m-1} e^{-\mathrm{Re}\frac{\tau\lambda}{2}} e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|}\,|d\lambda|.$$

No. 9

$$\leqq 2\Gamma(N/2m)\left(\frac{1}{c}\left|\frac{2}{t}\right|\right)^{N/2m} e^{-\delta\varepsilon^{1/m}\rho} + 2\pi\left|\frac{2}{t}\right|^{N/2m}\left(\frac{N}{2me}\right)^{N/2m} e^{2\varepsilon\rho-\delta\varepsilon^{\frac{1}{m}}\rho}$$

$$\leqq \left\{2c^{-\frac{N}{2m}}\Gamma(N/2m)+2\pi\left(\frac{N}{2me}\right)^{N/2m}\right\}\left|\frac{2}{t}\right|^{N/2m} e^{2\varepsilon\rho-\delta\varepsilon^{1/m}\rho}$$

$$\int_{\Gamma_3}|\mu|^{\frac{N}{2m}-1}e^{-\mathrm{Re}\frac{t\mu}{2}}|d\mu| \leqq \int_a^\infty r^{\frac{N}{2m}-1}e^{-cr\left|\frac{t}{2}\right|}dr$$

$$\leqq \int_0^\infty \xi^{\frac{N}{2m}-1}e^{-\xi}d\xi\left(\frac{1}{c}\left|\frac{2}{t}\right|\right)^{\frac{N}{2m}}$$

$$= \Gamma(N/2m)\left(\frac{1}{c}\left|\frac{2}{t}\right|\right)^{\frac{N}{2m}}.$$

$$\int_{\Gamma_2}|\mu|^{\frac{N}{2m}-1}e^{-\mathrm{Re}\frac{t\mu}{2}}|d\mu| \leqq a^{\frac{N}{2m}-1}e^{\left|\frac{t}{2}\right|a}2\pi a$$

$$= 2\pi a^{\frac{N}{2m}}e^{\left|\frac{t}{2}\right|a} = 2\pi\left(\frac{\varepsilon\rho}{|t/2|}\right)^{N/2m}e^{\varepsilon\rho}$$

$$\leqq 2\pi\left|\frac{2}{t}\right|^{N/2m}\left(\frac{N}{2me}\right)^{N/2m}e^{2\varepsilon\rho}$$

故に

$$\int_{\Gamma_{x,y,t/2}}|\mu|^{\frac{N}{2m}-1}e^{-\mathrm{Re}\frac{t\mu}{2}}|d\mu|$$

$$\leqq 2\Gamma(N/2m)\left(\frac{1}{c}\left|\frac{2}{t}\right|\right)^{N/2m}+2\pi\left|\frac{2}{t}\right|^{N/2m}\left(\frac{N}{2me}\right)^{N/2m}e^{2\varepsilon\rho}$$

$$\leqq \left\{2\Gamma(N/2m)\,c^{-N/2m}+2\pi\left(\frac{N}{2me}\right)^{N/2m}\right\}\left|\frac{2}{t}\right|^{N/2m}e^{2\varepsilon\rho}$$

これらを (6) に代入して

$$|(\partial/\partial t)^l\, G(x,y,t;t)|$$

$$\leqq 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\gamma^2 C_1^2 C_2^l\, d_1(l+1)\, M_4\left\{2c^{-\frac{N}{2m}}\Gamma(N/2m)+2\pi\left(\frac{N}{2me}\right)^{\frac{N}{2m}}\right\}^2\left|\frac{2}{t}\right|e^{4\varepsilon\rho-\delta\varepsilon^{1/m}\rho}.$$

ε を十分小にすると $\delta\varepsilon^{1/m}-4\varepsilon>0$

$$4\varepsilon\rho-\delta\varepsilon^{1/m}\rho = -(\delta\varepsilon^{1/m}-4\varepsilon)\rho = -2^{1/(m-1)}(\delta\varepsilon^{1/m}-4\varepsilon)\frac{|x-y|^{m/(m-1)}}{|t|^{1/(m-1)}}.$$

$$l+1 < e^l$$

No. 10

従って $^\exists C_3>0,\ C_4>0,\ c>0$ s.t.

$$|(\partial/\partial t)^l G_\tau(x,y,\tau;t)| \leq C_3 C_4^l M_l |\tau|^{-N/m} \exp\left(-c\frac{|x-y|^{m/(m-1)}}{|\tau|^{1/(m-1)}}\right)$$

$(A(t)-\lambda)^{-1}$の核を $K_\lambda(x,y;t)$と表す.

[1]のp.174〜214の議論を用いて $^\exists C_5>0,\ ^\exists C_6>0,\ 0<{}^\exists\theta_3<\pi/2,$

$\arg{}^\forall\lambda \in (-\theta_3,\theta_3),\ {}^\forall l=0,1,\cdots$ に対して

$$|(\partial/\partial t)^l K_\lambda(x,y;t)| \leq C_5 C_6^l M_l e^{-\delta|\lambda|^{1/m}|x-y|} \begin{cases} |x-y|^{m-N} & \text{if } m<N \\ |\lambda|^{\frac{N}{m}-1} & \text{if } m>N \\ \{1+\log^+(|\lambda|^{1/m}|x-y|)^{-1}\} & \text{if } m=N. \end{cases}$$

これより

$$\|(\partial/\partial t)^l (A(t)-\lambda)^{-1}\|_{B(L^1,L^1)} \leq K_0 K^l M_l/|\lambda|$$

が成立する様な $K_0>0,\ K>0$が 存在することがわかる.

以上より $L^1(\Omega)$の中の 発展方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t)$$

の基本解 $U(t,s)$に 対し

$$\|(\partial/\partial t)^n(\partial/\partial t+\partial/\partial s)^l(\partial/\partial s)^k U(t,s)\|_{B(L^1,L^1)} \leq L_0 L^{n+l+k} M_{n+l+k}(t-s)^{-n-k}$$

が 成立することがわかる。

<References>

[1] 田辺広城 : 関数解析 下.

[2] H. Tanabe : On regularity of solutions of abstract differential equations of parabolic type in Banach spaces. J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 521-542.

Existence of Time-Global Solutions for Semi-Linear Heat Equations

By Yoshiki NIWA

§ 1. Statement of Results.

We consider the initial value problem :

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = u \cdot |u|^{r-1} && \text{on } Q_\infty = (0, \infty) \times R^n , \\
&u(0,\cdot) = \varphi && \text{on } R^n ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

for $r \geq 1$ and a given initial datum φ. We aim to show the existence of solution under a weak assumption on φ. For this purpose, we study in a framework where φ is a signed measure on R^n. When the I.V.P. has a time-local solution, Baras and Pierre ([2]) showed that φ must not be so concentrated. And in [5] we showed the existence of time-local solution for any initial datum φ satisfying the undermentioned condition (A_ν) for some $\nu \in [0,n]$ such that $(n - \nu)(r - 1) / 2 < 1$.

$$
(A_\nu) \left\{ \begin{array}{l} \text{There exists a positive number } k \text{ such that} \\ |\varphi|(B(x,\rho)) \leq k \rho^\nu \quad \text{for any } x \in R^n \text{ and } \rho \in (0,1] . \end{array} \right.
$$

Where $|\varphi|$ denotes the total variation of φ and $B(x,\rho)$ is the closed ball at center x with radius ρ. The index ν indicates the degree of non-concentration of measures.

In case of time-global solution, we also need consider the decay of initial data as $|x| \longrightarrow \infty$. (For example, if φ is a positive constant and $r > 1$, the I.V.P. can not have a time global solution.) So we introduce the following condition $(A'_{\nu'})$ together with (A_ν). Where ν' varies over $[0,n]$ and indicates the decay of φ.

$$(A'_{\nu'}) \quad \begin{cases} \text{There exists } k \geq 0 \text{ such that} \\ |\varphi|\,(B(x,\rho)) \leq k\,\rho^{\nu'} \quad \text{for any } x \in R^n \text{ and } \rho \in [1,\infty). \end{cases}$$

Then we have

<u>Theorem 1.</u> Suppose the indices ν and ν' satisfy

(B_1) $\qquad (n-\nu)(r-1)/2 < 1$ and

(B_2) $\qquad (n-\nu')(r-1)/2 > 1$.

Then there exists a positive number d such that the I.V.P. (1) has a solution for any φ satisfying the conditions (A_ν) and $(A'_{\nu'})$ with $k = d$.

We show the existence of solution satisfying the following property :

$$(C_{\nu,\nu'}) \begin{cases} \text{There exists } k' \geq 0 \text{ such that} \\ |u(t,x)| \leq k'\, t^{(-(n-\nu)/2,\ -(n-\nu')/2\ )} \quad \text{for } (t,x) \in Q_\infty \text{ and} \\ \int_{B(x,\rho)} |u(t,y)|\,dy \leq k'\,\rho^{(\nu,\nu')} \quad \text{for } (t,x) \in Q_\infty \text{ and } \rho \in (0,\infty). \end{cases}$$

And if we assume the property $(C_{\nu,\nu'})$ for u, the solution is unique.

$$a^{(b,c)} = \begin{cases} a^b & \text{for } a \in (0,1] \text{ and} \\ a^c & \text{for } a \in [1,\infty) . \end{cases}$$

(The condition for uniqueness can be much weakened.) Later we generalize the non-linear term of (1) and state a similar result for the generalized equation. The meaning of "solution" shall be specified there. (See the conditions (E.1) to (E.3) after the theorem 3.)

Remark 1. Suppose $r > 1$, $\varphi \geq 0$ and that the I.V.P. (1) has a non-negative time-local mild solution. Then Baras and Pierre ([2], Proposition 3.2) showed that

$$\text{there exists } k \geq 0 \text{ such that } \varphi(K) \leq k\, C_{2/r,r^*}(K) \quad \text{for any compact subset } K \subset R^n . \tag{2}$$

Where $r^* = \left(1 - r^{-1}\right)^{-1}$ and $C_{2/r,r^*}$ denotes the capacity associated with the Sobolev space $W^{2/r,r^*}$. (We say u is a mild solution of (1) if u satisfies the integral equation associated with the I.V.P.). In case $r > 1 + 2/n$, it follows from (2) that φ must satisfy the condition (A_ν) for $\nu = n - 2/(r-1)$. (Same reference as above.) So it is expected that the condition (B_1) in the theorem can be replaced by $(n - \nu)(r - 1)/2 \leq 1$. But the undermentioned fact shows that it is impossible.

Let Y be a compact submanifold of R^n (whose dimension is any). We define its characteristic measure χ_Y by $\chi_Y(A) = \int_{A \cap Y} dv_Y$ for any measurable set $A \subset R^n$. Where dv_Y is the standard volume element of Y. Then we have

Theorem 2. The I.V.P. (1) with initial datum χ_Y has a time-local positive mild solution if and only if the dimension of Y satisfies that

$$(n - \dim(Y))(r - 1) / 2 < 1. \tag{3}$$

(Proof) Suppose the inequality (3) holds. Since the measure χ_Y satisfies the condition $(A_{\dim(Y)})$, we can apply the result of [5] and have that the I.V.P. (1) has a time-local solution. Next we assume that the inequality (3) does not hold. Then it follows that $C_{2/r,r'}(Y) = 0$. (Baras and Pierre [1], Proposition 2.4). Since $\chi_Y(Y)$ is positive, the measure χ_Y can not satisfy the condition (2) for K = Y. So the I.V.P. (1) can not have a positive mild local solution. (End of Proof.)

Remark 2. Concerning the non-existence of time-global solutions, it is known that if $n(r - 1) / 2 \leq 1$, $\varphi \geq 0$ and $\varphi \not\equiv 0$, the I.V.P. (1) can not have a time global solution. (Fujita [3] and Kobayashi-Sirao-Tanaka [4]). So we can not replace the condition (B_2) by $(n - \nu')(r - 1)/ 2 \geq 1$.

Remark 3. Weissler [6] studied the L^p setting of the problem and showed the existence of time-global solutions for $\varphi \in L^p$ in case $p = n(r - 1) / 2 > 1$ and $\|\varphi\|_{L^p}$ is sufficiently small. This can not be derived from our result directly.

<u>Remark 4.</u> In case the non-linear term of (1) is replaced by $-u|u|^{r-1}$, Baras and Pierre ([1]) showed that the I.V.P. has a time-global solution if the initial datum φ satisfies

$$|\varphi|(E) = 0 \quad \text{for any } E \subset R^n \text{ whose capacity } C_{2/r,r^*}(E) \text{ is zero,} \tag{4}$$

and that the condition (4) is necessary if $r > 1$ and $\varphi \geq 0$.

Now we generalize the non-linear term of (1) and consider the following initial value problem.

$$u_t - \Delta u = F \circ u \quad \text{on } Q_\infty \text{ and } u(0,\cdot) = \varphi \quad \text{on } R^n \tag{5}$$

Where F is a continuous function defined on R and asumed to satisfy the following condition $(D_{r,r'})$ for some r and r' > 1.

$$(D_{r,r'})\begin{cases} \text{There exists } k \geq 0 \text{ such that} \\ |F(s)| \leq k\,|s|^{(r',r)} \quad \text{for any } s \in R \text{ and} \\ \sup\left\{ \dfrac{|F(s_2) - F(s_1)|}{|s_2 - s_1|} \;;\; |s_i| \leq s \ (i=1,2) \text{ and } s_1 \neq s_2 .\right\} \\ \leq k\,(1 + s^{r-1}) \quad \text{for any } s \geq 0. \end{cases}$$

Here we introduce following notations.

$M_{\nu,\nu'} = \{ \varphi$; a signed measure on R^n satisfying the conditions (A_ν) and $(A'_{\nu'})$.$\}$

$X_{\nu,\nu'} = \{ u \in C(Q_\infty)$; u satisfies the condition $(C_{\nu,\nu'})$.$\}$

Then our result is

<u>Theorem 3.</u> Let F satisfy the condition $(D_{r,r'})$ for some r and $r' > 1$ and the indices ν and ν' satisfy the inequality (B_1) and

$$(B_2') \qquad (n - \nu')(r' - 1)/2 > 1.$$

Then there exists a positive number d such that the I.V.P. (5) has a unique solution $u \in X_{\nu,\nu'}$ for any initial datum $\varphi \in M_{\nu,\nu'}$ satisfying the condition (A_ν) and $(A'_{\nu'})$ with $k = d$.

A function u on Q_∞ is caled a solution of the I.V.P. (5) if the following conditions are satisfied.

(E.1) The function u is of class $C^{1,2}$ on Q_∞. That is to say u has continuous derivatives u_t, u_{x_i} and u_{x_i,x_j} $(i,j = 1, \cdots, n)$ on Q_∞.

(E.2) $u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = F(u(t,x))$ for any $(t,x) \in Q_\infty$.

(E.3) $\lim_{t \downarrow 0} \int_{R^n} w(x)\, u(t,x)\, dx = \int_{R^n} w(x)\, d\varphi(x)$

for any compactly supported continuous function w .

§ 2. Proof of Theorem 3.

As usual, we consider the following integral equation :

$$u = E[\varphi] + K[F \circ u] \tag{6}$$

for a function u on Q_∞ . Where

$$E[\varphi](t,x) = \int_{R^n} e(t,x-y)\, d\varphi(y) \quad ,$$

$$K[f](t,x) = \int_0^t ds \int_{R^n} e(t-s,x-y)\, f(s,y)\, dy$$

and

$$e(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left\{-|x|^2 / (4t)\right\} \quad .$$

We introduce the norm of $M_{\nu,\nu'}$ by

$$|\varphi|_{\nu,\nu'} = \sup_{\rho>0} w_n^{-1} \rho^{(-\nu,-\nu')} |\varphi|(B(x,\rho)) \quad \text{for} \quad \varphi \in M_{\nu,\nu'} .$$

Where w_n is the volume of the n-dimensional unit ball. Next we define the norm of $X_{\nu,\nu'}$ by

$$\|u\|_{\nu,\nu'} = \max\left\{ \sup_{t\in(0,\infty)} \left| t^{((n-\nu)/2,\ (n-\nu')/2)} u(t,\cdot) \right|_{\sup} , \right.$$
$$\left. \sup_{t\in(0,\ \ )} |u(t,\cdot)|_{\nu,\nu'} \right\} .$$

Where $|u(t,\cdot)|_{\sup} = \sup\left\{|u(t,x)| \ ;\ x \in R^n .\right\}$. The norm $\|\cdot\|_{\nu,\nu'}$ induce a complete topology into $X_{\nu,\nu'}$.

In what follows, we state some propositions without proof. They can be proved similarly as the related propositions in [5]. First we derive estimates for the terms $E[\varphi]$ and $K[F\circ u]$.

Proposition 1. (i) Let φ be an element of $M_{\nu,\nu'}$ for some ν and $\nu' \in [0,n]$. Then the function $E[\varphi]$ belongs to $X_{\nu,\nu'}$ and has the estimate :

$$\|E[\varphi]\|_{\nu,\nu'} \leq 2\,|\varphi|_{\nu,\nu'} .$$

(ii) Let F, ν and ν' be as in the theorem and u be an element of $X_{\nu,\nu'}$. Then the function $K[F\bullet u]$ is well-defined and has the estimate :

$$\|K[F\bullet u]\|_{\nu,\nu'} \leqq 2^{n/2+1}\left(\theta^{-1} + \theta'^{-1}\right) |F|_{r,r'} \, \|u\|_{\nu,\nu'}^{(r_*,\, r^*)} .$$

Where $\theta = 1 - (n - \nu)(r - 1)/2$ and $\theta' = (n - \nu')(r'-1)/2 - 1$, $|F|_{r,r'} = \sup\left\{|F(s)|\,|s|^{(-r',-r)} ;\ s \in R\right\}$, $r_* = \min(r, r')$ and $r^* = \max(r, r')$. By the assumption, θ and θ' are positive and $|F|_{r,r'}$ is finite.

This proposition shows that the integral equation (6) is well-defined in $X_{\nu,\nu'}$. Now we consider the integral equation :

$$u = u_0 + K[F\bullet u] \qquad u \in X_{\nu,\nu'} \tag{7}$$

Where F, ν and ν' are as in the theorem and u_0 is an element of $X_{\nu,\nu'}$. Then we have

<u>Proposition 2.</u> (i) The equation (7) does not have two or more solutions in $X_{\nu,\nu'}$.

(ii) Suppose there exists a positive number M such that the estimate : $\|u_0 + K[F\bullet u]\|_{\nu,\nu'} \leqq M$ holds for any $u \in X_{\nu,\nu'}$ satisfying $\|u\|_{\nu,\nu'} \leqq M$. Then the equation (7) has a solution $u \in X_{\nu,\nu'}$ satisfying $\|u\|_{\nu,\nu'} \leqq M$.

We use the contraction mapping argument for the proof of the second assertion. At last we need reduce the I.V.P. (5) into the integral equation (6).

<u>Proposition 3.</u> Let F, ν and ν' be as in the theorem. Then the following atatements are equivalent for a function $u \in X_{\nu,\nu'}$.

(a) u is a solution of the I.V.P. (5). That is to say u satisfies the conditions (E.1) to (E.3).

(b) u is a solution of the integral equation (6).

<u>End of Proof of Theorem.</u> Let φ be an element of $M_{\nu,\nu'}$. we put $d = |\varphi|_{\nu,\nu'}$. Suppose u is an arbitrary element of $X_{\nu,\nu'}$ satisfying $\|u\|_{\nu,\nu'} \leq 4d$. Then by the proposition 1, we have

$$\|E[\varphi] + K[F\circ u]\|_{\nu,\nu'}$$
$$\leq 2d + 2^{n/2+1}\left(\theta^{-1} + \theta'^{-1}\right) |F|_{r,r'} (4d)^{(r_*,r^*)} .$$

We remark that r_* and r^* are both greater than 1. So if d is sufficiently small, the right hand of the above inequality is majorized by 4d. Then applying the proposition 2-(ii) in case $M = 4d$ and $u_0 = E[\varphi]$, we have that the equation (6) has a solution in $X_{\nu,\nu'}$. Then by the proposition 3, the solution is a classical solution of the I.V.P.(5). The uniqueness of the solution follows by combining the propositions 2-(i) and 3.

References

[1] Baras, P. et Pierre, M., Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données measures. Applicable Analysis, 18, (1984) pp 111 - 149.

[2] Baras, P. er Pierre, M., Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. Annales de l'enstitut Henri Poincaré - Analyse nonlinéaire 2-3, (1985), pp 185 - 212.

[3] Fujita, H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect I 13 (1966), pp 109 - 124.

[4] Kobayashi, K., Sirao, T. and Tanaka, H. On the growing up problem for semilinear heat equations. J. Math. Soc. Japan 29 - 3 (1977), pp 407 - 424.

[5] Niwa, Y. Semi-Linear Heat Equations with Measures as Initial Data Doctor thesis presented to Univ. of Tokyo (1986).

[6] Weissler, F. B., Existence and Non-Existence of Global Solutions for a Semilinear Heat Equation Israel J. Math. 38 - 1 (1981), pp 29 - 40.

UNIQUE EXISTENCE OF SOLUTIONS TO LINEAR EVOLUTION EQUATIONS AND AN APPLICATION TO SOME DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATIONS

Taeko Shigeta

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University

§0 Introduction

This note is concerned with an abstract linear evolution equation in a Banach space and, as an application, the unique existence of the following degenerate hyperbolic equation in a Hilbert space H;

$$\left.\begin{array}{ll} (0.1) & u''(t) + \phi^2(t)\Lambda u(t) + \varphi(t)u'(t) + \Xi(t)u(t) = f(t) \\ & \qquad\qquad \text{for} \quad t_0 < t < S_2, \\ (0.2) & u(t_0) = u_0, \quad |t|^{\nu}u'(t)\big|_{t=t_0} = u_1, \end{array}\right\} \text{(WE)}$$

where u' is the t-derivative in the sense of vector-valued derivative, Λ be a positive self-adjoint operator in H, α are real numbers with and $\alpha > -1$, ϕ and φ are functions on $[S_1,S_2]$ ($[S_1,S_2] \ni t_0$, 0) to $[0,+\infty]$ satisfying the following;

$$(0.3) \qquad \phi(\cdot) \in W^{2,\infty}_{loc}((S_1,S_2)\setminus\{0\}), \qquad (S_1 \leqq t_0 \leqq S_2)$$

$$(0.4) \qquad C^{-1}|t|^{\alpha} \leqq \phi(t) \leqq C|t|^{\alpha},$$

$$(0.5) \qquad |\phi'(t)| \leqq C|t|^{\alpha-1}, \quad |\phi''(t)| \leqq C|t|^{\alpha-2},$$

for a.e.t on (S_1,S_2), with some positive constant C,

$$(0.6) \qquad \varphi(t) - \nu/t \in L^1(S_1,S_2) \quad \text{with} \quad -2\alpha-1 < \nu < 1.$$

We note that ϕ takes value 0 or ∞ at $t = 0$. That is, the degeneracy occurs at 0. Especialy if $2\alpha > -1$, we can take $\nu = 0$.

First we study a linear evolution equation in a Banach space Z

with norm $\|\cdot\|_Z$:

$(CP:F)_s$ $du(t)/dt + A(t)u(t) = F(s)$ for $s \leq t \leq T$, $u(s) = y$,

where $0 \leq s < T$, $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ is a family of linear operators in Z.

Let $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ and $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ be families of Banach spaces in Z with norms $\{\|\cdot\|_{X_t}\}$ and $\{\|\cdot\|_{Y_t}\}$ respectively such that Y_t is continuously and densely imbedded in X_t for each t. Here we note that X_t (resp. Y_t) is not necessarily equivalent to X_s (resp. Y_s) for $s \neq t$. If X_t and Y_t are equivalent to some Banach spaces X and Y respectively, several conditions for the existence of the unique solution of $(C.P)_s$ are known under Kato's stability condition for $\{A(t)\}$ on $\{X_t\}$ and on $\{Y_t\}$. But for example, an operator associated with (WE) does not satisfy Kato's stability condition, if $\alpha \neq 0$. In fact, X_t and Y_t must change at $t = 0$ (here we take $[S_1,S_2]$ instead of $[0,T]$). Then Y. Kōmura conjectured that $(C.P)_s$ has a unique solution under the weak stability condition for $\{A(t)\}$: for $x \in D(A(t))$,

$$\frac{d}{dt}\|x\|_{X_t}^2 \leq 2\mathrm{Re}(A(t)x,x^*) + \underline{f}(t)\|x\|_{X_t}^2$$

for some $x^* \in J_{X_t}(x)$, where $J_{X_t}(x)$ is a duality map of X_t and $\underline{f}(\cdot)$ is a measure on $[0,T]$. We note that Kato's stability condition implies the weak stability condition.

Our purpose is to construct an evolution operator $\{U(t,s)\}$ under the weak stability condition (with some additional assumptions) for $\{A(t)\}$ on $\{X_t\}$ and on $\{Y_t\}$, and show that $\{U(t,s)\}$ gives a unique solution of $(CP:0)_s$.

Secondly, we apply our abstract theorem to (WE). For various results on (WE) with $t_0 = 0$ and $\alpha > 0$ (i.e. the degeneracy occurs at initial time), we refer to Carroll-Showalter [2] Chap. 3, section 2 and the references quoted there.

When $t_0 = 0$ and $\alpha < 0$ (i.e. the singurarity occurs at initial time), (WE) has been studied by Lacomblez [4], Bernardi [1], Povoas [5] and Coppoletta [3] in various setting different from us. They assume that $u_0 = 0$, and furthermore $u_1 = 0$ (resp. $f = 0$) in [1] and [3] (resp. [4]), which is essential for them. They solve (WE) by showing that the range of the perturbation of operators $\partial^2/(\partial t)^2$ and $\phi^2(t)\Lambda$ becomes some function space. Hence the assumptions for f is weaker, but the assumptions for initial values are stronger than are stronger than us. In this paper, for every $(u_0,u_1) \in \pi^{\kappa}_{t_0}$ (for the definition, see (3.1) ~ (3.3)), we obtain a unique solution u with $(u(t), |t|^{\nu}u'(t)) \in \pi^{\kappa}_{t}$ for every $t \in [t_0,S_2]$. Here we note that since π^{κ}_{t} is different from others only for $t = 0$, the solution u starting before 0 keeps the space regurality before and after 0, and the regularity of $u(t)$ or $u'(t)$ raises when t gets to 0 or gets out of 0. We also note that the sun of the space regularity of $u(t)$ and $u'(t)$ is kept $1/2 + \kappa$ if $\nu = 0$.

§1 Notations

First we describe notations used in this report.

For an operator A from a Banach space Y to X, $\|A\|_{Y,X}$ is defined by $\|A\|_{Y,X} = \sup\{\|Ay\|_X;\ y \in Y,\ \|y\|_Y = 1\}$, which may be ∞.

Let $m = 0,1$. For a closed interval I in $\mathbb{R}$, $AC^m(I;X)$ denotes the set of functions in $C^m(I;X)$ all of whose derivatives of order $\leq m$ are absolutely continuous on I (as a X-valued function). For a subset I of $\mathbb{R}$, $AC^m_{loc}(I;X)$ denotes the set of functions belonging to $AC^m(I';X)$ for all closed interval $I' \subset I$. $AC^0_{loc}(I;X)$ is denoted by $AC_{loc}(I;X)$.

§2 Abstract Linear Evolution Equations

In this section, we study $(CP:F)_s$. First, we describe some definitions.

Let $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ be a family of Banach spaces in a Banach space Z with norms $\{\|\cdot\|_{W_t}\}$.

DEFINITION 1. We say that $\|\cdot\|_{W_t}$ is differentiable at t if the following holds; W_{t+h} equals W_t as a linear space for sufficiently small $|h|$ with $t+h \in [0,T]$ and $(\|x\|_{W_{t+h}} - \|x\|_{W_t})/h$ is convergent as h tends to 0, uniformly to x in each bounded subset of W_t. The limit of the above is denoted by $\frac{d}{dt}\|x\|_{W_t}$.

DEFINITION 2. A two-parameter family $\{U(t,s); 0 \leqq s \leqq t \leqq T\}$ of operators in Z is said to be an evolution operator on $\{W_t\}$ if it satisfies the following: for $0 \leqq s \leqq r \leqq t \leqq T$,

(i) $U(t,s)$ is a bounded linear operator on W_s into W_t,

(ii) $U(t,t) = I$ on W_t and $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ on W_s.

Let Γ be a closed subset of $[0,T]$ which has at most countable numbers. Let Z, X_t and Y_t be a Banach spaces stated in §0. We assume the following conditions for these spaces.

(S.1) There are constants C_i, $i = 1,2,3$, and $\theta \in (0,1]$ such that $\|\cdot\|_Z \leqq C_1\|\cdot\|_{X_t} \leqq C_2\|\cdot\|_{Y_t}$, $\|\cdot\|_{X_t} \leqq C_3\|\cdot\|_{Y_t}^{1-\theta}\|\cdot\|_Z^{\theta}$, for $0 \leqq t \leqq T$.

(S.2) If t_n tends to $t \in [0,T]$ from the left and $\{y_n \in Y_{t_n}\}$ is a sequence such that $\sup_n \|y_n\|_{Y_{t_n}} < \infty$ and y_n converges to y in Z, then y belongs to Y_t with

$$\|y\|_{X_t} \leqq \limsup_{n\to\infty} \|y_n\|_{X_{t_n}}, \quad \|y\|_{Y_t} \leqq \limsup_{n\to\infty} \|y_n\|_{Y_{t_n}}.$$

(S.3) For each $t \in (0,T)\setminus\Gamma$, $\|\cdot\|_{X_s}$ (resp. $\|\cdot\|_{Y_s}$) is differentiable with bounded derivative near t uniformly to the bounded set in X_t (resp. Y_t).

(S.4) For every $t \in \Gamma$ and $\varepsilon > 0$, if $h > 0$ is sufficiently small, then there exists a linear operator P on Y_t into Y_{t+h} such that

$$\|P\|_{X_t,X_{t+h}} \text{ and } \|P\|_{Y_t,Y_{t+h}} < 1+\varepsilon, \quad \|(I-P)\|_{Y_t,Z} < \varepsilon.$$

REMARK 2.1. (S.2) means the left lower-semicontinuity of the norms $\|\cdot\|_{X_t}$ and $\|\cdot\|_{Y_t}$ at t ($\notin \Gamma$) in the topology of $\|\cdot\|_Z$ in some sense. (S.3) means the differentiability of these norms at t ($\notin \Gamma$) in its own.

Let $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ be a family of linear operators in Z which satisfies the following conditions;

(A.1) For each $t \in [0,T]\backslash\Gamma$, $A(t)$ is a closed operator in X_t with $Y_t \subset D(A)$ ($\subset X_t$), and if λ is sufficiently large, λ belongs to the resolvent set of $A(t)$ and $(A(t)+\lambda I)^{-1}Y_t$ is densely included in Y_t.

(A.2) (Weak stability condition) There are integrable functions $\underline{f}$ and $\underline{g}$ such that all points of $[0,T]\backslash\Gamma$ are Lebesgue points of $\underline{f}$ and $\underline{g}$ and that the following hold: If $t \in [0,T]\backslash\Gamma$, then for every $x \in Y_t$ and $y \in D(A(t)|_{Y_t}) = \{y \in Y_t;\ A(t)y \in Y_t\}$, there are $x^* \in J_{X_t}(x)$ and $y^* \in J_{Y_t}(y)$ such that

$$\frac{d}{dt}\|x\|_{X_t}^2 \leqq 2\mathrm{Re}(A(t)x,x^*) + \underline{f}(t)\|x\|_{X_t}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\|y\|_{Y_t}^2 \leqq 2\mathrm{Re}(A(t)y,y^*) + \underline{g}(t)\|y\|_{Y_t}^2.$$

(A.3) For each $t \in [0,T]\backslash\Gamma$ and each $y \in Y_t$, $A(s)y$ is right continuous at t in X_t.

(A.4) $\|A(t)\|_{Y_t,X_t}$ is dominated by an integrable function $\xi(t)$ which is continuous at every point of $[0,T]\backslash\Gamma$.

Let $F(\cdot)$ be a Z-valued function with $F(t) \in X_t$ a.e. on $(0,T)$.

DEFINITION 3. In the above situation, we say that $u(\cdot) \in C([s,T];Z)$ is a solution of $(CP;F)_s$ with $y \in Y_s$, if

(i) $u(t) \in Y_t$ for every $t \in [s,T]$ and $u(s) = y$,

(ii) for all t except at most countably many points of (s,T), there is $\delta_t > 0$ such that u belongs to $AC([t-\delta_t, t+\delta_t];X_t)$ with

$$du(r)/dr + A(r)u(r) = F(r) \quad \text{in } X_t \quad \text{a.e. on } (t-\delta_t, t+\delta_t).$$

Now, we describe our main theorem.

THEOREM 1. Assume the conditions (S.1) ~ (S.4), (A.1) ~ (A.4). Then there exists an evolution operator $\{U(t,s); 0 \leq s \leq t \leq T\}$ on $\{X_t\}$ and on $\{Y_t\}$ with the following three properties.

(i) $\|U(t,s)\|_{X_s,X_t} \leq \exp \int_s^t \underline{f}(r)dr$, $\|U(t,s)\|_{Y_s,Y_t} \leq \exp \int_s^t \underline{g}(r)dr$, for $0 \leq s \leq t \leq T$.

(ii) For every $r \in [0,t]\setminus\Gamma$, and $y \in Y_r$, the function $U(t,s)y$ is continuous in X_r as to (t,s) in the neighborhood of (r,r).

(iii) If Y_t is a separable Banach space for every $t \in [0,T]\setminus\Gamma$, then for each $s \in [0,T]$ and $y \in Y_s$, $u(\cdot) = U(\cdot,s)y$ is a unique solution of $(CP;0)_s$ with $\sup_{s \leq t \leq T} \|u(t)\|_{Y_t} < \infty$.

THEOREM 2. Assume the same condition as (iii) of Theorem 1. Let $U(t,s)$ be an evolution operator given by Theorem 1. Let F be a Z-valued function on $[0,T]$ with $F(t) \in Y_t$ a.e. t on $(0,T)$, and with the following properties;

(i) There exists a sequence of step functions $\{F_m\}$ such that F_m belongs to Y_t for a.e. t and

$$F_m(s) \to F(s) \quad \text{in } X_t \quad \text{as } m \to \infty \quad \text{for a.e. } t \text{ on } (0,T),$$

(ii) $\|F(t)\|_{Y_t} \in L^1(0,T)$.

Then for every $y \in Y_s$ $(s \in [0,T])$,

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)F(r)dr$$

is a unique solution of $(CP;F)_s$ with $\sup_{s\leq t\leq T} \|u(t)\|_{Y_t} < \infty$.

Furthermore $u(\cdot)$ is absolutely continuous on $[s,T]$ in Z.

Assume moreover that for interval $[\tau_1,\tau_2] \subset [0,T]$, there exists positive constant d such that

$$d^{-1}\|\cdot\|_{\tau_1} \leq \|\cdot\|_{X_t} \leq d\|\cdot\|_{\tau_1} \quad \text{for} \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2.$$

Then, $u(t)$ is absolutely continuous in X_{τ_1} at to t on $[\tau_1,\tau_2]$.

REMARK 2.2. Assume that $[0,T]$ is devided into finite intervals $\{I_i\}_{i=1,\cdots,n}$ with the following properties; for each i, $X_t \sim X_i$ and $Y_t \sim Y_i$ a.e. t on I_i, and $F(\cdot)$ is X_i-measurable on I_i. Then (i) is satisfied.

§3. Application

Let $\Lambda = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$ be the spectral decomposition of Λ.

For a nonnegative number κ, we define Banach space D_κ as

$$D_\kappa = D(\Lambda^\kappa), \text{ the domain of } \Lambda^\kappa, \text{ with graph norm of } \Lambda^\kappa,$$

where $\Lambda^\kappa = \int_0^\infty \lambda^\kappa dE_\lambda$. For a negative number κ, we define

$$D_\kappa = (D_{-\kappa})^*, \text{ the dual space of } D_\kappa.$$

We put

(3.1) $\quad \tau = (\alpha+2+\nu)/\{4(\alpha+1)\}\ (> -1/4), \quad \tau' = \min(\tau,1/2),$

(3.2) $\quad \sigma = (\alpha+\nu)/\{4(\alpha+1)\}\ (> -1/4), \quad \sigma' = \min(\sigma,0).$

Here we note that $\tau + \sigma = 1/2 + \nu/\{2(\alpha+1)\}$. For a real number κ, we define product spaces as

(3.3) $$\pi_t^\kappa = \begin{cases} D(\Lambda^{\frac{1}{2}+\kappa}) \times D(\Lambda^\kappa) & \text{for } t \neq 0, \\ D(\Lambda^{\frac{\tau}{2}+\kappa}) \times D(\Lambda^{\frac{\sigma}{2}+\kappa}) & \text{for } t = 0. \end{cases}$$

We assume that $\Xi(t)$ and f satisfy the following.

(H1) For every $y \in D_{1+\kappa}$, $\Xi(\cdot)y$ is a $D_{(1/2)+\kappa}$-valued measurable function on (S_1, S_2) with

$$\|\Xi(t)\|_{D_{1+\kappa}, D_{(1/2)+\kappa}}, \quad \|\Xi(t)\|_{D_{(1/2)+\tau'-\delta+\kappa}, D_{\tau'-\delta+\kappa}} \leq b(t),$$

for some positive number δ and positive function $b(t)$ satisfying

$$|t|^{-\alpha-1} b(t) \in L^1(S_1, S_2) \qquad \text{if } \alpha + \nu \geq 0,$$

$$|t|^{\nu} b(t) \in L^1(S_1, S_2) \qquad \text{if } \alpha + \nu < 0.$$

(H2) f is a H-valued function on $[S_1, S_2]$ satisfying

$$|t|^{(-\alpha+\nu)/2} f(t) \in L^1(S_1, S_2;\, D_{1/2}) \qquad \text{if } \alpha + \nu \geq 0,$$

$$|t|^{\nu} f(t) \in L^1(S_1, S_2; D_{1/2}) \qquad \text{if } \alpha + \nu < 0.$$

Now we have prepared to state a theorem for (WE).

Theorem 2. Let κ be arbtrary fixed real number. Let (0.3) ~ (0.6), (H1), (H2) hold. Then for every $(u_0, u_1) \in \pi_{t_0}^{(1/2)+\kappa}$, there exists a unique solution u of (WE) in the following sense;

$$u \in C([t_0, S_2]; D_{\tau'+(1/2)-\delta+\kappa}) \cap C^1([t_0, S_2]; D_{\sigma'-\delta+\kappa})$$

$$\cap\, AC_{loc}([t_0, S_2]\setminus\{0\}; D_{(1/2)+\kappa}) \cap AC_{loc}([t_0, S_2]\setminus\{0\}; D_{\kappa}),$$

$$|t|^{\nu} u'(t) \in C([t_0, S_2]; D_{\kappa}),$$

(0.1) holds in D_{κ} a.e. on (t_0, S_2),

$u(0) = u_0$, $\quad |t|^{\nu} u'(t)\big|_{t=t_0} = u_1$ (so that $u'(0) = 0$ if $t_0 = 0$ and $\nu < 0$).

Furthermore, the following estimates hold:

$$\text{(3.4)} \qquad \sup_{t_0 \leq t \leq S_2} \left(\|u(t)\|_{D_{\tau'+(1/2)+\kappa}} + \|u'(t)\|_{D_{\sigma'+(1/2)+\kappa}}\right) < \infty.$$

$$\|u''(t)\|_{\kappa} \leq \begin{cases} C_1(|t|^{(\alpha+\nu)/(1-\nu)} + |t|^{-(\alpha+\nu)/(1-\nu)} b(t) \\ \quad + |\phi(t)| + \|f(t)\|) & \text{if } \alpha + \nu \geq 0, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \leq C_1(|t|^{2(\alpha+\nu)/(1-\nu)} + b(t) \\ \quad + |t|^{(\alpha+\nu)/(1-\nu)}|\phi(t)| + \|f(t)\|) \quad \text{if } \alpha + \nu < 0, \end{array}\right.$$

for some positive constant C_1.

REMARK 3.1. Assume moreover that ϕ, Ξ and f satisfy;

$\phi \in C^1([t_0,S_2] \setminus \{0\};[0,\infty])$, $f \in C([t_0,S_2]\setminus\{0\};D_{(1/2)+\kappa})$,

$\Xi(\cdot)$ is strongly continuous on $[t_0,S_2]\setminus\{0\}$, as an operator from $D_{1+\kappa}$ to $D_{(1/2)+\kappa}$. Then

$$u \in \bigcap_{i=0}^{3} C^i([t_0,S_2]\setminus\{0\};D_{\{(2-i)/2\}+\kappa}).$$

REMARK 3.2. The continuity of u and u' in $D_{\gamma'+(1/2)-\delta+\kappa}$ and in $D_{\sigma'+\kappa}$ respectively combined with (3.4) implies that

$$u \in C([t_0,S_2];D_{\gamma'+(1/2)-\varepsilon+\kappa}) \cap C^1([t_0,S_2];D_{\sigma'-\varepsilon+\kappa})$$

for every $\varepsilon > 0$.

SKETCH of the PROOF. We assume that $[S_1,S_2] = [-1,1]$, which does not lose gerenerity. Transforming (WE) into the s-invarent equation for v by changing the variables:

$$t(s) = |s|^{\beta-1}s \quad (\beta = 1/(1-\nu)\ (> 0)\ ), \qquad v(s) = u(t(s)),$$

for $-1 \leq s \leq 1$, we can reduce this theorem to the case that $\alpha > -1/2$ and $\nu = 0$.

(1) First we assume that $\phi = 0$, $\Xi = 0$ and $f = 0$. Then, by putting $v = u'$, (WE) is transformed into the equation:

$$dU(t)/dt + A(t)U(t) = 0 \quad \text{for } t_0 < t < 1, \qquad U(t_0) = \binom{u_0}{u_1},$$

where

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ \phi^2(t)\Lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

We define Hilbert spaces X_t^{κ} $(-1 \leq t \leq 1)$ so that $X_t = X_t^{\kappa}$, $Y_t = X_t^{(1/2)+\kappa}$ satisfy the assumption of Theorem 1, then we get a solution. Here we mention roughly what $\|\cdot\|_{X_t^\kappa}$ is. For $\lambda > 1$ determing t_λ by $8C^3 t_\lambda^{-\alpha-1} = \lambda^{1/2}$, we define the functions p , q and r on $[-1,1] \times [0,\infty)$ as follows;

$$p(t,\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leqq \lambda \leqq 1,\ -1 \leqq t \leqq 1, \\ \lambda\{\phi(t_\lambda)(t+t_\lambda)+\phi(-t_\lambda)(t_\lambda - t)\}/(2t_\lambda) & \text{for } \lambda > 1,\ |t| \leqq t_\lambda, \\ \lambda\phi(t) & \text{for } \lambda > 1,\ t_\lambda < |t| \leqq 1. \end{cases}$$

$$q(t,\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leqq \lambda \leqq 1,\ -1 \leqq t \leqq 1, \\ (2t_\lambda)/\{\phi(t_\lambda)(t+t_\lambda)+\phi(-t_\lambda)(t_\lambda - t)\} & \text{for } \lambda > 1,\ |t| \leqq t_\lambda, \\ \phi^{-1}(t) & \text{for } \lambda > 1,\ t_\lambda < |t| \leqq 1. \end{cases}$$

$$r(t,\lambda) = \begin{cases} 0 \quad \text{for } 0 \leqq \lambda \leqq 1,\ -1 \leqq t \leqq 1, \text{ or } \lambda > 1,\ |t| \leqq t_\lambda, \\ \phi^{-2}(t)\phi'(t)/2 & \text{for } \lambda > 1,\ t_\lambda < |t| \leqq 1. \end{cases}$$

Then

$$\left\| \binom{x}{y} \right\|_{X_t^\kappa} \sim \int_0^\infty (p(t,\lambda)\,dE_\lambda \|x\|^2 + q(t,\lambda)\,dE_\lambda \|y\|^2 + 2r(t,\lambda)\,dE_\lambda(x,y)).$$

(2) In general case, using Theorem 2 and the contraction mapping theorem, we obtain a solution. Q.E.D.

REFERENCES

[1] Bernardi M. L., Second order abstract differential equations with singular coefficients, Ann. Mat. Pure Appl., 130 (1982), 257-286.

[2] Carroll R. W. & Showlter R. E., Singular or degenerate Cauchy problems, Academic Press (1976).

[3] Coppoletta G., Abstract singular evolution equations of "hyperbolic" type, J. Funct. Anal., 50 (1983), 50-66.

[4] Lacomslez C., Sur une équation d'évolution du second order en t à coefficients dégénérés ou singuliers, C. R. Acad. Sci. Paris, 274 (1974), 241-244.

[5] Povoas M., On a second order degenerate hyperbolic equation, Boll. Un. Mat. Ital., (5), 16-A (1979), 349-355.

非回帰的 Banach空間の性質について

広島大 理　中村 元

はじめに　この原稿は，Davis と Johnson の 1973年の論文 [2] をもとにして作ったものです。Theorem は，彼らが論文の最後に述べている open problem（Banach 空間の非回帰性の特徴づけに関する内容）の肯定的結果です。しかし，最近 Davis先生から，上記の open problem は，D. Dulst と I. Singer によって 1976年に [6] ですでに解かれていることを指摘されました。彼らの証明は Davis and Johnson の論文 [2] の延長上にありますが，この原稿の証明は，上記の open problem を R.C. James の定理（Banach空間の非回帰性を not norm-attaining functional の存在で特徴づけた話 [3, p. 6]）を使って解いた別証明になります。

1. The objective of this paper is to establish the following result:

Theorem. Every nonreflexive Banach space can be renormed so that it is not the range of a norm-one projection of its second dual.

The validity of this theorem was first raised as an open question in [2] by Davis and Johnson, and the next result due to them is an immediate consequence.

Corollary ([2]). If X is a nonreflexive Banach space, then there is an equivalent norm on X under which X fails to be isometric to a dual space.

The property of Banach spaces mentioned in the above theorem characterizes the nonreflexivity of Banach spaces. Our proof of the theorem is based on the application of James' Theorem concerning bounded linear functionals which do not attain their norms ([3, p.6]) and on the use of the set $R(X)$ of all elements $x^{**} \in X^{**}$ such that X is orthogonal to x^{**} in the sense of Birkhoff ([1] and [4]). It turns out that a geometrical proof for the conjecture of Davis and Johnson is obtained, and that our argument provides an elementary proof of their result given in [2].

2. Let $(Z,|\cdot|)$ be a Banach space and Z^*, Z^{**} the succesive dual spaces. We consider Z as canonically embedded in Z^{**}. Given a pair of subsets M and N of Z^{**} we write $M + N$ for the set $\{x+y : x \in M, y \in N\}$. If M and N are closed subspaces of Z, the direct sum of M

and N is denoted by $M \oplus N$. The space of real numbers is written as $\mathbb{R}$. For each $f \in Z^*$, $K(f)$ denotes the set of all $x^{**} \in Z^{**}$ with $x^{**}(f) = 0$. Further, $B(Z)$ and $S(Z)$ stand for the closed unit ball and the unit sphere of Z, respectively.

An element $x \in Z$ is said to be orthogonal (in the sense of Birkhoff) to an element $y \in Z$ if $|x| \leq |x + \alpha y|$ for any scalar α. In this case we write $x \perp y$. Let $M, N \subset Z$. We write $M \perp N$ if $x \perp y$ for $x \in M$ and $y \in N$. Given a linear subspace M of Z, we define a subset $R(M)$ of Z^{**} by $R(M) = \{x^{**} \in Z^{**} : M \perp \{x^{**}\} \text{ in } Z^{**}\}$. For the basic properties of $R(M)$ we refer to [4].

Let $(Z,|\cdot|)$ be a nonreflexive Banach space. Then by James' Theorem there is $f \in S(Z^*)$ such that $|f(x)| < 1$ for $x \in B(Z)$. We consider the direct sum $\tilde{Z} = Z \oplus \mathbb{R}$ and write (x,t) for the generic element of $\tilde{Z}$. We fix any $\delta \in (0,1)$ and then define a norm $\|\cdot\|$ on Z by

$$(1) \qquad \|(x,t)\| = \max\{|x|, |t + \delta f(x)|, |t|\} \qquad \text{for } (x,t) \in \tilde{Z}.$$

Then $(\tilde{Z},\|\cdot\|)$ becomes a Banach space and $(Z,|\cdot|)$ may be regarded as a closed linear subspace with codimention one of $\tilde{Z}$.

To prove our theorem, we choose a closed hyperplane M of the nonreflexive Banach space X and consider the Banach space $\tilde{M} = M \oplus \mathbb{R}$ with the norm defined by (1). Then $\tilde{M}$ is isomorphic to X, and we shall show that $\tilde{M}$ is not the range of any norm-one projection of $\tilde{M}^{**}$.

LEMMA 1. Let Z and f be as above. Suppose that there is a subset N of Z^{**} such that $Z^{**} = Z + N$ and $Z \perp N$. Then N is not contained in $K(f)$.

PROOF. Choose an $x^{**} \in X^{**}$ such that $x^{**}(f) = |x^{**}| = 1$. By assumption one finds $x \in Z$ and $y \in N$ such that $x^{**} = x + y$. Since

$x \perp y$, we have $|x| \leq |x^{**}| = 1$. Hence $|f(x)| < 1$ by the property of f, and so $f(x) \neq x^{**}(f)$. This shows that $y(f) \neq 0$ and $N \not\subset K(f)$.

Let Z, $\tilde{Z}$ and f be as above. Since the norm topology on $\tilde{Z}$ defined by (1) is equivalent to the product topology on $Z \times \mathbb{R}$, the second dual $\tilde{Z}^{**}$ is regarded as the direct sum $Z^{**} \oplus \mathbb{R}$. Hence the generic element of $\tilde{Z}^{**}$ may be written as (x^{**},t) with $x^{**} \in Z^{**}$ and $t \in \mathbb{R}$, and it is seen from Goldstine's theorem that the norm on $\tilde{Z}^{**}$ is defined by

$$(2) \quad \|(x^{**},t)\| = \max\{|x^{**}|, |t + \delta x^{**}(f)|, |t|\} \qquad \text{for } (x^{**},t) \in \tilde{Z}^{**}.$$

Further, it is not difficult to check that $R(\tilde{Z})$ consists of the elements $(x^{**},t) \in \tilde{Z}^{**}$ such that $\|(x,s)\| \leq \|(x + \xi x^{**}, s + \xi t)\|$ for any $(x,s) \in \tilde{Z}$ and any scalar ξ.

LEMMA 2. Let $(x^{**},t) \in \tilde{Z}^{**}$. Then $(x^{**},t) \in R(\tilde{Z})$ iff $x \perp x^{**}$ in $(Z^{**},|\cdot|)$ for $x \in Z$, $x^{**}(f) = 0$ and $t = 0$.

PROOF. Assume that $x \perp x^{**}$, $x^{**}(f) = 0$ and $t = 0$. Let $(x,s) \in \tilde{Z}$, and $\xi \in \mathbb{R}$, then $\|(x + \xi x^{**}, s + \xi t)\| = \max\{|x + \xi x^{**}|, |s + \delta f(x)|, |s|\}$ $\geq \max\{|x|, |s + \delta f(x)|, |s|\} = \|(x,s)\|$ by (2). So, $(x^{**},t) \in R(\tilde{Z})$. Conversely, suppose that $(x^{**},t) \in R(\tilde{Z})$. First we choose $(x,s) \in \tilde{Z}$ so that $|x| < |s|$ and $|s + \delta f(x)| < |s|$. Then, $\|(x,s)\| = |s|$ and $\|(x,s) + \xi(x^{**},t)\|$ $= |s + \xi t|$ provided that $|\xi|$ is sufficiently small. But $(x^{**},t) \in R(\tilde{Z})$, and so $|s + \xi t| \geq |s|$ for $|\xi|$ sufficiently small. From this it follows that $t = 0$. Next choose $(x',s') \in Z$ so that $|s'| < |s' + \delta f(x')|$ and $|x'| <$ $|s' + \delta f(x')|$. Since $\|(x',s') + \xi(x^{**},0)\| \geq \|(x',s')\|$ for any ξ, we have $|s' + \delta\{f(x') + \xi x^{**}(f)\}| \geq |s' + \delta f(x')|$ for $|\xi|$ sufficiently small. But this implies $x^{**}(f) = 0$. Since $(x,0) \perp (x^{**},0)$ in $\tilde{Z}^{**}$ for $x \in Z$, we have $\|(x + \xi x^{**},0)\| \geq \|(x,0)\|$ for any ξ and any $x \in Z$. But $\|(x + x^{**},0)\| = |x + \xi x^{**}|$ and $\|(x,0)\| = |x|$ by the choice of δ, we have $x \perp x^{**}$ in $(Z^{**},|\cdot|)$.

LEMMA 3. $\tilde{Z}^{**} \neq \tilde{Z} + R(\tilde{Z})$.

PROOF. Let $N = \{x^{**} \in Z^{**} : (x^{**},0) \in R(\tilde{Z})\}$. Then $Z \perp N$ in $(Z^{**},|\cdot|)$ and $N \subset K(f)$ by Lemma 2. Furthermore it follows from Lemma 1 that $Z^{**} \neq Z + N$. But $(Z + N) \times \mathbb{R} = \{(x^{**},t) : x^{**} \in Z + N,\ t \in \mathbb{R}\}$ $= \tilde{Z} + R(\tilde{Z})$, and thus we have $\tilde{Z} + R(\tilde{Z}) \neq \tilde{Z}^{**}$.

We now give the proof of our Theorem.

Proof of Theorem. Let $(X,|\cdot|)$ be a nonreflexive Banach space and let M be any closed hyperplane in X. Take any $x_0 \in X - M$ and denote by $[x_0]$ the one-demensional space spanned by x_0. Then $X = M \oplus [x_0]$. Since M becomes a nonreflexive Banach space under the norm $|\cdot|$, we can apply James' theorem to find an $f \in S(M^*)$ which does not attain its norm. Let $\tilde{M} = M \oplus \mathbb{R}$ and define a norm $\|\cdot\|$ on $\tilde{M}$ by (1). Then $(X,|\cdot|)$ is isomorphic to $(\tilde{M},\|\cdot\|)$. Applying Lemma 3 to the Banach space $\tilde{M}$, we have

$$\tilde{M}^{**} \neq \tilde{M} + R(\tilde{M}) \tag{3}$$

Suppose then that there is a norm-one projection P from $\tilde{M}^{**}$ onto $\tilde{M}$. Then $\tilde{M}^{**} = \tilde{M} \oplus P^{-1}(0)$ and $P^{-1}(0) \subset R(\tilde{M})$, since for $(x,s) \in \tilde{M}$ and $(x^{**},t) \in P^{-1}(0)$ we have $\|(x,s)\| = \|p(x + \xi x^{**}, s + \xi t)\| \le \|(x + \xi x^{**}, s + \xi t)\|$ for all ξ. This contradicts (3), and it is concluded that $\tilde{M}$ is not the range of any norm-one projection on $\tilde{M}^{**}$. The proof is thereby completed.

3. A Banach space X is called a dualoid, if there is a norm-one projection of its second dual space onto X. (See [1], [4] for the basic properties of dualoids.) Now our theorem states that given a nonreflexive Banach space $(X,|\cdot|)$ there is at least one equivalent norm $\|\cdot\|$ on X

such that $(X,\|\cdot\|)$ is not a dualoid. We then give two remarks on this result.

Firstly, it is seen from the Dixmier decomposition that a dual Banach space is a dualoid. By virtue of this fact, Corollary follows immediately from the theorem. It should be noted that a dualoid need not be a dual space; the space $L^1(0,1)$ is known as a typical example.

Secondly, it is possible to show by modifying the definition (1) of the norm of $\tilde{Z}$ that there are many such equivalent norms in the following sense: Consider the space $\mathfrak{N}$ of norms on X equivalent to the original norm $|\cdot|$. Then one can introduce a metric ρ on $\mathfrak{N}$ by defining

$$\rho(\|\cdot\|,\|\cdot\|') = \sup_{x\neq 0}[\log\max\{\|x\|/\|x\|',\|x\|'/\|x\|\}]$$

for $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|' \in \mathfrak{N}$. Let $\mathfrak{P}$ be the set of all norms $\|\cdot\|$ in $\mathfrak{N}$ such that $(Z,\|\cdot\|)$ is not a dualoid. Then it is proved that $\mathfrak{P}$ is dense in $\mathfrak{N}$ with respect to the metric ρ. This means that given a nonreflexive Banach space $(X,|\cdot|)$ we can find an equivalent norm on X under which the unit ball with respect to $|\cdot|$ is deformed as slightly as we please but X fails to be a dualoid.

Acknowledgement. The author expresses his sincere gratitude to Professor K. Hashimoto for his valuable advices.

References

1. R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodim-Property*, Lecture Notes in Mathematics, 993, Springer-Verlag, Berlin-New York-Tokyo, 1983, 159-168.

2. W. J. Davis and W. B. Johnson, A renorming of nonreflexive Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 37, 1973, 486-488.

3. J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, 92, Springer-Verlag, Berlin-New York-Tokyo, 1984.

4. G. Godefroy, Etude des projections de norme 1 de E" sur E. Unicite de certains preduaux. Applications, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29, 1979, 53-70.

5. K. Hashimoto, G. Nakamura and S. Oharu, Riesz's Lemma and orthogonality in normed spaces, Hiroshima Math. J., 16, 1986, 279-304.

Department of Mathematics, Hiroshima University, Hiroshima 730, Japan

付加

6 D.V. Dulst and I. Singer, On Kadec—Klee norms on Banach spaces, Studia Math., 54, 1976, 205—211.

On a decay property of weak solution for semilinear evolution equation of parabolic type

Hideo Kozono

Department of Mathematics, Hokkaido University

Introduction

The purpose of this report is to present the abstract theorems on the existence and a certain decay property of weak solution for a semilinear evolution equation of parabolic type. Then we shall show that these theorems are applicable to the M.H.D. equations <u>in an exterior domain</u>. In the case of the Navier-Stokes equations, the energy decay for a weak solution was shown by Masuda [3] and Sohr [6].

Let X be a separable Hilbert space. The abstract equation of evolution we consider has the form

$$\begin{cases} du(t)/dt + Au(t) + Nu(t) = f(t) & t > 0, \\ u(0) = a. \end{cases} \tag{E}$$

Here A is a non-negative self-adjoint operator in X, while N is a non-linear operator in X specified later.

Our problem reads as follows.

<u>Problem</u>

<u>Construct a weak solution</u> $u = u(t)$ <u>of</u> (E) <u>on</u> $(0, \infty)$ <u>such that</u> $\|u(t)\| \to 0$ as $t \to \infty$. <u>Here</u> $\| \ \|$ denotes the norm on X.

Concernig our problem, we follow Madsuda [3] and Sohr [6].
At the first step, we show that there exists a positive number α such that any weak solution u of (E) with $\int_0^\infty \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau <$ ∞ satisfies

$$\|(1 + A)^{-\alpha}u(t)\| \to 0, \text{ as } t \to \infty. \qquad \text{(W.D.)}$$

An immediate consequence of (W.D.) is that

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^2 d\tau = 0. \qquad (0.1)$$

See Masuda [3, Corollary 1].
Hence in order to solve our problem, it is sufficient to construct a weak solution u of (E) satisfying the energy inequality of strong form:

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_s^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau \leq \|u(s)\|^2 + 2\int_s^t (f(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

(E.I.S.)

for almost all $s \geq 0$, including $s = 0$, and all $t > 0$ such that $s < t$. ((,); the scalar product on X)

In fact, if f is a summable function on $(0, \infty)$ with values in X, we see by (E.I.S.) that the inequality

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_s^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau \leq \|u(s)\|^2 + M_0\int_s^\infty \|f(\tau)\|\, d\tau \qquad (0.2)$$

holds for almost all $s \geq 0$ and all $t > s$. ($M_0 := \sup_{\tau>0} \|u(\tau)\|$)

It follows from (0.1) and (0.2) that a weak solution u of (E) with (E.I.S.) satisfies $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|^2 = 0$.

In section 1, we state the general results of existence and decay property for weak solutions of (E) under some assumptions on A and N. Section 2 is devoted to apply the theorems obtained in section 1 to the magnethydrodynamic(M.H.D.) equations in a three-dimensional exterior domain.

1 Existence and decay property (W.D.) of weak solutions of (E)

Let X be a separable Hilbert space. We denote by (,) and $\|\ \|$ the scalar product and the norm on X. Suppose that A is a non-negative self-adjoint operator in X with the core D. we set

$$V = D(A^{1/2}). \quad (D(S);\ \text{the domain of } S)$$

Equipped with the scalar product

$$((u, v)) = (u, v) + (A^{1/2}u, A^{1/2}v),$$

V is a Hilbert space. We denote by $|||\ \ |||$ the norm on V defined by $|||u||| = ((u, u))^{1/2}$.

Let X^* and V^* denote the dual spaces X and V, respectively. Identifying X with X^*, we have the usual inclusions

$$V \subset X \equiv X^* \subset V^*,$$

where each space is dense in the following one and the injections are continuous.

For $T > 0$, we set $\mathcal{Y}_T = L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T; V)$. $\mathcal{Y}_T$ is the Banach space with norm $|u|_T = \sup\limits_{0<t<T} \|u(t)\| + \{\int_0^T \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau\}^{1/2}$.

We can now introduce the assumptions on N.

N is a continuous mapping from V into V^* satisfying the following conditions.

<u>Assumption</u> 1. There exists a monotone increasing function $L_1 = L_1(\lambda)$ such that the inequality

$$|\langle Nu, \phi\rangle| \le L_1(\|u\|)(1 + \|A^{1/2}u\|)\|A^{1/2}u\|\|A^{1/2}\phi\|$$

holds for all u and ϕ in V. Here and hereafter $\langle\ ,\ \rangle$

denotes the duality between V^* and V.

Assumption 2. There exist a constant $0 \leq p < 2$ and a monotone increasing function $L_2 = L_{2,\phi}(\lambda)$ depending only on ϕ in V such that the inequality

$$|\langle Nu, \phi\rangle| \leq L_2(\|u\|)(1 + \|A^{1/2}u\|)^p$$

holds for all u in D.

(4) For each $T > 0$, there exist a monotone increasing function $L_3 = L_{3,v,\phi}(\lambda)$ depending only on $v \in \mathcal{Y}_T$ and $\Phi = \Phi(t) = h(t)\phi$ ($h \in C_0^1([0, T))$, $\phi \in D$), an interger $K = K_{\varepsilon,v,\Phi}$ depending only on $\varepsilon > 0$, v and Φ as above, positive numbers α_i $(i=1,\dots,K)$ and Ψ_i $(i=1,\dots,K)$ in $C^0([0, T]; X)$ such that the inequality

$$\left|\int_0^T \langle Nu(\tau) - Nv(\tau), \Phi(\tau)\rangle\, d\tau\right|$$

$$\leq L_3(|u|_T)\{\varepsilon + \int_0^T (\textstyle\sum_{i=1}^K |(u(\tau) - v(\tau), \Psi_i(\tau))|)^{\alpha_i}\, d\tau\}$$

holds for all $u \in \mathcal{Y}_T$.

For a weak solution of (E), we give the following definition.

<u>Definition</u>.

Let the initial data a be in X and let f be in $L^1(0, \infty; X)$. Suppose that the assumptions 1, 2 and 3 hold. u is called a weak solution of (E), if (i) and (ii) hold:

(i) $u \in L^\infty(0, \infty; X) \cap L^2_{loc}(0, \infty; V)$.

(ii) For all $\Phi \in C_0^1([0, \infty); V)$, the equality

$$\int_0^\infty \{-(u(t), \partial_t \Phi(t)) + (A^{1/2}u(t), A^{1/2}\Phi(t)) + \langle Nu(t), \Phi(t)\rangle\} dt$$

$$= (a, \Phi(0)) + \int_0^\infty (f(t), \Phi(t))\, dt$$

is satisfied.

Our result on existence of weak solutions reads:

Theorem 1.

<u>Let the initial data</u> a <u>be in</u> X <u>and let</u> f <u>be in</u> $L^1(0, \infty; X)$. <u>Suppose that the assumptions</u> 1, 2 <u>and</u> 3 <u>hold</u>. <u>If</u> $\langle Nu, u\rangle \geq 0$ <u>for all</u> $u \in V$, <u>then there exists a weak solution</u> u <u>of</u> (E) <u>such that the inequality</u>

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2\, d\tau \leq \|a\|^2 + 2\int_0^t (f(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

<u>holds for all</u> $t > 0$.

Our result on the decay property of weak solutions reads:

Theorem 2.

Let a be in X and let f be in $L^1(0, \infty; X)$. Suppose that the assumptions 1, 2 and 3 hold. If zero is not an eigenvalue of A, then any weak solution of (E) with $\int_0^\infty \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ satisfies

$$\lim_{t\to\infty} \|(1 + A)^{-1/4}u(t)\| = 0.$$

For the proof of Theorems 1 and 2, see Kozono [2].

2 Application

In this section, we apply the theorems obtained in the preceding section to the M.H.D. equations in a three-dimensional exterior domain. In the case of the Navier-Stokes equations, the similar result was obtained by Masuda [3] and Sohr [6]. The main work is to check whether or not the assumptions 1, 2 and 3 hold.

Let O be a bounded domain in R^3 with smooth boundary ∂O. We set $\Omega = R^3 - O$. For simplicity, we assume that Ω is simply connected. In $Q := \Omega\times(0, \infty)$, we consider the following magnetohydrodynamic(M.H.D.) equations;

$$\partial_t v - \Delta v + (v, \nabla)v + B\times \mathrm{rot} B + \nabla\pi = b \quad \text{in} \quad Q,$$
$$\partial_t B - \Delta B + (v, \nabla)B - (B, \nabla)v = 0 \quad \text{in} \quad Q,$$
$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad \mathrm{div}\, B = 0 \quad \text{in} \quad Q,$$
$$v = 0, \quad B\cdot\nu = 0, \ \mathrm{rot} B\times\nu = 0, \quad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0, \infty),$$
$$v\big|_{t=0} = v_0 , \quad B\big|_{t=0} = B_0 .$$

Here $v = v(x,t) = (v^1(x,t), v^2(x,t), v^3(x,t))$, $B = B(x,t) = (B^1(x,t), B^2(x,t), B^3(x,t))$ and $\pi = \pi(x,t)$ denote respectively the unknown velocity field of the fluid, magnetic field and pressure of the fluid, $b = b(x,t) = (b^1(x,t), b^2(x,t), b^3(x,t))$ denotes the given external force, $v_0 = v_0(x) = (v_0^1(x), v_0^2(x), v_0^3(x))$ and $B_0 = B_0(x) = (B_0^1(x), B_0^2(x), B_0^3(x))$ denote the given initial data and ν denotes the unit outward normal on $\partial\Omega$.

We introduce some function spaces.

Let $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ be the set of all C^∞ vector functions Φ with compact support in Ω, such that $\mathrm{div}\,\Phi = 0$ ($x\in\Omega$).

$L_\sigma^2(\Omega)$ denotes the closure of $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ in $L^2(\Omega) := L^2(\Omega)^3$.

We denote by P the orthogonal projetion from $L^2(\Omega)$ onto $L_\sigma^2(\Omega)$.

We define the operators A_D and A_N on $L_\sigma^2(\Omega)$ as follows:

$D(A_D) = H^2(\Omega)^3 \cap \{v \in H_0^1(\Omega)^3;\ \mathrm{div}\ v = 0\}$,

$A_D v = -P\Delta v$ for $v \in D(A_D)$,

$D(A_N) = \{B \in H^2(\Omega)^3;\ B\cdot\nu = 0,\ \mathrm{rot}\ B\times\nu = 0$ on $\partial\Omega\} \cap L^2_\sigma(\Omega)$,

$A_N B = -\Delta B$ for $B \in D(A_N)$.

Note that $-\Delta B \in L^2_\sigma(\Omega)$ if and only if $B \in D(A_N)$. With the aid of Miyakawa [5, Theorem 1.8] and [4, Theorem 3.8], we see that A_D and A_N are non-negative self-adjoint operators in $L^2_\sigma(\Omega)$. Moreover, we have

$$\|A_D^{1/2} v\|_{L^2} = \|\nabla v\|_{L^2} \quad \text{for} \quad v \in D(A_D^{1/2}), \tag{2.1}$$

$$\|A_N^{1/2} B\|_{L^2} = \|\mathrm{rot} B\|_{L^2} \quad \text{for} \quad B \in D(A_N^{1/2}). \tag{2.2}$$

In the context of section 1, we set

$$X = L^2_\sigma(\Omega)\times L^2_\sigma(\Omega), \quad D = D(A_D)\times D(A_N)$$

and

$$A = \begin{pmatrix} A_D & 0 \\ 0 & A_N \end{pmatrix} \quad \text{with the domain} \quad D(A) = D(A_D)\times D(A_N).$$

Then we have $V = D(A_D^{1/2})\times D(A_N^{1/2})$.

We define $Nu \in V^*$ for $u = {}^t[v,\ B] \in V$ by

$$\langle Nu,\ \Phi\rangle := \int_\Omega ((v,\ \nabla)v + B\times \mathrm{rot}B)\cdot\phi\ dx + \int_\Omega ((v,\ \nabla)B - (B,\ \nabla)v)\cdot\psi\ dx$$

for $\Phi = {}^t[\phi,\ \psi] \in V$.

By integration by parts, we have $\langle Nu,\ u\rangle = 0$ for all $u \in V$.

By the Hölder inequality, the Gagliardo-Nirenberg inequality and Duvaut-Lions [4, Chapter 7 Theorem 6.1], the inequalities

$$\left|\int_\Omega ((v,\ \nabla)v + B\times \mathrm{rot}B)\cdot\phi\ dx\right|$$

$$\le (\|v\|_{L^3}\|\nabla v\|_{L^2} + \|B\|_{L^3}\|\mathrm{rot}B\|_{L^2})\|\phi\|_{L^6}$$

$$\le C(\|v\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2}^{3/2} + \|B\|_{L^3}^{1/2}\|B\|_{H^1}^{1/2}\|\mathrm{rot}B\|_{L^2})\|\nabla\phi\|_{L^2}$$

$$\le C\{(1+\|v\|_{L^2})(1+\|A_D^{1/2}v\|_{L^2})\|A_D^{1/2}v\|_{L^2}+(1+\|B\|_{L^2})(1+\|A_N^{1/2}B\|_{L^2})\times$$

$$\times\|A_N^{1/2}B\|_{L^2}\}\|A_N^{1/2}\phi\|_{L^2},$$

and

$$\left|\int_\Omega ((v,\ \nabla)B - (B,\ \nabla)v)\cdot\psi\ dx\right|$$

$$= \left|\int_\Omega \mathrm{rot}(B\times v)\cdot\psi\ dx\right| = \left|\int_\Omega B\times v\cdot \mathrm{rot}\psi\ dx\right| \quad \text{(by integration by patrs)}$$

$$\le \|B\|_{L^3}\|v\|_{L^6}\|\mathrm{rot}\psi\|_{L^2}$$

$$\le C\|B\|_{L^2}^{1/2}\|B\|_{H^1}^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2}\|\mathrm{rot}\psi\|_{L^2}$$

$$\le C(\|B\|_{L^2} + \|\mathrm{rot}B\|_{L^2})\|\nabla v\|_{L^2}\|\mathrm{rot}\psi\|_{L^2}$$

$$\leq C(1 + \|B\|_{L^2})(1 + \|A_N^{1/2}B\|_{L^2})\|A_D^{1/2}v\|_{L^2}\|A^{1/2}\psi\|_{L^2}$$

hold for all $u = {}^t[v, B] \in V$ and all $\Phi = {}^t[\phi, \psi] \in V$.
Hence the assumption 1 follows.
Moreover, for each $\phi \in D(A_D)$ and each $\psi \in D(A_N)$ the inequalities

$$\left|\int_\Omega ((v, \nabla)v + B\times \mathrm{rot}B)\cdot\phi \, dx\right|$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\phi(x)|(\|v\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|B\|_{L^2}\|\mathrm{rot}B\|_{L^2})$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\phi(x)|(\|v\|_{L^2}\|A_D^{1/2}v\|_{L^2} + \|B\|_{L^2}\|A_N^{1/2}B\|_{L^2})$$

and

$$\left|\int_\Omega ((v, \nabla)B - (B, \nabla)v)\cdot\psi \, dx\right|$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\psi(x)|\{\|v\|_{L^2}(\|B\|_{L^2} + \|A_N^{1/2}B\|_{L^2}) + \|B\|_{L^2}\|A_D^{1/2}v\|_{L^2}\}$$

hold for all ${}^t[v, B] \in V$.
Taking $p = 1$ and

$$L_{2,\Phi}(\lambda) := (\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|\phi(x)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|\psi(x)|)(1+\lambda^2)$$

for each $\Phi = {}^t[\phi, \psi] \in D \subset L^\infty(\Omega)^3\times L^\infty(\Omega)^3$, we see that the assumption 2 holds.

We obtain the assumption 3 by using Masuda's beautiful technique. See Masuda [3, Lemma 2.5].

Finally, it remains to show that zero is not an eigenvalue of A. In fact, by (2.1) it is easy to see that zero is not an eigenvalue of A_D. Suppose that $A_N B = 0$ for $B \in D(A_N)$. Then by (2.2), rot $B = 0$ in Ω. Since div $B = 0$ in Ω and since $B \cdot \nu = 0$ on $\partial\Omega$, it follows from the classical potential theory that there is a scalar function p with $p \in L^2_{loc}(\Omega)$, $\nabla p \in L^2(\Omega)$ and

$$\Delta p = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \partial p/\partial\nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

such that $B = \nabla p$.

According to Miyakawa [5, Lemma 1.4], such p must satisfy that $\nabla p = 0$ and hence $B = 0$. Thus zero is not an eigenvalue of A_N.

Remark.

Theorems 1 and 2 are appplicable to the following system of semi-linear parabolic equations:

$$\partial_t u^i - \sum_{j,k=1}^{L} \partial_{x^j}(a_{jk}(x)\partial_{x^k}u^i) + |u|^p \sum_{j=1}^{L} b^i_j(x)u^j = f^i \quad \text{in} \quad Q,$$

$$(i = 1,\ldots,L)$$

$u^i = 0$ on $\partial\Omega\times(0, \infty)$,

$u^i\big|_{t=0} = a^i$,

where $Q = \Omega\times(0, \infty)$ (Ω; bounded or unbounded domain in R^n) and $|u| = \{ \Sigma_{j=1}^{L}(u^j)^2\}^{1/2}$.

Suppose that $3 \leq n \leq 6$ and $1 \leq \rho \leq 6/n$.

We assume that a_{ij} and b^i_j are in $\mathcal{B}^\infty(\bar\Omega)$ and $a_{ij} = a_{ji}$ for all $i, j = 1,\dots,L$. Moreover, we assume that there is a positive constant δ such that

$$\Sigma_{j,k=1}^{L} a_{jk}(x)\xi^j\xi^k \geq \delta|\xi|^2, \quad \Sigma_{i,j=1}^{L} b^i_j(x)\xi^i\xi^j \geq \delta|\xi|^2$$

hold for all $x\in\bar\Omega$ and all $\xi = (\xi^1,\dots,\xi^L) \in R^L$.

References

1. Duvaut, G., Lions, J.L.: Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1976

2. Kozono, H.: On a decay property of weak solution for semilinear evolution equation of parabolic type and its applications. to appear

3. Masuda, K.: Weak Solutions of Navier-Stokes Equations. Tôhoku Math. J. 36, 623-646 (1984)

4. Miyakawa, T.: The L^p approch to the Navier-Stokes equations with the Neumann boundary condition. Hiroshima Math. J. 10, 517-537 (1980)

5. Miyakawa, T.: On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math. J. 12, 115-140 (1982)

6. Sohr, H.: On the Decay of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. preprint

$K(x)e^u$ type の非線形項を持つ Nonlinear Elliptic PDE の解の存在とその性質

学習院大·理　倉田和浩

§0. Introduction

ここで扱う問題は、次のものである。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: smooth bounded domain

$k > 0$: given constant

$K(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$; given function

に対して、次の境界値問題を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} (k-\Delta)u = K(x)e^u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(n : 外向き単位法線ベクトル)

ここでは、仮定：

(2)　$n = 2,\ K(x) \geq 0,\ K(x) \not\equiv 0$ in Ω

の下で、(1) の "変分的" な解の存在、及び解の non-uniqueness について報告する。

$K(x)$ が "符号を変える" 場合、特に $k=0$, $n \geq 3$ で (1) を考察することは興味深い。

最後に、Yamabe type の方程式について

少しふれる。

§1. N.S. Trudinger の不等式と
その Sharp estimate について

以下.
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: smooth. bdd domain
とする。

まず次の形で N.S. Trudinger の不等式を述べる。

Lemma. 1 (N.S. Trudinger)

$\exists \beta, \gamma > 0$ s.t.

$$(3) \quad \int_\Omega e^{\alpha u(x)} dx \leqq \gamma \exp\left(\frac{\alpha^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2}{4\beta} + \alpha u_\Omega\right)$$

for $\forall \alpha > 0$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.

が成り立つ。 (ここで $u_\Omega \equiv \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.)

この不等式から、次の重要な Compactness 定理がでてくる。

Lemma. 2

$u_j \in H^1(\Omega)$, $u_j \to u$ weakly in $H^1(\Omega)$

$\Longrightarrow$ $e^{u_j} \to e^u$ strongly in $L^p(\Omega)$.
$(\forall p \geqq 1)$

さて. Trudinger の不等式で $\|\nabla u\|_{L^2}^2$ の係数

を、できるだけ小さくすることは重要である。
これに対して、次のことが言える。

Lemma. 3

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists \lambda', \nu' > 0$ s.t.

$$(4) \quad \int_\Omega e^{u(x)}dx \leq \lambda' \exp\left((2\mu_2+\varepsilon)\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu'\|u\|_{L^2}^2\right)$$

for $\forall u \in H^1(\Omega)$.

（ここで $\mu_2 = \frac{1}{16\pi}$ ）

これは、J. Moser の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対する sharp inequality と T. Aubin の論法を用いることによって示せる。

この Lemma. 3 を用いて、次のことが言える。

Theorem. 1

(H) " $n=2$, $K(x) \geqq 0$, $K(x) \not\equiv 0$ in Ω. "

の下で、$k > 2\nu'$ に対して、

$$(5) \quad \begin{cases} (k-\Delta)u = \dfrac{1}{\left(\int_\Omega K(x)e^u dx\right)} K(x)e^u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u > 0$ in $\overline{\Omega}$ が存在する。しかも、この u は、次の性質をもつ。

$$J(u) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} J(v) \text{ をみたす。}$$

ここで functional $J(v)$ は次で定義される。

$$(6) \quad J(v) \equiv \frac{1}{2}\int \{|\nabla v|^2 + k v^2\} dx - \log\left(\int_\Omega K(x) e^{v} dx\right)$$

$\forall k>0$: given に対しての可解性については、次のことがいえる。

Theorem. 2

(H) を仮定する。このとき、ある $\mu^*(k)>0$ があって、$\forall \mu > \mu^*$ に対して

$$(7) \begin{cases} (k-\Delta)u = \theta_\mu K(x) e^{u} & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\left(但し \quad \theta_\mu \equiv \frac{1}{2\mu} \frac{1}{\left(\int_\Omega K(x) e^{u} dx\right)} \right).$$

の解 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u>0$ in Ω が存在する。さらに、この u は、

$$J_\mu(u) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} J_\mu(v)$$

なる性質をもつ。ここで

$$(8) \quad J_\mu(v) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega \{|\nabla v|^2 + k v^2\} dx - \frac{1}{2\mu} \log\left(\int_\Omega K(x) e^{v} dx\right)$$

である。

次の §.2. で μ が"十分大"ならば (7) は、Th'm. 2 の u 以外の別の解をもつことを示す。

§2. Non-uniqueness.

まず Th'm. 2 で求めた解の評価を求める。

Proposition 3

Th'm. 2 の設定の下で Th'm. 2 で求めた解 u に対して

(9) $$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \frac{{}^\exists C}{\mu} \quad (\mu: \text{十分大})$$

が成り立つ。

これは u が $J_\mu(v)$ の minimizer であることと、次の Lemma によってえられる。

Lemma 4.

u が

(10) $$\begin{cases} (k-\Delta)u = g & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解とするとき、$g \in L^r(\Omega)$, $1<r<\infty$ に対し、$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leqq C\|g\|_{L^r(\Omega)}$

が成り立つ。

Remark

(9) より

(11) "$\theta_\mu \to 0 \quad (\mu\to\infty)$"

故、Th'm. 2 で求めた解 u は、陰関数定理によって求められる解に一致する(if $\mu\to\infty$)。

しかし，μに関し，どこまで陰関数定理による解と，Th'm. 2で求まる解uが一致するかわからない。

このProp. 3の下に，次のことが成り立つ。

Theorem. 4.

Th'm. 2と同じ設定の下に，
ある$\mu^{**}(\geqq \mu^*)>0$があって，$^\forall \mu > \mu^{**}$に対して，(7)の解$U(x)$でTh'm. 2で求めたuと異なるものが存在する。

注意

(7)のθ_μは，Th'm. 2で求めた解uから定まるθ_μで，それを fix して方程式(7)を考える。

証明は，Prop. 3の下に，Mountain Pass Lemmaが使えることによる。
(cf. [Crandall & Rabinowitz])

$K(x)\geqq 0$で零点はいくらあってもいい。
[C & R]の議論をmodifyできる。

§3. Yamabe Typeの方程式

関連した話題について述べる。

まず$K(x)e^u$ typeのnonlinear termをもつPDEについて，次の結果はおもしろい。

Theorem (J.L. Kazdan & Warner)

M : 2-dim. compact Riem. mfd. without bdry.

$K(x) \in C^\infty(M)$. $K(x) \not\equiv 0$ とする。

このとき.

(12) $$-\Delta_M u = K(x) e^u \quad \text{on } M$$

が解 $u \in C^\infty(M)$ をもつための必要十分条件は. ① $K(x)$: change sign. かつ ② $\int_M K(x)dx < 0$

なることである。

Remark

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ での Neumann Problem に対しても, 同じ結果が成り立つ。

$n \geqq 3$ では. ①かつ②が必要条件であるが. 十分かどうかわかっていない。.

次の type の方程式を考える。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: smooth bdd domain ($n \geqq 3$) $1 < \alpha < \infty$

(13) $$\begin{cases} -\Delta u = K(x) u^\alpha & (\text{in } \Omega) \\ u > 0 & (\text{in } \Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & (\text{on } \partial\Omega) \end{cases}$$

$k>0$. として.

$$(14)\begin{cases}(k-\Delta)u = K(x)\,u^{\alpha} & (\text{in }\Omega)\\ u>0 & (\text{in }\Omega)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & (\text{on }\partial\Omega)\end{cases}$$

これらの境界値問題に対して. 次のことがわかる。

Theorem

$1<\alpha<\frac{n+2}{n-2}$ とする。

このとき. 次のことが成りたつ。

(A)　(13) が解 $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ をもつための必要十分条件は.

① $K(x)$: change sign

かつ ② $\int_{\Omega} K(x)\,dx < 0$

なることである。

(B)　(14) が解 $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ をもつための必要十分条件は.

① $K(x)$: positive somewhere

である。

$\boxed{\text{Problem}}$.

$\alpha=\frac{n+2}{n-2}$ のとき. どうか?

Remark

$\alpha=\frac{n+2}{n-2}$ のときが幾何と関連が深い。

文献：

[1] Aubin : "Nonlinear Analysis on Manifolds" Springer-Verlag (1982)

[2] Cherrier : J. Fun. Anal. 57 (1984) P154-206.

[3] Crandall & Rabinowitz : Arch. R. M. A. 58 P207-218 (1975)

[4] Kazdan & Warner : Ann. of. Math. 99 P14-47 (1974)

[5] J. Moser : Indiana. Univ. Math. J. 20 P1077-1092 (1971)

[6] Escobar & Schoen : Invent. Math. 86 P243-254 (1986)

Maximal Monotone Operators Associated with Saddle Functions

By Hidekazu ASAKAWA

<u>Introduction.</u> A convex function on a real locally convex Hausdorff space E is a function f with value $(-\infty, +\infty)$ whose epigraph (i.e. set of points in $E\times(-\infty, +\infty)$ lying above the graph of f) is convex. The domain of f is defined by $D(f) = \{x : f(x) < +\infty\}$. If $f(x) > -\infty$ for all x and $f(x) < +\infty$ for at least one x, then f is said to be proper. The mapping $\partial f: E \to 2^{E^*}$ given by

$$\partial f(x) = \{ x^* \in X^*: f(z) \geq f(x) + (x^*, z-x) \text{ for all } z \in E \}$$

is called the <u>subdifferential</u> of f. A function f is concave if $-f$ is convex. (See [1]).

Throughout this note, we assume that X and Y are real reflexive strictly convex Banach spaces whose dual spaces X^* and Y^* are also strictly convex. We denote by $(\cdot,\cdot)_X$, $(\cdot,\cdot)_Y$ the dual pairing between X and X^*, between Y and Y^* respectively. $X\times Y$ is a Banach space with the norm defined by

$$\|(x, y)\|^2 = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)$$

for any x in X and any y in Y. Then the dual space of $X\times Y$ is $X^* \times Y^*$, with their duality pairing given by $(\cdot,\cdot)_X + (\cdot,\cdot)_Y$. Moreover $X\times Y$ and $X^*\times Y^*$ are strictly convex.

By the strict convexity of X^*, for each x in X there is unique $F_X x$ in X^* which satisfies $\|x\|_X^2=\|F_X x\|_X^2=(F_X x, x)_X$. The correspondence F_X which is called the duality map on X, is demi-continuous (i.e. continuous from X with norm topology to X^* with $\sigma(X^*, X)$-topology). In the same manner, we also consider the duality map F_Y on Y and F on $X\times Y$. It is easy to see that $F(x, y) = (F_X x, F_Y y)$ for any (x, y) in $X\times Y$.

An operator A from $X\times Y$ to $2^{X^*\times Y^*}$ is said to be <u>monotone</u> if

$$(x^*-\underline{x}^*, x-\underline{x})_X + (y^*-\underline{y}^*, y-\underline{y})_Y \geq 0$$

whenever $(x^*, y^*) \in A(x, y)$ and $(\underline{x}^*, \underline{y}^*) \in A(\underline{x}, \underline{y})$. A is said to be <u>maximal monotone</u> if the graph of A is properly contained in no other graph of monotone operator from $X \times Y$ to $2^{X^* \times Y^*}$. It is well-known that A is maximal monotone iff $R(F+A) = X^* \times Y^*$. In this case for each (x, y) in $X \times Y$ and each $\lambda > 0$, there are unique (x_λ, y_λ) in $X \times Y$ and $(x_\lambda^*, y_\lambda^*)$ in $X^* \times Y^*$ such that

$$F(x_\lambda - x, y_\lambda - y) + \lambda(x_\lambda^*, y_\lambda^*) = (0, 0) \quad \text{and} \quad (x_\lambda^*, y_\lambda^*) \in A(x_\lambda, y_\lambda),$$

or equivalently

$$F_X(x_\lambda - x) + \lambda x_\lambda^* = 0, \quad F_Y(y_\lambda - y) + \lambda y_\lambda^* = 0 \text{ and } (x_\lambda^*, y_\lambda^*) \in A(x_\lambda, y_\lambda).$$

We define

$$J_\lambda(x, y) = (x_\lambda, y_\lambda) \quad \text{and} \quad A_\lambda(x, y) = (x_\lambda^*, y_\lambda^*).$$

J_λ and A_λ are called resolvent of A and Yosida approximation of A respectively. The domain of A is defined by $D(A) = \{(x, y) \in X \times Y: A(x, y) \neq \phi\}$. (See (2, 3, 4)).

$K: X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ is said to be <u>saddle function</u> if

$$K(\cdot, y): X \to (-\infty, +\infty] \quad \text{is convex for each } y \text{ in } Y,$$
$$K(x, \cdot): Y \to [-\infty, +\infty) \quad \text{is concave for each } x \text{ in } X.$$

Then the operator ∂K from $X \times Y$ to $2^{X^* \times Y^*}$, which is defined in §2, is monotone. Under certain continuity condition on K, it was shown by R.T. Rockafellar in (6) that ∂K is maximal monotone if X and Y are Banach spaces, at least one of which is reflexive. D. Tiba showed that there exists a saddle function K_λ such that ∂K_λ is Yosida approximation of ∂K under more restrictive assumptions on X and Y. He also gave a characterization of resolvent operator of ∂K by the saddle function K. In this note we will show the existence of saddle point, which plays an important role in this theory. The same result was obtained in (7) by using duality argument of saddle functions.

§1. Saddle Functions.

Let $K: X \times Y \to (-\infty, +\infty)$ be a saddle function. We define two saddle functions $\underline{K}$ and $\overline{K}$ by :

(1.1) if $y \in Y$ such that $\liminf_{z \to x} K(z,y) > -\infty$ for any $x \in X$, then $\underline{K}(x,y) = \liminf_{z \to x} K(z,y)$, otherwise $\underline{K}(x,y) = -\infty$ for all $x \in X$,

and

(1.2) if $x \in X$ such that $\limsup_{w \to y} K(x,w) < +\infty$ for any $y \in Y$, then $\overline{K}(x,y) = \limsup_{w \to y} K(x,w)$, otherwise $\overline{K}(x,y) = +\infty$ for all $y \in Y$.

$\overline{K}$ and $\underline{K}$ are upper semi-continuous (u.s.c.) in y for any fixed x in X and lower semi-continuous (l.s.c.) in x for any fixed y in Y respectively. Two saddle functions K and K' are called equivalent, denoted by $K \simeq K'$, if $\overline{K} = \overline{K}'$ and $\underline{K} = \underline{K}'$. A saddle function K is said to be <u>closed</u> provided that $K \simeq \overline{K}$ and $K \simeq \underline{K}$. It is easy to verify the following facts :

(1.3) $\quad \underline{K}(x,y) \leq K(x,y) \leq \overline{K}(x,y)$ for all (x,y) in $X \times Y$

(1.4) $\quad \inf_X \underline{K}(x,y) = \inf_X K(x,y)$ for any y in Y.

(1.5) $\quad \sup_y \overline{K}(x,y) = \sup_y K(x,y)$ for any x in X.

The saddle point of K is an element (x,y) in $X \times Y$ such that

(1.6) $$K(z,y) \leq K(x,y) \leq K(x,w)$$

for all (z,w) in $X \times Y$. In this case we have

(1.7) $$\inf_z \sup_w K(z,w) = K(x,y) = \sup_w \inf_z K(z,w)$$

The following theorem is an easy consequence of the definition of equivalence of saddle functions.

<u>Theorem 1.1.</u> ([7]). Equivalent saddle functions have the same saddle points (if any).

We put

(1.8) $C = \{x \in X: \bar{K}(x,y) < +\infty \quad \text{for all } y \text{ in } Y\}$

(1.9) $D = \{y \in Y: \underline{K}(x,y) > -\infty \quad \text{for all } x \text{ in } X\}$.

Then both C and D are convex, and they depend only on equivalent class containing K. K is called <u>proper</u> if its <u>effective domain</u> $D(K) = C\times D$ is non-empty.

Let K be proper closed saddle function on $X\times Y$, then K is finite on $C\times D$, $+\infty$ on $(X-C^{-})\times D$, and $-\infty$ on $C\times(Y-D^{-})$. It is an immediate consequence of (1.1) and (1.2) that

(1.10)
$$\underline{K}(x,y) = \begin{cases} \liminf_{z\to x} K(z,y) & \text{if } y \in D \text{ and } x \in X \\ -\infty & \text{if } y \notin D \text{ and } x \in X, \end{cases}$$

and

(1.11)
$$\bar{K}(x,y) = \begin{cases} \limsup_{w\to y} K(x,w) & \text{if } x \in C \text{ and } y \in Y \\ +\infty & \text{if } x \notin C \text{ and } y \in Y. \end{cases}$$

§2. Monotone Operator Associated with Saddle Function.

Suppose K is a proper closed saddle function on $X\times Y$. Let (x,y) and (x^*,y^*) are element in $X\times Y$ and $X^*\times Y^*$ respectively. We define the operator ∂K, which is associated with K,

$$(x^*,y^*) \in \partial K(x,y)$$

if and only if

(2.1)
$$K(z,y)-K(x,y) \geq (x^*,z-x)_X \quad \text{for any } z \text{ in } X$$
and
$$-K(x,w)+K(x,y) \geq (y^*,w-y)_Y \quad \text{for any } w \text{ in } Y.$$

We also give the following forms of the definition of ∂K which are equivalent to (2.1) :

(2.2)
$$\underline{K}(z,y)-\underline{K}(x,y) \geq (x^*,z-x)_X \quad \text{for any } z \text{ in } X,$$
$$-\bar{K}(x,w)+\bar{K}(x,y) \geq (y^*,w-y)_Y \quad \text{for any } w \text{ in } Y,$$
$$\text{and} \quad \underline{K}(x,y) = \bar{K}(x,y).$$

and

(2.3) (x, y) is a saddle point of L, where L is the proper closed saddle function defined by :
$L(z,w) = (x^*, z)_X - (y^*, w)_Y + K(z,w)$ for any (z,w) in $X \times Y$.

(2.2) guarantees that ∂K depends only on equivalent class containing K.

Proposition 2.1. ((6)). If K is a proper closed saddle function on $X \times Y$, then ∂K is a monotone operator from $X \times Y$ to $2^{X^* \times Y^*}$.

Proof.) Suppose $(x_i^*, y_i^*) \in \partial K(x_i, y_i)$, where $i = 1,2$. From the definition of ∂K, we have the following four inequalities :

$$K(x_2, y_1) - K(x_1, y_1) \geq (x_1^*, x_2 - x_1)_X \tag{2.4}$$
$$-K(x_1, y_2) + K(x_1, y_1) \geq (y_1^*, y_2 - y_1)_Y \tag{2.5}$$
$$K(x_1, y_2) - K(x_2, y_2) \geq (x_2^*, x_1 - x_2)_X \tag{2.6}$$
$$-K(x_2, y_1) + K(x_2, y_2) \geq (y_2^*, y_1 - y_2)_Y \tag{2.7}$$

Summing up those inequalities, we get

$$(x_1^* - x_2^*, x_2 - x_1)_X + (y_1^* - y_2^*, y_2 - y_1)_Y \leq 0.$$

This means ∂K is monotone.

§3. Existence of Saddle Point.

In this section, we will show the existence of saddle point which was already shown by Rockafellar in (7). However, our method is quite different from the duality argument given in (7).

Proposition 3.1. Let K be a proper closed saddle function on $X \times Y$. Suppose there is a $(\bar{x}, \bar{y}) \in D(K)$ such that

$$K(x, \bar{y}) \to +\infty \quad \text{as} \quad \|x\|_X \to +\infty \tag{3.1}$$
$$K(\bar{x}, y) \to -\infty \quad \text{as} \quad \|y\|_Y \to +\infty. \tag{3.2}$$

Then there exists a saddle point of K.

The following lemmas will be needed in the proof of Proposition 3.1.

<u>Lemma 3.1.</u> Let $G = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset R^m$. Suppose $A(y)$ is closed convex subset of R^m for any $y \in G$, which satisfies the following condition :

(3.3) $\qquad y_1, \cdots, y_k \in G$ implies $\mathrm{co}\ \{y_1, \cdots, y_k\} \subset \cup_{j=1}^{k} A(y_j)$.

Then $\{A(y) : y \in G\}$ has non-empty intersection.

<u>Proof.</u>) We use induction on n. If $n = 1$, then Lemma 3.1 is trivial. Suppose Lemma 3.1 holds for $n = k$. We set $K = \mathrm{co}\ \{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$ which is contained in $\cup_{j=1}^{k+1} A(x_j)$. We put $P_j(x) = d(x, A(x_j))$ for any $x \in K$ and $1 \leq j \leq k+1$. Then P_j is a continuous convex function on K and

(3.4) $\qquad P_j(x) = 0$ if and only if $x \in A(x_j)$,

for $1 \leq j \leq k+1$. Now we define $f(x) = \max\ \{P_j(x) : 1 \leq j \leq k+1\}$. Since f is continuous on compact set K, there is a $y \in K$ such that $f(y) = \min\ \{f(x) : x \in K\}$. Suppose $f(y) = \varepsilon > 0$. Noting that $y \in \cup_{j=1}^{k+1} A(x_j)$, we may assume that $P_{k+1}(y) = 0$, and $P_j(y) \leq \varepsilon$ for $1 \leq j \leq k$. By the induction assumption for $n = k$, there is a $z \in \cap_{j=1}^{k} A(x_j)$ i.e. $P_j(z) = 0$ for $1 \leq j \leq k$. From the continuity of P_{k+1}, we can choose $\lambda \in (0, 1)$ such that

(3.5) $$P_{k+1}((1-\lambda)y + \lambda z) < \varepsilon.$$

By the convexity of P_j, we have

(3.6) $$P_j\ ((1-\lambda)y + \lambda z) \leq (1-\lambda)P_j(y) + \lambda P_j(z) \leq (1-\lambda)\varepsilon$$

if $1 \leq j \leq k$. Thus we have $f((1-\lambda)y + \lambda z) < \varepsilon$, which is a contradiction to $f(y) = \min\ \{f(x) : x \in K\}$. Therefore we conclude $f(y) = 0$, which means $y \in \cap_{j=1}^{k+1} A(x_j)$. This completes the proof.

<u>Lemma 3.2.</u> Let G be a subset of a locally convex Hausdorff space E. Suppose $A:G \to 2^E$ satisfies the following conditions :

(3.7) $\qquad x_1, \cdots, x_n \in G$ implies $\mathrm{co}\ \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \cup_{k=1}^{n} A(x_k)$.

(3.8) $\qquad A(x)$ is closed convex for all $x \in G$.

If there is an $\bar{x} \in G$ such that $A(\bar{x})$ is $\sigma(E, E^*)$-compact, then $\{A(x): x \in G\}$ has non-empty intersection.

Proof.) It suffices to show $\{A(x): x \in G\}$ has finite intersection property on $A(\bar{x})$. This is an immediate consequence of Lemma 3.1.

Now we shall give the proof of Proposition 3.1.

<u>Proof of Proposition 3.1.)</u> We apply Lemma 3.2. First of all, we set

(3.9) $\qquad A(z, w) = \{(x, y) \in X \times Y: \underline{K}(x, w) - \bar{K}(z, y) \le 0\}$,

for any $(z, w) \in D(K)$. Since $\underline{K}(\cdot, w) - \bar{K}(z, \cdot)$ is a l.s.c. convex function on $X \times Y$, $A(z, w)$ is closed convex. From (3.1) and (3.2), we obtain that $A(\bar{x}, \bar{y})$ is $\sigma(X \times Y, X^* \times Y^*)$-compact. In fact, (3.1) and (3.2) imply

(3.10) $\qquad \underline{K}(x, \bar{y}) \to +\infty$ as $\|x\|_X \to +\infty$ and $\inf_x \underline{K}(x, \bar{y}) > -\infty$,

and

(3.11) $\qquad \bar{K}(\bar{x}, y) \to -\infty$ as $\|y\|_Y \to -\infty$ and $\sup_y \bar{K}(\bar{x}, y) < +\infty$.

From (3.10) and (3.11), we have $\underline{K}(x, \bar{y}) - \bar{K}(\bar{x}, y) \to +\infty$ as $\|(x, y)\| \to +\infty$. Thus $A(\bar{x}, \bar{y})$ is a bounded closed convex subset in $X \times Y$. Since $X \times Y$ is reflexive, this means $A(\bar{x}, \bar{y})$ is $\sigma(X \times Y, X^* \times Y^*)$-compact. We now claim that $A:D(K) \to 2^{X \times Y}$ has the property (3.7). Suppose $(x_k, y_k) \in D(K)$ $(1 \le k \le n)$. Set $x = \sum_k \lambda_k x_k$ and $y = \sum_k \lambda_k y_k$, where $\lambda_k \ge 0$ $(1 \le k \le n)$ and $\sum_k \lambda_k = 1$. Noting that $D(K)$ is convex, we have the following inequality :

$$(3.12) \qquad 0 \geq \underline{K}(x,y)-\bar{K}(x,y) \geq \sum_k \lambda_k \underline{K}(x,y_k) - \sum_k \lambda_k \bar{K}(x_k,y) = \sum_k \lambda_k (\underline{K}(x,y_k) - \bar{K}(x_k,y)).$$

Thus there is k ($1 \leq k \leq n$) such that $\underline{K}(x,y_k) - \bar{K}(x_k,y) \leq 0$, i.e. $(x,y) \in A(x_k,y_k)$. Hence A satisfies (3.7). By lemma 3.2, there is a $(x,y) \in X\times Y$ which is contained in $A(z,w)$ for each $(z,w) \in D(K)$. Since $\underline{K}(x,w) = -\infty$ if $w \notin D$ and $\bar{K}(z,y) = +\infty$ if $z \notin C$, we obtain

$$(3.13) \qquad \underline{K}(x,w) \leq \bar{K}(z,y) \qquad \text{for all } (z,w) \in X\times Y.$$

This implies (x,y) is a saddle point of K, which completes the proof.

§4. Maximality of ∂K.

It was shown in [6] that the operator ∂K is maximal monotone if X and Y are Banach spaces, at least one of which is reflexive. It was shown in [5] that $D(\partial K)$ is dense in D(K) under the same assumption. But we always assume that X and Y are strictly convex reflexive Banach spaces and their dual spaces X^* and Y^* are also strictly convex.

Theorem 4.1. Let K be a proper closed saddle function on X×Y. Then the following assertions hold :

(4.1) ([6]). ∂K maximal monotone in $(X\times Y)\times(X^*\times Y^*)$.

(4.2) For each $(x,y) \in X\times Y$ and each $\lambda > 0$, there is a unique $(x_\lambda, y_\lambda) \in D(\partial K)$ such that

$$(\|x-z\|_X^2 - \|y-y_\lambda\|_Y^2)/(2\lambda) + K(z,y_\lambda)$$

$$\geq (\|x-x_\lambda\|_X^2 - \|y-y_\lambda\|_Y^2)/(2\lambda) + K(x_\lambda,y_\lambda)$$

$$\geq (\|x-x_\lambda\|_X^2 - \|y-w\|_Y^2)/(2\lambda) + K(x_\lambda,w)$$

for all $(z,w) \in X\times Y$..

$(x_\lambda, y_\lambda) = J_\lambda(x, y)$, where J_λ is the resolvent operator of ∂K.

(4.3) ([8]). We define for any $(x, y) \in X\times Y$ and any $\lambda > 0$:

$$K_\lambda(x, y) = (\|x-x_\lambda\|_X^2 - \|y-y_\lambda\|_Y^2)/(2\lambda) + K(x_\lambda, y_\lambda)$$

$$= \min_z \sup_w \{(\|x-z\|_X^2 - \|y-w\|_Y^2)/(2\lambda) + K(z, w)\}$$

$$= \max_w \inf_z \{(\|x-z\|_X^2 - \|y-w\|_Y^2)/(2\lambda) + K(z, w)\}.$$

Then $K_\lambda(\cdot, y)$ is a Gâteaux differentiable continuous convex function on X for each $y \in Y$.
$K_\lambda(x, \cdot)$ is also a Gâteaux differentiable continuous convex function on Y for each $x \in X$.
$\partial K_\lambda = (\partial K)_\lambda$, where $(\partial K)_\lambda$ is the Yosida approximation of ∂K.

(4.4) ([5]). $\overline{D(\partial K)} = \overline{D(K)} = \overline{C}\times\overline{D}$.
Moreover, for each $(x, y) \in X\times Y$,

$$J_\lambda(x, y) = (x_\lambda, y_\lambda) \to (x_0, y_0) \in \overline{C}\times\overline{D} \text{ in } \sigma(X\times Y,\ X^*\times Y^*)$$

and $(\|x_\lambda - x\|_X, \|y_\lambda - y\|_Y) \to (\|x_0 - x\|_X, \|y_0 - y\|_Y)$ as $\lambda \to 0$,

where (x_0, y_0) is a unique element in $\overline{C}\times\overline{D}$ such that
$\|x_0 - x\|_X = d(x, C)$ and $\|y_0 - y\|_Y = d(y, D)$.

(4.5) ([8]). $\overline{K}(x, y) \geq \limsup_{\lambda\to 0} K_\lambda(x, y) \geq \liminf_{\lambda\to 0} K_\lambda(x, y) \geq \underline{K}(x, y)$

for all $(x, y) \in \overline{D(K)}$.

$$\lim_{\lambda\to 0} K_\lambda(x, y) = -\infty \quad \text{if } x \in C \text{ and } y \notin D.$$
$$= +\infty \quad \text{if } x \notin C \text{ and } y \in D.$$

(4.6) ([7]). int $D(\partial K)$ = int $D(K)$ = (int C)×(int D).
$\overline{K} = \underline{K}$ on (int C)×Y and on X×(int D).
$\overline{K}(\cdot, y)$ is continuous on int C for each $y \in D$.
$\underline{K}(x, \cdot)$ is continuous on int D for each $x \in C$.

Sketch of proof of (4.1).) For each $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$, we define proper closed saddle function L on X×Y by :

$$L(z,w) = (\|z\|_X^2 - \|w\|_Y^2)/2 + K(z,w) - (x^*, z)_X + (y^*, w)_Y \tag{4.7}$$

for any $(z,w) \in X \times Y$. From Proposition 3.1, there is a saddle point (x, y) of L, which means $(x^*, y^*) \in (F+\partial K)(x, y)$. Thus ∂K is maximal monotone, since $R(F+\partial K) = X^* \times Y^*$.

We shall not give a proof of (4.2)-(4.6) for lack of space.

REFERENCES

Convex Analysis

(1) I. Ekeland and R. Teman : Convex analysis and variational problems, North-Holland Amsterdam, (1976).

Monotone Operator

(2) V. Barbu : Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff, Leiden (1976).

(3) H. Brezis, M. G. Crandall and A. Pazy : Perturbation of nonlinear maximal monotone sets in Banach space, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 23, (1970), 123-144.

(4) D. Pascali and S. Sburian : Nonlinear Mappings of Monotone Type, Noordhoff Leiden, (1979).

Saddle Function

(5) J. P. Gossez : On the subdefferential of a saddle function, J. Funct. Analysis 11, (1972), 220-230.

(6) R. T. Rockafellar : Monotone operator associated with saddle functions and minmax problems, in "Nonlinear Functional Analysis Part I" Proceeding Symposis in Pure Math. 18, Am. Math. Soc., (1970), 241-250.

(7) R. T. Rockafellar : Saddle point and convex analysis, in "Differential games and related topics" North-Holland Amsterdam-London, (1971), 109-127.

(8) D. Tiba : Regularization of saddle functions, Bollettino U. M. I. (5) 17-A (1980), 420-427.

方程式 $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})u+\partial\varphi^{t,a}(u)\ni f$ について

東大教養　久保雅弘

Introduction

Garroni - Langlais [1] は次のような unilateral problem を研究した.

$$
(1)\quad \begin{cases}
u\leq g, \quad (\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})u-\Delta u+m(u)u\leq f \\
(u-g)\{(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})u-\Delta u+m(u)u-f\}=0 \qquad \text{in } (0,T)\times(0,A)\times\Omega \\
\frac{\partial u}{\partial n}=0 \qquad \text{in } (0,T)\times(0,A)\times\partial\Omega \\
u|_{t=0}=u_0 \qquad \text{in } (0,A)\times\Omega \\
u|_{a=0}=\int_0^A b(t,a,x)u(t,a,x)\,da \qquad \text{in } (0,T)\times\Omega
\end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ $(N\geq 1)$ の有界領域, f,g,u_0 は与えられたデータ, $m=m(t,a,u)$　$b=b(t,a,x)$ はそれぞれ rate of mortality, birth rate とよばれる関数で, 与えられる. 未知関数 u は時刻 t における年齢 a, 位置 x の生物の密度を表わす. このようなモデルは最初 Gurtin [2] によって提出され数多くの研究がある. (Webb [3] の References を参照)

本論文では (1) のようなタイプの問題を劣微分作用素の方法によって, ある程度統一的に扱うことを試みる.

以下 H は可分実 Hilbert 空間. $|\cdot|_H$, $(\cdot,\cdot)_H$ はそれぞれ H のノルム, 内積である. H 上の下半連続凸関数 φ に対して $\partial\varphi$ は φ の劣微分を表わす. $\lambda>0$ に対して

$$\varphi_\lambda(z)=\inf_{y\in H}\left\{\frac{1}{2\lambda}|z-y|_H^2+\varphi(y)\right\} \qquad z\in H$$

は φ の正則化である. よく知られているように $\partial\varphi_\lambda=\dfrac{I-(I+\lambda\partial\varphi)^{-1}}{\lambda}$ が成立する.

$\{\varphi^{t,a};(t,a)\in[0,T]\times[0,A]\}$ を H 上の適正下半連続凸関数の 2-パラメータ族とする. (1) の抽象化として次のような問題を考える.

(2) $\quad (\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})u+\partial\varphi^{t,a}(u)\ni f \qquad \text{a.e. in } (0,T)\times(0,A)$

(3) $\quad \begin{cases} u|_{t=0}=u_0 & \text{a.e. in } (0,A) \\ u|_{a=0}=Bu & \text{a.e. in } (0,T) \end{cases}$

ここで B は作用素 : $L^2((0,T)\times(0,A);H)\to L^2(0,T;H)$.

問題 (2), (3) を解くために (2) と次の (4) を満たす u を求める問題を考える

(4) $\quad \begin{cases} u|_{t=0}=u_0 & \text{a.e. in } (0,A) \\ u|_{a=0}=u_1 & \text{a.e. in } (0,T). \end{cases}$

本論文では (2) を $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})$ の特性直線上 $\partial\varphi^{t,a}$ によって生成される 1-parameter の発展方程式の族と見なし, Kenmochi [4] の結果を用いて問題 (2), (4) を解く (§1). 次に §1 の結果と反復法を使って問題 (2), (3) を解く (§2). $\{\varphi^{t,a}\}$ に対する仮定は, $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})$ の特性直線上 1-parameter の Cauchy 問題が解けるための条件. B に対する仮定は反復法がうまく機能するための条件である.

§1. 問題 (2), (4)

$\{\varphi^{t,a}\}$ に対して次の (φ.1) ~ (φ.4) の仮定をおく.

(φ.1) (cf. Rockafellar [5], Attouch [6])

$\{\varphi^{t,a}\}$ は normal convex integrand である即ち

$((t,a), z) \mapsto \varphi^{t,a}(z)$ は $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(H)$- 可測,

$\mathcal{B}$ は $[0,T]\times[0,A]$ の Lebesgue 可測集合の作る σ-algebra

$\mathcal{B}(H)$ は H の Borel 集合全体の作る σ-algebra

(φ.2) $\exists G_1 \in C([0,T]; L^2(0,A)) \cap C([0,A]; L^2(0,T))$

$\exists G_2 \in C([0,T]; L^1(0,A)) \cap C([0,A]; L^1(0,T))$ such that

$$\varphi^{t,a}(z) + G_1(t,a)\,|z|_H + G_2(t,a) \geq 0$$

for $\forall z \in H$ $\forall (t,a) \in [0,T]\times[0,A]$.

(φ.3) $\exists N_1 \subset [0,A]$ $\exists N_2 \subset [0,T]$ 共に零集合 such that

for $\forall z \in H$ $\forall \lambda > 0$ $\forall \alpha_0 \in [0,A]\setminus N_1$ $\forall \tau_0 \in [0,T]\setminus N_2$

$\tau \mapsto \varphi_\lambda^{\tau,\alpha_0+\tau}(z)$ は絶対連続 on $[0, T\wedge(A-\alpha_0)]$

かつ

$\alpha \mapsto \varphi_\lambda^{\tau_0+\alpha,\alpha}(z)$ は絶対連続 on $[0, A\wedge(T-\tau_0)]$

(ここで $r_1 \wedge r_2 = \min\{r_1, r_2\}$)

(φ.4) $0 \leq \exists \delta < 1$ $\exists C_0 \geq 0$ $\exists G_0 \in L^1((0,T)\times(0,A))$ such that

for $\forall z \in H$ $\forall \lambda > 0$ $\forall \alpha_0 \in [0,A]\setminus N_1$ $\forall \tau_0 \in [0,T]\setminus N_2$

$$\frac{d}{d\tau}\{\varphi_\lambda^{\tau,\alpha_0+\tau}(z)\} \leq \delta\,|\partial\varphi_\lambda^{\tau,\alpha_0+\tau}(z)|_H^2 + C_0\,|\varphi_\lambda^{\tau,\alpha_0+\tau}(z)| + C_0|z|_H^2$$

$$+ G_0(\tau, \alpha_0+\tau) \qquad \text{for a.e. } \tau \in [0, T\wedge(A-\alpha_0)]$$

かつ

$$\frac{d}{d\alpha}\{\varphi_\lambda^{\tau_0+\alpha,\alpha}(z)\} \leq \delta\,|\partial\varphi_\lambda^{\tau_0+\alpha,\alpha}(z)|_H^2 + C_0\,|\varphi_\lambda^{\tau_0+\alpha,\alpha}(z)| + C_0|z|_H^2$$

$$+ G_0(\tau_0+\alpha, \alpha) \qquad \text{for a.e. } \alpha \in [0, A\wedge(T-\tau_0)].$$

<u>Theorem 1.</u> $(\varphi.1)\sim(\varphi.4)$ を仮定する．$f\in L^2((0,T)\times(0,A);H)$, $u_0\in L^2(0,A;H)$ $\varphi^{0,(\cdot)}(u_0(\cdot))\in L^1(0,A)$; $u_1\in L^2(0,T;H)$ $\varphi^{(\cdot),0}(u_1(\cdot))\in L^1(0,T)$ とするとき．次を満たす u が一意に存在する．

(1.1) u, $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})u \quad \in L^2((0,T)\times(0,A);H)$

(1.2) $\varphi^{t,a}(u)$, $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})\varphi^{t,a}(u) \quad \in L^1((0,T)\times(0,A))$

u は (2) および (4) を満たす．

<u>Remark 1.</u> u_0, u_1 に対する仮定は少しゆるめることができる．このとき (1.1) (1.2) は少し弱くなる．詳しくは [1] 参照．

<u>Proof of Theorem 1.</u>

[4] の結果より，a.e. $\alpha\in[0,A]$ に対して次の解 u^α が $W^{1,2}(0,T\wedge(A-\alpha);H)$ に一意に存在する

$$(CP)_\alpha \begin{cases} \frac{d}{d\tau}u^\alpha(\tau)+\partial\varphi^{\tau,\alpha+\tau}(u^\alpha(\tau))\ni f(\tau,\alpha+\tau) & \text{a.e. } \tau\in[0,T\wedge(A-\alpha)] \\ u^\alpha(0)=u_0(\alpha) \end{cases}$$

同様に a.e. $\tau\in[0,T]$ に対して次の解 $v^\tau\in W^{1,2}(0,A\wedge(T-\tau);H)$ が一意に存在

$$(CP)_\tau \begin{cases} \frac{d}{d\alpha}v^\tau(\alpha)+\partial\varphi^{\tau+\alpha,\alpha}(v^\tau(\alpha))\ni f(\tau+\alpha,\alpha) & \text{a.e. } \alpha\in[0,A\wedge(T-\tau)] \\ v^\tau(0)=u_1(\tau) \end{cases}$$

そこで次のように u を定義する．

$$u(t,a)=\begin{cases} u^{a-t}(t) & \text{for } a\geq t \\ v^{t-a}(a) & \text{for } a<t. \end{cases}$$

この u が求める一意解である。実際 一意性は $(CP)_\alpha$, $(CP)^t$ の一意性から従う。後は u の可測性と (1.1) (1.2) を示せば (2) と (4) は容易である。(ただし (2) は (9.1) と Attouch の結果を使って示される)

u の可測性は次のように示す。u^α_λ と v^t_λ をそれぞれ $(CP)_\alpha$, $(CP)^t$ の吉田近似方程式の解として

$$u_\lambda(t,a) = \begin{cases} u_\lambda^{a-t}(t) & \text{for } a \geq t \\ v_\lambda^{t-a}(a) & \text{for } a < t \end{cases}$$

とおく。$(t,a) \mapsto u_\lambda(t,a)$ の可測性は u^α_λ, v^t_λ をより逐次近似することによって示せる。従って $\lambda \downarrow 0$ とすることにより $(t,a) \to u(t,a)$ の可測性を得る。(1.1), (1.2) は [4] に与えられている energy 不等式を $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right)$ の各特性直線上で使うことにより示すことができる。

Q.E.D.

§2. 問題 (2), (3)

$\{B^t ; t \in [0,T]\}$ を次の (B.1) ~ (B.5) を満たす作用素の族とする。

(B.1) $B^t : L^2(0,A;H) \to H$ for $\forall t \in [0,T]$

(B.2) $[0,T] \ni t \mapsto B^t u \in H$ は可測 for $\forall u \in L^2(0,A;H)$

(B.3) $\exists C_1 > 0$ such that

$$|B^t u - B^t v|_H \leq C_1 |u - v|_{L^2(0,A;H)}$$

for $\forall u, v \in L^2(0,A;H)$ $\forall t \in [0,T]$

(B.4) $B^{(\cdot)} 0 \in L^2(0,T;H)$ ただし 0 は $L^2(0,A;H)$ の零元

(B.5) $\exists b \in L^1(0,T)$ $\forall u \in L^2(0,A;H)$ a.e. $t \in [0,T]$

$$|\varphi^{t,0}(B^t u)| \leq b(t) + C_1 |\varphi^{t,(\cdot)}(u(\cdot))|_{L^1(0,A)} + C_1 |u|^2_{L^2(0,A;H)}$$

$\{B^t\}$ を使って $B: L^2((0,T)\times(0,A);H) \to L^2(0,T;H)$ を次のように定義

(2.1) $(Bu)(t) = B^t(u(t,\cdot))$ for $\forall u \in L^2((0,T)\times(0,A);H)$
a.e. $t\in[0,T]$.

Theorem. 2 (φ.1) ~ (φ.4) および (B.1)~(B.5) を仮定し (2.1) で B を定義する. $f\in L^2((0,T)\times(0,A);H)$, $u_0\in L^2(0,A;H)$ $\varphi^{0,(\cdot)}(u_0(\cdot))\in L^2(0,A)$ とする. このとき (1.1), (1.2) を満たす (2), (3) の解 u が一意に存在する.

Proof. まず一意性を示す. u, v を 2つの解とすると $\partial\varphi^{t,a}$ の単調性から,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\right)|u(t,a)-v(t,a)|_H^2 \le 0 \qquad \text{a.e. } (t,a)\in[0,T]\times[0,A]$$

積分すると.

$$\int_0^A |u(t,a)-v(t,a)|_H^2\,da \le \int_0^t |(Bu)(\tau)-(Bv)(\tau)|_H^2\,d\tau$$

$$\le C_1^2\int_0^t\int_0^A |u(\tau,a)-v(\tau,a)|_H^2\,da\,d\tau$$

$$\text{for } \forall t\in[0,T].$$

従って $u\equiv v$ を得る.

存在を示すために, D を $\{u\in L^2((0,T)\times(0,A);H)\,;\,\varphi^{t,a}(u)\in L^1((0,T)\times(0,A))\}$ の $L^2((0,T)\times(0,A);H)$ における閉包として, 作用素 $Q: D\to D$ を次のように定義する.

$w \in D$ に対して Qw は (2) と次の (4)$'$ の解である

$$(4)' \quad \begin{cases} Qw|_{t=0} = u_0 & \text{a.e. in } (0, A) \\ Qw|_{a=0} = Bw & \text{a.e. in } (0, T) \end{cases}$$

B に対する仮定と Theorem 1 および Remark 1. によって Q は well defined である.

更に一意性の証明部分と同様にして

$$\int_0^A |Qw(t,a) - Q\hat{w}(t,a)|_H^2 da \leq C_1^2 \int_0^T \int_0^A |w(\tau,a) - \hat{w}(\tau,a)|_H^2 da d\tau$$

for $\forall t \in [0, T]$

従って $T < C_1^2$ のとき Q は strictly contractive であり $\exists 1 u \in D$ $Qu = u$ 明らかに u は求める解である. $T > C_1^2$ のときは, この操作を有限回くり返すことにより $[0,T] \times [0,A]$ 全体の解を得る

Q.E.D.

Remark 2. 解の性質について次のような議論をすることができる.

(i) 方程式 (2) の monotone perturbation, (1) の $m(u)u$ は perturbed term として扱う方が適当である.

(ii) 解の正値性, および Data に関する解の比較 (H が lattice の時).

参考文献

[1] M.G. Garroni – M. Langlais. Age-dependent population diffusion with external constraint, J. Math. Biology 14 (1982), 77–94.

[2] M.E. Gurtin, A system of equations for age-dependent population diffusion. J. theor. Biol. 40 (1973), 389–392.

[3]. G.F. Webb, Theory of age-dependent population dynamics, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1985.

[4] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear equations with time-dependent constraints and applications. Bull. Fac. Education Chiba Univ. 30 (1981), 1–87.

[5] R.T. Rockafellar, Convex integral functions and duality, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. E. Zarantonello, Academic Press, New-York London, 1971.

[6] H. Attouch, Mesurabilité et monotonie, Publication Mathématique d'Orsay.

[7] M. Kubo, Subdifferential operator approach to nonlinear age-dependent population dynamics, preprint.

Extinction and Growing-up of Solutions of Some Nonlinear Singular Parabolic Equations

Isamu Fukuda (Kokushikan University)

1. Introduction

We are concerned here with the limiting behavior, including extinction and growing-up, of solutions of the initial-boundary value problem for the nonlinear singular parabolic equation:

$$
(\mathrm{P1}) \quad \begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda u & x \in \Omega, \quad t > 0 \qquad (1) \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \qquad (2) \\ u(x,0) = \mu u_0(x) & x \in \Omega \qquad (3) \end{cases}
$$

where Ω is a bounded domain in R^N with smooth boundary $\partial\Omega$, $1 < p < 2$, $\lambda > 0$ and $\mu > 0$.

Here extinction means that solutions go to zero within a finite time and growing-up means that solutions go to infinity as time t tends to infinity.

For the problem (P1) with $\lambda = 0$, it is an easy matter to show that, for any initial data, there exists a finite number $t^* > 0$ such that $u(x,t) \longrightarrow 0$ as $t \longrightarrow t^*$ and $u(x,t) \equiv 0$ for $t \geq t^*$. In case $\lambda > 0$, however, the term λu prevents solutions going to zero .

The main purpose of this report is to show extinction of solutions of (P1) for small initial data, growing-up of solutions for large initial data and , moreover, to show that there exist solutions which exhibit some kind of "borderline" behavior, that is, they neither extinguish within a finite time nor grow up to infinity.

The quasi-linear parabolic equation (1) with any $p > 1$ has been actively studied and is a model for a broad class of singular and degenerate parabolic equations.

Existence and regularity results can be found in Lions [8] , DiBenedetto [6] and Fukuda [7] .

Especially, Neumann boundary value problem with $\lambda = 0$, that is, we take the boundary condition

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad x \in \partial\Omega \ , \ t > 0 \qquad (2)'$$

instead of Dirichlet condition (2), has been treated by Alikakos-Evans [1] , Alikakos-Rostamian [2], [3], [4] $(p > 2)$ and by Fukuda [7] $(1 < p < 2)$.

In their paper, decay estimates for the gradient of solutions in $L^p(\Omega)$ ($p > 2$) and $L^\infty(\Omega)$ have been obtained (L^∞-estimate under the assumption that Ω is convex). Moreover, the regularizing effect has been proved using the monotonicity of ∇u in $L^\infty(\Omega)$.

In [7], the homogenization of solutions for $1 < p < 2$ has been proved, that is, there exists a finite number $t^* > 0$ such that

$$u(x, t) \longrightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int u_0(x)\,dx \qquad \text{as} \quad t \longrightarrow t^*.$$

2. Main results

First of all, we consider the initial-boundary value problem:

$$
\text{(P2)} \quad \begin{cases} v_\tau = \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) & x \in \Omega, \quad \tau > 0 \qquad (4) \\ v(x,\tau) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad \tau > 0 \qquad (5) \\ v(x,0) = \mu u_0(x) & x \in \Omega. \qquad (6) \end{cases}
$$

It is well-known that solutions $v(x,\tau)$ of (P2) extinguish within a finite time $\tau^* > 0$ for any initial data belonging to $L^2(\Omega)$.

Now, let $u(x,t) = e^{\lambda t} v(x,\tau)$ and

$$
\tau = \frac{1}{\lambda(2-p)}(1-e^{-\lambda(2-p)t}) \qquad (7)
$$

Then one can reduce the problem (P1) into (P2).

As was mentioned in Introduction, we may consider three possibilities on the asymptotic states of problem (P1).

(I) There exists a finite number $t^* > 0$ such that

$$
\|u(t)\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \longrightarrow t^*
$$

and

$$
u(x,t) \equiv 0 \quad \text{for} \quad t \geq t^*, \ x \in \Omega .
$$

(II) There exist two positive constants m and M such that

$$
m \leq \|u(t)\|_2 \leq M \qquad \text{for any } t \geq 0 .
$$

(III) Solutions grow up to infinity as t tends to ∞.

Throughout this report, we denote L^p-norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ by $\|\cdot\|_p$.

The main theorems are as follows:

Theorem 1 Let $\frac{2N}{N+2} \leq p < 2$ ($N \geq 3$) or $1 < p < 2$ ($N = 1$ or 2), $\alpha = \frac{1}{\lambda(2-p)}$, $u(x,t)$ be a solution of (P1) and τ^* be an extinction time of $v(x,t)$ which is a solution of (P2) where $u(x,t) = e^{\lambda t} v(x,\tau)$ and $\tau = \frac{1}{\lambda(2-p)}(1-e^{-\lambda(2-p)t})$.

Then if $\tau^* < \alpha$, (I) holds and $t^* = \alpha \log(\frac{\alpha}{\alpha-\tau^*})$

If $\tau^* = \alpha$, (II) holds.

If $\tau^* > \alpha$, (III) holds and

$$e^{-\lambda t}\| u(t) \|_2 \longrightarrow \| v(\alpha) \|_2 \quad \text{as} \quad t \longrightarrow \infty .$$

Theorem 2 Under the same assumption as Theorem 1. Let $s^*(u_0)$ be an extinction time for the problem (P2) with $\mu = 1$, and $\beta = (\alpha/s^*(u_0))^{1/(2-p)}$.

Then, if $\mu < \beta$, (I) holds. If $\mu = \beta$, (II) holds.

If $\mu > \beta$, (III) holds.

Now we consider the problem (P1) with $\mu = 1$ and classify the limiting behavior by the size of u_0.

Theorem 3 Let $\frac{2N}{N+2} \leq p < 2$ ($N \geq 3$) and $u(x,t)$ be a solution of (P1) with $\mu = 1$ and $u_0 \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

If $\| u_0 \|_2 < (\frac{KP}{\lambda})^{1/(2-p)}$, then $\tau^* < \alpha$ and hence (I) holds.

If $\| u_0 \|_2^2 > \frac{2}{\lambda p} \| \nabla u_0 \|_p^p$, then $\tau^* > \alpha$ and hence (III) holds.

3. Sketch of Proof

We shall only give the idea of proof.

Proof of Theorem 1 One can find from (7) that as t varies from 0 to ∞, τ varies from 0 to α $(=\frac{1}{\lambda(2-\alpha)})$.

Hence we have to discuss three cases.

First case: when τ^* is less than α, t tends to $t^*(=\alpha\log(\frac{\alpha}{\alpha-\tau^*}))$ as τ tends to τ^*, and then $\|v(\tau)\|_2$ goes to zero and also $\|u(t)\|_2$ extinguishes as $t \longrightarrow t^*$.

Second case: when τ^* is larger than α. Whenever t varies from 0 to ∞, τ can not reach τ^*. τ only reach α. Hence as τ tend to α, t goes to ∞ and

$$\|v(\tau)\|_2 = e^{-\lambda t}\|u(t)\|_2 \longrightarrow \|v(\alpha)\|_2 .$$

That is, u(x, t) behaves like as $e^{\lambda t}v(x,\alpha)$ near $t=\infty$.

Last case: when τ^* is equal to α. We can apply the similar method as in Berryman-Holland (5) to problem (P2).

Then we have

$$m(1-\lambda(2-p)\tau)^{1/(2-p)} \leq \|v(\tau)\|_2 \leq M(1-\lambda(2-p)\tau)^{1/(2-p)} \tag{8}$$

Since $u(x,t) = e^{\lambda t}v(x,\tau)$, (7) and (8) imply that

$$m \leq \|u(t)\|_2 \leq M.$$

Proof of Theorem 2 Let $s = \mu^{p-2}\tau$ and $v(x,\tau) = \mu w(x,s)$.

Then we can change (P2) to

$$
\text{(P3)} \quad \begin{cases} w_s = \operatorname{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w) & x \in \Omega\ , \quad s > 0\ , \quad (9) \\ w(x,s) = 0 & x \in \partial\Omega\ , \quad s > 0\ , \quad (10) \\ w(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \quad . \quad (11) \end{cases}
$$

We denote the extinction time of (P3) by $s^* = s^*(u_0)$. Then we can express the relation between s^* and extinction time τ^* of (P2) as follows

$$\tau^*(\mu u_0) = \mu^{2-p} s^*(u_0)$$

from which we can easily conclude Theorem 2.

<u>Proof of Theorem 3</u> It is easily obtained that the assumption $\|u_0\|_2 < (\frac{KP}{\lambda})^{1/(2-p)}$ implies $\tau^* < \alpha$ since τ^* is bounded above by $\frac{1}{(2-p)KP}\|\mu u_0\|^{2-p}$.

By the standard argument, we can obtain the lower estimate of $\|v(\tau)\|_2$ such that

$$\|v(\tau)\|_2^2 > \|u_0\|_2^2(1-(2-p)\lambda\tau)^{p/(2-p)} \quad .$$

This means that $\|v(\tau)\|_2$ does not extinguish for $t\in(0,\alpha)$. Then $\tau^* > \alpha$ and (III) holds.

<u>Remark</u> $\|u_0\|_2^2 > \frac{2}{\lambda p}\|\nabla u_0\|_p^p$ implies $\|u_0\|_2 < (\frac{KP}{\lambda})^{1/(2-p)}(\frac{2}{p})^{1/(2-p)}$ and then there is a gap between the case (I) and (III).

4. Remarks

In theorem 2, we have shown that there exist solutions of (P1) which exhibit some kind of "borderline" behavior, that is, they neither extinguish within a finite time nor grow up to infinity. We are interested in the asymptotic behavior of these solutions which we call bounded solutions.

(1) Now we discuss stationary states of the problem (P1). Consider the elliptic problem:

$$\text{(EP)} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda u & x \in \Omega \qquad (12) \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \qquad (13) \end{cases}$$

Otani has proved existence and nonexistence of nontrivial solutions of (EP) .

<u>Theorem 4 (Otani(10))</u> If $\frac{2N}{N+2} < p < 2$ ($N \geq 2$), then there exists at least one nontrivial non-negative solutions of (EP) belonging to $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

If $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ ($N \geq 3$) and Ω is star shaped, then there are no nontrivial solutions of (EP) belonging to $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

If $p = \frac{2N}{N+2}$ ($N \geq 3$) and Ω is strictly star shaped, then there are no nontrivial solutions of definite sign belonging to $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Here Ω is said to be star shaped (resp. strictly star shaped), if $n(x)\cdot x \geqq 0$ (resp. $n(x)\cdot x \geqq \rho > 0$) holds for all $x \in \partial\Omega$ with a suitable choice of the origin, where $n(x)$ denotes the outward normal unit vector at $x \in \partial\Omega$.

He also proved that there exists an unique positive solution of (EP) for $N = 1$. [9]

(2) Combining the above results and theorem 2 , we can expect that if $\frac{2N}{N+2} < p < 2$ ($N \geqq 3$) or $1 < p < 2$ ($N = 1$ or 2) a bounded solution tends to a nontrivial solution as t tends to ∞ . However, in case $p = \frac{2N}{N+2}$, the curious phenomena happen that there exists a bounded solution which neither extinguish within a finite time nor grow up to infinity, but there are no nontrivial solutions of definite sign of (EP) where Ω is strictly star shaped.

We shall discuss on the details in the forthcoming paper.

(3) If we take a nontrivial solution of (EP) as an initial value u_0 , it is easily found that $\tau^* = a$ and $\mu = 1$.
Nontrivial solutions of (EP) are unstable as initial values, that is, let $U(x)$ be a nontrivial non-negative solution of (EP) and $u_0(x) = kU(x)$. If $k < 1$ then $u(x,t:u_0)$ extinguishes within a finite time and if $k > 1$ then $u(x,t:u_0)$ grows up to infinity.

On the other hand, if we take $u_0(x) = V(x)$ which is not a nontrivial solution of (EP), theorem 2 assures that there exist a $\mu > 0$ such that a solution $u(x,t:\mu V(x))$ of (P1) is a bounded solution.

From the above results we can say that there exists a L^2-function $V(x)$ and a positive constant μ depending on $V(x)$ such that $u(x, t:\mu V(x))$ is a bounded solution of (P1) and $U(x) - \mu V(x)$ is not definite sign all over Ω for a nontrivial solution $U(x)$ of (EP).

REFERENCES

(1) N.D.Alikakos and L.C.Evans, Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation, J.Math. pures et appl., 62 (1983) 235-268.

(2) N.D.Alikakos and R.Rostamian, Gradient estimates for degenerate diffusion equation. I, Math.Ann., 259 (1982) 53-70.

(3) N.D.Alikakos and R.Rostamian, Gradient estimates for degenerate diffusion equation. II, Proc. Royal Soc. Edinburgh 91A (1982) 335-346.

(4) N.D.Alikakos and R.Rostamian, Lower bound estimates and separable solutions for homogeneous equations of evolution in Banach space, J. Diff. Eq., 42 (1982) 323-344.

(5) J.G.Berryman and C.B.Holland, Stability of the separable solution for fast diffusion, Arch. Rat. Mech. Anal., 74 (1980) 379-388.

(6) E.DiBenedetto, Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations, MRC Tech. Summary Report #2124 (1980).

(7) I.Fukuda, Sobolev-Poincaré inequality and the Neumann problem for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, MRC Tech. Summary Report #2811 (1985).

(8) J.L.Lions, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires", Dunud Gauthier-Villars, Paris (1969).

(9) M.Otani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-Type inequalities, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 8 (1984) 23-38.

(10) M.Otani, Existence and non-existence of nontrivial solutions of some nonlinear degenerate elliptic equations, to appear.