第5回発展方程式若手セミナー

報告集

1984

序

第5回発展方程式若手セミナーは、1983年8月26日から29日にかけて箱根静雲荘で開かれた。このセミナーに於て、大谷光春氏（東海大・理）による特別講演 " An Introduction to Nonlinear Evolution Equations "が行なわれた。又、ショートコミュニケーションを含め、14の多岐にわたる講演が行なわれた。この報告集は、それらの内容を各講演者がまとめたものである。

「発展方程式論の将来の方向を探るための若手研究者間の討論と情報交換の場」として1979年夏に始められた本セミナーであるが，前回まで援助を仰いだ"作行会数学基金"が廃止される等の困難にもかかわらず、全国各地から41名の参加を得、討論と交流に成果をおさめる事ができた。本セミナーに援助・協力を惜しまれなかった方々に深く感謝致します。

尚、大谷氏による特別講演はその明解さと，初等的理論から未解決問題の提示に至る豊富な内容によって好評であった。その点を含め，活用価値ある報告集となっていれば幸いである。

報告集目次と、実際の講演順には変動があります。いくつかの原稿の遅れその他の事情により発行が大幅に遅れた事をお詫び致します。

1984年6月　第5回発展方程式セミナー世話人　水町竜一

参加者 名簿

伊藤 達夫 (東大)
岩宮 敏幸 (航空宇宙技研)
栄 伸一郎 (広大)
大河内 広子 (早大)
大谷 光春 (東海大)
岡沢 登 (理科大)
岡本 久 (東大)
蚊戸 宣幸 (早大)
亀島 伸朗 (東大)
河合 泰彦 (金沢大)
川島 秀一 (奈良女大)
桔梗 洋子 (早大)
菊地 慶祐 (東大)
小薗 英雄 (北大)
小林 和夫 (相模工大)
小山 哲也 (北大)
重田 多恵子 (都立大)
清水 真
仙葉 隆 (阪大)
高木 泉 (東北大)
高橋 勝雄 (東大)
高橋 信博 (厚木北高)
竹中 俊美 (中部工大)
辻川 亨 (広大)
堤 誉志雄 (東大)
新倉 保夫
西川 純子 (奈良女大)
浜口 智志 (東大)
平井 信行 (東北大)
福田 賢一 (相模工大)
藤平 知行 (慶大)
古谷 希世子 (都立大)
細谷 正憲 (東大)
松井 伸也 (北大)
丸尾 健二 (姫工大)
水町 竜一 (東北大)
宮本 浩司 (神戸大)
山口 哲夫 (東海大)
山田 直記 (神戸大)
山田 義雄 (名大)
吉田 善章 (東大)

目　次

序
参加者名簿

大谷　光春（東海大・理）
An Introduction to Nonlinear Evolution Equations　1

川島　秀一（奈良女大・理）
対称双曲－放物型方程式系について　69

栄　伸一郎（広大・理）
反応拡散方程式と 2-timing method　79

辻川　亨（広大・理）
競合拡散方程式系の空間的非一様解について　85

大河内　広子（早大・理工）
放物型発展方程式の解の軌跡の有界性について　94

仙葉　隆（阪大・理）
障害物のある熱方程式について　97

小山　哲也（北大・理）
拡散方程式の a priori 評価について　103

吉田　善章（東大・工）

ON THE NAVIER-STOKES-MAXWELL SYSTEM
IN MAGNETOHYDRODYNAMICS　109

菊地　慶祐（東大・教養）

3次元 Euler 方程式の外部問題　117

小薗　英雄（北大・理）

時間に依存する領域における2次元 Euler 方程式　127

岡本　久（東大・理）

完全流体の自由境界問題における摂動と分岐　137

山田　義雄（名大・理）

Study of Free Boundary Problems Arising in Ecology　145

水町　竜一（東北大・理）

ウズの方程式について　154

松井　伸也（北大・理）

On Separation Points of Solutions to Prandtl
Boundary Layer Problem　159

亀島　伸朗（東大・教養）

Navier-Stokes 方程式の統計的解　169

An Introduction to Nonlinear Evolution Equations

東海大・理　大谷光春

序　ここでご紹介する内容は、私が在仏中に聞く機会があったH. BREZIS教授(Paris VI)の講義に私の脚色、私案等を加えたものです。講義の対象は第3課程(troisième cycle)(日本の修士課程に相当)の学生であったので その内容は非線形発展方程式論の初歩的かつ基本的なものです。大部分の方には退屈かも知れませんが、講義をなさる場合の参考にはなるであろうと思われますし、これから発展方程式論を志す方々には、知識の整理の良い機会ではないかと思い、あえてこの様な話しをさせて頂こうという次第です。紙面(時間)の関係でそう多くの方程式を扱う訳にはいきませんが、物理学などに良く現われる以下の四つの典型的な方程式を発展方程式論の立場から統一的に取り扱って見ようという訳です。

(1) 非線形熱方程式

$$
(\mathrm{NH})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(u(x,t)), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\
u(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\
u(x,0) = a(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

Model：ある種の化学反応，原子炉反応，生態学にあらわれるmodel etc.

(2) 非線形波動方程式

$$
(\mathrm{NW})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(u(x,t)), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\
u(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\
u(x,0) = a(x), & x\in\Omega,
\end{cases}
$$

Model：相対論的量子場の方程式 etc.

(3) 非線形シュレディンガー方程式

(未知関数 $u(x,t)$ は複素数値.)

$$
(S)\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u = f(|u|^2)u, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = a(x), & x\in\Omega. \end{cases}
$$

Model: 媒質中を伝わるレーザーの方程式 etc.

(4) ナビエ・ストークスの方程式

$$
(NS)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u + (u\cdot\nabla)u = -\nabla p & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \mathrm{div}\, u(x,t) = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = a(t), & x\in\Omega. \end{cases}
$$

Model: 非圧縮性流体の方程式, 未知関数 $u=(u^1,u^2,\cdots,u^N)$ は流体の速度ベクトル, 未知スカラー関数 p は圧力を表わす。

ここで $(u\cdot\nabla)u$ の j-成分は $\sum_{i=1}^{N} u^i \dfrac{\partial u^j}{\partial x_i}$

目標　これ等の方程式を適当なヒルベルト空間での抽象発展方程式として統一的に取り扱いたい。

即ち、(1)~(4) の方程式を適当なヒルベルト空間 H を定めて

$$
(E)\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(u), \\ u(0) = a. \end{cases}
$$

なる H 上での抽象発展方程式に帰着し、解きたい。

荒ぽく言えば　$A=-\Delta$，　$F(u)=f(u)$ or $(u\cdot\nabla)u$　とし
$F(\cdot)$ を A に対する摂動と見做して解の存在を示したい。

PART I　抽象論

(1)〜(4) に於いて $-\Delta$ に相当する部分は次の様な共通の性質をもっている。

定義1　H を実ヒルベルト空間とし，その内積及びノルムを $(\cdot,\cdot)$ 及び $|\cdot|$ で表す。　A を定義域 $D(A)\subset H$ をもつ H 上の線形作用素とする。この時 A が単調 (monotone) であるとは

$$(Av,v)\geqq 0 \qquad \forall v\in D(A)$$

A が極大単調 (maximal monotone) であるとは　A が monotone かつ
$R(I+A)=H$，i.e.，$\forall h\in H$，$\exists u\in D(A)$ s.t

$$u+Au=h.$$

実際，(1) の例では，　$H=L^2(\Omega)$，$A=-\Delta$，$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$
とすれば　A は H で maximal monotone になる。

(i) monotone 性　　$v\in D(A)\subset H_0^1(\Omega)$ に注意して，部分積分をすれば

$$(Av,v)=\int_\Omega -\Delta v\, v\,dx=\sum_{i=1}^n\int\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2dx\geqq 0 \qquad \text{より明らか。}$$

(ii) maximal 性

$H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ で定義される二次形式

$$B[u,v]=\sum_{i=1}^n\int\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int u\cdot v\,dx \qquad \text{は明らかに}$$

$$|B[u,v]|\leqq\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \quad \text{かつ} \quad B[u,u]\geqq\|u\|_{H^1}^2 \quad \text{を満すから}$$

良く知られた Lax-Milgram の定理（[田辺, 3] P.25 参照）より

$\forall h \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ に対して、$\exists v \in H_0^1(\Omega)$ s.t.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx + \int_\Omega v\cdot\varphi\, dx = \int_\Omega h\cdot\varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

, i.e., v は $-\Delta v + v = h$, $v|_{\partial\Omega} = 0$ の所謂 distribution sense での解。更に $h \in L^2(\Omega)$ であれば $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ であったから $-\Delta v \in L^2(\Omega)$ を得る。 楕円型作用素の一般論（elliptic estimate）によれば、$v, -\Delta v \in L^2(\Omega) \Rightarrow v \in H^2(\Omega)$ を得て $v \in D(A)$ が検証される。（[溝畑, 2, P191] 又は [Ladyzhenskaya ; 10] を参照）

よって、$f(u(\cdot,t)) = F(u)$ とすれば、方程式 (1) は (E) に帰着できる。

（例2） $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ に

$$(U_1, U_2)_H = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2\, dx + \int_\Omega v_1 v_2\, dx, \quad U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2,$$

なる内積を与える。ここで $u = u$, $\partial u/\partial t = v$ とおけば

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{\partial}{\partial t}v = \Delta u + f(u)$$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}.$$

よって $A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$, $D(A) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix};\ u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega) \right\}$

$F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}$ とおけば 方程式 (2) は (E) に帰着できる。

実際 A が 極大単調 である事は次の様にして確かめられる。

(i) monotone 性：　　$u, v \in H_0^1(\Omega)$ に注意して，部分積分を実行すれば

$$(AU, U)_H = \left(\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H = \int_\Omega -\nabla v \nabla u \, dx - \int_\Omega \Delta u \, v \, dx = 0 .$$

(ii) maximal 性：　${}^\forall G = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in H \iff g \in H_0^1,\ h \in L^2$ に対して

$$U + AU = G \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} u - v = g \\ v - \Delta u = h \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{ll} u - \Delta u = g + h & ① \\ v = u - g & ② \end{array} \right.$$

ここで，$g + h \in L^2$ であったから，前例と全く同様に ①を満たす一意解 $u \in H^2 \cap H_0^1$ が存在する。よって更に ②より $v = u - g \in H_0^1$ を得る。 i.e. $U \in D(A)$.

(例3)　　$u = u_1 + i u_2$ とおくと 方程式(3) は

$$i\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + i \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - \Delta (u_1 + i u_2) = f(|u|^2)(u_1 + i u_2)$$

$$\iff \left[\begin{array}{lll} 虚部 : & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_2 = f(|u|^2) u_2 \\ 実部 : & \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \Delta u_1 = -f(|u|^2) u_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(|u|^2) u_2 \\ -f(|u|^2) u_1 \end{pmatrix}$$ となる。

ここで　$H = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$,　$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right)_H = \int_\Omega u_1 w_1 dx + \int_\Omega u_2 w_2 dx$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ; \ u_i \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \ \ i=1,2 \right\}$,

$F\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(|u|^2)\, u_2 \\ -f(|u|^2)\, u_1 \end{pmatrix}$　とおけば．(3) は (E) に帰着される。

(i) Aの monotone 性：　部分積分によって

$$(AU, U)_H = \left(\begin{pmatrix} -\Delta u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right)_H = -\int_\Omega \Delta u_2\, u_1 dx + \int_\Omega \Delta u_1\, u_2 dx = 0$$

(ii) Aの maximal 性：　$^\forall G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in H$　に対して

$$U + AU = G \iff \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} u_1 - \Delta u_2 = g_1 \\ u_2 + \Delta u_1 = g_2 \end{bmatrix} \iff (*) \begin{bmatrix} u_1 - \Delta u_2 = g_1 \\ -u_2 - \Delta u_1 = -g_2 \end{bmatrix}$$

ここで　$H_0^1 \times H_0^1$　上で次の二次形式を考える，（$\varepsilon>0$ は固定）

$$B_\varepsilon[U, \varphi] = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi_1 dx - \int_\Omega u_2 \varphi_1 dx + \varepsilon \int_\Omega u_1 \varphi_1 dx + \int_\Omega \nabla u_2 \nabla \varphi_2 dx + \int_\Omega u_1 \varphi_2 dx + \varepsilon \int u_2 \varphi_2 dx$$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$.

Schwarz の不等式から，明らかに　$|B_\varepsilon[U, \varphi]| \le \mathrm{Const.}\ |U|_H \cdot |\varphi|_H$

更に、$B_\varepsilon[U,U] = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + \varepsilon |u_1|^2 + \varepsilon |u_2|^2)\,dx$

$$\geq \min(1,\varepsilon)\ |U|_H^2$$

よって Lax-Milgram の定理より，$\forall \overline{G} = \begin{pmatrix} -g_2 \\ g_1 \end{pmatrix} \in L^2 \times L^2 \subset H^{-1} \times H^{-1}$
に対して 次を満足する $U = \begin{pmatrix} u_1^\varepsilon \\ u_2^\varepsilon \end{pmatrix} \in H_0^1 \times H_0^1$ が存在する。

$$B_\varepsilon[U,\varphi] = (\overline{G}, \varphi)_H \quad \text{for } \forall \varphi \in H_0^1 \times H_0^1 .$$

特に $\varphi_2 = 0$ として

$$(1)^\varepsilon \quad \int_\Omega \nabla u_1^\varepsilon \nabla \varphi_1\, dx + \int_\Omega (\varepsilon u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\varphi_1\, dx = \int_\Omega -g_2 \varphi_1\, dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(\Omega),$$

$\varphi_1 = 0$ として

$$(2)^\varepsilon \quad \int_\Omega \nabla u_2^\varepsilon \nabla \varphi_2\, dx + \int_\Omega (\varepsilon u_2^\varepsilon + u_1^\varepsilon)\varphi_2\, dx = \int_\Omega g_1 \varphi_2\, dx, \quad \forall \varphi_2 \in H_0^1(\Omega).$$

まず $\varphi_1 = -u_2^\varepsilon$，$\varphi_2 = u_1^\varepsilon$ として $(1)^\varepsilon + (2)^\varepsilon$ を計算する事により，次を得る。

$$\int_\Omega (|u_1^\varepsilon|^2 + |u_2^\varepsilon|^2)\,dx = \int_\Omega (g_2 u_2^\varepsilon + g_1 u_1^\varepsilon)\,dx \quad , \text{i.e.,}$$

$$(3) \quad \int_\Omega (|u_1^\varepsilon|^2 + |u_2^\varepsilon|^2)\,dx \leq \int_\Omega (|g_1|^2 + |g_2|^2)\,dx \leq C < +\infty .$$

次に $\varphi_1 = u_1$，$\varphi_2 = u_2$ として $(1)^\varepsilon + (2)^\varepsilon$ を計算すれば，(3)より

$$(4) \quad \int_\Omega (|\nabla u_1^\varepsilon|^2 + |\nabla u_2^\varepsilon|^2 + \varepsilon |u_1^\varepsilon|^2 + \varepsilon |u_2^\varepsilon|^2)\,dx = \int_\Omega (g_1 u_2 - g_2 u_1) \leq C .$$

(＊次頁脚注参照)

よって (3), (4) より適当な点列 $\varepsilon_n \downarrow 0$ が存在して

$$u_i^{\varepsilon_n} \longrightarrow u_i \qquad \text{weakly in } H_0^1(\Omega),$$
$$\varepsilon_n u_i^{\varepsilon_n} \longrightarrow 0 \qquad \text{strongly in } L^2(\Omega), \quad i=1,2.$$

即ち u_1, u_2 は 方程式 (*) (P.6) の distribution sense の解となる。一方 $-\Delta u_1 = u_2 - g_2 \in L^2$ かつ $-\Delta u_2 = g_1 - u_1 \in L^2$ であるから，例1 と同様にして $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，i.e., $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in D(A)$ を得る。

(例4) $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{u=(u^1,u^2,\cdots,u^N) ;\ u^i \in C_0^\infty(\Omega),\ \mathrm{div}\, u = 0\}$

$\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^N$

$\mathbb{L}_\sigma^2(\Omega) = C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ の $\mathbb{L}^2(\Omega)$ での閉包

P ＝ $\mathbb{L}^2(\Omega)$ から $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ の上への orthogonal projection とする。

まず (NS) の第一式に P を作用させると

$$\frac{du}{dt} - P\Delta u + P(u\cdot\nabla)u = 0$$ となる事に注意する。

(ここで，$\frac{du}{dt}(t)$ は u を $\mathbb{L}^2_\sigma$-valued の t の関数とみなした時の t-微分。)

実際，条件 $\mathrm{div}\, u = 0$ より $D_h u = \dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} \in \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ かつ $D_h u \rightarrow \dfrac{du}{dt}$ (strongly in $\mathbb{L}^2_\sigma$ as $h\to 0$) であるから，

(注) 実は，$\varphi^1 = w_1 = u_1^\varepsilon - u_1^\mu$，$\varphi^2 = w_2 = u_2^\varepsilon - u_2^\mu$ 及び $\varphi^1 = -w_2$，$\varphi^2 = w_1$ として $(1)^\varepsilon + (2)^\varepsilon - (1)^\mu - (2)^\mu$ を計算し，関係 (3) を利用すると $\{u_1^\varepsilon\}, \{u_2^\varepsilon\}$ は $H_0^1(\Omega)$ での Cauchy 列となる事がわかる。

$\frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2_\sigma$, i.e., $P\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt}$ を得る。 一方

$$\int_\Omega \operatorname{grad} p \cdot \varphi \, dx = -\int_\Omega p \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$$

に注意すれば $P \cdot \operatorname{grad} p = 0$ を得る。

よって $A = -P\Delta$, $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))^N \cap \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$

$F(u) = -P(u\cdot\nabla)u$ とすれば (4) は (E) に帰着される。

A が monotone である事は (1) の時と同様にして簡単に示される。又 A が maximal である事は Ladyzhenskaya の本 [10] を参照されたい。

§ I-1 Unperturbed Problem (Hille-Yosida の定理)

(E) で $F \equiv 0$ とした方程式

$$(E)_0 \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = a \end{cases}$$

の解の存在に関して、次の有名な Hille-Yosida の定理が成立する。(詳細な証明は [田辺 ; 3] を参照されたい。又 この結果は A が非線形の場合にも拡張されている (高村の定理)。これについては [高村-小西 ; 1] を参照されたい。)

定理 (Hille-Yosida) A を H に於ける極大単調作用素とする時、$\forall a \in D(A)$ に対して次を満足する $(E)_0$ の一意解 $u(t)$ が存在する。

(i) $u \in C^1([0,\infty);H) \cap C([0,\infty);D(A))$,

(ii) $|u(t)| \leq |a|$,

(iii) $|Au(t)| \leq |Aa|$.

証明の概略：まず次の事実に注目しよう。

(1.1) $\underline{R(I+A) = H \Rightarrow R(I+\lambda A) = H} \quad \forall \lambda > 0$.

i.e., $\forall g \in H$, $\exists/ u \in D(A)$ s.t. $u + \lambda A u = g$ 両辺に u をかけて

$|u|^2 \leq |u|^2 + (\lambda A u, u) = (g, u) \leq |g| \cdot |u|$ より $|u| \leq |g|$ を得る。

即ち $J_\lambda g = (I+\lambda A)^{-1} g = u$ とすれば J_λ は一価連続で

(1.2) $|J_\lambda v| \leq |v| \quad \forall \lambda > 0$ を満足する。

(1.1) を示すには「$I+\lambda_0 A$ が bijective $\Rightarrow$ $I+\lambda A$ も bijective $\forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0]$」を示せば十分である。実際、

$$
\begin{aligned}
u + \lambda A u = g &\iff \frac{\lambda_0}{\lambda} u + \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} g \\
&\iff u + \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} g + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \\
&\iff u = J_{\lambda_0}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} g + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right] \\
&\iff u \text{ は } T : v \longmapsto Tv = J_{\lambda_0}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} g + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) v\right] \\
&\qquad \text{の不動点}
\end{aligned}
$$

一方 (1.2) より $|Tv - Tw| = \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \cdot |J_{\lambda_0}(v-w)| \leq \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \cdot |v - w|$

であるから縮小写像の定理より (1.1) が示される。

次に A の Yosida 近似を次で定義する。

$$(1.3)\quad A_\lambda v = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v)$$

ここで J_λ の定義より $J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v) = v$ であるから (1.3) に代入すると

$$(1.4)\quad A_\lambda v = A(J_\lambda v) \qquad \forall v \in H.$$

更にもし $v \in D(A)$ であれば $A_\lambda v = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) \in D(A)$ であるから

$A_\lambda v + \lambda A(A_\lambda v)$

$= A_\lambda v + \lambda A(\frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v)) = Av$ 即ち (1.4) より

$$(1.5)\quad A_\lambda v = J_\lambda(Av) = A(J_\lambda v) \qquad \forall v \in D(A) \qquad (J_\lambda \text{ と } A \text{ の可換性})$$

よって (1.3), (1.5), (1.2) より直ちに

$$(1.6)\quad |w - J_\lambda w| = \lambda|A_\lambda w| = \lambda|J_\lambda(Aw)| \leq \lambda|Aw| \to 0 \quad \text{as } \lambda \to 0 \quad \forall w \in D(A).$$

一方，$\overline{D(A)} = H$ であるから（実際，$(f, v) = 0$ $\forall v \in D(A)$ とすれば $v = J_\lambda f$ とおいて $|v|^2 + (Av, v) = (f, v) = 0$ より $v = 0$ i.e., $f = 0$ を得る。）

(1.2) と三角不等式により

$$(1.7)\quad J_\lambda v \to v \quad \text{as } \lambda \to 0 \quad \forall v \in H$$

が示される。

よって (1.4), (1.7) より $A_\lambda v \to Av$ as $\lambda \to 0$ $\forall v \in D(A)$ (A_λ は A を近似する！)

そこで，次の近似方程式を考えよう

$$(E)_\lambda \quad \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda(t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ u_\lambda(0) = a \end{cases}$$

この方程式が一意解 $u_\lambda \in C^1([0,\infty); H)$ を持つ事は，A_λ が有界 (Lipschitz 連続) であるから (see (1.1) (1.3))，$(E)_\lambda$ を積分方程式になおし，縮小写像定理を用いて証明される。(後述の定理 A の証明と全く同じなので省略，(2.3) で $S(t) \equiv I$ とすれば良い。)

(1.8) $(A_\lambda v, v) = (A(J_\lambda v), J_\lambda v) + (A_\lambda v, v - J_\lambda v) \geq \frac{1}{\lambda}|A_\lambda v|^2 \geq 0$

であるから，$((E_\lambda)\cdot u_\lambda)$ を計算する事によって，$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)|^2 \leq 0$，i.e.,

(1.9) $|u_\lambda(t)| \leq |a| \qquad \forall\lambda, \forall t.$

ここで，$(E)_\lambda$ に A_λ^k $(k=1,2)$ を作用させると

$$(E)_\lambda^k \begin{cases} \frac{d}{dt}(A_\lambda^k u_\lambda) + A_\lambda(A_\lambda^k u_\lambda) = 0, & t \in (0,\infty), \\ A_\lambda^k u_\lambda(0) = A_\lambda^k a \end{cases}$$

よって (1.9) と全く同様にして

(1.10) $|A_\lambda^k u_\lambda(t)| \leq |A_\lambda^k a| = |J_\lambda A(A_\lambda^{k-1} a)| \leq |A_\lambda^{k-1} A a| \leq |A^k a| \qquad \forall\lambda, \forall t, \ k=1,2.$

次に，$((E)_\lambda - (E)_\mu, u_\lambda - u_\mu)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 &= -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, (u_\lambda - J_\lambda u_\lambda) - (u_\mu - J_\mu u_\mu)) \\ &\quad - (A(J_\lambda u_\lambda) - A(J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ &\leq (\lambda|A_\lambda u_\lambda(t)| + \mu|A_\mu u_\mu(t)|)\cdot(|A_\lambda u_\lambda(t)| + |A_\mu u_\mu(t)|) \end{aligned}$$

よって (1.10) より $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ は $C([0,T];H)$ で Cauchy 列となる $(\forall T>0)$.

$(E)_\lambda^1$ に対しても同様の議論をすれば，$a \in D(A^2)$，i.e., $|A^2 a| < +\infty$ ならば $\{A_\lambda u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ も $C([0,T];H)$ で Cauchy 列となる．

即ち，

$$(1.11) \begin{cases} u_\lambda(t) \longrightarrow u(t) & \text{in } C([0,T];H) \ (\forall T>0) \text{ as } \lambda \to 0, \\ A_\lambda u_\lambda(t) \longrightarrow g(t) & \text{in } C([0,T];H) \ (\forall T>0) \text{ as } \lambda \to 0, \end{cases}$$

かつ

(1.12) $u(t) = -\int_0^t g(\tau)\,d\tau + a, \qquad \forall t > 0.$

ここで A は閉作用素である事に注意しよう。実際，$v_n \to v$ かつ $Av_n \to g$ とすれば $v_n + Av_n \to v + g$. $(I+A)^{-1}$ は連続であったから $v_n = (I+A)^{-1}(v_n + Av_n) \to (I+A)^{-1}(v+g) = v$
i.e., $v \in D(A)$ かつ $g = Av$.

次に $|u - J_\lambda u| \leq |u - u_\lambda| + |u_\lambda - J_\lambda u_\lambda| \leq |u - u_\lambda| + \lambda |A_\lambda u_\lambda|$ に注意すれば $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ as $\lambda \to 0$ が得られ，$A_\lambda u_\lambda(t) = A(J_\lambda u_\lambda(t)) \to g(t)$ であったから，A の閉性より $u(t) \in D(A)$ $\forall t > 0$ かつ $g(t) = Au(t)$ がわかる。よって (1.11), (1.12) かつ (1.9), (1.10) によって $a \in D(A^2)$ の時には $u(t)$ が題意の解である事がわかる。

$a \in D(A)$ の場合には，$a_n \in D(A^2)$ かつ $a_n \to a$ in $D(A)$ となる $\{a_n\}$ が存在するから（$D(A^2)$ は $D(A)$ で dense），$u_n(t)$ を $u_n(0) = a_n$ となる $(E)_0$ の解とすれば，$W(t) = u_n(t) - u_m(t)$ は $dW(t)/dt + AW(t) = 0$, $W(0) = a_n - a_m$ を満たすから
(ii) と (iii) ((1.9) と (1.10)) より $|W(t)| + |AW(t)| \leq |a_n - a_m| + |A(a_n - a_m)|$
即ち $\{u_n(t)\}$ は $C([0,\infty); D(A))$ で Cauchy 列となるから その極限が求める (E) の解となる。

［証明終］

§ I-2 Perturbed Problem.

まず次の二つの定理を準備しよう。

定理A　$F(\cdot)$ を H から H への各有界集合上で Lipschitz 連続 (Local Lip.) とする, i.e., $\forall M$, $\exists L_M$ s.t.

(2.1) $|F(u)-F(v)| \leq L_M |u-v|_H \quad \forall |u|, |v| \leq M$.

この時 $\forall a \in D(A)$ に対して正数 T_m が存在して (E) が一意解

$u \in C^1([0,T_m);H) \cap C([0,T_m);D(A))$ をもつ。更に

(注)
(i) $T_m = +\infty$ 又は

(ii) $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_H = +\infty$ が成立する。

定理B　F を $D(A)$ から $D(A)$ への Local Lip. とする, i.e., $\forall M$, $\exists L_M$ s.t.

(2.2) $|F(u)-F(v)| + |A(F(u)) - A(F(v))| \leq L_M (|u-v| + |Au-Av|) \quad \forall u, v$ s.t. $|u|+|Au|, |v|+|Av| \leq M$.

この時 $\forall a \in D(A)$ に対して正数 T_m が存在して (E) が一意解

$u \in C^1([0,T_m);H) \cap C([0,T_m);D(A))$ をもつ。更に

(i) $T_m = +\infty$ 又は

(ii) $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_m} (|u(t)| + |Au(t)|) = +\infty$ が成立する。

(注) $T_m = T_{max}$ は u が (E) の $C^1([0,T_m);H) \cap C([0,T_m);D(A))$ に属する解として延長できる極大な時刻とする。

(注) Th.A と Th.B のちがい：後に例で示される様に、$F(\cdot)$ に関する条件に関しては Th.B の方が検証しやすい（広い非線形性を許す）が、解を大域的（t に関して）に接続する事に関しては Th.A の方が検証しやすい。

定理Aの証明：　縮小写像の定理によって証明しよう。（逐次近似法によっても証明できるが（この場合のみならず一般に）本質的には同じである。）

まず $u(t)$ が (E) の解であるとすれば、Duhamel の原理から

$$(2.3)\quad u(t) = S(t)a + \int_0^t S(t-s)\,Fu(s)\,ds$$

と書ける事に注意しよう。ここで $S(t) = e^{-tA}$, i.e., $a \in D(A)$ に対しては $S(t)a$ は $(E)_0$ の解を意味し、この対応を連続性で H 全体に拡張したもの。

$E := C([0,T];H)$, $T>0$ とし、E の閉凸集合 K を次で定義する

$$K := \{ u \in E;\ |u(t)| \le 2|a|+1,\ \forall t \in [0,T] \}.$$

今 $\forall u \in K$ に対して、

$$\Phi(u)(t) = S(t)a + \int_0^t S(t-s)\,Fu(s)\,ds$$

で Φ を定義すれば明らかに $\Phi(u) \in E$ である。更に

$$|\Phi(u)(t)| \le |S(t)a| + \int_0^t |S(t-s)\cdot Fu(s)|\,ds$$

$$\le |a| + \int_0^t |Fu(s)|\,ds \qquad (\because\ |S(t)a| \le |a|)$$

ここで、(2.1) より
$$|Fu(s)| \le |Fu(s) - F(0)| + |F(0)| \le L_{2|a|+1}\cdot|u(s)| + C$$

よって十分小さな $T>0$ に対しては

$$|\Phi(u)(t)| \le |a| + T\cdot[\,L_{2|a|+1}(2|a|+1) + C\,] \le 2|a|+1 \quad \forall t \in [0,T]$$

即ち　Φ は K から K への写像となる。次に、同様にして

$$|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)| \le \int_0^t |Fu(s)-Fv(s)|\,ds \le L\cdot T\cdot \max_{0\le t\le T}|u(t)-v(t)| \;;\;(L=L_{2|a|+1})$$

より、十分小さな T に対して、Φ は K から K への縮小写像となる。

ゆえに　$\exists/ u\in K$ s.t. $\Phi(u)=u$　i.e., $u\in C([0,T];H)$ は

(2.3) の解である。しかしここで注意すべき点は、(2.3) の解は一般には必ずしも (E) の解ではないという事である。以下では $a\in D(A)$ であれば題意の解である事を示そう。

(イ) <u>$u(t)$ は Lipschitz 連続である事</u>,　$\bar{u}(t)=u(t+h)$ は $a=u(h)$ とした時の (2.3) の解であるから

$$|\bar{u}(t)-u(t)| = \left|S(t)(u(h)-a)+\int_0^t S(t-s)\{F\bar{u}(s)-Fu(s)\}\,ds\right| \quad {}^\forall t\in(0,T_m-h)$$

$$\le |u(h)-a| + L\cdot\int_0^t |\bar{u}(s)-u(s)|\,ds$$

Gronwall の不等式 (see [Brezis , p.156]) より

(2.4) $$|u(t+h)-u(t)| \le |u(h)-a|\cdot e^{LT} \quad {}^\forall t\in(0,T_m-h)\quad {}^\forall h>0$$

一方 P.10 (iii) より,

$$|S(h)a-a| = \left|\int_0^h \frac{d}{ds}S(s)a\,ds\right| = \left|\int_0^h -AS(s)a\,ds\right|$$

$$\le \int_0^h |Aa|\,ds \le |Aa|h$$

更に

$$|u(h)-a| \le |S(h)a-a| + \int_0^h |S(h-s)Fu(s)|\,ds$$

$$\le |Aa|h + (L(2|a|+1)+|F(0)|)h$$

これを (2.4) に代入して $u(t)$ は Lipschitz 連続である事が示された。

(ロ) $u(t) \in C^1([0,T_m);H)$ である事　　$u(t)$, $F(\cdot)$ ともに Lipschitz 連続であるから $f(t) := F(u(t))$ も Lip. 連続となる。　$S(t)a \in C^1$ であるから

$v(t) := \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(s)f(t-s)ds \in C^1$ を示せば良い。実際,

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds - \int_0^t S(s)f(t-s)ds\right]$$

$$= \int_0^t S(t-s)\frac{f(s+h)-f(s)}{h}ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds$$

ここで $f(\cdot)$ は Lip であったから，$\|\{f(s+h)-f(s)\}/h\| \le L$ かつ a.e. $s \in (0,T)$, $^\forall T<T_m$ に対して $\exists \lim \frac{f(s+h)-f(s)}{h} =: f'(s) \in L^\infty(0,T;H)$ (see [Brézis, 6 i, appendice]) に注意すれば,

$$\frac{dv}{dt}(t) = \int_0^t S(t-s)\cdot f'(s)ds + S(t)\cdot f(0) \in C([0,T];H).$$

(ハ) $u(t) \in C([0,T_m);D(A))$ かつ $u(t)$ は (E) を満たす。　まず次の補題を準備する。

> **補題**　$v \in H$ に対して $\frac{S(h)v - v}{h} \to \chi$ as $h \to 0$ であれば $v \in D(A)$ かつ $\chi = -Av$ となる。

(証明)　$v_n \to v$ as $n \to \infty$ となる $v_n \in D(A)$ をとると,

(2.5) $$\frac{S(h)v_n - v_n}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{ds}S(s)v_n ds = -\frac{1}{h}\int_0^h A v_n(s)ds \qquad (v_n(s) = S(s)v_n)$$

ここで $\sum_{k=1}^N v_n(t_k)(t_k - t_{k-1}) \to \int_0^h v_n(s)ds$ $(N\to\infty)$　$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=h$

かつ $A\left\{\sum_{k=1}^N v_n(t_k)(t_k-t_{k-1})\right\} = \sum_{k=1}^N Av_n(t_k)(t_k-t_{k-1}) \to \int_0^h Av_n(s)ds$ $(N\to\infty)$

であるから ($\because$ $v_n(s)$, $Av_n(s) \in C([0,h];H)$)　A の閉性より

(2.6) $$\int_0^h Av_n(s)ds = A\int_0^h v_n(s)ds$$ を得る。

$n\to\infty$ とした時　$S(t)v_n \to S(t)v$　$^\forall t$　であったから

(2.5), (2.6) と A の閉性より

$$\frac{S(h)v-v}{h} = -A\left(\frac{1}{h}\int_0^h S(s)v\,ds\right)$$ を得る。

更に $h\to 0$ とした時, $S(s)v$ の連続性より　$\frac{1}{h}\int_0^h S(s)v\,ds \to v$

かつ　$\frac{S(h)v-v}{h} \to x$　であったから, Aの閉性より　$v\in D(A)$ かつ

$x=-Av$ を得る。　　　　　　　　　　　　(証終)

$$u(t+h) = S(h)u(t) + \int_0^h S(h-s)f(t+s)\,ds$$ であるから

(2.7) $$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \frac{S(h)u(t)-u(t)}{h} + \frac{1}{h}\int_0^h S(h-s)f(t+s)\,ds$$

この式で $h\downarrow 0$ とすれば, (左辺) $\to \frac{du}{dt}(t)$, (右辺第2項) $\to f(t)$

であるから, (右辺第1項) も収束する, よって前出の補題より

$u(t)\in D(A)$ $^\forall t$　かつ　$\frac{du}{dt} = -Au(t) + f(t)$　を得る。

特に $\frac{du}{dt}, f \in C([0,T_m);H)$ より　$Au \in C([0,T_m);H)$.

$T_m < +\infty$ かつ $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_H < +\infty$ とすれば, $^\forall\varepsilon>0$, $^\exists t_\varepsilon \in (T_m-\varepsilon, T_m)$ s.t.

$|u(t_\varepsilon)|_H < C$　かつ　$u(t_\varepsilon)\in D(A)$　であるから, 前と同様にして

$a=u(t_\varepsilon)$, $0=t_\varepsilon$ として $[t_\varepsilon, t_\varepsilon+T]$ での解が構成できるが、Tは初期値

の H-norm の大きさにしか依存していなかったから, 解は $t=T_m$

の右側に延長できる事になり矛盾である。

[証明終]

定理Bの証明: H, A のかわりに $H_1 = D(A)$ $(|u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |Au|_H^2)$,
$A_1 = A$, $D(A_1) = D(A^2) = \{u \in H_1 ;\ Au \in H_1\}$ とすれば, 明らかに
A_1 は H_1 での極大単調作用素となり, $S_1(t) = e^{-A_1 t} = S(t)|_{H_1}$.
(2.2) は F が H_1 から H_1 への Local Lip. である事を意味するから
定理Aの場合と全く同様にして, (2.3) の一意的解 $u \in C([0,T_m); H_1)$
$= C([0,T_m); D(A))$ が構成できる。よってあとは $u \in C^1([0,T_m); H)$
を示せば良い。実際, $F(\cdot)$ は $D(A)$ から $D(A)$ への Local Lip.
であったから $f(t) := F(u(t)) \in C([0,T_m); D(A))$ である。
ここで (2.7) 式を思い出して,

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{ds} S(s)x\, ds = -\frac{1}{h}\int_0^h A\, S(s)x\, ds$$

$x = u(t)$ 及び $x = u(t-h)$ として $h \downarrow 0$ とすれば $u \in C([0,T_m); D(A))$
であるから (右辺) $\to -A\,u(t)$ となる。よって (2.7) より
$\frac{du}{dt}(t) = -A\,u(t) + f(t)$ よって特に $u \in C^1([0,T_m); H)$

[証明終]

系A(B) 定理A (B) に於いて $F(\cdot)$ が H から H への ($D(A)$ から
$D(A)$ への) Lipschitz 連続作用素とすると, $T_m = \infty$, i.e., $\forall a \in D(A)$
に対して (E) はいつも大域的な解 $u \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$
をもつ。

(証明) 定理A, B の後半の主張より $|u(t)|_H$ 又は $|u(t)|_H + |Au(t)|_H$
の a priori 評価を得れば良い。実際 P.15 の最後の評価式
に於いて $L_{2|a|+1}$ のかわりに $|a|$ に依存しない (Lipschitz) 定数
L がとれるから, $|u(t)|_H$ 又は $|u(t)|_{H_1}$ は $\forall T$ に対して $[0,T]$
で有界となる事がわかる。
(同じ事であるが, 別の言い方をすれば, 定理A, B で決めた T は

$T = \min(1/(L+C),\ 1/2L)$ と、$|a|$ と独立にとれる。)

［証明終］

A が自己共役作用素の時には（方程式 (1) (4) の場合がこれ） $a \in H$ でも 方程式 (E)$_0$: $du(t)/dt + Au(t) = 0$ $u(0) = a$ は 解 $u \in C^1((0,\infty);H) \cap C((0,\infty);D(A))$ を持ち

$$|Au(t)| \leq C \cdot \frac{|a|}{t} \qquad \forall t > 0$$

即ち $t > 0$（時間が少しでもたてば）に対し $u(t) \in D(A)$ となる。(regularity が増す) これを smoothing effect と呼ぶ。この性質は，方程式 (E) にも反映しているはずで，実際定理 A に於いて $a \in H$ であっても 積分方程式 (2.3) の解 u は $u \in C^1((0,T_m);H) \cap C((0,T_m);D(A))$ を満たす（強）解である事がわかる。更に $a \in D(A^\alpha)$ (*)，$0 < \alpha < 1$，に対しても もう少し 精密な存在定理がある。例えば $\alpha = 1/2$ の時 次が成立する。(cf.［大谷；11］)

<u>定理C</u>　A を自己共役作用素とし 次を満たすものとする。

(i) $\{u \in H;\ |u|_H + |Au|_H \leq C\}$ は $\forall C > 0$ に対し H で compact,

(ii) $|Fu|_H^2 \leq k|Au|_H^2 + M(|A^{1/2}u|_H^2 + |u|_H^2)$，$\forall u \in D(A)$，$0 \leq k < 1$，ここで $M(\cdot)$ は $[0,\infty)$ での 単調増加関数.

(iii) F は 次の意味で measurable かつ demiclosed ; $\forall T > 0$ に対して

(*) 分数巾の理論については［田辺；3］を参照のこと

<u>measurable</u>: $u \in C([0,T];H)$ かつ $Au \in L^2_{loc}([0,T];H)$ なる u に対して
$Fu(t)$ は t に関して (H-valued 関数として) 可測.

<u>demiclosed</u>: $u_n \to u$ strongly in $C([0,T];H)$, $Au_n \rightharpoonup Au$ weakly in $L^2(0,T;H)$ かつ $Fu_n(t) \rightharpoonup g(t)$ weakly in $L^2(0,T;H)$
ならば $g(t) = Fu(t)$ a.e. $t \in [0,T]$

この時 $\forall a \in D(A^{1/2})$ に対して, $T_m > 0$ と (E) の解 u が存在して
$u \in C([0,T_m);D(A^{1/2}))$; $\frac{du}{dt}, Au \in L^2_{loc}([0,T_m);H)$; 更に
$T_m = +\infty$ 又は $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_m} (|u|_H + |A^{1/2}u|_H) = +\infty$ が成立する.

<u>証明の概略</u>: まず $T>0$ を一時固定して, 次の方程式を考える。

$$
(E)_h \begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + Au_h = h, & 0 < t \leq T \\ u_h(0) = a. \end{cases}
$$

$\forall a \in D(A^{1/2})$, $h \in \mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ に対して, $(E)_h$ は一意的な解
$u_h \in C([0,T];D(A^{1/2}))$ s.t. $\frac{du}{dt}, Au_h \in L^2(0,T;H)$ を持つ
事が知られている。(See [田辺, 3], [Brézis, 6])

ここで $\mathcal{F}(h)(t) := F(u_h(t))$ で $\mathcal{F}$ を定義すれば (ii) より
$\mathcal{F}$ は $L^2(0,T;H)$ から $L^2(0,T;H)$ への作用素となる。更に
(i) と (iii) の demiclosedness より $L^2(0,T;H)$ の弱位相で $\mathcal{F}$ は
連続となる。次に h を $L^2(0,T;H)$ の弱 compact 集合
$K := \{ u \in \mathcal{H};\ \int_0^T |u(t)|^2 dt \leq R \}$ の任意の元とする。

まず、$(E)_h$ と u との内積を取る事により

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_h(t)|^2 \leq |h(t)|\cdot|u_h(t)| \quad , \text{i.e.}$$

(2.8) $\quad |u_h(t)| \leq |a| + \int_0^T |h(t)|\,dt \leq |a| + \sqrt{R}\sqrt{T}$

更に、$(E)_h$ と $Au_h(t)$ との内積をとれば

$$(Av, \tfrac{dv}{dt}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}v(t)|^2 \ {}^{(*)} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{2}|Au_h(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_h(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|h(t)|^2, \quad \text{よって}$$

(2.9) $\quad \int_0^T |Au_h(t)|^2 dt + \sup_{0\leq t\leq T}|A^{1/2}u_h(t)|^2 \leq |A^{1/2}a|^2 + R$

よって、(2.8), (2.9) 及び (ii) より

$$\int_0^T |\mathcal{F}(h)|^2 dt \leq k R + k\cdot C + M(R + 2C + 2RT)\cdot T$$

ここで $C = |a|^2 + |A^{1/2}a|^2$. 従って $R \geq \frac{2kC}{(1-k)}$ 及び

$T \leq \min\left(1, \frac{(1-k)R}{2M(3R+2C)}\right)$ にとれば $\mathcal{F}$ は K から K への写像となる。以上の事実より Schauder の不動点定理が適用できて、$\mathcal{F}$ は K の中に不動点 $\bar{h}$ をもつ, i.e., $u = u_{\bar{h}}$ とすれば

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = \bar{h} = \mathcal{F}(\bar{h}) = F(u) \\ u(0) = a \end{cases}$$

となるから u が求める解となる。 [証明終]

(*) $h>0$ として $(Av(t), \frac{v(t+h)-v(t)}{h}) = \frac{1}{h}(A^{1/2}v(t), A^{1/2}v(t+h) - A^{1/2}v(t)) \leq \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}|A^{1/2}v(t+h)|^2 - \frac{1}{2}|A^{1/2}v(t)|^2\right]$

$h \downarrow +0$ として $(Av, \frac{dv}{dt}) \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}v(t)|^2$ を得る。同様に $h \uparrow -0$ とすれば逆向きの不等式を得る。

PART II 各論

この章では Part I で与えた存在定理などを利用して、例で挙げた(1)〜(4)の方程式について、解の存在を中心に調べてみよう。以下では特にことわらない限り、領域 Ω は有界で $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。(Ω の有界性は本質的でない場合が多い。)

(1) 非線形熱方程式

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\
u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u(x,0) = a(x) & x \in \Omega.
\end{cases}
$$

まず定理 A, B, C 等を直接適用すると次の結果が得られる。

定理1. $f(\cdot)$ を Lipschitz 連続とする。(*1) この時 $\forall a \in L^2(\Omega)$ に対して (1) は一意的な弱解 $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ を持つ。i.e.,

$$\left(u(t) = S(t)a + \int_0^t S(t-s) f(u(s))\,ds, \quad S(t) \text{ は } -\Delta \text{ の生成する半群} \right).$$

更に もし $a \in D(A)$ ならば u は $C^1((0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty); H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ に属し、$(0,\infty)$ での強解となる。

定理2. $N \leq 3$ かつ $f \in C^3$, $f(0)=0$ とする。(*2) この時 $\forall a \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ に対して、T_m と (1) の一意的強解 $u \in C^1([0,T_m); L^2(\Omega)) \cap C([0,T_m); H^2\cap H_0^1)$ が存在し (i) $T_m = \infty$ 又は (ii) $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{H^2\cap H_0^1} = \infty$ が成立する。

(*1) 例えば $f(u) = \pm \sin u, \pm \cos u, e^{-u^2}$ etc.

(*2) 例えば $f(u) = \pm u^3, \pm u^5, e^{-u^2}-1$ etc.

定理3. f は連続で次を満足するものとする。

$$\begin{cases} N=1 \text{ のとき} & \text{条件なし} \\ N=2 \text{ のとき} & |f(u)| \leq C(|u|^\alpha+1), \quad 0 \leq \alpha < \infty \\ N \geq 3 \text{ のとき} & |f(u)| \leq C(|u|^\alpha+1), \quad 0 \leq \alpha < \frac{N+2}{N-2} \end{cases}$$

この時 $\forall a \in H_0^1(\Omega)$ に対して $T_m > 0$ と (1) の強解 $u \in C([0,T_m); H_0^1(\Omega)) \cap L^2_{loc}([0,T_m); H^2(\Omega))$ が存在し $du/dt \in L^2_{loc}([0,T_m); L^2(\Omega))$ 更に (i) $T_m = \infty$ 又は (ii) $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{H_0^1} = +\infty$ が成立する。

定理1 の証明　$F(u)(x) = f(u(x))$ とおけば

$$|F(u) - F(v)|_{L^2}^2 = \int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^2 dx \leq \int_\Omega L^2 |u(x) - v(x)|^2 = L^2 |u-v|_{L^2}^2$$

即ち $F(\cdot)$ は Lipschitz連続であるから，系A より一意的弱解が存在する事がわかる。更にこれが $(0,T_m)$ での強解となる事は $A=-\Delta$ の自己共役性 (smoothing effect) より導かれる (cf. p.20) 実際，$a_n \in D(A)$ で $a_n \to a$ in $L^2(\Omega) = H$ となる $\{a_n\}$ をとり

$$(E)_n \begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = Fu_n, \\ u_n(0) = a_n. \end{cases}$$

なる近似方程式を考える。

(系Aより $u_n \in C^1([0,\infty); L^2) \cap C([0,\infty); H^2 \cap H_0^1)$.)

$((E)_n - (E)_m, u_n - u_m)$ を計算すると

(3.1) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t) - u_m(t)|_{L^2}^2 + |\nabla(u_n(t) - u_m(t))|_{L^2}^2 \leq L^2 |u_n(t) - u_m(t)|^2$$

Gronwall の不等式により

(3.2) $$|u_n(t) - u_m(t)|_{L^2}^2 \leq |a_n - a_m|_{L^2}^2 \, e^{2L^2 t}$$

よって (3.2) を (3.1) に代入して

(3.3) $$\int_0^T |\nabla(u_n(t)-u_m(t))|_{L^2}^2 dt \le \frac{1}{2} e^{2L^2T} |a_n - a_m|_{L^2}^2$$

次に，$((E)_n-(E)_m,\ A(u_n-u_m))$ を計算すると

$$|A(u_n(t)-u_m(t))|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla(u_n(t)-u_m(t))|_{L^2}^2 \le |A(u_n(t)-u_m(t))|\cdot|F(u_n(t))-F(u_m(t))|$$

これに Schwarz の不等式を使い，両辺に t をかけて t で積分すると

(3.4) $$\int_0^T |A(u_n(t)-u_m(t))|_{L^2}^2\, t\, dt + T\cdot|\nabla(u_n(T)-u_m(T))|_{L^2}^2$$
$$\le \int_0^T |\nabla(u_n(t)-u_m(t))|_{L^2}^2 dt + \frac{1}{2} e^{2L^2T}|a_n-a_m|_{L^2}^2$$

以上より $n\to\infty$ とすると

(3.5) $$\begin{cases} u_m(t) \longrightarrow u(t) & \text{strongly in } C([0,T]; L^2(\Omega)), \\ t\cdot Au_n(t) \longrightarrow t\,Au(t) & \text{strongly in } L^2(0,T; L^2(\Omega)), \\ t\,\frac{du_n}{dt}(t) \longrightarrow t\,\frac{du}{dt}(t) & \quad // \end{cases}$$

特に $t\cdot Au(t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ であるから，$^\forall\varepsilon>0$ に対して

$^\exists t_\varepsilon\in(0,\varepsilon)$ s.t. $u(t_\varepsilon)\in D(A)$．よって定理 A（系 A）より

$u(t)\in C^1([\varepsilon,\infty);L^2(\Omega))\cap C([\varepsilon,\infty);D(A))$．

（ 実はもう少し精密な評価も次の様にして得られる。

$(\frac{d}{dt}(E), \frac{du}{dt})$ を計算すると(*)，$(\frac{d}{dt}Au, \frac{du}{dt}) = (A\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}) \ge 0$ ゆえ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2}^2 \le \left(\frac{d}{dt}Fu, \frac{du}{dt}\right) = \left(F'(u)\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) \le L\cdot\left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2}^2$$

よって $e^{-2Lt}\left|\frac{du}{dt}(t)\right|_{L^2}^2$ は t の関数として単調減少となる。

従って，$t\cdot Au\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ より $t\cdot du/dt\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ だから

(*) 以下の計算は形式的なものであるが，適当な近似（例えば $A\to A_\lambda$）を考えれば正当化できる。

$$C \geq \int_0^T e^{-2Lt} \left|\frac{du}{dt}(t)\right|_{L^2}^2 e^{2Lt}\, t\, dt \geq e^{-2LT} \left|\frac{du}{dt}(T)\right|_{L^2}^2 \cdot \frac{1}{2} T^2 \quad , \text{i.e.,}$$

(3.6) $$\left|\frac{du}{dt}(T)\right|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{2C}\, e^{LT}}{T} \qquad {}^{\forall} T > 0 , \qquad \text{これより}$$

(3.7) $$|Au(T)|_{L^2} \leq |Fu(T)| + \left|\frac{du}{dt}(T)\right| \leq C + \frac{C}{T} \qquad {}^{\forall} T > 0 . \qquad)$$

定理2の証明. 定理Bが適用できる。即ち $F(\cdot)$ が $D(A)$ から $D(A)$ への Local Lipschitz である事を示せば良い。実際, $N \leq 3$ であるから Sobolev の埋め込み定理 (cf. 田辺[4], 溝畑[2], Ladyzhenskaya [10]) より

$D(A) \subset H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ かつ

$$|u|_{L^\infty} \leq C|u|_{H^2} \leq C|u|_{D(A)} ,$$

$$|u|_{L^4} \leq C(|u|_{L^2} + |\nabla u|_{L^2}) , \quad \text{などを利用すれば良い。}$$

例えば

$$\Delta f(u) - \Delta f(v) = f'(u) \cdot \Delta(u-v) + (f'(u) - f'(v))\Delta v$$
$$+ f''(u)\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) + (f''(u) - f''(v)) \cdot |\nabla v|^2 \quad \text{であり,}$$

$|u|_{D(A)}, |v|_{D(A)} \leq M$ とすれば

(i) $|f'(u)|_{L^\infty}, |f''(u)|_{L^\infty} \leq C_M \qquad (\because \quad |u|_{L^\infty} \leq C \cdot M)$

(ii) $$|f''(u) - f''(v)|_{L^\infty} \leq |f''(u + \theta(v-u))|_{L^\infty} \cdot |u-v|_{L^\infty} ,$$
$$< C_M \cdot |u-v|_{D(A)} ,$$

(iii) $$\left| |\nabla v|^2 \right|_{L^2} \leq C(|\nabla v|_{L^2}^2 + |\Delta v|_{L^2}^2) \leq C|v|_{D(A)} ,$$

(iv) $\left| |\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 \right|_{L^2} = \int_\Omega |\nabla(u+v)|^2 \cdot |\nabla(u-v)|^2 \, dx$

$$\le C\left(|\nabla(u+v)|_{L^2} + |\Delta(u+v)|_{L^2} \right)\left(|\nabla(u-v)|_{L^2} + |\Delta(u-v)|_{L^2} \right)$$

$$\le C_M |u-v|_{D(A)} .$$

更に $|f(u) - f(v)|_{L^2} \le |f'(u+\theta(v-u))|_{L^\infty} \cdot |u-v|_{L^\infty} \le C_M |u-v|_{D(A)}$

かつ $f(u(x))|_{\partial\Omega} = 0$ $(\because f(0)=0)$ であるから F は $D(A)$ から $D(A)$ への Local Lipschitz である事がわかった。

定理3の証明　定理Cが適用できる。条件(i)は Rellich の定理より明らか。又(iii)は $f(\cdot)$ の連続性より導かれる。(ii)を見るには、

$$|u|_{H_0^1} \le C\left(|A^{1/2}u|_{L^2} + |u|_{L^2} \right) \quad \text{及び}$$

$N=1$ の時には $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,

$N=2$ の時には $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in (1,+\infty)$, に注意すれば良い。

$N \geqq 3$ の場合については、Moment 不等式（抽象的補間不等式）より（小[illegible][3] P.37）

$$|f(u)|_{L^2} = |u|^{\alpha}_{L^{2\alpha}} \le C|A^\beta u|^{\alpha}_{L^2} \le C\left\{ |Au|^{2\beta-1}_{L^2} \cdot |A^{1/2}u|^{2-2\beta}_{L^2} \right\}^{\alpha}$$

$$\le C|Au|^{1-\gamma}_{L^2} \cdot |A^{1/2}u|^{\alpha+\gamma-1}_{L^2}$$

$$\le \varepsilon |Au|_{L^2} + C_\varepsilon |A^{1/2}u|^{\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma}}_{L^2} ,$$

ここで $2\alpha \le \frac{2N}{N-4\beta}$, $\gamma = 1-(2\beta-1)\alpha > 0$ としなければならない。簡単な計算から、これには $\alpha < \frac{N+2}{N-2}$ で十分である。

ここで もう一つ（定理A,B,C の直接的な応用ではないが）応用範囲の広い定理を挙げよう。

定理4. $f(\cdot)$ を 局所リプシッツ連続 とする。この時 $\forall a \in L^\infty(\Omega)$ に対して，$T_m > 0$ と (1)' の一意的な弱解 $u \in C([0,T_m); L^2(\Omega))$ が存在し，$u \in L^\infty(\Omega \times [0,T])$ $\forall T \in (0,T_m)$ かつ u は $C^1((0,T_m); L^2(\Omega)) \cap C((0,T_m); H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ に属し，$(0,T_m)$ での強解になる。更に，(i) $T_m = +\infty$ 又は (ii) $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^\infty} = +\infty$ が成立する。

証明　$|a|_{L^\infty} = M$ とおき，新たに

$$\bar{f}(u) = \begin{cases} f(M+1) & u \geq M+1 \\ f(u) & |u| \leq M+1 \\ f(-M-1) & u \leq -M-1 \end{cases}$$

で $\bar{f}$ を定義すれば，

$\bar{f}(\cdot)$ は Lipschitz 連続となる。次に

$$(\bar{E}) \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} = \bar{f}(\bar{u}), \\ \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \bar{u}(x,0) = a(x), \end{cases}$$

を考えれば，定理1 より $(\bar{E})$ は一意的弱解 $\bar{u}$ をもつ。ここで

Claim: $|S(t)a|_{L^\infty} \leq |a|_{L^\infty}$ $\forall t \geq 0$

であるから，

$$|\bar{u}(t)|_{L^\infty} \leq |S(t)a|_{L^\infty} + \int_0^t |S(t-s)\bar{f}(\bar{u}(s))|_{L^\infty} ds ,$$

$$\leq |a|_{L^\infty} + \int_0^t (\bar{L}|\bar{u}(s)|_{L^\infty} + C) ds ,$$

よって，Gronwall の不等式より

$$|\bar{u}(t)|_{L^\infty} \le (|a|_{L^\infty} + CT)\, e^{\tilde{C}T} \qquad {}^\forall t \in [0,T]$$

これより 充分小さな $T = T(|a|_{L^\infty}, f)$ に対して，

$$\sup_{0\le t\le T} |\bar{u}(t)|_{L^\infty} \le |a|_{L^\infty} + 1 = M+1 \quad \text{にできる。}$$

即ち，$\bar{f}(\bar{u}) = f(\bar{u}) \Leftrightarrow \bar{u}$ は もとの方程式 (1) の解.

<u>claim の証明</u>：　$v(t) = S(t)a$ は　$u_t - \Delta u = 0$　を満たすから

両辺 と $|u|^{q-2}u$ との内積をとると，

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}|u|^q_{L^q} + (p-2)\int |\nabla u|^2 |u|^{p-2} dx = 0, \text{ i.e.,}$$

$$|u(t)|^q_{L^q} \le |a|_{L^q} \le |a|_{L^\infty} |\Omega|^{1/q},$$

ここで　$q \to +\infty$ とすれば　$|u(t)|_{L^\infty} \le |a|_{L^\infty}$　を得る。
((cf. [Yosida, p.34, Th 1; 14]).　　　　　　　　　　　　　　[証明終]

定理 1 以外は (時間に関して) 大域的な解の存在について答えていないので
以下では (1) の大域解の存在について もう少し詳しく調べて
見よう。$f(u)$ の代表的な例として 次の典型的な場合について
考えよう。

$$(1)_\lambda \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda |u|^{p-2}u, & p \ge 2, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = a(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

(定理 4 によって，$a \in L^\infty(\Omega)$ であれば この方程式は いつも 一意的
局所解 をもつ事がわかる。)

(i) $\lambda = -1$ の場合

$a \in L^\infty(\Omega)$ であれば（次元 N は何でも），$T_m = +\infty$ (*)，実際，

$((H)_\lambda, |u|^{q-2}u)$ を計算すれば $\forall q \in (1, +\infty)$ に対して

$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}|u|_{L^q}^q \le 0$ であるから，$|u(t)|_{L^\infty} \le |a|_{L^\infty}$ $\forall t$.

よって 定理4より $T_m = +\infty$.

(ii) $\lambda = 1$ の場合

（N 及び p に関する適当な条件のもとに）充分小さな初期値に対しては $T_m = +\infty$ であるが，適当な条件を満たす初期値に対しては $T_m < +\infty$ (*).

この状況を $p = 4$ (i.e. $f(u) = u^3$) $N = 1, 2, 3$ の場合について詳しく説明しよう。以下，解 u は 定理3に与えた性質をもつものとする。

まず方程式と $du(t)/dt$ 及び $u(t)$ との内積を取る事により

(3.8) $$\left|\frac{du}{dt}(t)\right|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^4}^4 = 0,$$

(3.9) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 = -|\nabla u(t)|_{L^2}^2 + |u(t)|_{L^4}^4$$ を得る。

ここで，$H_0^1(\Omega)$ の部分集合 $\mathbb{W}$ と $\mathbb{V}$ を次で導入する。

$$\mathbb{W} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ E(u) < d,\ \varphi^1(u) - 2\varphi^2(u) > 0\},$$

$$\mathbb{V} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ E(u) < d,\ \varphi^1(u) - 2\varphi^2(u) < 0\},$$

ここで $E(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2(u)$，$\varphi^1(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|_{L^2}^2$，$\varphi^2(u) = \frac{1}{4}|u|_{L^4}^4$，

(*) この状況は，常微分方程式 $\dot{y} = -y^3$ と $\dot{y} = y^3$ とからの類推からも容易に想像できよう。

$$d = (4C_b^4)^{-1},$$

$$C_b = \sup\left\{ \frac{(\varphi^2(u))^{1/4}}{(\varphi^1(u))^{1/2}} \ ; \ u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\} \right\},$$

i.e., $2^{\frac{1}{4}}C_b$ は Sobolev-Poincaré 型不等式

$$|u|_{L^4} \le C\,|\nabla u|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

の最良定数を与える。

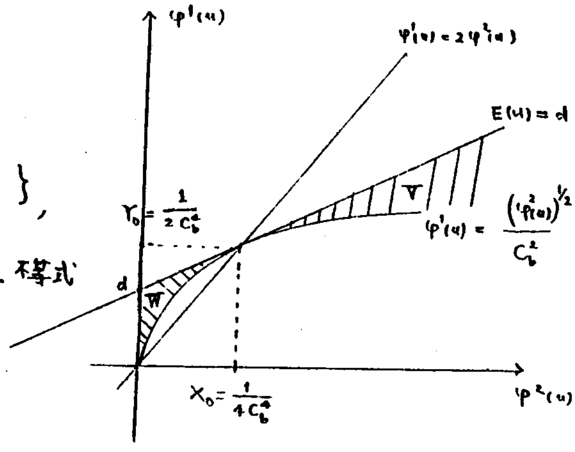


Fig. 1

この時、次の命題が成立する。

> **命題 1.** 1) $a \in \mathbb{W}$ ならば $T_m = +\infty$,
> 2) $a \in \mathbb{V}$ ならば $T_m < +\infty$.（この時 解は有限時間で爆発（Blow up）するという。）

証明. 1) (3.8) 式より $E(u(t))$ は単調減少であるから $E(u(t)) \le E(a) < d \quad \forall t$. 更に $E(u(t))$ は t に関して連続であり，図 1 より（直線：$E(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2(u) = d$ は曲線：$\varphi^1(u) = (\varphi^2(u))^{1/2}/C_b^2$ の接線であるから）$\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ E(u) < d\} = \mathbb{W} \cup \mathbb{V}$ かつ $\mathbb{W} \cap \mathbb{V} = \phi$ であるから，$u(t) \in \mathbb{W} \quad \forall t > 0$ がわかる，即ち $\sup_t |u(t)|_{H_0^1} \le (2C_b^4)^{-1}$ であるから 定理 3 より $T_m = +\infty$ が従う。

2) $T_m = +\infty$ とすれば，(3.9) 式より

$$(3.10) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 = -2E(u(t)) + \frac{1}{2}|u(t)|_{L^4}^4 \ge -2E(a) + \frac{1}{2}|u(t)|_{L^4}^4$$

更に，前と同様の議論によって，$u(t) \in V \quad {}^\forall t>0$ がわかる。

よって図1より明らかに

$$(3.11) \qquad \varphi^2(u(t)) \geq \frac{1}{4C_b^4} \qquad {}^\forall t>0 .$$

一方，$E(a) = (1-\varepsilon)d = (1-\varepsilon)/4C_b^4$，$\varepsilon>0$，であったから

(3.10)，(3.11) より

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 \geq -2\frac{(1-\varepsilon)}{4C_b^4} + 2\varphi^2(u(t)) \geq 2\varepsilon\varphi^2(u(t)) = \frac{\varepsilon}{2}|u(t)|_{L^4}^4$$

$$(3.12) \qquad \geq C_\varepsilon |u(t)|_{L^2}^4 \qquad {}^\forall t>0 .$$

よって簡単な計算によって $\exists T_0>0$ s.t. $\lim_{t \uparrow T_0} |u(t)|_{L^2} = +\infty$.

[証明終]

注意 1) 上の命題はすべての初期値に対してその解の漸近挙動を与えている訳ではない。しかし，(定理3の仮定のもとに) $(1)_\lambda$ $(\lambda=1)$ の解の漸近挙動は次の三つの場合に限られる事がわかっている。

(i) $T_m=\infty$ かつ $\omega(u) = \bigcap_{t>0}\overline{\{u(s);\, s\geq t\}}^{L^2} \subset S = \{u \in H^2 \cap H_0^1;\, -\Delta u = |u|^{p-2}u\}$，

この時 $\overline{\lim_{t\to+\infty}} |u(t)|_{H_0^1} < +\infty$，

(ii) $T_m=\infty$ かつ $\lim_{t\to\infty} |u(t)|_{L^2} = +\infty$ (これは $p=2$ の時のみ可能)，

(iii) $T_m<+\infty$ かつ $\lim_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{H_0^1} = +\infty$ (これは $p>2$ の時のみ可能)。

(詳しくは，大谷 [12] 参照)

2) $T_m < +\infty$ だからといって いつも $\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^2} = +\infty$ (L^2-B.U.) している とは限らない。即ち (3.12) で与えた T_0 と T_m とは一致するとは限らない。 $t = T_m$ で、ある Norm が Blow Up している事を示すには，初期値 その Norm で有限であれば いつも（初期値の その Norm の大きさに依存して）ある区間で解が存在する事を示せば十分である。よって 定理3 の仮定のもとには（上の例から）$\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{H_0^1} = +\infty$ (H_0^1-B.U.) している事はわかる。更に，$\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^p} = +\infty$ (L^p-B.U.) も導かれる。([12] 参照) そこで

<u>Open Problem 1.</u> <u>各種ノルムの Blow Up の同等性を論じよ。(cf. [12])</u>

もっと具体的には，定理4 によれば，($a \in L^\infty$, $f \in C^1$ ならば)

$$T_m < +\infty \iff \lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^\infty} = +\infty \quad \text{であるから}.$$

<u>Open Problem 2.</u> <u>どの様な q に対して (*) $\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^\infty} = +\infty \iff \lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^q} = +\infty$ か</u>

(i) 例えば <u>$f(u) = u^3$ の場合，$q > N$ ならば (*) が成立する</u>。
実際 $N = 1$ の時には以下の様にして示される。(一般次元 N の場合にはもっと微妙な議論が必要となる。各自試みられよ。)

(3.8) 式より，$\frac{1}{2}|\nabla u(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}|u(t)|_{L^4}^4 \le E(a)$ であったから，

Gagliado-Nirenberg の不等式（田辺 [4, Th.15-3, P128] を見よ）より

$$|u|_{L^4} \le C |u|_{L^q}^{1-a} |u|_{H^1}^{a}, \quad a = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \quad (\because q > 1).$$

以上より $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{L^q} < +\infty$ であれば, $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{H^1} < +\infty$,

従って $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{L^\infty} < +\infty$ ($\because$ $|u|_{L^\infty} \le C|u|_{H^1}$) これは定理4に矛盾する。

<u>Open Problem 3. 上の例 (i) で $q=N$ とできるか? 又 $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{L^\infty} = +\infty$ かつ $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{L^q} < +\infty$ $(1 \le q < N)$ となる例があるか?</u>

(ii) $N=2$ の場合は $q=N=2$ とできる。実際, $\varliminf_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{L^2} < +\infty$,

i.e., $\exists t_n \uparrow T_m$ s.t. $|u(t_n)|_{L^2} \le C$ とすれば, まず (3.10) より

$$\sup_{t_n} \int_0^{t_n} |u(t)|_{L^4}^4 \, dt \le C^2 + 4E(a)T_m, \tag{3.13}$$

更に $\frac{1}{2}|A^{1/2}u(t)|_{L^2}^2 = E(u(t)) + \frac{1}{4}|u(t)|_{L^4}^4 \le E(a) + \frac{1}{4}|u(t)|_{L^4}^4$ であったから

$$\sup_{t_n} \int_0^{t_n} |A^{1/2}u(t)|_{L^2}^2 \, dt \le C' < +\infty. \tag{3.14}$$

ここで Gagliado-Nirenberg の不等式 及び (3.9) 式より

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 \le |u(t)|_{L^4}^4 \le C \cdot |u(t)|_{H^1}^2 \cdot |u(t)|_{L^2}^2 \qquad {}^\forall t \in [0, T_m),$$

であるから (3.14) 及び Gronwall の不等式より

$$\sup_{t\in[0,T_m)} |u(t)|_{L^2}^2 < +\infty. \tag{3.15}$$

一方, 方程式と $-\Delta u(t)$ との内積をとれば

$$|\Delta u(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}u(t)|_{L^2}^2 \le |\Delta u|_{L^2} \cdot |u^3|_{L^2} \le \frac{1}{2}|\Delta u|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u|_{L^6}^6.$$

ここで再び Gagliado-Nirenberg の不等式: $|u|_{L^6} \le C|u|_{H^1}^{\frac{2}{3}} |u|_{L^2}^{\frac{1}{3}}$,

及び (3.14), Gronwall の不等式を使えば,

$\sup_{t\in[0,T_m)} |A^{1/2}u(t)|_{L^2} < +\infty$ を得る。これは定理3に矛盾する。

(2) 非線形波動方程式

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = f(u(x,t)), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = a(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = b(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

定理 A, B などの直接の応用として，次を得る。

定理 5. $f(\cdot)$ を Lipschitz 連続とする。(*) この時 $\forall \binom{a}{b} \in D(A)$, i.e., $a\in H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ かつ $b\in H_0^1(\Omega)$, に対して (2) は一意的な（大域）解 $u\in C([0,\infty); H^2\cap H_0^1)\cap C^1([0,\infty); H_0^1)\cap C^2([0,\infty); L^2)$ をもつ。

定理 6. $N=1,2,3$; $f(\cdot)\in C^1$ とし次を満足するものとする。

$$\begin{cases} N=1 \text{ のとき} & \text{条件なし}, \\ N=2 \text{ のとき} & |f'(u)| \le C(|u|^q+1), \quad q<+\infty, \\ N=3 \text{ のとき} & |f'(u)| \le C(|u|^2+1). \end{cases}$$

この時，$\forall \binom{a}{b}\in D(A)$ に対して $T_m>0$ と (2) の一意的（局所）解 $u\in C([0,T_m); H^2\cap H_0^1)\cap C^1([0,T_m); H_0^1)\cap C^2([0,T_m); L^2)$ が存在して

(i) $T_m=+\infty$ 又は (ii) $T_m<+\infty$ かつ $\lim_{t\uparrow T_m}\{|u(t)|_{H_0^1} + |u_t(t)|_{L^2}\} = +\infty$

が成立する。

(*) 例えば $f(u) = -m^2u + g\sin u$，(m, g は定数)，(Sine-Gordon 方程式と呼ばれる。)

定理 7. $N=1,2,3$; $f(\cdot)\in C^2$, $f(0)=0$ とする。この時 $^\forall\binom{a}{b}\in D(A)$ に対して、$T_m>0$ と (2) の一意的(局所)解 $u\in C([0,T_m);H^2\cap H_0^1)\cap C^1([0,T_m);H_0^1)\cap C^2([0,T_m);L^2)$ が存在して (i) $T_m=+\infty$ 又は (ii) $T_m<+\infty$ かつ $\lim_{t\uparrow T_m}\{|u(t)|_{H^2}+|u_t(t)|_{H_0^1}\}=+\infty$ が成立する。

証明. 定理 5, 6, 7 に対しては それぞれ 系A, 定理A, B を適用すれば良い。

定理5: $H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $A=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -\Delta & 0\end{pmatrix}$, $D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$,

$F\binom{u}{v}=\binom{0}{f(u)}$ であったから

$$\left|F\binom{u_1}{v_1}-F\binom{u_2}{v_2}\right|_H=|f(u_1)-f(u_2)|_{L^2}\le L|u_1-u_2|_{L^2}\le L'|u_1-u_2|_{H_0^1}$$
$$\le L'\left|\binom{u_1}{v_1}-\binom{u_2}{v_2}\right|_H$$

となり $F(\cdot)$ は H で Lipschitz 連続となるから 系A が適用できる。

定理6: $F(\cdot)$ は H 上 Locally Lipschitz である事を示せば良い。実際, $N=1$ の時, $H_0^1(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ ゆえ

$$|f(u_1)-f(u_2)|_{L^2}\le|f'(u_\theta)|_{L^\infty}|u_1-u_2|_{L^2}\le\sup_{|r|\le|u_\theta|_{L^\infty}}|f'(r)|\cdot|u_1-u_2|_{L^2}$$
$$\le C\cdot\sup_{|r|\le|u_1|_{H_0^1}+|u_2|_{H_0^1}}|f'(r)|\cdot|u_1-u_2|_{H_0^1}$$

$(u_\theta=\theta u_1+(1-\theta)u_2)$

$N=2$ の時，　$H_0^1(\Omega)\subset L^r(\Omega)$　$^\forall r\in[1,\infty)$ ゆえ

$$|f(u_1)-f(u_2)|_{L^2}^2 = \int_\Omega f'(u_\theta)^2\cdot|u_1-u_2|^2(x)\,dx \qquad (u_\theta=\theta u_1+(1-\theta)u_2 \quad 0<\theta<1)$$
$$\le \int_\Omega C(|u_\theta|^q+1)^2(u_1-u_2)^2\,dx$$
$$\le C\left(|u_\theta|_{L^{4q}}^{2q}\cdot|u_1-u_2|_{L^4}^2+|u_1-u_2|_{L^2}^2\right)$$
$$\le C\cdot(|u_1|_{H_0^1}+|u_2|_{H_0^1}+1)^{2q}\cdot|u_1-u_2|_{H_0^1}^2,$$

$N=3$ の時，　$H_0^1(\Omega)\subset L^6(\Omega)$ ゆえ　同様にして

$$|f(u_1)-f(u_2)|_{L^2}^2 \le C\cdot\int_\Omega(|u_1|^2+|u_1|^2+1)^2\cdot|u_1-u_2|^2\,dx$$
$$\le C(|u_1|_{L^6}^2+|u_2|_{L^6}^2+1)^2\,|u_1-u_2|_{L^6}^2$$
$$\le C\left(\left|\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}\right|_H+\left|\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right|_H+1\right)^4\cdot\left|\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right|_H^2$$

<u>定理7</u>:　$F(\cdot)$ は $D(A)$ 上 Locally Lipschitz である事を示せば良い。

$$\left|F\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right|_{D(A)} = |f(u_1)-f(u_2)|_{L^2}+|\nabla(f(u_1)-f(u_2))|_{L^2}^{(*)}$$ であるから，

$H^2(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ ゆえ，　定理6 の $N=1$ と同様にして

$$|f(u_1)-f(u_2)|_{L^2} \le L_M\,|u_1-u_2|_{L^2} \qquad \text{for } |u_1|_{H^2},\ |u_2|_{H^2}\le M.$$

更に

$$|\nabla f(u_1)-\nabla f(u_2)|_{L^2}^{(*)} = |f'(u_1)\nabla u_1 - f'(u_2)\cdot\nabla u_2|_{L^2}$$
$$\le |f'(u_1)|_{L^\infty}\cdot|\nabla(u_1-u_2)|_{L^2}+|f'(u_1)-f'(u_2)|_{L^\infty}\cdot|\nabla u_2|_{L^2}$$

(*) $|\nabla v|_{L^2} := \left(\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^2}^2\right)^{1/2}$

ここで $|f'(u_1) - f'(u_2)|_{L^\infty} \le |f''(u_\theta)\cdot(u_1-u_2)|_{L^\infty}$

$\le L_M \cdot |u_1-u_2|_{H^2} \le L_M\cdot c\cdot |u_1-u_2|_{D(A)}$ であるから

以上より $F(\cdot)$ は $D(A)$ から $D(A)$ への Local. Lip. である。

［証明終］

ここで 前節と同様に 次の典型的な場合について 解の大域的存在について もう少し詳しく考えて見よう。

$$(2)_\lambda \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \Delta u = \lambda |u|^{p-2}u, & p \geqq 2, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t\in(0,\infty), \\ u(x,0)=a(x), \quad u_t(x,0)=b(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

（定理7により，$N=1,2,3$ であれば ${}^\forall a\in H^2(\Omega)$，${}^\forall b\in H_0^1(\Omega)$ に対して $(2)_\lambda$ はいつも局所解をもつ。）

(i) $\lambda = -1$ の場合． 前節（非線形熱方程式）からの類推で いつも $T_m = +\infty$ である事が予想されるが，$N \geqq 3$ の場合には未だ未解決である。 $N=1,2$ 又は $N=3$，$1\le p\le 4$ の時には $T_m=+\infty$ である事は次の様にして示される。

$((2)_\lambda, u_t)$ を計算すれば

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{p}\frac{d}{dt}|u|_{L^p}^p = 0$$

(3.16) $\quad J(u(t)) := \frac{1}{2}|u_t(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{p}|u(t)|_{L^p}^p \equiv J(u(0)) \quad {}^\forall t>0$

即ち $\sup_t\{|\nabla u(t)|_{L^2} + |u_t(t)|_{L^2}\} \le J(u(0))$ であるから 定理6より $T_m=+\infty$ を得る。

Open Problem 4. $f(u) = -|u|^{p-2}u$ の時（初期値適当に滑らかとして）$T_m = +\infty$ か？(*)

例えば $f(u) = -u^5$, $N = 3$ の時，(3.16) より $|u_t(t)|_{L^2} + |\nabla u(t)|_{L^2}$ の a priori 評価は得られるが 定理7を適用して $T_m = +\infty$ を得るには $|\nabla u_t(t)|_{L^2} + |u(t)|_{H^2}$ の a priori bound を導かねばならない。

(ii) $\lambda = 1$ の場合　前節と同様な現象（i.e., 十分小さな初期値に対しては $T_m = +\infty$ で，適当な初期値に対しては $T_m < +\infty$）が知られている。これを，$N = 1, 2, 3$；$p = 4$ の場合で説明してみよう。

命題 2. $N = 1, 2, 3$；$p = 4$ とし $\mathbb{W}$，$\mathbb{V}$ を P.30～31 と同じく定義する。この時，

1) $a \in \mathbb{W}$ かつ $E(a) + \frac{1}{2}|b|_{L^2}^2 < d$ ならば $T_m = +\infty$，

2) $a \in \mathbb{V}$ かつ $E(a) + \frac{1}{2}|b|_{L^2}^2 < d$ ならば $T_m < +\infty$ (*Blow up*)．

証明．まず (3.16) 式より $J(u(t)) = J(u(0)) = E(a) + \frac{1}{2}|b|_{L^2}^2 < d$ であるから $E(u(t)) \le J(u(t)) < d$ for all t．よって前節と同様に 1) の場合（2) の場合）$u(t) \in \mathbb{W}$ ($u(t) \in \mathbb{V}$) for all $t > 0$ がわかる。従って 1) の場合 明らかに $|\nabla u(t)|_{L^2}$ 及び $|u(t)|_{L^4}$ は有界，よって $|u_t|_{L^2}$ も有界であるから 定理 6 より $T_m = +\infty$．

(*) $\Omega = \mathbb{R}^3$, $2 \le p < 6$ の時（適当な初期値に対して）$T_m = +\infty$ がわかっている。（Jörgens [9]，Glassey-Tsutsumi [8] 参照）

次に $((2)_\lambda, u(t))$ より

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}|u(t)|_{L^2}^2 - |u_t(t)|_{L^2}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2}^2 - |u(t)|_{L^4}^4 = 0$$

ここで (3.16) より $|\nabla u(t)|_{L^2}^2 = 2J_0 - |u_t(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u(t)|_{L^4}^4$, $J_0 = J(u(0))$,
を代入すれば

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}|u(t)|_{L^2}^2 = 2|u_t(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u(t)|_{L^4}^4 - 2J_0 .$$

ここで (図1より) $\frac{1}{4}|u(t)|_{L^4}^4 \geqq d$, $J_0 = (1-\varepsilon)d$, $\varepsilon > 0$; 更に
$C|u|_{L^2}^4 \leqq |u|_{L^4}^4$ であったから, $G(t) = |u(t)|_{L^2}^2$ は次を満たす。

(3.17) $$G''(t) \geqq 2\varepsilon C\, G(t)^2 + 2\varepsilon d \qquad \forall t > 0 .$$

よって $T_m = +\infty$ とすれば,

(3.18) $$G'(t) \geqq G'(0) + 2\varepsilon d\, t ,$$

(3.19) $$G(t) \geqq G'(0)t + \varepsilon d\, t^2 .$$

よって十分大きな $T_0 > 0$ が存在して $G'(t) > 0 \quad \forall t \in [T_0, \infty)$
とできるから, (3.17) 式の両辺に $G'(t)$ をかければ

$$\frac{1}{2}(G'(t)^2)' \geqq \frac{2}{3}\varepsilon C\,(G(t)^3)' + 2\varepsilon d\, G(t)' ,$$ これを $(0,t)$ で積分して

$$\frac{1}{2}G'(t)^2 \geqq \frac{2}{3}\varepsilon C\, G(t)^3 - \frac{2}{3}\varepsilon C\, G(0)^3 + \frac{1}{2}G'(0)^2 + 2\varepsilon d\, G(t) - 2\varepsilon d\, G(0)$$

$$\geqq \frac{2}{3}\varepsilon C\, G(t)^3 - \left(\frac{2}{3}\varepsilon C\, G(0)^3 + 2\varepsilon d\, G(0)\right) + 2\varepsilon d\,(G'(0)t + \varepsilon d\, t^2)$$

($\because$ (3.19))

これより十分大きな $T_1 > T_0$ が存在して

(3.20) $$G'(t) \geqq \sqrt{\tfrac{4}{3}\varepsilon C}\cdot G(t)^{3/2}, \qquad \forall t \in [T_1, \infty) .$$

よって $G(t)$ は有限時間で爆発する。これは定理 6 に矛盾する。

[証明終]

前節でも注意した様に　$T_m < +\infty$ であれば　いつも　$\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^2} = +\infty$ となっているかどうかは　わからない。

<u>Open Problem 5.</u>　<u>方程式(2)の解に対して各種ノルムの Blow Up の同等性を論じよ。特に　どの様な q に対して，(*) $T_m < +\infty \Leftrightarrow \lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^q} = +\infty$ が成立するか？</u>

例えば，<u>$N = 1, 2, 3$; $f(u) = u^3$ に対して，$q > N$ であれば (*) が成立する。</u>

(証明)　$t_n \uparrow T_m < +\infty$ かつ $|u(t_n)|_{L^q} \le C$ となる $\{t_n\}$ があったとする。

(3.16) 式より　$J(u(t)) \equiv J_0$ であったから

(3.21)　$|\nabla u(t)|^2_{L^2} \le 2 J_0 + \frac{1}{2} |u(t)|^4_{L^4}$

一方　Gagliado-Nirenberg の不等式より

$$|u|_{L^4} \le C |u|^{1-a}_{L^r} \cdot |\nabla u|^a_{L^2} \quad , \quad a = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2}} \quad , \quad (1 \le r \le 4).$$

即ち　$r > N$ であれば　$a < 1/2$ が従う。よって　(3.21) より

$$\begin{aligned} |\nabla u(t_n)|^2_{L^2} &\le 2 J_0 + \frac{1}{2} C |u(t_n)|^{2(1-a)}_{L^r} \cdot |\nabla u(t_n)|^{2a}_{L^2} \\ &\le 2 J_0 + \varepsilon |\nabla u(t_n)|^2_{L^2} + C_\varepsilon |u(t_n)|^2_{L^r} \end{aligned}$$

よって　$|\nabla u(t_n)|^2_{L^2} \le C$　これより　$|u(t_n)|_{L^4} \le C$

以上より　$|u_t(t_n)|_{L^2} \le C$ であるから，これは 定理 6 に矛盾する。

［証明終］

Open Problem 6. 上の例で $q=N$ とできるか？ 又 $1 \le q < N$ なる q に対して $\varlimsup_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{L^q} < +\infty$ となる $(2)_\lambda$ の解 $u(t)$ が存在するか？

更に（P.32 の注意に於ける様に）$(2)_\lambda$ の解の漸近挙動を分類する事ができるか？

(3) 非線形シュレディンガー方程式

$$
(3) \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(|u|^2)\, u, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = a(x), & x \in \Omega, \end{cases}
$$

ここで $u(x,t)$, $a(x)$ は複素数値関数で $u = u_1 + i u_2$, $a = a_1 + i a_2$ とおけば (3) は次の様に書きなおせる。

$$
(3)^* \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_2 = f(u_1^2 + u_2^2)\, u_2 & \cdots (*1) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \Delta u_1 = -f(u_1^2 + u_2^2)\, u_1 & \cdots (*2) \\ u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0 & \\ u_1(x,0) = a_1(x), \quad u_2(x,0) = a_2(x). & \end{cases}
$$

この方程式は前にも見た様に，$H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$,

$D(A) = \left(H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \right)^2$, $A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix}$,

$F\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(|u|^2)\, u_2 \\ -f(|u|^2)\, u_1 \end{pmatrix}$ として (E) に帰着できたから

例えば，$N = 1, 2, 3$; $f(\cdot) \in C^3$, $f(0) = 0$ とすれば $F(\cdot)$ は

(定理 2 の証明と同様にして) D(A) から D(A) への Local. Lip. である事が示され 定理 B が適用され当該の結果を得るが、応用上少々窮屈なので (例えば $f \in C^3$ など) ここではもう少し工夫を加えた形で与えておく。

定理 8. $N = 1, 2, 3$ とし f から決められる F が次を満たすものとする。

(3.22) $|F(u) - F(v)|_H \leq L_M |u - v|_H$ for all $|u|_{L^\infty}, |v|_{L^\infty} \leq M$.

この時 ${}^\forall a \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ に対して $T_m > 0$ と (3) の一意的解 $u \in C([0, T_m); (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2) \cap C^1([0, T_m); (L^2(\Omega))^2)$ が存在して

(i) $T_m = +\infty$ 又は (ii) $T_m < +\infty$ かつ $\overline{\lim_{t \uparrow T_m}} |u(t)|_{L^\infty \times L^\infty} = +\infty$

が成立する。

<u>証明:</u> まず $N \leq 3$ より $D(A) = H^2 \cap H_0^1 \subset L^\infty$ に注意しよう。

$$\chi_M u = \begin{cases} M & u \geq M \\ u & |u| \leq M \\ -M & u \leq -M \end{cases}, \quad F_M(u) = F(\chi_M u) \quad \text{とおくと, (3.22) より}$$

$$\begin{aligned} |F_M(u) - F_M(v)|_H &= |F(\chi_M u) - F(\chi_M v)|_H \leq L_M |\chi_M u - \chi_M v|_H \\ &\leq L_M |u - v|_H \end{aligned}$$

であるから $F_M(\cdot)$ は H から H への Lip. となる。ここで

$$\overline{(3)}^M \begin{cases} i \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} = F_M(\bar{u}), \\ \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \bar{u}(x, 0) = a(x). \end{cases} \quad \text{を考えれば}$$

系A より $(3)_M$ は一意的大域解 $\bar{u} \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); H)$ をもつ。ここで M を

$$(3.23) \qquad M = C_\infty (|a|_{H^2}^{(*)} + 1),$$

(C_∞ は $|u|_{L^\infty} \le C_\infty |u|_{H^2}^{(*)}$ $\forall u \in H^2(\Omega)$ を成立させる定数)

と取っておく。 $|\bar{u}(t)|_{H^2}$ は t に関して連続であったから、適当な正数 T があって $\max_{0\le t\le T} |\bar{u}(t)|_{H^2} \le |a|_{H^2} + 1$ とできるから (3.23) より $\sup_{0\le t\le T} |\bar{u}(t)|_{L^\infty} \le M$, i.e.,

$F_M(\bar{u}(t)) = F(\chi_M \bar{u}(t)) = F(\bar{u}(t))$ $\forall t \in [0,T]$ であるから $\bar{u}(t)$ は $[0,T]$ でもともとの方程式 (3) の求める解となる。

次に $T_m < +\infty$ かつ $\sup_{0\le t<T_m} |u(t)|_{L^\infty} \le M_0 < +\infty$ とすれば、解の一意性より $u(t)$ は $\overline{(3)}^{M_0}$ の解 $\bar{u}(t)$ と $t \in [0,T_m)$ で一致し、 $\bar{u}(t) \in C([0,\infty); D(A))$ であったから

$$\sup_{0\le t<T_m} |u(t)|_{H^2} = \sup_{0\le t<T_m} |\bar{u}(t)|_{H^2} =: M_1 < +\infty$$

よって (3.23) 式に於いて $|a|_{H^2}$ を M_1 でおきかえて前段と同様の操作をすれば $u(t)$ は $t=T_m$ の右側に (3) の解として延長できる事がわかる。これは T_m の定義に矛盾する。

[証明終]

<u>Open Problem 7.</u> <u>定理 8 の (ii) で $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}}$ を $\lim_{t\uparrow T_m}$ とできるか?</u>

(*) $|\cdot|_{H^2}$ 及び $|\cdot|_{L^\infty}$ は正確には $|\cdot|_{H^2\times H^2}$ 及び $|\cdot|_{L^\infty\times L^\infty}$ の意である。以下同様

例によって 次の典型的な場合についてもう少し詳しく調べてみよう。

$$(3)_\lambda \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda |u|^{p-2}u, & |u| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = a(x). \end{cases}$$

$p \geq 2$ であれば 定理8の (3.22) が満されるので (各自チェックされたし) 定理8によって $(3)_\lambda$ は $\forall a \in (H^2 \cap H_0^1)^2$ に対していつも局所解を持つ事がわかる。 $(N \leq 3)$

そこで問題となるのは大域解の存在であるが、非線形波動方程式の場合と同様 $\lambda = -1$ の時でも良くわかっていない。

(i) $\lambda = -1$ の場合. 大域解の存在が保証される p の範囲を以下の表に与えておく。一般領域 Ω (非有界でも可)[*] と $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合に差があるのは $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合には e^{-tA} の具体的な形がわかる利点があるからである。

次元＼領域	一般領域 Ω	$\Omega = \mathbb{R}^N$
$N = 1$	$2 < p < +\infty$	$2 < p < +\infty$
$N = 2$	$3 \leq p \leq 4$	$2 < p < +\infty$
$N = 3$	?	$2 < p < 6$

(注) $p=2$ の場合は自明 (Lip. であるから系Aを適用すれば良い) なので省略してある。

表 1

証明. まず $(3)_\lambda$ の解について次の保存則が成立する事に注意しよう。

$$(3.24) \qquad |u(t)|_{L^2} \equiv |a|_{L^2} \qquad \forall t \geq 0,$$

$$(3.25) \qquad E(u(t)) := \frac{1}{2}|\nabla u(t)|_{L^2}^2 + \frac{-\lambda}{p}|u(t)|_{L^p}^p \equiv E(a) \qquad \forall t \geq 0.$$

ここで　$|u|_{L^r}^r = \int_\Omega (|u_1|^2+|u_2|^2)^{\frac{r}{2}} dx$,　$|\nabla u|_{L^2}^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}|^2 + |\frac{\partial u_2}{\partial x_i}|^2 \right) dx$.

実際，　$((*1), u_1) + ((*2), u_2)$　及び　$((*1), \frac{\partial u_2}{\partial t}) - ((*2), \frac{\partial u_1}{\partial t})$
を計算すればそれぞれ　$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 = 0$　及び　$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0$　を得る。

<u>N=1 の場合</u>　(3.24), (3.25) 式より直ちに　$|u(t)|_{H^1} \leq |a|_{L^2} + \sqrt{2E(a)}$
であるから特に　$\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^\infty} \leq C$　よって定理8より　$T_m = +\infty$.

<u>N=2 ; Ω : 一般領域 の場合</u>　N=2 の場合には　$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$
$\forall q < +\infty$　は成立するが　$H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$　はもはや成立しないので
N=1 の場合の様にはいかない。しかし次の有用な補題が成立する。

<u>補題1.</u>　$N=2$ ，　$u \in H^2(\Omega)^{(*)}$ ，　$|u|_{H^1} \leq C_0$　とすると

(3.26)　$|u|_{L^\infty} \leq C\left\{ 1 + \sqrt{\log(1+|u|_{H^2})} \right\}$　が成立する。

(注意)　良く知られた通常の Sobolev 型不等式を使うと
$|u|_{L^\infty} \leq C|u|_{H^{1+\varepsilon}} \leq C|u|_{H^1}^{1-\varepsilon} \cdot |u|_{H^2}^{\varepsilon}$　$\forall \varepsilon > 0$,　$\forall u \in H^1(\Omega)$
が得られるが　上の結果は　$r = |u|_{H^2}$　に関して　$\{\log(1+r)\}^{1/2}$　の
オーダーであるから　これよりは良い評価である。

(*)　$\partial\Omega$　は C^2 で有界　又は　$\Omega = \mathbb{R}^2_+$　など　$H^2(\Omega)$ から $H^2(\mathbb{R}^2)$ への
連続な拡張作用素 P が存在すれば良い。(i.e.,　$Pu|_\Omega = u$
$|Pu|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq C|u|_{H^2(\Omega)}$)　(cf. 溝畑 [2 ; 定理3.11 , P168])

補題1の証明

$u\in H^2(\Omega)$ を $H^2(\mathbb{R}^2)$ に拡張しておけば，$\Omega=\mathbb{R}^2$ の場合のみを考えれば良い。

$\hat{u}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx \qquad (x\cdot\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2)$ とおけば

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi\ ,\quad |\hat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2_\xi)}=|u|_{L^2(\mathbb{R}^2_x)}$$

$$|u|_{H^1(\mathbb{R}^2_x)}\cong|(1+|\xi|)\hat{u}(\xi)|_{L^2(\mathbb{R}^2_\xi)}\ ,\quad |u|_{H^2(\mathbb{R}^2_x)}\cong|(1+|\xi|^2)\hat{u}(\xi)|_{L^2(\mathbb{R}^2_\xi)}$$

であるから

$$\begin{aligned}
|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_x)} &\le \int_{\mathbb{R}^2}|\hat{u}(\xi)|\,d\xi \\
&\le \int_{|\xi|<R}(1+|\xi|)|\hat{u}(\xi)|\cdot\frac{1}{1+|\xi|}\,d\xi+\int_{|\xi|\ge R}(1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|\frac{1}{1+|\xi|^2}\,d\xi \\
&\le |(1+|\xi|)\hat{u}(\xi)|_{L^2}\cdot\Big(\int_{|\xi|<R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2}\Big)^{1/2}+|(1+|\xi|^2)\hat{u}(\xi)|_{L^2}\cdot\Big(\int_{|\xi|\ge R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^2}\Big)^{1/2} \\
&\le C\Big[\,|u|_{H^1}\cdot\{\log(1+R)\}^{1/2}+|u|_{H^2}\Big(\frac{1}{1+R^2}\Big)^{1/2}\Big]
\end{aligned}$$

ここで 特に $R=|u|_{H^2}$ とおけば (3.26) を得る。

［証明終］

頭初の結果を証明する為にもう一つの補題を用意する。

補題 2. $p \geqq 3$ とする時，次が成立する。

$$(3.27)\qquad |\Delta |u|^{p-2}u|_{L^2} \leq C|u|_{L^\infty}^{p-2}\cdot|u|_{H^2} \qquad \forall\ u\in H^2(\Omega).$$

証明 $\qquad |u| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$ であったから

$$|\Delta(u_1^2+u_2^2)^{\frac{p-2}{2}}u_i|_{L^2}$$

$$= \Big| \ |u|^{p-2}\Delta u_i + 2(p-2)|u|^{p-4}\nabla u_i(u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2)$$

$$+ (p-2)|u|^{p-4}u_i(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2+ u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2)$$

$$+ (p-2)(p-4)|u|^{p-6}u_i(u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2)^2 \Big|_{L^2}$$

$$\leq C(|u|_{L^\infty}^{p-2}|u|_{H^2} + |u|_{L^\infty}^{p-3}|\nabla u|_{L^4}^2) \qquad \forall\ i=1,2.$$

更に

$$\int|\nabla u_i|^4dx = \int(\nabla u_i)^3\cdot\nabla u_i\,dx = -3\int u_i(\nabla u_i)^2\Delta u_i\,dx$$

$$\leq 3\cdot|u_i|_{L^\infty}\cdot|\nabla u_i|_{L^4}^2\cdot|\Delta u_i|_{L^2}$$

であるから

$$|\nabla u|_{L^4}^2 \leq C|u|_{L^\infty}|u|_{H^2}.$$ 以上より (3.27) を得る。

［証明終］

まず

$$\Delta u(t) = \Delta S(t)a + \Delta\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$

$$= S(t)\Delta a + \int_0^t S(t-s)\Delta F(u(s))ds$$ （P.17～18 の議論参照）

であるから

$$|u(t)|_{H^2} \simeq |u(t)|_{L^2} + |\Delta u(t)|_{L^2}$$

$$\leq |a|_{L^2} + |Aa|_{L^2} + \int_0^t |\Delta F(u(s))|_{L^2}\, ds$$

よって これに 補題 1, 2 を使えば

$$|u(t)|_{H^2} \leq c + c\int_0^t \{1 + \log(1 + |u(s)|_{H^2})\}\, |u(s)|_{H^2}\, ds .$$

従って $\varphi(t) = 1 + |u(t)|_{H^2}$ とおけば

$$\varphi(t) \leq c + c\int_0^t (1 + \log\varphi(s))\,\varphi(s)\, ds =: \phi(t)$$

ゆえに

$$\phi'(t) = c\,(1 + \log\varphi(t))\,\varphi(t) \leq c\,(1 + \log\phi(t))\,\phi(t) \quad , \text{ i.e.,}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\log(1 + \log\phi(t))\right] \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(t) \leq \phi(t) \leq c\,e^{ce^t} \qquad \forall t \geq 0$$

即ち $\sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)|_{H^2(\Omega)} \leq c\,e^{ce^T}$, よって 定理 8 より

$T_m = +\infty$.

[証明終]

<u>N = 2, 3 ; $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合</u>　　$\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合 $S(t) = e^{-At}$ に関して次の評価が成立する。

<u>補題3</u>　$\Omega = \mathbb{R}^N$ の時 次が成立する。(*)

(3.28)　$$|S(t)a|_{L^{q^*}} \le \frac{C}{t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{q}-1)}} |a|_{L^q}, \quad \forall a \in L^q(\mathbb{R}^N),\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q^*}=1,\ 1 \le q \le 2.$$

<u>証明</u>　まず

$$(S(t)a)(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{-i\pi t}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{i|x-y|^2}{4t}} a(y)\,dy$$

とかける事に注意する。

これより直ちに

(3.29)　$|S(t)a|_{L^2} = |a|_{L^2}$　　(これは (3.24) からも出る)

(3.30)　$|S(t)a|_{L^\infty} \le \dfrac{C}{t^{N/2}} |a|_{L^1}$ (*).

ここで 補間定理 (Riesz)　(証明は Bergh-Löfstrom [5] etc.)

「線型作用素 T が L^{p_i} から L^{q_i} への有界作用素とし その作用素ノルムが C_i $(i=1,2)$ であれば、T は 次を満たす p, q に対し L^p から L^q への有界作用素となり そのノルム C は $C \le C_1^{\theta} \cdot C_2^{1-\theta}$ を満たす。ここで $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1} + \dfrac{1-\theta}{p_2}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{q_1} + \dfrac{1-\theta}{q_2}$, $(0<\theta<1)$.」 を $p_1 = q_1 = 2$, $p_2 = 1$, $q_2 = \infty$, $C_1 = 1$, $C_2 = \dfrac{C}{t^{N/2}}$ として適用すれば良い。　　[証明終]

(*) Ω が有界領域の場合 この様な評価はもはや成立しない。実際 $L^\infty \subset L^2 \subset L^1$ であるから $|S(t)a|_{L^2} \le |S(t)a|_{L^\infty} |\Omega| \le \dfrac{C}{t^{N/2}} |a|_{L^1} \le \dfrac{C}{t^{N/2}} |a|_{L^2}$ となり $t \to +\infty$ とすれば (3.29)((3.24)) に矛盾する。

次に

$$|u|_{L^\infty} \le C|u|_{L^r}^{1-\frac{N}{r}} \cdot |\nabla u|_{L^r}^{\frac{N}{r}} \qquad (r>N),\quad {}^\forall u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$$

（田辺 [4; P.138 定理 15-4]）

と上の補題を使えば

$$|S(t)w|_{L^\infty} \le C|S(t)w|_{L^r}^{1-\frac{N}{r}} \cdot |S(t)\nabla w|_{L^r}^{\frac{N}{r}} \ (*)$$

$$\le \frac{C}{t^\alpha}|w|_{L^q}^{1-\frac{N}{r}} \cdot |\nabla w|_{L^q}^{\frac{N}{r}}, \quad \alpha = \frac{N}{2}\left(\frac{2}{q}-1\right), \quad q = \frac{r}{r-1} < \frac{N}{N-1}.$$

ここで $w = |u|^{p-2}u$ とおけば

$$|S(t)|u|^{p-2}u|_{L^\infty} \le \frac{C}{t^\alpha}\left||u|^{p-2}u\right|_{L^q}^{1-\frac{N}{r}} \cdot \left||u|^{p-2}\nabla u\right|_{L^q}^{\frac{N}{r}}$$

(3.31)

$$\le \frac{C}{t^\alpha}|u|_{L^{q(p-1)}}^{(1-\frac{N}{r})(p-1)} \cdot |u|_{L^a}^{\frac{(p-2)N}{r}} \cdot |\nabla u|_{L^2}^{\frac{N}{r}}$$

$$a = 2q(p-2)/(2-q).$$

ここで

(3.32) $$|u(t)|_{L^\infty} \le |S(t)a|_{L^\infty} + \int_0^t |S(t-s)|u|^{p-2}u(s)|_{L^\infty}\,ds,$$

$$|S(t)a|_{L^\infty} \le C|S(t)a|_{H^2} = C(|S(t)a|_{L^2} + |S(t)\Delta a|_{L^2}) \le C|a|_{H^2},\ かつ$$

$q > \dfrac{2N}{N+2}$ ならば $\displaystyle\int_0^T \frac{C}{t^\alpha}\,dt \le C_T < +\infty$ であるから

<u>$N=2$ の時</u> $L^r(\mathbb{R}^2) \supset H^1(\mathbb{R}^2)$ ${}^\forall r \in [1,\infty)$ かつ

$\sup_t |u(t)|_{H^1} \le C$ より 直ちに ${}^\forall q \in (1,2)$ に対して

上の議論を組み合せれば $|u(t)|_{L^\infty} \le C_T$ ${}^\forall t \in [0,T]$

を得るから 定理 8 より $T_m = +\infty$.

(*) $\Omega = \mathbb{R}^N$ であり境界条件が課せられていないので $\nabla S(t)w = S(t)\nabla w$.

N = 3 の時　まず $\sup_t |u(t)|_{H^1} \le C$ かつ $H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^r(\mathbb{R}^3)$ $\forall r \in [1,6]$ に注意して.

(i) $\int_0^T \frac{C}{t^\mu} dt \le C_T \iff \frac{6}{5} < q < \frac{3}{2}$

(ii) $q(p-1) \le 6 \iff p \le \frac{6}{q} + 1 \le 6 \iff \frac{6}{5} \le q$

(iii) $|u|_{L^a} \le |u|_{L^\infty}^{\frac{a-6}{a}} \, |u|_{L^6}^{\frac{6}{a}}$ 及び (3.31), (3.32) より

$$|u(t)|_{L^\infty} \le C + \int_0^t \frac{C}{(t-s)^\mu} |u(s)|_{L^\infty}^{\frac{a-6}{a}\frac{(p-2)N}{r}} ds \qquad \forall q \in \left(\tfrac{6}{5}, \tfrac{3}{2}\right).$$

よって もし $\frac{a-6}{a}\frac{(p-2)N}{r} \le 1$ であれば Gronwall の不等式より

$$|u(t)|_{L^\infty} \le (C + C_T)\, e^{C_T} \qquad \forall t \in (0,T].$$

を得るから 定理8 より $T_m = +\infty$.

簡単な計算により

$$\frac{(a-6)(p-2)N}{ar} \le 1 \iff p \le \frac{r}{N} + \frac{6}{q} - 1 = 5 + \frac{r^2-18}{3r}$$

ここで $r = q/(q-1) \in (2,6)$ であったから $2 \le p < 6$ であれば良い。

［証明終］

Open Problem 8　$\lambda = -1$ の場合 $\forall N$, $\forall p \in (1,+\infty)$ に対して $T_m = +\infty$ か?

(ii) $\lambda = 1$ の場合　．熱方程式や波動方程式の場合は $p > 2$ であれば初期値によっては $T_m < +\infty$ となる場合があったが シュレディンガー方程式の場合には以下の如く少々事情が異なる。これは (3.24), i.e., $|u(t)|_{L^2}$ のアプリオリ評価がいつも得られている事実に起因する。

命題3.　$N = 1, 2$ or 3 ;　$2 < p < 2 + \frac{4}{N}$ かつ p は表1 (P.45) の条件をみたせば，$\forall a \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))^2$ に対して $(3)_\lambda$ は（λ の符号にかかわらず）一意的大域解をもつ。

証明　まず "$\lambda = -1$ の場合" で既に示した様に表1の条件のもとに，$|u(t)|_{H^1}$ のアプリオリ評価があれば λ の正負に関係なく $T_m = +\infty$ が示せたから，題意を証明するには $|u(t)|_{H^1}$ 評価を得れば良い事に注意しよう。実際，Gagliado-Nirenberg の不等式

$$|u|_{L^p} \le C |u|_{L^2}^{1-\theta} |\nabla u|_{L^2}^{\theta}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \begin{cases} \frac{1}{p} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{2} \\ 1 \le p \le \infty & N = 1 \\ 1 \le p < \infty & N = 2 \\ 1 \le p < \frac{2}{N-2} & N \geq 3 \end{cases}$$

と (3.24), (3.25) より

$$|u(t)|_{L^2}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2}^2 = |a|_{L^2}^2 + 2E(a) + \frac{2}{p}|u(t)|_{L^p}^p$$

$$\le C + C|\nabla u(t)|^{p\theta}, \qquad p\theta = \frac{N(p-2)}{2}$$

を得るから，$p\theta < 2 \iff p < 2 + \frac{4}{N}$ であれば

$$\sup_{t \geq 0} |u(t)|_{H^1} \le C$$ が導かれる。

[証明終]

$p \geq 2+\frac{4}{N}$ の場合には 熱方程式 $(1)_\lambda$ や 波動方程式 $(2)_\lambda$ の $p>2$ の場合と類似した状況となる。(cf. p.30～31)

> **命題 4.** $N=1,2$ or 3 とし p は表 1 の関係を満たすものとする。
>
> $$W = \{ u \in (H^1(\Omega))^2 ;\ J(u) < d,\ 2\varphi^1(u) - p\varphi^2(u) > 0 \},$$
>
> $$\varphi^1(u) = \frac{1}{2}\left(|u|_{L^2}^2 + |\nabla u|_{L^2}^2\right), \quad \varphi^2(u) = \frac{1}{p}|u|_{L^p}^p,$$
>
> $$d = \left\{ \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{2-p}} - \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2-p}} \right\} C_b^{\frac{2p}{2-p}}, \quad C_b = \sup\left\{ \frac{(\varphi^2(u))^{1/p}}{(\varphi^1(u))^{1/2}} ;\ u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\} \right\},$$
>
> とおく。この時 $a \in W$ ならば $T_m = +\infty$.

> **命題 5.** $p \geq 2+\frac{4}{N}$ かつ $a \in (H^2(\mathbb{R}^N))^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |a|^2 dx < +\infty$,
> 更に $E(a) = \frac{1}{2}|\nabla a|_{L^2}^2 - \frac{1}{p}|a|_{L^p}^p < 0$ とあれば、$(3)_\lambda$ $(\lambda=-1)$
> の解 u に対していつも $T_m < +\infty$ となる。(大域解が存在しない)

<u>命題 4 の証明</u> 表 1 の関係があれば $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ であるから $d > 0$ となり P.31 の Fig. 1 と同じ図が描ける。(今回は $X_0 = (pC_b^2/2)^{p/(2-p)}$, $Y_0 = (pC_b^2/2)^{2/(2-p)}$ と変更せねばならない。) 更に (3.24), (3.25) より

$$(3.33) \qquad J(u(t)) \equiv J(a) = E(a) + \frac{1}{2}|a|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

を得るから、Fig.1 より $u(t) \in W$ $\forall t \geq 0$ がわかる。

即ち $|u(t)|_{H^1}^2 = |\nabla u(t)|_{L^2}^2 + |u(t)|_{L^2}^2 \leq 2Y_0 \quad \forall t \geq 0,$

なる H^1-評価が得られたから前出の議論に依り $T_m=+\infty$.

[証明終]

注意. $p=2+\frac{4}{N}$ の時には P.53 の議論より

$|u(t)|_{H^1}^2 \leq C + C|a|_{L^2}^{p-2}|\nabla u(t)|_{L^2}^2$ であったから ($|\nabla a|_{L^2}$ が小さくなくても)

$|a|_{L^2}$ が十分小さければ $T_m=+\infty$ が保証される.

命題5の証明　まず $\int((3)_\lambda, |x|^2\bar{u})\,dx$ を計算すれば

$$i\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int|x|^2|u|^2dx = -\int \mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}(|x|^2\bar{u})\,dx + \int|x|^2|u|^p dx$$

$$= -\int|x|^2|\nabla u|^2dx - 2\int(x\cdot\mathrm{grad}\,u)\bar{u}\,dx + \int|x|^2|u|^p dx$$

であるから両辺の虚部をとって

$$(3.34)\quad \frac{d}{dt}\int|x|^2|u(x)|^2dx = -4\,\mathrm{Im}\int(x\cdot\mathrm{grad}\,u)\bar{u}\,dx$$

$$= 4\sum_{i=1}^{N}\int x_i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\cdot u_2 - u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)dx =: 4\,I(t).$$

更に

$$\frac{d}{dt}I(t) = -\mathrm{Im}\int(x\cdot\mathrm{grad}\,u_t)\cdot\bar{u}\,dx - \mathrm{Im}\int(x\cdot\mathrm{grad}\,u)\bar{u}_t\,dx$$

$$(3.35)\quad = \mathrm{Im}\int \mathrm{div}\,x\cdot u_t\bar{u}\,dx + \mathrm{Im}\int(x\cdot\mathrm{grad}\,\bar{u})u_t + \mathrm{Im}\int\overline{(x\cdot\mathrm{grad}\,u)\bar{u}_t}\,dx$$

$$= N\,\mathrm{Im}\int u_t\bar{u}\,dx + 2\,\mathrm{Im}\int(x\cdot\mathrm{grad}\,\bar{u})u_t\,dx,$$

ここで

$$\mathrm{Im}\int u_t\bar{u}\,dx = -\mathrm{Re}\int iu_t\bar{u}\,dx$$

$$= -\mathrm{Re}\int(\Delta u + |u|^{p-2}u)\bar{u}\,dx$$

$$(3.36)\quad = \int|\nabla u|^2dx - \int|u|^p dx,$$

$$\mathrm{Im}\int (x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\, u_t\, dx = -\mathrm{Re}\int (x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\, i u_t\, dx$$

$$= -\mathrm{Re}\int (x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\,(\Delta u + |u|^{p-2}u)\, dx ,$$

$$-\mathrm{Re}\int (x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\,\Delta u\, dx$$

$$= \mathrm{Re}\int \mathrm{grad}\,(x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\cdot \mathrm{grad}\, u\, dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N}\int\left\{\delta_{ij}\frac{\partial \bar u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{2}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right\} dx$$

$$= \left(1-\frac{N}{2}\right)\int |\nabla u|^2 dx ,$$

$$A = -\mathrm{Re}\int (x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\,|u|^{p-2}u\, dx$$

$$= \mathrm{Re}\int \mathrm{div}\, x\cdot \bar u|u|^{p-2}u\, dx + \mathrm{Re}\int (x\cdot (p-1)|u|^{p-2}\mathrm{grad}\, u)\,\bar u\, dx$$

$$= N\int |u|^p dx + (p-1)\,\mathrm{Re}\int \overline{(x\cdot \mathrm{grad}\, u)\cdot |u|^{p-2}\,\bar u}\, dx$$

$$= N\int |u|^p dx - (p-1)A = \frac{N}{p}\int |u|^p dx .$$

故に

$$\mathrm{Im}\int (x\cdot \mathrm{grad}\,\bar u)\, u_t\, dx = \left(1-\frac{N}{2}\right)\int |\nabla u|^2 dx + \frac{N}{p}\int |u|^p dx . \tag{3.37}$$

従って (3.34) ~ (3.37) より

$$\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u|^2 dx = 4N\left(\int |\nabla u|^2 dx - \int |u|^p dx\right) + 8\left(1-\frac{N}{2}\right)\int |\nabla u|^2 dx + \frac{8N}{p}\int |u|^p dx$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u|^2 dx = 8\int |\nabla u|^2 dx - \frac{4(p-2)N}{p}\int |u|^p dx . \tag{3.38}$$

を得る。ここで (3.25) に注意すれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u|^2 dx = 16\,E(a) - \frac{4}{p}\{(p-2)N-4\}\int |u|^p dx \tag{3.39}$$

仮定よりこれは $\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2 |u(x,t)|^2 \, dx \leq E(a) < 0$, i.e.,

$z(t) := \int |x|^2 \, |u(x,t)|^2 \, dx$ は狭義凹関数であるから

$T_m = +\infty$ とすれば $\exists\, T > 0$ s.t. $z(T) < 0$. これは明らかに

矛盾. よって $T_m < +\infty$ となる。 [証明終]

<u>注意</u> 1) $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ (i.e. $p < +\infty$ $N = 1, 2$; $p \leq \frac{2N}{N-2}$ $N \geq 3$)

であれば，命題5は次の様に拡張する事ができる。

命題4の如く $\varphi^1, \varphi^2, C_b, d$ etc. を決め

$\mathcal{V} = \{ u \in (H^1(\mathbb{R}^N))^2 ; \; J(u) < d , \; 2\varphi^1(u) - p\varphi^2(u) < 0 \}$ とおけば

(3.33) と Fig.1 より $a \in \mathcal{V}$ であれば $u(t) \in \mathcal{V}$ $\forall t > 0$

特に $\varphi^2(u(t)) \geq (1 + \varepsilon) X_0$, $\varepsilon > 0$, $X_0 = (pC_b^2/2)^{p/(2-p)}$,

であるから,

$\underline{a \in \mathcal{V}}$ かつ $\underline{0 \leq E(a) \leq \frac{1}{4}\{(p-2)N - 4\} X_0}$

であれば $T_m < +\infty$ が導かれる。 実際， (3.39) 式より

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = 16 \left[E(a) - \frac{1}{4}\{(p-2)N - 4\} \varphi^2(u(t)) \right]$$

$$\leq -4\{(p-2)N - 4\} (\varphi^2(u(t)) - X_0)$$

$$\leq -4\{(p-2)N - 4\} \varepsilon X_0 < 0 ,$$

であるから前と同じく， $T_m < +\infty$ が導かれる。

2) 命題5の証明に於ける計算は形式的なものである事に注意されたい。（即ち，$Z(t)=\int |x|^2 |u(x,t)|^2 dx$ etc. が各々で意味をもつかどうかなど）しかし $|x|^2$ のかわりに $|x|^2 e^{-\frac{|x|^2}{n^2}}$ をかけて．(3.34)式などを積分型になおしてから $n \to +\infty$ とするなどすれば，$Z(0) < +\infty$ よりすべての計算が正当化できる。

3) 命題5の証明は本質的には「Glassey 'On the blowing up of solutions to Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations" J. Math. Physics, vol. 18, (1977) 1794-1797」に依るが．彼は(3.39)の形に注目するかわりに，「$I(t)$ (See (3.341)) に関する微分不等式を導き，$I(0) > 0$ のもとに $T_m = +\infty$ とすれば $\lim_{t \uparrow T_0} I(t) = +\infty$ となる $T_0 > 0$ の存在を示し，更に

$|I(t)| \leq Z(t)^{1/2} \cdot |\nabla u(t)|_{L^2} \leq Z(0)^{1/2} \cdot |\nabla u(t)|_{L^2}$ （Schwarzの不等式と $Z(t) \downarrow$）

より $T_m < +\infty$ かつ $\underline{\lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{H^1} = +\infty}$」と結論づけているが，

〜〜の部分は明らかに誤りと（筆者には）思われる。なぜならば $T_m < T_0$ となる可能性が否定されていないからである。(cf. P.33 注意2)）以下この点をもう少し反省してみよう。

<u>Open Problem 9.</u> <u>$T_m < +\infty$ の時，解のどの様なノルムが Blow up しているか？ 更に各種ノルムの Blow up の同等性を論じよ。</u>

まずいつも言える事は定理8より

(3.40) $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}} |u(t)|_{L^\infty} = +\infty$.

次にすぐわかる事は以前見た様に表1の条件のもとに $\sup_t |u(t)|_{H^1} < +\infty$ であれば $T_m = +\infty$ であったから, $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}} |u(t)|_{H^1} = +\infty$ が導かれる.

更に

> **命題6.** $N=1,2,3$; p は表1の ($\Omega=\mathbb{R}^N$ の時の) 関係を満たす。
> この時 $T_m < +\infty$ であれば次が成立する。
>
> (3.41) $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}} |u(t)|_{H^1} = +\infty$,
>
> (3.42) $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}} |u(t)|_{L^q} = +\infty$, $\frac{N(p-2)}{2} < q \le \infty$.

証明. P.50〜52の議論より (3.41) は明らか. 次に (3.25) 式より

$\frac{1}{p}|u(t)|_{L^p}^p = -E(a) + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|_{L^2}^2$ であったから

(3.43) $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}} |u(t)|_{L^p} = +\infty$.

$p<q$ なる q に対しては, $|u(t)|_{L^p} \le C\, |u(t)|_{L^2}^{\theta} \cdot |u(t)|_{L^q}^{1-\theta}$,

$\left(\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{q}\right)$ であるから (3.24) ($|u(t)|_{L^2} = |a|_{L^2}$) に注意して (3.42) を得る。$q<p$ なる q に対しては Gagliardo-Nirenberg の不等式より

$|u(t)|_{L^p} \le C\, |\nabla u(t)|_{L^2}^{\theta} \cdot |u(t)|_{L^q}^{1-\theta}$, $\frac{1}{p} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{q}$.

(See [4, Th.15-3, P128~9])

よって (3.25) 式より

$|u(t)|_{L^p} \le C\left(E(a) + \frac{1}{p}|u(t)|_{L^p}^p\right)^{\frac{\theta}{2}} \cdot |u(t)|_{L^q}^{1-\theta}$

ここで $\quad p\cdot\frac{\theta}{2} < 1 \iff q > N(p-2)/2 \quad$ ならば

$$c\,|u(t)|_{L^p}^{1-\frac{p\theta}{2}} \le |u(t)|_{L^q}^{1-\theta} \qquad \text{if} \quad |u(t)|_{L^p} \ge 1 ,$$

よって (3.43) より (3.42) が導かれる。

[証明終]

以上はすべて lim sup の Blow up しか示されていないが、次の場合には lim の Blow up が示される。

命題 7. $T_m < +\infty$ であれば次が成立する。

$N = 1$ の時 $\quad \lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{H^1} = +\infty ,$

$N = 2, 3$ の時 $\quad \lim_{t \uparrow T_m} |u(t)|_{H^2} = +\infty .$

証明. 補題 2 及び P48 の下から 3行目 ~ P.49 の上から 2行目 までの議論より

$$\begin{aligned} |u(t)|_{H^k} &\le C\left\{ |a|_{H^k} + \int_0^t |u(t)|_{L^\infty}^{p-2} |u(t)|_{H^k}\, dt \right\} \\ &\le C\left\{ |a|_{H^k} + \int_0^t |u(t)|_{H^k}^{p-1} dt \right\}, \qquad \begin{array}{l} k=1 \quad \text{if } N=1 \\ k=2 \quad \text{if } N=2,3 . \end{array} \end{aligned}$$

よって $\quad T = 1/C(|a|_{H^k}+1)^{p-1} > 0 \quad$ とおけば

(3.44) $\quad |u(t)|_{H^k} \le |a|_{H^k} + 1 \qquad {}^\forall t \in [0, T] .$

従って $\displaystyle \underline{\lim}_{t\uparrow T_m} |u(t)|_{H^k} \le C < +\infty$ とすれば、 ${}^\exists T_0 \in [T_m - T, T_m)$ s.t.

$\displaystyle \sup_{T_0 \le t < T_m} |u(t)|_{H^k} \le |u(T_0)|_{H^k} + 1 < +\infty$, ゆえに $\displaystyle \sup_{0\le t<T_m} |u(t)|_{H^k} < +\infty .$

これは $H^k(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ であったから $\displaystyle \sup_{0\le t<T_m} |u(t)|_{L^\infty} < +\infty$

を意味し (3.40) に矛盾する。

[証明終]

<u>系 7</u>　$N=1$ の時には命題 6 に於いて $\overline{\lim_{t\uparrow T_m}}$ を $\lim_{t\uparrow T_m}$ とできる。(Open Problem 7 参照)

命題 5 に於いては $\Omega = \mathbb{R}^N$ が基本的な仮定であったが、

<u>Open Problem 10.</u>　<u>一般領域 Ω でも命題 5 と同様な爆発現象を示す事ができるか？</u>

(筆者の計算では) Ω が<u>星状領域</u> (i.e. 原点を適当にとれば $x\cdot\nu \geq 0$　${}^\forall x \in \partial\Omega$，($\nu$ は $\partial\Omega$ の x に於ける外向き法線ベクトル) と取れる) ならば Yes である。実際，命題 5 の証明と同様の計算をもう少し注意深く実行すれば (3.38) のかわりに

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega |x|^2 |u(x,t)|^2\,dx = 8\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx - \frac{4(p-2)N}{p}\int_\Omega |u(x,t)|^p dx - 4\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x,t)|^2 x_i\cdot\nu_i\,d\Gamma$$

が得られるからである。(各自試みられたし)

(4) Navier-Stokes 方程式

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - P\Delta u(x,t) + P(u\cdot\nabla)u(x,t) = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \mathrm{div}\, u(x,t) = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = a(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

(P は $\mathbb{L}^2(\Omega)$ から $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ への orthogonal projection)

非線形項 $F(u) = P(u\cdot\nabla)u$ には ∇ が入っているので，定理 A, B は直接適用できそうにないが．主要項 $A = -P\Delta$ $D(A) = (H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))^N \cap \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ は自己共役作用素なので定理 C が適用できる。実際 仮定 (i) は Rellich の定理 (Ω：有界) より 又 (iii) は $((u\cdot\nabla)u, \phi)_{\mathbb{L}^2_\sigma} = -((u\cdot\nabla)\phi, u)_{\mathbb{L}^2_\sigma}$ $\forall u\in D(A)$, $\forall \phi\in C^\infty_\sigma(\Omega)$ なる関係より容易に検証できる。

(ii) の有界性に関しては次が成立する。

$N=2$ の時

$$(3.45)\quad |(u\cdot\nabla)u|_{\mathbb{L}^2} \le C\,|u|^{1/2}_{\mathbb{L}^2_\sigma}\,|A^{1/2}u|_{\mathbb{L}^2_\sigma}\,|Au|^{1/2}_{\mathbb{L}^2_\sigma}$$

$$\le \frac{1}{2}|Au|_{\mathbb{L}^2_\sigma} + C\,|u|_{\mathbb{L}^2_\sigma}\,|A^{1/2}u|^2_{\mathbb{L}^2_\sigma} \qquad \forall u\in D(A),$$

$N=3$ の時

$$(3.46)\quad |(u\cdot\nabla)u|_{\mathbb{L}^2} \le C\,|A^{1/2}u|^{3/2}_{\mathbb{L}^2_\sigma}\,|Au|^{1/2}_{\mathbb{L}^2_\sigma}$$

$$\le \frac{1}{2}|Au|_{\mathbb{L}^2_\sigma} + C\,|A^{1/2}u|^3_{\mathbb{L}^2_\sigma} \qquad \forall u\in D(A).$$

何故ならば， $N=2$ の時

$$a_{ij}=\left|\int u^i(D_i u^j)\, v^j\, dx\right| \le |u^i|_{L^4}\, |D_i u^j|_{L^4}\, |v^j|_{L^2} \qquad \left(D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

ここで $|w|_{L^4} \le C\, |w|_{L^2}^{1/2}\, |\nabla w|_{L^2}^{1/2}$ （Gagliado-Nirenberg）であったから

$$a_{ij} \le C\, |u^i|_{L^2}^{1/2}\, |\nabla u^i|_{L^2}^{1/2}\, |D_i u^j|_{L^2}^{1/2}\, |\nabla D_i u^j|_{L^2}^{1/2}\, |v^j|_{L^2}$$

$$\le C\, |u|_{\mathbb{L}^2}^{1/2}\, |\nabla u|_{\mathbb{L}^2}\, |u|_{(H^2)^N} \cdot |v|_{\mathbb{L}^2} .$$

ここで Stokes 作用素 $A=-P\Delta$ についても Elliptic Estimate

$$(3.47) \qquad |u|_{(H^2)^N} \le C\, |Au|_{\mathbb{L}^2_\sigma} \qquad \forall u \in D(A)$$

が成立する事（see [10, 13]），又 $|A^{1/2}u|_{\mathbb{L}^2_\sigma} = |\nabla u|_{L^2} \quad \forall u \in D(A)$

に注意すれば (3.45) が得られる。

$N=3$ の時には

$$a_{ij} \le \int |u^i|\, |D_i u^j|^{1/2}\, |D_i u^j|^{1/2}\, |v^j|\, dx$$

$$\le |u^i|_{L^6}\, |D_i u^j|_{L^2}^{1/2}\, |D_i u^j|_{L^6}^{1/2}\, |v^j|_{L^2}$$

$$\le C\, |u^i|_{H^1}^{1+1/2} \cdot |u^j|_{H^2}^{1/2} \cdot |v^j|_{L^2} ,$$

よって (3.47) 及び Poincaré の不等式 $|u|_{L^2} \le C\, |\nabla u|_{L^2}$ に注意すれば

(3.46) が得られる。

以上より局所解の存在に関して次の定理が成立する。

定理 9. $N=2,3$ とすれば $\forall a \in D(A^{1/2}) \overset{(*)_{1,2}}{=} (H_0^1(\Omega))^N \cap \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ に対して $T_m > 0$ と (4) の一意的解 $u \in C([0,T_m); D(A^{1/2}))$ s.t. $\partial u(\cdot,t)/\partial t,\ Au(t) \in L^2_{loc}([0,T_m); \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega))$ が存在して

(i) $T_m = +\infty$ 又は (ii) $T_m < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_m} (|A^{1/2}u|_{\mathbb{L}^2_\sigma} + |u|_{\mathbb{L}^2_\sigma}) = +\infty$

が成立する。

大域解の存在に関しては次が成立する。

定理 10. $a \in D(A^{1/2})^{(*)_2}$ とする時

(i) $N=2$ の時 いつも $T_m = +\infty$.

(ii) $N=3$ の時 $\|a\|_{\mathbb{L}^2_\sigma} \cdot |A^{1/2}a|_{\mathbb{L}^2_\sigma}^{(*)_3}$ が充分小さければ $T_m = +\infty$.

証明 まず $((4), u(t))_{\mathbb{L}^2_\sigma}$ を計算すると $\operatorname{div} u(t) = 0$ より

$$
\begin{aligned}
((u\cdot\nabla)u, u)_{\mathbb{L}^2_\sigma} &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u^i \cdot D_i u^j \cdot u^j dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega D_i u^i \cdot u^j \cdot u^j dx - \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u^i \cdot u^j \cdot D_i u^j dx \\
&= -((u\cdot\nabla)u, u)_{\mathbb{L}^2_\sigma} = 0 \qquad \text{であるから}
\end{aligned}
$$

$(*)_1$ $D(A^\alpha)$ の characterization については Fujita-Morimoto, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1141-1143. を見よ。

$(*)_2$ $N=2$ の時 $D(A^\alpha)$ $\alpha > 0$, $N=3$ の時 $D(A^{1/4})$ でおきかえても成立する。(See [7], [11]).

$(*)_3$ $|A^{1/4}a|_{\mathbb{L}^2_\sigma}$ でおきかえても成立する。(See [7], [11]).

(3.48) $|u(t)|^2 + \int_0^t |A^{1/2}u(s)|^2 ds = |a|^2$, ここで $|\cdot| = |\cdot|_{L^2_\sigma}$ 以下同様.

次に $((4), Au(t))_{L^2_\sigma}$ より

(3.49) $\frac{1}{2}|A^{1/2}u(t)|^2 + |Au(t)|^2 \leq |Fu(t)|\cdot|Au(t)|$,

これに t をかけて 積分すると

(3.50) $t|A^{1/2}u(t)|^2 + \int_0^t s|Au(s)|^2 ds \leq \int_0^t |A^{1/2}u(s)|^2 ds + \int_0^t s|Fu(s)|^2 ds$

よって $N=2$ の時には (3.45), (3.48) より

$$t|A^{1/2}u(t)|^2 \leq |a|^2 + C\int_0^t |u(s)|^2\cdot|A^{1/2}u(s)|^2\cdot s|A^{1/2}u(s)|^2 ds.$$

(3.48) より $\int_0^t |u(s)|^2|A^{1/2}u(s)|^2 ds \leq |a|^4$ であったから,

Gronwall の不等式より

$$\sup_{t>0} t|A^{1/2}u(t)|^2 \leq |a|^2\cdot e^{c|a|^4}$$

が得られ 定理9 より $T_m = +\infty$.

$N=3$ の時には, (3.46), (3.49) より

(3.51) $|A^{1/2}u(t)|^2 \leq |A^{1/2}a|^2 + C_0\int_0^t |A^{1/2}u(s)|^4\cdot|A^{1/2}u(s)|^2 ds$ が成立する.

よって $3C_0|a|^2|A^{1/2}a|^2 \leq 1$ と取れば

(3.52) $|A^{1/2}u(t)|^2 \leq 3|A^{1/2}a|^2$ for all $t>0$

となるから 定理9 より $T_m = +\infty$.

実際 $T>0$ を $|A^{\frac12}u(t)|^2$ が $t=T$ ではじめて $3|A^{\frac12}a|^2$ なる値をとる点とすれば（$|A^{\frac12}u(t)|^2$ は連続で $|A^{\frac12}u(0)|^2<3|A^{\frac12}a|^2$, $a\neq 0$, に注意）

(3.48), (3.51) 及び Gronwall の不等式より

$$|A^{\frac12}u(T)|^2 = 3|A^{\frac12}a|^2 \leq |A^{\frac12}a|^2\cdot e^{3C_0|a|^2|A^{\frac12}a|^2} \leq e|A^{\frac12}a|^2 < 3|A^{\frac12}a|^2$$

となり矛盾。

［証明終］

<u>Open Problem 11.</u> <u>$N=3$ の時 いつも $T_m=+\infty$ であるか?</u>

$\forall a\in \mathbb{L}^2_\sigma$ に対して (4) は いつも 大域的弱解を持つ事はわかっているが この弱解が一意的であるかどうかわかっていない。

参考文献

[1] 高村幸男・小西芳雄；「非線型発展方程式」岩波講座基礎数学シリーズ

[2] 溝畑茂；「偏微分方程式論」 岩波 現代数学 9

[3] 田辺広城；「発展方程式」 岩波 数学選書

[4] 〃 ；「関数解析 (下)」 実教出版

[5] Bergh - Löfström ; Interpolation Spaces ; An Introduction, Springer (1976)

[6] Brézis ; Opérateurs Maximaux Monotones et Sémi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, Math. Studies vol. 5, North-Holland (1973)

[7] Fujita-kato ; On the Navier-Stokes initial value problem, I, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964), 269 - 315.

[8] Glassey - Tsutsumi ; On uniqueness of weak solutions to semilinear wave equations, Comm. in Partial Differential Eq., 7 (1982), 153-195.

[9] Jörgens ; Das anfangswertproblem im grossen für eine klasse nicht-linearer wellengleichungen, Math. Zeit. 77 (1961), 295-308.

[10] Ladyzhenskaya ; The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon - Breach, 1969.
(邦訳「非圧縮粘性流の数学的理論」藤田宏・竹下彬 訳 産業図書)

[11] Ôtani ; Non-monotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems, J. Differential Eq., 46 (1982), 268-299.

[12] Ôtani ; Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 30. North-Holland 1980, 795-809.
(「劣微分作用素の差の項をもつ発展方程式の解の漸近挙動について」数理解析研講究録 No.386)

[13] Temam ; Navier-Stokes Equations, Studies in Math. and Application, vol. 2 North-Holland (1977).

[14] Yosida ; Functional Analysis, Springer (1965).

対称双曲－放物型方程式系について

奈良女子大 理　　川島秀一

1. 序

近年、数理物理学に現われる非線形方程式系のうち、特に圧縮性粘性流体の系や粘弾性体の系において、解の大域存在及び漸近安定性が示された。しかしながら、そこでの方法は個々の系に特有なものであって、異なるいくつかの系に共通して有効なものではなかった。この小論の目的は、解の大域存在及び安定性に関する問題を、対称双曲－放物型という枠内で統一的に扱い、一般な定理を示すことである。我々の結果は、圧縮性粘性流体、磁気流体力学における電気伝導性の圧縮性粘性流体、粘弾性体、有限伝播速度をもつ熱伝導、及びボルツマン方程式の離散速度モデルの系などに、直接応用できる。

2. 対称双曲－放物型系の局所解

次の形の初期値問題を考える。

$$
(1)\qquad \begin{cases} A_1^0(u,v)\,u_t + \sum_j A_{11}^j(u,v)\,u_{x_j} = f_1(u,v;D_x v) \\ A_2^0(u,v)\,v_t - \sum_{jk} B_2^{jk}(u,v)\,v_{x_j x_k} = f_2(u,v;D_x u, D_x v) \end{cases}
$$

$$
(2)\qquad (u,v)(0,x) = (u_0,v_0)(x)
$$

ここで $t \geqq 0$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$, $u=u(t,x)$ 及び $v=v(t,x)$ は

それぞれ $\mathbb{R}^{m_1}$-値及び $\mathbb{R}^{m_2}$-値関数であり、$(u,v)(t,x)$ は $\mathbb{R}^m$ $(m=m_1+m_2)$ のある凸領域 $\mathcal{O}$ の中に値を取るものとする。また $D_x=\{(\partial/\partial x)^\alpha\,;\,|\alpha|=1\}$ である。系(1)は次の意味で対称双曲－放物型であるとしよう。

<u>条件 1)</u>　$A_1^0(u,v)$, $A_2^0(u,v)$, $A_{11}^j(u,v)$ 及び $B_2^{jk}(u,v)$ はいずれも $(u,v)\in\mathcal{O}$ について滑らかであり、次を満たす。

(i)　$A_1^0(u,v)$, $A_2^0(u,v)$ は ${}^\forall(u,v)\in\mathcal{O}$ で実対称正定値,

(ii)　$A_{11}^j(u,v)$ は ${}^\forall(u,v)\in\mathcal{O}$ で実対称,

(iii)　$B_2^{jk}(u,v)$ は ${}^\forall(u,v)\in\mathcal{O}$ で実対称かつ $B_2^{jk}(u,v)=B_2^{kj}(u,v)$ 更に $\sum_{jk}B_2^{jk}(u,v)\omega_j\omega_k$ は ${}^\forall(u,v)\in\mathcal{O}$, ${}^\forall\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in S^{n-1}$ で正定値。

<u>条件 2)</u>　$f_1(u,v;\zeta)$ 及び $f_2(u,v;\eta,\zeta)$ は $(u,v;\eta,\zeta)\in\mathcal{O}\times\mathbb{R}^{nm}$ について滑らかであり、ある定数状態 $(\bar{u},\bar{v})\in\mathcal{O}$ に対して $f_1(\bar{u},\bar{v};0)=f_2(\bar{u},\bar{v};0,0)=0$ を満たす。

以上の仮定のもと次の結果が成立する。

<u>定理 1</u>（局所解の存在）　条件 1) 2) を仮定する。$n\geq 1$, $s\geq s_0+1$ $(s_0=[n/2]+1)$ とし、初期値は $(u_0-\bar{u},\,v_0-\bar{v})\in H^s(\mathbb{R}^n)$ で、更に ${}^\forall x\in\mathbb{R}^n$ で $(u_0,v_0)(x)\in\mathcal{O}_0$ を満たすとする。$\mathcal{O}_0$ は $\mathbb{R}^m$ の有界凸領域で $\overline{\mathcal{O}_0}\subset\mathcal{O}$ を満たすものである。この時、正数 T が存在して、初期値問題(1),(2)は一意に解 $(u,v)(t,x)$ をもつ。

$$u-\bar{u}\in C^0(0,T;H^s)\cap C^1(0,T;H^{s-1})$$

$$v-\bar{v}\in C^0(0,T;H^s)\cap C^1(0,T;H^{s-2})\cap L^2(0,T;H^{s+1}).$$

この定理は基本的には [7] による。またその結果は $m_2=0$ の場合の対称双曲型系や，$m_1=0$ の場合の対称放物型系に対しても有効である。$m_2=0$ の場合に同じ結果が [2] にある。

3. 対称双曲－放物型系の大域解

定数定常解 $(u,v)=(\bar u,\bar v)$ の近くで系(1)の解の大域存在及び漸近安定性を示そう。まず(1)を $(u,v)=(\bar u,\bar v)$ で線形化して得られる系

$$(3) \qquad A^0(\bar w)U_t+\sum_j A^j(\bar w)U_{x_j}-\sum_{jk}B^{jk}(\bar w)U_{x_jx_k}+L(\bar w)U=0$$

の減衰構造を調べる。ここで $\bar w={}^t(\bar u,\bar v)$ であり，

$$A^0(\bar w)=\begin{pmatrix} A_1^0(\bar w) & 0 \\ 0 & A_2^0(\bar w)\end{pmatrix} \qquad B^{jk}(\bar w)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2^{jk}(\bar w)\end{pmatrix}$$

$$A^j(\bar w)=\begin{pmatrix} A_{11}^j(\bar w) & -D_{\zeta_j}f_1(\bar w;0) \\ -D_{\eta_j}f_2(\bar w;0,0) & -D_{\zeta_j}f_2(\bar w;0,0)\end{pmatrix}$$

$$L(\bar w)=-\begin{pmatrix} D_uf_1(\bar w;0) & D_vf_1(\bar w;0) \\ D_uf_2(\bar w;0,0) & D_vf_2(\bar w;0,0)\end{pmatrix}$$

と置いた。但し $\eta=(\eta_1,\cdots\eta_n)\in\mathbb{R}^{nm_1}$, $\zeta=(\zeta_1,\cdots\zeta_n)\in\mathbb{R}^{nm_2}$ はそれぞれ D_xu, D_xv に対応する変数である。定数係数線形系(3)に対し，次の仮定を置く。

<u>条件 3)</u> (i) $A^0(\bar w)$ は実対称正定値，

(ii) $A^j(\bar{w})$ は実対称,

(iii) $B^{jk}(\bar{w})$ は実対称かつ $B^{jk}(\bar{w}) = B^{kj}(\bar{w})$, 更に $\sum_{jk} B^{jk}(\bar{w})\omega_j\omega_k$ は $\forall\omega \in S^{n-1}$ で正定値.

(iv) $L(\bar{w})$ は実対称半正定値.

<u>条件 4)</u> 実定数行列 K^j $(j=1,\cdots,n)$ が存在して, 次が成り立つ. (i) $K^jA^0(\bar{w})$ は実反対称,

(ii) $\sum_{jk}\{K^jA^k(\bar{w}) + B^{jk}(\bar{w})\}\omega_j\omega_k + L(\bar{w})$ の対称部分は $\forall\omega \in S^{n-1}$ で正定値.

条件 3) の (i) と (iii) は条件 1) の (i) と (iii) から従うことを注意する. 条件 3), 4) のもと, 系(3) の解は $t\to\infty$ で次の減衰則を満たすことが [6] で示された.

$$\|U(t)\|_{L^2} \le C\left\{e^{-\delta t}\|U(0)\|_{L^2} + (1+t)^{-\gamma}\|U(0)\|_{L^p}\right\},$$

ここで $p\in[1,2]$, $\gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$, δ 及び C は正定数. この減衰評価と (1) に対するエネルギー不等式 ([5], [4], [3]) の組合せにより, 空間次元が $n\geqq 3$ ならば, 初期値問題 (1), (2) が次の形で大域的に解ける.

<u>定理 2</u> (大域解の存在と減衰) 条件 1) ～ 4) を仮定する. $n\geqq 3$, $s\geqq s_0+2$ $(s_0=[n/2]+1)$, $1\le p < 2n/(n+2)$ とし, 初期値は $(u_0-\bar{u}, v_0-\bar{v}) \in H^s(R^n)\cap L^p(R^n)$ で, かつそのノルムが小さいとする. この時 (1), (2) は一意に大域解

$$u-\bar{u} \in C^0(0,\infty;H^s)\cap C^1(0,\infty;H^{s-1})\cap L^2(0,\infty;H^s)$$

$$v-\bar{v} \in C^0(0,\infty;H^s)\cap C^1(0,\infty;H^{s-2})\cap L^2(0,\infty;H^{s+1})$$

をもつ。この解は $t \to \infty$ で減衰則 $\|(u-\bar{u}, v-\bar{v})(t)\|_{H^{s-1}} = O(t^{-\gamma})$ を満たす。但し $\gamma = \frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$（仮定より $\gamma > \frac{1}{2}$ となる）である。

4. 双曲－放物型保存則

次の形の保存則系に対して，適当な条件のもと，$n=1, 2$ の場合も込めて大域解の存在を示そう。

$$(4) \qquad f^0(w)_t + \sum_j f^j(w)_{x_j} = \sum_{jk} \{ G^{jk}(w) w_{x_k} \}_{x_j}$$

$$(5) \qquad w(0,x) = w_0(x) .$$

ここで $w = w(t,x)$ は R^m のある凸領域 $\mathcal{O}$ の中に値を取るものとする。まず系(4)が凸エントロピーを有することを仮定しよう。即ち，

<u>条件 a)</u> $f^0(w), f^j(w), G^{jk}(w)$ はいずれも $w \in \mathcal{O}$ について滑らかであり

(0) $f^0_w(w)$ は $\forall w \in \mathcal{O}$ で正則行列である。

更にある滑らかな関数 $\eta(z)$ $(z \in f^0(\mathcal{O}))$ と $q^j(w)$ $(w \in \mathcal{O}, j=1, \cdots, n)$ が在って，

(i) $\eta(z)$ は $z \in f^0(\mathcal{O})$ について狭義凸，

(ii) $\forall w \in \mathcal{O}$ に対して，$q^j_w(w) = {}^t f^j_w(w) \eta_z(f^0(w))$，

(iii) $\tilde{B}^{jk}(w) \equiv {}^t f^0_w(w) \eta_{zz}(f^0(w)) G^{jk}(w)$ とおけば，$\forall w \in \mathcal{O}$ で ${}^t\tilde{B}^{jk}(w) = \tilde{B}^{kj}(w)$，更に $\sum_{jk} \tilde{B}^{jk}(w) \omega_j \omega_k$ は $\forall w \in \mathcal{O}$，$\forall \omega \in S^{n-1}$ で正定値。

ここで $D_w f^0(w)$ 等のかわりに $f^0_w(w)$ 等と書いた。$\eta(z)$ が

のエントロピーと呼ばれる（[1]参照）。$\eta(z)$ の式は

$$
\begin{aligned}
&\eta(f^0(w))_t + \sum_j q^j(w)_{x_j} \\
&= \sum_{jk} \{ \langle \eta_z(f^0(w)),\, G^{jk}(w) w_{x_k} \rangle \}_{x_j} - \sum_{jk} \langle B^{jk}(w) w_{x_k},\, w_{x_j} \rangle
\end{aligned}
$$

となることを注意しておく。$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^m$ の内積を表わす。条件 a) のもと、系(4)は容易に次の形に変形される。

$$
(6) \qquad A^0(w) w_t + \sum_j A^j(w) w_{x_j} - \sum_{jk} B^{jk}(w) w_{x_j x_k} = g(w ; D_x w).
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
A^j(w) &= {}^t f^0_w(w)\, \eta_{zz}(f^0(w))\, f^j_w(w), \qquad j = 0, 1, \cdots, n \\
B^{jk}(w) &= \tfrac{1}{2} \{ \widetilde{B}^{jk}(w) + \widetilde{B}^{kj}(w) \} \\
g(w ; D_x w) &= \sum_{jk} f^0_w(w)\, \eta_{zz}(f^0(w))\, G^{jk}_w(w)(w_{x_j}, w_{x_k})
\end{aligned}
$$

と置いた。この時 $A^0(w)$ は実対称正定値、$A^j(w)$ は実対称、$B^{jk}(w)$ は実対称かつ $B^{jk}(w) = B^{kj}(w)$、更に $\sum_{jk} B^{jk}(w) \omega_j \omega_k$ は $\forall w \in \mathcal{O}$, $\forall \omega \in S^{n-1}$ で半正定値になる。系(6)が条件1)を満たすべく、次を仮定する。

<u>条件 b)</u>　$w = {}^t(u, v)$ なる分割 $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$ $(m = m_1 + m_2)$ に対応した(6)の係数の分割が次の形をもつ。

i) $A^0(w) = \begin{pmatrix} A^0_1(u,v) & 0 \\ 0 & A^0_2(u,v) \end{pmatrix}$

ii) $\widetilde{B}^{jk}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{B}^{jk}_2(u,v) \end{pmatrix}$ として $\sum_{jk} \widetilde{B}^{jk}_2(u,v) \omega_j \omega_k$ は

$\forall (u,v) \in \mathcal{O}$, $\forall \omega \in S^{n-1}$ で正定値,

iii) $g(w ; D_x w) = {}^t(g_1(u, v ; D_x v),\ g_2(u, v ; D_x u, D_x v))$.

条件 a), b) のもと系(6)は条件1), 2)を任意の定数状態 $\bar{w}={}^t(\bar{u},\bar{v})\in\mathcal{O}$ に対して満たす。即ち対称双曲－放物型になる。大域解のためには条件3), 4)に対応した仮定を置かねばならない。系(6)に対しては、条件3)は $L(\bar{w})=0$ として自動的に満たされる。故に条件4)に対応した条件のみ仮定しよう。この時、凸エントロピー $\eta(z)$ に付随したエネルギー積分([4],[3]参照)を用いることにより、$n=1,2$ の場合も込めて大域解の存在がいえる。

<u>定理3</u> (大域解の存在と減衰)　条件a), b)及び条件4) (但し $L(\bar{w})=0$) を仮定する。但し $\bar{w}\in\mathcal{O}$ は任意の定数状態である。

(i) $n\geq 1$, $s\geq s_0+1$ とし初期値は $w_0-\bar{w}\in H^s(R^n)$ で、かつそのノルムは小さいとする。この時(4), (5)は一意に大域解 $w(t,x)={}^t(u,v)(t,x)$

$$u-\bar{u}\in C^0(0,\infty;H^s)\cap C^1(0,\infty;H^{s-1}),\quad D_x u\in L^2(0,\infty;H^{s-1})$$

$$v-\bar{v}\in C^0(0,\infty;H^s)\cap C^1(0,\infty;H^{s-2}),\quad D_x v\in L^2(0,\infty;H^s)$$

をもつ。解は $t\to\infty$ で減衰則 $\|(w-\bar{w})(t)\|_{L^\infty}\to 0$ を満たす。

(ii) $n\geq 1$, $s\geq s_0+2$ で p は $n=1$ なら $p=1$, $n\geq 2$ なら $p\in[1,2)$ とする。そして $w_0-\bar{w}\in H^s(R^n)\cap L^p(R^n)$ で、かつそのノルムは小さいとする。この時(i)の解は $t\to\infty$ で $\|(w-\bar{w})(t)\|_{H^{s-2}}=O(t^{-\gamma})$ $\left(\gamma=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right)$ のように減衰する。

5. 応用

序でも述べたように、定理1〜3は色々な系に応用可能であるが、ここでは特に一次元圧縮性流体の系を取り上げることにしよう。方程式系は Lagrange 座標を用いて書くと次のようになる。

$$
(7)\quad \begin{cases} (1/\rho)_t - u_x = 0 \\ u_t + p_x = (\mu\rho u_x)_x \\ e_\theta \theta_t + \theta p_\theta u_x = (\kappa\rho\theta_x)_x + \mu\rho u_x^2 \end{cases}
$$

ここで $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, ρ は質量密度, u は速度, θ は絶対温度, $p = p(\rho, \theta)$ は圧力, $e = e(\rho, \theta)$ は内部エネルギー ($p_\theta = \partial p/\partial\theta$, $e_\theta = \partial e/\partial\theta$ である), $\mu = \mu(\rho, \theta)$ は粘性係数, $\kappa = \kappa(\rho, \theta)$ は熱伝導係数である。系(7)に対し次の仮定を置く。

条件 A)　$p = p(\rho, \theta)$, $e = e(\rho, \theta)$ は $\rho > 0$, $\theta > 0$ について滑らかで次を満たす。

(i) $\rho > 0$, $\theta > 0$ で $p_\rho = \partial p/\partial\rho > 0$ かつ $e_\theta > 0$.

(ii) $de = \theta dS - p d(1/\rho)$ を満たす滑らかな $S = S(\rho, \theta)$ が存在する ($S(\rho, \theta)$ はエントロピーと呼ばれる)。

条件 B)　$\mu = \mu(\rho, \theta)$, $\kappa = \kappa(\rho, \theta)$ は $\rho > 0$, $\theta > 0$ について滑らかで次のいずれかを満たす。

(i) $\mu > 0$, $\kappa > 0$　　(ii) $\mu \equiv 0$, $\kappa > 0$

(iii) $\mu > 0$, $\kappa \equiv 0$　　(iv) $\mu \equiv 0$, $\kappa \equiv 0$.

以上の仮定のもと次がいえる。

定理4（[4]）　$\bar\rho>0$, $\bar\theta>0$ を任意の定数とし、系(7)の定数状態として $(\rho,u,\theta)=(\bar\rho,0,\bar\theta)$ を取る。

(i)　条件A)の(i)を仮定する。この時条件B)の(i)〜(iv)いずれの場合にも、系(7)は2節の条件1), 2)を満たす。故に定理1が適用できて、局所解の存在がいえる。

(ii)　条件A)の(i)及び(ii)を仮定し、条件B)の(i)又は(ii)（但し(ii)の場合、付加条件 $p_\theta(\bar\rho,\bar\theta)\neq0$ を置く）が成り立つとする。この時、系(7)は条件a), b)及び条件4)を満たす。故に定理3が適用できて、大域解の存在と減衰則がいえる。

証明．後半部の証明の概略を述べるに留める。$w={}^t(\rho, u,\theta)$ と取る。保存量は $f^0(w)={}^t(1/\rho,\ u,\ e+u^2/2)$ と取れば良い。この時，条件a)は $\eta=-S$ と取って満たされる。更に直接計算してみれば，(6)に対応する形で

$$A^0(w)=\begin{pmatrix} p_\rho/\rho^2 & & \\ & 1 & \\ & & e_\theta/\theta \end{pmatrix}\qquad A(w)=\begin{pmatrix} 0 & p_\rho & 0 \\ p_\rho & 0 & p_\theta \\ 0 & p_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(w)=\rho\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \mu & \\ & & \kappa/\theta \end{pmatrix}$$

$$g(w;D_xw)={}^t\Big(0,\ (\mu\rho)_x u_x,\ \frac{1}{\theta}\{(\kappa\rho)_x\theta_x+\mu\rho u_x^2\}\Big).$$

となる。これより条件b)は明らか。ここで $A(w)=A^1(w)$, $B(w)=B^{11}(w)$ と書いた。条件4)を確めよう。まず条件B)の(i)の場合には小さい正数 α に対し行列 $K=K^1$ を

$$K = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \bar{p}_\rho & 0 \\ -\bar{p}_\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^0(\bar{w})^{-1}$$

と取る。条件B)の(ii)の場合には、小さい正数α, βに対し

$$K = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \beta\bar{p}_\rho & 0 \\ -\beta\bar{p}_\rho & 0 & \bar{p}_\theta \\ 0 & -\bar{p}_\theta & 0 \end{pmatrix} A^0(\bar{w})^{-1}$$

と取る。但し $\bar{w} = {}^t(\bar{\rho}, 0, \bar{\theta})$, $\bar{p}_\rho = p_\rho(\bar{\rho}, \bar{\theta})$ である。この時条件4)が満たされることは、単純な計算でわかる。

References

[1] K.O. Friedrichs and P.D. Lax, Systems of conservation equations with a convex extension, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68 (1971), 1686-1688.

[2] T. Kato, The Cauchy problem for quai-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rat. Mech. Anal, 58 (1975), 181-205.

[3] S. Kawashima, Global existence and stability of solutions for discrete velocity models of the Boltzmann equation, (preprint).

[4] S. Kawashima and M. Okada, Smooth global solutions for the one-dimensional equations in magnetohydrodynamics, Proc. Japan Acad. 58 (1982), 384-387.

[5] A. Matsumura, An energy method for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Univ. of Wisconsin-Madison, MRC Technical Summary Report, #2194 (1981).

[6] T. Umeda, S. Kawashima and Y. Shizuta, On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics, (preprint).

[7] A.I. Vol'pert and S.I. Hudjaev, On the Cauchy problem for composite systems of nonlinear differential equations, Math. USSR Sbornik, 16 (1972), 517-544.

反応拡散方程式と"2-timing" method

広島大 栄 伸一郎

次の方程式の解の挙動について考察したい。

$$
(E)' \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,n) + \varepsilon G(x,n) & x \in I = [0,L] \\ J(x,n) = -\alpha \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{dU}{dx} \cdot n & {}^{\exists}\alpha > 0 \quad {}^{\exists}U \in C^2(I) \\ J(x,n) = 0 \quad \text{on } x = 0, L & \\ n(0,x) = S(x) & G(x,n)\text{: 適当に滑らか} \\ \varepsilon\text{: small parameter} & \end{cases}
$$

(E)′は環境が非一様な場合の一種個体群拡散モデルである。このモデルの一種及び多種系に対して Shigesada (1982) は"2-timing" method を使って近似解を構成し、その情報から種の生存条件、或いは共存条件について調べた。方程式(E)′において例えば $U(x) \equiv C$ (定数) のときは既に幾つかの結果がある (Fleming: 1975, Pacala; Roughgarden: 1982)。Shigesada (1982) の方法で得られる近似解は、それらの既知の結果とよく一致していることから彼女の方法の有効性が認められるが、ここでは (E)′及びその多種系も含む一般化された方程式について考察し Shigesada (1982) の手法の正当性を示すと共に、そこに掲げられた例について更に考察してみることにしよう。

簡単にモデルの説明をする.
$n(t,x)$ は時刻 t, 位置 x における生物密度,
$J(x,n)$ は生物の空間的移動効果を表す項でその
第一項は普通の拡散, 第二項は $U(x)$ の勾配の
小さい方へ移動しようとする指向性をもった生物の
流れを表し, 環境ポテンシャルと呼ばれる.
$\varepsilon G(x,n)$ は位置 x における種の成長効果を表す.
　ここで注意することは我々のモデルでは拡散
効果が成長効果より著しく大きい場合であって
そのために small parameter ε が含まれている。(その生物学的
意味については Shigesada (1982) 参照)
このような微小 parameter ε が含まれている方程式に
対しては解の挙動を知る有効な手段を示したの
が, Shigesada (1982) の主張であった.

我々は一般化された以下の方程式について考察する.

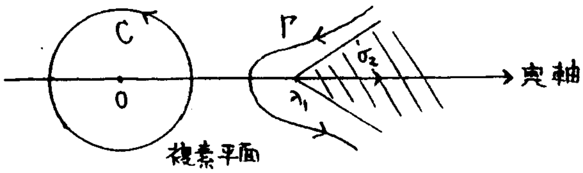
$$(E)\quad \begin{cases} u_t + Au = \varepsilon g(u) & \text{in } B \\ u(0) = S \end{cases}$$

B : Banach space。 A は B における sectorial operator で
$\sigma_1 = \{0\}$, $\sigma_2 = \{\mathrm{Re}\,\lambda \geq {}^{\exists}\lambda_1 > 0\} \cap \sigma(A)$ とするとき以下の
条件が満たされているとする。
[1] $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ で $\|e^{-At}\|_B \leq {}^{\exists}M$ (有界半群の生成)

2

σ_1, σ_2 に対応する projection を各々 Q, P すなわち

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda - A)^{-1} d\lambda \qquad P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$



とするとき

[2] $Q: B \to \mathrm{Ker}\, A$ で かつ $B_1 \equiv \mathrm{Ker}\, A$ は有限次元

[3] $\|e^{-At}P\|_B \leq Me^{-\lambda_0 t}$ for $t \geq 0$ $\quad \exists M > 0 \quad \exists \lambda_0 > 0$

[4] $g: B \to B$ $\quad C^2$-級写像

[5] $(\lambda - A)^{-1}$ $(\lambda \in \rho(A))$ は compact

これらの 5つの 仮定のもとで

$$\text{(ODE)} \begin{cases} \dfrac{dY}{d\tau} = Qg(Y) \\ Y(0) = QS \end{cases}$$

なる B_1 内の方程式を考えるのであるが 仮定[2] より これは常微分方程式である。

$y_0(\tau) \equiv Y(\tau) + PS$ とおく。このとき $Qy_0(\tau) = Y(\tau)$, $Py_0(\tau) = PS$ なることに注意しておく。

Th.1. (ODE) において $Qy_0(\tau) = Y(\tau) \to {}^\exists \xi$ $(\tau \to \infty)$ とする。更に (ODE) における ξ のまわりでの線型化行列 $Qg'(\xi)|_{B_1}$ (B_1への制限) の固有値の実部が全て負であるとする。このとき (E) の真の解 $u(t,\varepsilon)$ に対して ${}^\exists C > 0$, ${}^\exists \varepsilon_0 > 0$

$$\|u(t,\varepsilon) - e^{-At}y_0(\varepsilon t)\|_B \leq C\varepsilon \quad \text{for } 0 < {}^\forall\varepsilon \leq \varepsilon_0,\ 0 \leq {}^\forall t < \infty$$

Cor.　Th.1 で特に $g(\tilde{y})=0$ とする。このとき Th.1 に加えて
更に $^{\exists}\beta>0$, $\|u(t,\varepsilon)-e^{-At}y_0(\varepsilon t)\|_B \leq C\varepsilon e^{-\beta\varepsilon t}$

$$\text{for } 0<{}^{\forall}\varepsilon\leq\varepsilon_0,\ 0\leq{}^{\forall}t<\infty$$

Th.2　(ODE) の解が存在する範囲の全ての $T>0$ に対して
$^{\exists}C_T>0$, $^{\exists}\varepsilon_T>0$
$\|u(t,\varepsilon)-e^{-At}y_0(\varepsilon t)\|_B \leq C_T\varepsilon$ for $0<{}^{\forall}\varepsilon\leq\varepsilon_T$, $0\leq{}^{\forall}t\leq\frac{T}{\varepsilon}$

以上の結果は Th. でいうところの範囲まで解 $u(t,\varepsilon)$ が存在することを同時に示している。

例.（Shigesada 1982）　（生存条件の導出）

$$(\mathrm{E})'\ \begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}J(x,n)+\varepsilon(a(x)-b(x)n)n & x\in I=[0,L] \\ J(x,n)=-\alpha\dfrac{\partial n}{\partial x}-\dfrac{dU}{dx}\cdot n & {}^{\exists}\alpha>0 \quad U(x)\in C^2(I) \\ J(x,n)=0 & \text{on } x=0,L \\ a(x),\ b(x)\in H^1(I) & n(0,x)=S(x) \end{cases}$$

(E) との対応を考えよう.　$\mathcal{H}=L^2(I)$　$Au=-\frac{\partial}{\partial x}J(x,u)$
$\mathcal{D}(A)=\{u\in H^2(I)\mid J(x,u)=0\quad x=0,L\}$
$f(x)=\int_0^L e^{-\frac{U(x)}{\alpha}}dx\, e^{\frac{U(x)}{\alpha}}$ として 内積 $(u,v)=\int_0^L u(x)\bar{v}(x)f(x)dx$
とすると $\mathcal{H}$ と $L^2(I)$ は同値な norm を持った空間で
A はこの内積でもって非負値自己共役作用素となる。
そのスペクトルも $\sigma(A)=\{0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\}$ となる。

4

$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$ とすると $\mathrm{Ker}\,A = \langle \varphi_0 \rangle$ (φ_0 で生成される部分空間)

$QU = (U, \varphi_0)\varphi_0 = \int_0^L U(x)dx\, \varphi_0$ ($\|\varphi_0\| = 1$ である。)

更に $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ with graph norm とすると

$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}} = H^1(I)$ with equivalent norm となる。

そこで $B = \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$ とすることによって、 Bにおいて 先の

[1] ～ [5] の 仮定が 満たされるのである。 但し

$g(u)(x) = (a(x) - b(x)u)u$ である。 (ODE) としては

$\Upsilon(\tau) = N(\tau)\varphi_0$ とおいて
$$\begin{cases} \frac{dN}{d\tau}\varphi_0 = \int_0^L \{a(x) - b(x)N\varphi_0\} N\varphi_0\, dx\ \varphi_0 \\ N(0)\varphi_0 = QS = \int_0^L S(x)dx\ \varphi_0 \end{cases}$$

すなわち (ODE)$'$ $\left\{ \frac{dN}{d\tau} = AN - BN^2 \quad N(0) = \int_0^L S(x)dx \right\}$

$A = \int_0^L a(x)\varphi_0(x)\,dx \quad B = \int_0^L b(x)\varphi_0^2(x)\,dx$ となる。

また $(PS)(x) = S(x) - \int_0^L S(x)dx\,\varphi_0$

$e^{-At}y_0(\varepsilon t) = Qy_0(\varepsilon t) + e^{-At}PS = \Upsilon(\varepsilon t) + e^{-At}PS$ となるが

$(e^{-At}PS)(x)$ は
$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}J(x, R) & J(x,R) = 0 \quad x = 0, L \\ R(0, x) = (PS)(x) \end{cases}$$

の 解 $R(t,x)$ である。 故に $e^{-At}y_0(\varepsilon t) = N(\varepsilon t)\varphi_0(x) + R(t,x)$

ここで (ODE)$'$を調べてみると ($B > 0$ と仮定する)

$A > 0$ ならば $N(\tau) \to \frac{A}{B}$ $\qquad A < 0$ ならば $N(\tau) \to 0$

$\frac{A}{B}$ のまわりでの線型化作用素の固有値は $-A$

0 のまわりでの線型化作用素の固有値は A である。

故に $A > 0$ ならば Th. 1 より $\|u(t,\varepsilon) - e^{-At}y_0(\varepsilon t)\|_{H^1} \le C\varepsilon \quad {}^{\exists}C > 0$

5

故に $|Q'u(t,\varepsilon) - Y(\varepsilon t)| \leq C\varepsilon$ i.e. $|\int_0^L u(x,t,\varepsilon)dx - N(\varepsilon t)| \leq C\varepsilon$ で $N(\varepsilon t) \to \frac{A}{B} > 0$ より ε が十分小なら 生存することになる。

$A<0$ ならば Cor. より $\|u(t,\varepsilon) - e^{-At}g_0(\varepsilon t)\|_{H^1} \leq \varepsilon C e^{-\beta\varepsilon t}$ i.e. $|\int_0^L u(x,t,\varepsilon)dx - N(\varepsilon t)| \leq \varepsilon C e^{-\beta\varepsilon t}$ $N(\varepsilon t) \to 0$ より $\int_0^L u(x,t,\varepsilon)dx \to 0$ で 死滅することになる。 これにより $A = \int_0^L a(x)\varphi_0(x)dx$ の符号 で 生存，死滅 が決まることが分かる。

[Reference]

- Fleming W. H. (1975) A selection-migration model in population genetics. J. Math. Biol. 2. 219-233
- Pacala, S. and Roughgarden, J. (1982) Spatial heterogeneity and interspecific competition. Theor. Pop. Biol. 21, 92-113
- Shigesada, N. (1982) Spatial Distribution of Rapidly Dispersing Animals in Heterogeneous Environments. International Centre for Theoretical Physics
- Ei, S. On the asymptotic behavior of some reaction-diffusion equation. in preparation.

6

競合拡散方程式系の空間非一様解について

広島大学 D1
辻川 亨

§1. Introduction

最近，化学，生物学，生態学で現われる方程式(系)の解の漸近挙動に関する解析が盛んである．その中で特に我々は生物モデルに現われる方程式に於ける安定空間非一様(非定数)定常解の存在に興味がある．本稿では Shigesada-Kawasaki-Teramoto [5] により提出された次の移流項を含む一次元競合拡散方程式を扱うことにする。

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{(1+\alpha v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha\dfrac{\partial v}{\partial x}u\right\} + \beta(1-\lambda u-\mu v)u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1-u-v)v\ ; \end{cases} \quad x\in(0,1)\equiv I,$$

但し α, β は非負，λ, μ は正定数とする。

殆どすべての λ, μ に対して以下の議論は可能であるが (Mimura-Tesei-Tsujikawa [3])．ここでは仮定

$$(2)\qquad 0<\lambda,\ \mu<1$$

のもとで考える。この条件は Mimura-kawasaki [2] で考察された非負非定数定常解の存在を分岐論的に求めることの出来ないパラメーター領域を示している。そして境界条件として．

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad x\in\partial I,\quad t>0,$$

を課す。

$\alpha=0$ に対して次の結果が知られている。

<u>定理0.</u> 仮定(2)のもとで $\alpha=0$ のとき，問題(1)(3)は安定非負非定数定常解を持たない。

証明は Kishimoto [1] を参照されたい。

従って "$d>0$（移流項のある）のとき，問題(1),(3)は安定非負非定数定常解を持つか？" という問題が出てくる。この問題に対して $\beta \downarrow 0$ とした極限の方程式と，β, d が十分小さいときの二つの場合について得られた結果を次の節で述べる。ただし証明はすべて Mimura－Tesei－Tsujikawa [3] を参照されたい。不幸にして安定性の問題はここでは議論することが出来ない。
そこで最後に条件(2)を満たすある λ, μ に対して安定非負非定数定常解の存在を保証するような(1)(3)の数値実験を載せておく。

§2. Existence theorem of stationary solution.

(1),(3)の定常問題は

$$(4)\quad \begin{cases} 0 = \{(1+dv)u\}_{xx} + \beta(1-\lambda u - \mu v)u, & \\ & x \in I, \\ 0 = dv_{xx} + (1-u-v)v, & \end{cases}$$

$$(5)\qquad u_x = v_x = 0, \qquad x \in \partial I,$$

と書ける。次に解析が簡単な準線形にするため変換 $(1+dv)u = w$ を(4)(5)に施す。結果，(4)(5)は

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = w_{xx} + \beta\left(1 - \dfrac{\lambda w}{1+dv} - \mu v\right)\dfrac{w}{1+dv}, & \\ & x \in I, \\ 0 = dv_{xx} + \left(1 - \dfrac{w}{1+dv} - v\right)v, & \end{cases}$$

$$(7)\qquad w_x = v_x = 0, \qquad x \in \partial I,$$

と書き替えることが出来る。そして簡単のため f, g を

$$f(w,v) = \left(1 - \frac{\lambda w}{1+dv} - \mu v\right)\frac{w}{1+dv},$$

$$g(w,v) = \left(1 - \frac{w}{1+dv} - v\right)v,$$

とおく。

まず(6),(7)を解析する前に $\beta\downarrow 0$ とした極限の方程式

(8) $$\int_I f(w,v)\,dx = 0$$

(9) $$0 = dv_{xx} + g(w,v) \quad , \quad x \in I \ ,$$

(10) $$v_x = 0 \quad , \quad x \in \partial I \ ,$$

について考える。 但し $w = c$ は境界条件(7)から定関数である。

<u>定義</u> 次の条件(i)(ii)(iii)を満たす組 (d, c, v) を(8)(9)(10)の解と呼ぶ。

(i) v は非負，非定数で $C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ に属する。

(ii) d, C は正定数である。

(iii) (d, c, v) は(8)(9)(10)を満たす。

もし $v(x)$ が狭義単調増加関数であるとき，関係式 $(1+\alpha v)u = c$ により，$u(x)$ は狭義単調減少関数となる。このような u, v の非一様性は競合する二種の空間的すみわけを示している。従って v は $\bar{I}$ 上で狭義単調増加なもののみ扱うことにする。

<u>補題1</u> d, c が i) $0 < \alpha \le 1$，又は ii) $0 < c \le 1$，又は iii) $d > 1$ を固定するとき，$(d+1)^2/4d \le c$，を満たすとする。そのとき(8)(9)(10)は解を持たない。

この補題により $d > 1$ を任意に固定したとき，c は $1 < c < (d+1)^2/4d$ を満たさなければならない。

c を固定して(9)(10)を考える。この問題は v に関するスカラー方程式であるので十分解析することが出来る。そのため次に記号の準備をする。

$v_-(c)$，$v_0(c)$，$v_+(c)$ $(v_- < v_0 < v_+)$ を $g(c,v) = 0$ の三つの非負解，そして，$G(c,v)$，$E_\pm(c)$，$E^*(c)$，$m_\pm(c)$ を

$$G(c,v)=\int_{v_0(c)}^{v} g(c,s)\,ds \quad , \qquad E_\pm(c)=G(c,v_\pm(c)) ,$$

$$E^*(c)=\min(E_-(c),E_+(c)) \quad , \qquad m_\pm(c)=\left|\frac{\partial g}{\partial v}(c,v_\pm(c))\right|$$

で定義する。任意 $\delta\geq 0$ に対して，$A_\delta=(1+\delta,\ (\alpha+1)^2/4\alpha-\delta)$，そして $T,\ \bar{T},\ \bar{T}_\delta\ (\delta>0)$ を

$$T=\bigcup_{c\in A_0}(0,E^*(c))\times\{c\} \ , \quad \bar{T}=\bigcup_{c\in A_0}[0,E^*(c))\times\{c\} \ , \quad \bar{T}_\delta=\bigcup_{c\in A_\delta}[0,E^*(c))\times\{c\}$$

と定義する。

注意1. $E_+(c)$，$E_-(c)$ の単調性から $E_+(c_0)=E_-(c_0)$ を満たす c_0 が一意に存在する。

Nishiura [4] の補題3.1から次のことが得られる。

補題2. $1<c<(\alpha+1)^2/4\alpha$ を満たす c に対して(9)(10)を考える。そのとき，$0<E<E^*(c)$ に対して解の E-パラメータ族 $(d(E,c),v(x;E,c))$ が存在して v は $x\in\bar{I}$ に関して非負狭義単調増加である。その上，(d,v) は次のことを満たす。

(i) $v(x;E,c)\in C^0(\bar{I}\times\bar{T}_\delta)\cap C^\infty(\bar{I}\times T)$，
そして十分小さな $\delta>0$ に対して
$\frac{\partial v}{\partial c}(x;E,c)\in C^0(\bar{I}\times\bar{T}_\delta)$.

(ii) $\lim_{E\downarrow 0} v(x;E,c)=v_0(c)$,

$$\lim_{E\uparrow E^*(c)} v(x;E,c)=\begin{cases} v_-(c) & \text{compact uniformly in } [0,1) \text{ if } E_-(c)<E_+(c), \\ v_+(c) & \text{compact uniformly in } (0,1] \text{ if } E_-(c)>E_+(c), \\ v_m(c)=\begin{cases} v_-(c) & (0\leq x<m) \\ v_+(c) & (m<x\leq 1)\end{cases} & \text{compact uniformly in } \bar{I}\setminus\{x=m\}, \end{cases}$$

但し $m=\sqrt{m_+(c_0)}\Big/\left(\sqrt{m_+(c_0)}+\sqrt{m_-(c_0)}\right)$.

(iii) $$\frac{1}{\sqrt{d(E,c)}} = \int_{\xi_-(E,c)}^{\xi_+(E,c)} \{2(E - G(c,v))\}^{\frac{1}{2}}\,dv ,$$

但し，$\xi_\pm(c)$ $(\xi_- < v_0 < \xi_+)$ は $E - G(c,v) = 0$ の二つの一連の零点とする。

(iv) 任意 $\delta > 0$ に対して，$d(E,c) \in C^0(\overline{T}_\delta) \cap C^\infty(T)$．

<u>注意2.</u> 補題2 の (iii) から $\lim_{E \uparrow E^*(c)} d(E,c) = 0$ がわかる．そして補題2の (ii) から もし E が $E_-(c)$ $(1 < c < c_0)$ に近いとき，v は $x = 1$ で境界層を，E が $E^*(c_0)$ に近いとき，$x = m$ で内部遷移層を，E が $E_+(c)$ $(c_0 < c < (d+1)^2/4d)$ に近いとき，$x = 0$ で境界層を持つ。

補題2で得られた $v(x;E,c)$ を方程式(8)に代入することにより (8)(9)(10) を解くことは

$$0 = \int_I f(c, v(x;E,c))\,dx \equiv F(E,c)$$

を満たす $(E,c) \in T$ を求めることに帰着される。補題2と有限次元 degree theory を使うことにより次の定理が示される。

<u>定理1.</u> 条件(2)のもとで λ が $1/c_0 < \lambda < 1$ を満たすとする。そのとき，$F(E,c) = 0$ を満たす $(E,c) \in T$ からなる連結成分 S が存在し，

$$\overline{S} \cap \partial T = \{(E_-(1/\lambda), 1/\lambda), (E^*(c_0), c_0)\}$$

が成り立つ。但し $\overline{S}$ は $\mathbb{R}^2$ 内での S の閉苞である。

注意2と定理1から d が十分小さいとき，少なくとも二つの解が存在し，一方は v が $x = 1$ で境界層を，他方は $x = m^*$ の近傍で内部遷移層を持つ。但し

$$v_m(c_0) = \begin{cases} v_-(c_0) & (0 \le x < m) \\ v_+(c_0) & (m < x \le 1) \end{cases}$$

と定義するとき m^* として $\int_I f(c_0, v_m(c_0))\,dx = 0$ を満たす $0 < m < 1$ を取る。

以上のことは特異摂動法を使うことにより，次のような定理として得られる。

<u>定理2.</u> $d = \varepsilon^2$，λ, μ は定理1と同じものとする，そのとき

次のことを満たす $\varepsilon_0>0$ が存在する。 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して(8)(9)(10)の解の ε-パラメータ族 $(\varepsilon^2, c(\varepsilon), v(x;\varepsilon,c))$ が存在して，そして

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} c(\varepsilon)=0 ,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} v(x;\varepsilon)=U_{m^*}(c_0) \quad \text{compact uniformly in } x\in \bar{I}\setminus\{x=m^*\}$$

を満たす。

定理2で得られた解は定理1で得られた S の $(E^*(c_0), c_0)$ の近傍のある元に対応している。

__定理3.__ λ, μ は定理1と同じものとする。そのとき次のことを満たす $l_0>0$ が存在する。 $0<l<l_0$ に対して(8)(9)(10)の解の l-パラメータ族 $(d(l), c(l), v(x;l))$ が存在して，

$$\lim_{l\downarrow 0} d(l)=0 ,$$

$$\lim_{l\downarrow 0} c(l)=\frac{1}{\lambda} ,$$

$$\lim_{l\downarrow 0} v(x;l)=0 \quad \text{compact uniformly in } x\in [0,1) ,$$

が成り立つ。

定理1で得られた S が $(E_-(1/\lambda), 1/\lambda)$ の近傍で simple curve であるときその元は定理3で得られた解に対応していることがわかる。

一方その他の λ, μ については次の命題が成り立つ。

__命題1__ λ, μ が条件(2)と $0<\lambda\leq \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}$ を満たすとき，(8)(9)(10)は解を持たない。

次に β が十分小さいとき(4)(5)を考える。定理2,3と同じく特異摂動法を使うことにより次の二つの定理が得られる。

<u>定理4</u>　λ, μ は定理1と同じものとする。そのとき、次のことを満たす $\varepsilon_0>0$, $\beta_0>0$ が存在する。各 $0<\beta<\beta_0$ を固定するとき $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して(4)(5)の非負解の ε−パラメータ族 $(\varepsilon^2, w(x;\varepsilon,\beta), v(x;\varepsilon,\beta))$ が存在して、そして

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} w(x;\varepsilon,\beta) = c_0,$$

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} v(x;\varepsilon,\beta) = v_{m^*}(c_0) \quad \text{compact uniformly in } x\in\bar{I}\setminus\{x=m^*\}.$$

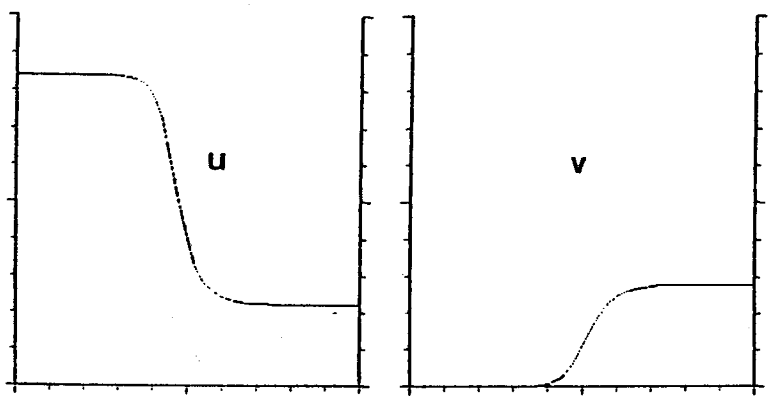
<u>定理5</u>　λ, μ は定理1と同じものとする。そのとき次のことを満たす $l_0>0$, $\beta_0>0$ が存在する。各 $0<\beta<\beta_0$ を固定するとき、$0<l<l_0$ に対して(4)(5)の非負解の l−パラメータ族 $(d(l,\beta), w(x;l,\beta), v(x;l,\beta))$ が存在して、そして、

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\lim_{l\downarrow 0} d(l,\beta) = 0,$$

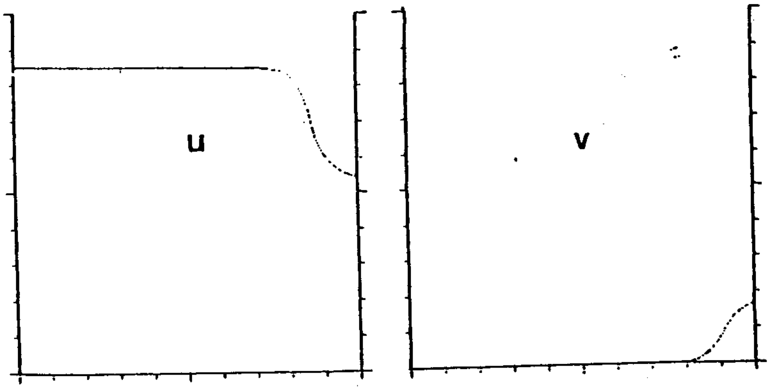
$$\lim_{\beta\downarrow 0}\lim_{l\downarrow 0} w(x;l,\beta) = \frac{1}{\lambda},$$

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\lim_{l\downarrow 0} v(x;l,\beta) = 0 \quad \text{compact uniformly in } x\in[0,1).$$

定理4,5 で得られた $u\left(=\dfrac{w}{1+dv}\right)$, v の型は図1,2で示す。



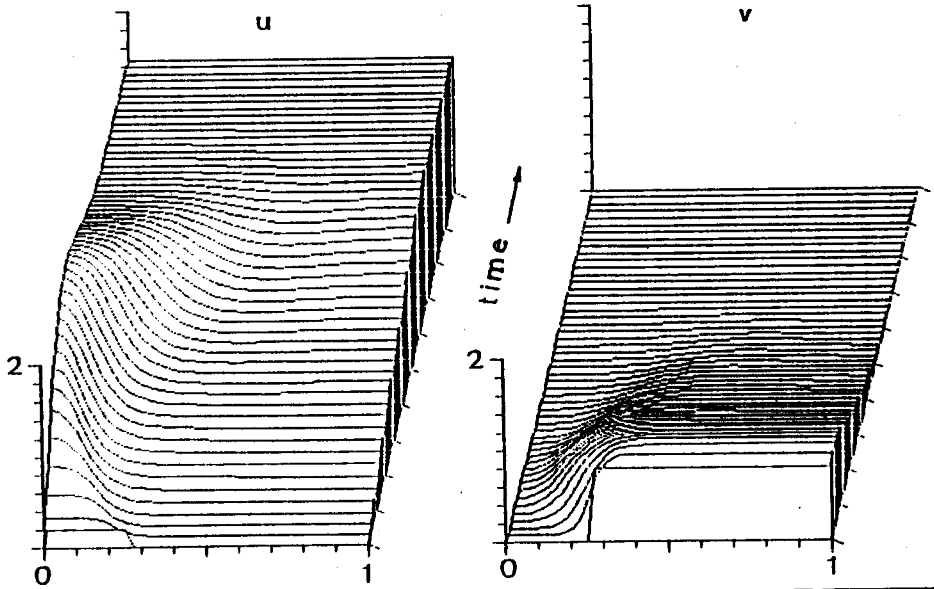
(図 1)

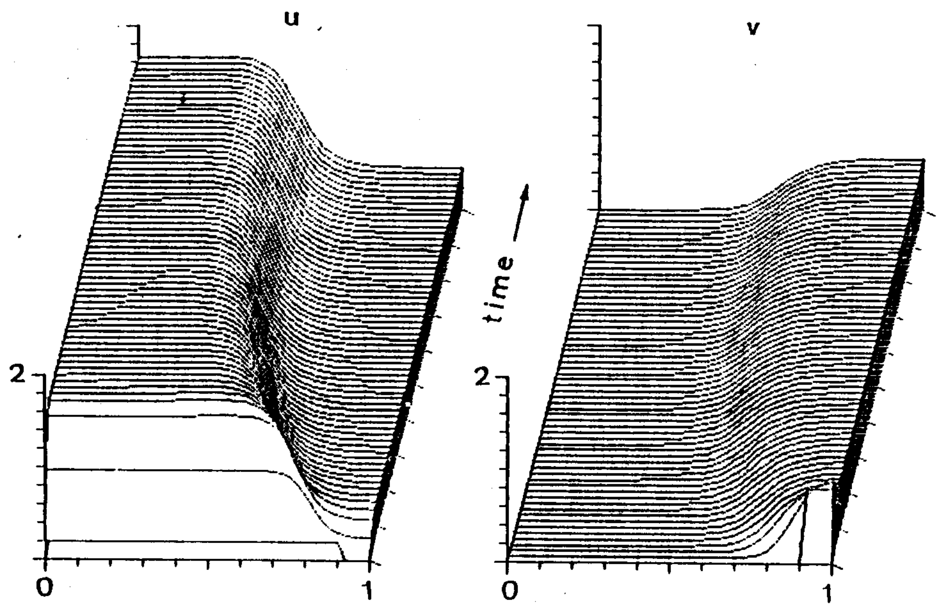


(図 2)

§3. Numerical Simulations.

§2 で(4)(5)の非負非定数定常解の存在を示した。この節では安定と思われる $(u, v) = (\frac{1}{\lambda}, 0)$ と定理5で得られた解に適当な初期値を与えたとき、(1)(3)の解が収束する様子を示す数値実験を載せる。パラメータは $\alpha = 5$, $\lambda = 0.68$, $\mu = 0.8$, $\beta = 1$, $d = 0.001$ である。





References

1. Kishimoto, K. : Instability of non-constant equilibrium solutions for a system of competition-diffusion equations, J. Math. Biol. 13, 105-114 (1981).
2. Mimura, M. and Kawasaki, K. : Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations, J. Math Biol. 9, 49-68 (1980).
3. Mimura, M., Tesei, A. and Tsujikawa, T. : Coexistence problem for two competing species models with density-dependent diffusion, Preprint.
4. Nishiura, Y. : Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems, SIAM. J. Math. Anal. 13, 555-593 (1982).
5. Shigesada, N., Kawasaki, K. and Teramoto, E. : Spatial segregation of interacting species, J. Theor. Biol. 79, 89-99 (1979).

放物型発展方程式の解の軌跡の有界性について

早大・理工　大河内位子

実ヒルベルト空間 H における放物型発展方程式

$$\text{(E)} \qquad \frac{du}{dt} \in -\partial\varphi^t(u(t)) + f(t), \qquad t \geq 0$$

の解 u に対し、集合 $\gamma(u) \equiv \{u(t) : t \geq 0\}$ の有界性を考える。ここにおいて、各 $t \geq 0$ に対し、$f(t) \in H$，φ^t は H 上の適正下半連続な凸関数で $\partial\varphi^t$ はその劣微分を表わす。更に次の (a1)(a2) を仮定する；

(a1) $\varphi^{(\cdot)}$ と $f(\cdot)$ は T-周期的 (i.e., $\varphi^{t+T} = \varphi^t$, $f(t+T) = f(t)$, $t \geq 0$)

(a2) 各 $u_0 \in \overline{D(\varphi^0)}$ に対し、$u(0) = u_0$ なる (E) の解が存在する。

このとき以下は同値である；

i) 適当な (E) の解 u に対し、$\gamma(u)$ は有界

ii) すべての (E) の解 u に対し、$\gamma(u)$ は有界

iii) (E) は T-周期的な解をもつ (i.e., $\exists u$: 解, $u(T+t) = u(t)$, $t \geq 0$)

$\gamma(u)$ が有界になる条件（すなわち、(E) が T-周期解をもつ条件）として、次の2つのタイプが知られている；

(A) (例えば Yamada [3]) $f \in L^1(0,T;H)$ かつ

$$\liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{\varphi^t(x) - \varphi^t(0)}{\|x\|} = \infty \qquad \text{unif. in } t \in [0,T)$$

(B) (Haraux [1]) $f \in L^2(0,T;H)$, $\varphi^t \equiv \varphi$ かつ $T^{-1}\int_0^T f(t)\,dt \in \mathrm{Int}(R(\partial\varphi))$.

(B) は、φ と f を適当に取り直すことにより、次の (B$'$) と同値になる；

(B$'$) $f \in L^2(0,T;H)$, $\varphi^t \equiv \varphi$, $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ かつ $\displaystyle\liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{\|x\|} = r > 0$.

これら2つの条件は、どちらも φ^t に対して位相的な条件を仮定しているため、非有界外部領域における熱方程式の周期問題に一般には適用できない。そこで、非有界外部領域における方程式にも適用できるような条件、すなわち、Sobolevの不等式を用いないですむような φ^t の条件を考える試みについて、途中経過であるが報告したい。

まず次の2つの事実に注目した。

1°. $\varphi^t \equiv \psi$, $\partial\psi$: linear, $f \in L^1(0,T;H)$, $f(t) \in D(\partial\psi)$ $(t \geq 0)$, $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \in R(\partial\psi)$
$\Rightarrow$ (E) は T-周期解をもつ

(これは. $\partial\psi = \int_0^\infty \lambda E(d\lambda)$ とスペクトル分解して $A_1 = \int_0^1 \lambda E(d\lambda)$, $A_2 = \partial\psi - A_1$ とおいたとき. A_1 が有界作用素, A_2 を $R(E((1,\infty)))$ に制限したものが coersive (従って, 関数 $\psi_2(x) \equiv \frac{1}{2}\|A_2 x\|^2$ $(x \in R(E(1,\infty)))$ と f が条件(A)を満たす) であることに注意すれば得られる。)

2° ([2]) $\begin{cases} \exists\psi: \text{適正下半連続凸} \quad \min\psi = 0, \ (\partial\psi)^{-1}(0) = \{0\} \\ \psi: \text{even (i.e. } \psi(x) = \psi(-x)) \text{ かつ} \\ \psi(x) \leq \varphi^t(x) \leq {}^\exists C\psi(x), \quad x \in D \equiv D(\psi) = D(\varphi^t), \ t \geq 0 \end{cases}$
$\Rightarrow$ 任意の(E)の解に対し. $\lim_{t\to\infty}\|u(t)\| = 0$.

これらの事から. (E)の T-周期解の存在について次の予想をした:

<u>予想</u> (C) $\begin{cases} \exists\psi: \partial\psi; \text{linear} \quad \min\psi = 0, \ (\partial\psi)^{-1}(0) = \{0\}, \\ \qquad \psi(x) \leq \varphi^t(x) \leq {}^\exists C\psi(x), \quad x \in D \equiv D(\psi) = D(\varphi^t), \ t \geq 0 \\ f \in L^1(0,T;H), \ f(t) \in D(\partial\psi) \ (t \geq 0), \ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \in R(\partial\psi) \end{cases}$
$\overset{?}{\Rightarrow}$ (E)は周期解をもつ

((注)$_1$ $\partial\psi$: linear $\Rightarrow$ ψ: even.)

しかし残念ながらこれは成立しない。実際次の例を得る;

<u>例1</u> (予想の反例) $H = \ell^2$ とし φ^t と f を次のように定める;

$$\varphi^t = \begin{cases} \varphi_1 & t \in [0, \frac{T}{2}), \\ \varphi_2 & t \in [\frac{T}{2}, T). \end{cases}$$

但し. $\varphi_i(x) = \frac{1}{2}\left\{\langle x, z_i\rangle^2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon^n}{n}\langle x, e_n\rangle^2\right\}$, $\quad i = 1, 2$.

$$z_1 = e_0 - \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n e_n, \quad z_2 = e_0 + \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n e_n.$$

$$f(t) = \begin{cases} e_0, & t \in [0, \frac{T}{2} - \varepsilon'), \\ -\frac{2}{\varepsilon'}e_0, & t \in [\frac{T}{2} - \varepsilon', \frac{T}{2}), \\ -e_0, & t \in [\frac{T}{2}, T - \varepsilon') \\ \frac{2}{\varepsilon'}e_0, & t \in [T - \varepsilon', T). \end{cases}$$

更に $\psi(x)=\frac{1}{2}\{\langle x,e_0\rangle^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n}\langle x,e_n\rangle^2\}$ とおくと．$\{\varphi^t,\psi,f\}$ は条件(C)を満たす。しかし $\varepsilon,\varepsilon'>0$ を十分小さくすると．(E)の解は有界な軌跡をもたない。

［追記］本セミナーの開催時には得られていなかったが．この講演内容に関連して．現在次の結果を得ている；

$$(\tilde{C})\begin{cases}\varphi^t\equiv\varphi, \quad \varphi: \text{even}\ (\text{i.e.}\ \varphi(x)=\varphi(-x)),\ f\in L^1_{loc}(0,\infty;H),\ \text{かつ}\\ f(t+\frac{T}{2})=-f(t),\ (t\geqq 0)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ (E)は T- 周期解をもつ．

(注)$_2$ (条件(C)と($\tilde{C}$)の相異点) まず次の2つに注意する；

・$f(t+\frac{T}{2})=-f(t),\ t\geqq 0,\ \Rightarrow\ f(t+T)=f(t)\ (t\geqq 0)$ かつ $\int_0^T f(t)dt=0$

・φ : even $\Rightarrow 0\in R(\partial\varphi)$

従って($\tilde{C}$)の f に対する条件は(C)の特別な場合である．

又．$\{\varphi^t\}$ に関しては．(C)が『$\partial\psi$ が linear になるような特別な even ft. ψ で一様に評価される』ことを仮定しているのに対し．($\tilde{C}$)は『$\varphi^t\equiv\varphi$ かつ φ は誤差無しの even』を仮定している．(cf. (注)$_1$)

(注)$_3$ ($\tilde{C}$)において『φ が誤差有りの even』(条件(C)の不等式の意味で)にはできない。実際．講演において紹介した例1を改良すると次を満たす $\{\varphi,f\}$ がつくれる；

$\varphi^t\equiv\varphi$ とおくと φ と f は(C)を満たし．かつ．$f(t+\frac{T}{2})=-f(t)\ (t\geqq 0)$．しかし．(E)は周期解をもたない．

=文献=

[1] A. Haraux, Équations d'évolution non linéaires: solutions bornées et périodiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 28, 2 (1978), 201-220.

[2] H. Okochi, Asymptotic behavior of solutions to certain nonlinear parabolic evolution equations, preprint.

[3] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries, Nagoya Math. J. Vol. 70 (1978), 111-123.

障害物のある熱方程式について

仙葉 隆

§1 問題と結果

H を実ヒルベルト空間としその内積を $(\cdot,\cdot)$, ノルムを $|\cdot|$ で表わす。このとき H における次の方程式の強解について考える。

$$
(E)\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \partial I_{K(t)}(u(t)) \ni f(t) \\ u(0) = u_0 \qquad\qquad 0 \le t \le T \end{cases}
$$

ここで φ は H から $(-\infty,\infty]$ への下半連続な凸関数とし $\partial\varphi$ は φ の subdifferential とし $K(t)$ $(0\le t\le T)$ は H の凸閉集合の族である。各 $t\in[0,T]$ に対して $I_{K(t)}x = \begin{cases} 0 & \text{if } x\in K(t) \\ +\infty & \text{if } x\notin K(t)\end{cases}$ と定義し $\partial I_{K(t)}$ は $I_{K(t)}$ の subdifferential である。

さらに $\partial\varphi$, $K(t)$ に対して次の条件を仮定する。

(A1) $\forall r>0$ に対して $g_r : [0,T] \to R$ なる絶対連続関数 g_r が存在して次の条件をみたす。
$\forall t\in[0,T]$, $\forall x\in K(t)$ with $|x|\le r$, $\forall s\in[t,T]$ そのとき $\exists x(s)\in K(s)$ s.t. $|x(s)-x| \le |g_r(s)-g_r(t)|$

(A2) (A1) の g_r が r に無関係 i.e. $g_r \equiv g$ for $\forall r>0$

(A3) $a\in L^\infty(0,T:H)$ が存在して a.e. $t\in[0,T]$ に対して $(I+\varepsilon A)^{-1}(x+\varepsilon a(t))\in K(t)$, $\forall x\in K(t)$ $\forall\varepsilon>0$ 但し $A=\partial\varphi$

定理

(A2), (A3) のもと $\forall u_0\in\overline{D(\varphi)\cap K(0)}$ $\forall f\in L^2(0,T:H)$ に対して (E) の strong-solution (強解) が唯一存在して、次の性質をみたす。

$\sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt}\in L^2(0,T:H)$, $t\varphi(u(t))\in L^\infty(0,T)$

特に $u_0\in D(\varphi)\cap K(0)$ のときは

$\frac{du}{dt} \in L^1(0,T:H)$, $\varphi(u(\cdot)) \in L^\infty(0,T)$

定義

$u:[0,T] \to H$ が次の条件をみたすとき u は (E) の強解であるという。

1° $u \in C([0,T]:H)$.
$\forall \delta > 0$ に対して $u \in W^{1,1}([\delta,T]:H)$

2° a.e. $t \in [0,T]$ に対して $u(t) \in D(\partial\varphi) \cap K(t)$

3° a.e. $t \in [0,T]$ に対して
$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \partial I_{K(t)} u(t) \ni f(t)$$

4° $u(0) = u_0$

この問題については H. Brézis [ ] で扱われているが その結果は $K(t)$ の動きが $W^{1,2}(0,T)$ 程度 (A1, A2 の g に対応する。) であるが 本稿では $W^{1,1}(0,T)$ 程度として強解の存在と一意性を示した。他に H. Attouch and A. Damlamian [ ] , N. Kenmoch [ ], Y. Yamada [ ], S. Yotsutani [ ] などによって $\partial\varphi + \partial I_{K(t)}$ を $\partial\varphi^t$ として扱っているが これらも $D(\varphi^t)$ の動きが $W^{1,2}(0,T)$ 程度である。(もちろん 本稿の方程式の方がひじょうに特別な形であるが。) このように $K(t)$ の動きを $W^{1,1}(0,T)$ 程度として扱ったものは他にないように思われる。

§2. 定理の証明

$\partial\varphi$, $\partial I_{K(t)}$ が単調であることより一意性が示される。

強解の存在を示すために次の補題を示す。

No.
Date

補題

$$(E)' \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial I_{K(t)} u(t) \ni f(t) & , 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

(A1)のもと(E)′の $u_0 \in K(0)$, $f \in L^1(0,T;H)$
なる強解が唯一存在して $0 \leq {}^\forall s \leq {}^\forall t \leq T$
に対して $|u(t) - u(s)| \leq C\int_s^t \{|g_M'(\tau)| + |f(\tau)|\} d\tau$

C は g_M, f に無関係な定数
M は f, u_0 に関係した定数

証明

Kenmoch [ ] と同様にして差分近似で証明する。ここで(A1)の $x(s)$ として $Proj_{K(s)} x$ がとれることに気をつけて Projection の性質をつかうと ${}^\exists M \geq 0$ が存在して

$$|u_k^n - u_{k-1}^n| \leq C\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \{|g_M'(\tau)| + |f(\tau)|\} d\tau \quad \cdots (*)$$

ただし $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n$

$$\frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{t_k^n - t_{k-1}^n} + \partial I_{K(t_k^n)} u_k^n \ni f_k^n = \frac{1}{t_k^n - t_{k-1}^n}\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f(\tau) d\tau$$

と定義する。
以下(*)を使うことにより $\{u_k^n\}$ の各点ごとの弱収束だけで極限関数の絶対連続性がいえるから、それが強解であることは積分の形にして示す。

定理の証明にもどる。
$\forall \lambda > 0$ に対して逐次近似により

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) + \partial \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) + \partial I_{K(t)} u_\lambda(t) \ni f(t) \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

なる強解 u_λ が存在する。

No.

Date

その解を

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) + \partial I_{K(t)} u_\lambda(t) \ni f(t) - \partial \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

とみて 補題の評価をつかおうと

$$\left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right| \leq C \{ |g'(t)| + |f(t) - \partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))|$$

for a.e. $t \in [0, T]$ … (**)

一方 $u_\lambda(t) \in K(t)$ for $^\forall t \in [0, T]$ に

注意して (A3) をつかうと $^\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\left[\int_0^T |\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left\{ \left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} |a(t)| + \varphi(u_0)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 dt \right\}.$$

が成立する。この二式より u_λ と $\partial\varphi_\lambda(u_\lambda)$

の有界性がでるから. Y. Yamada [ ] の PROOF OF THEOREM I と同様にして.

$u_\lambda \to {}^\exists u$ in $C([0,T] : H)$ as $\lambda \downarrow 0$

$\partial\varphi_\lambda(u_\lambda) \to {}^\exists w$ in $L^2(0, T : H)$

がわかる.

u の絶対連続性は (**) を $0 \leq {}^\forall s \leq {}^\forall t \leq T$ 上

積分して $\lambda \downarrow 0$ とすればわかる。

さらに補題と同様にして u が強解である

ことがわかる.

§3. 例

Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域でその境界 $\partial\Omega$ は十分

なめらか. $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$

とおく。関数 $\varphi \in L^\infty(0, T : H^2(\Omega))$ は

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^1(0, T : L^2(\Omega))$, $\varphi(t, x) \leq 0$ a.e on Σ

とする。このとき次の方程式の強解を考える。

$$(\text{U})\begin{cases} u \geq \psi & \text{a.e. on } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f & \text{a.e. on } \{(t,x) \in Q : u > \psi\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta u + f & \text{a.e. on } \{(t,x) \in Q : u = \psi\} \\ u(t,x) = 0 & \text{a.e. on } \Sigma \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{a.e. on } \Omega \end{cases}$$

[系]

$\forall f \in L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_0(x) \geq \psi(0,x)$ a.e. on Ω をみたすとき (U) は次の性質を持つ解 u が唯一存在する.

$u \in C([0,T] : L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T : H_0^1(\Omega))$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^1(0,T : L^2(\Omega))$

証明

S Sasaki [ ] と同様にしてできる。

Reference

[1] H. Attouch et A. Damlamian, Problèms d'évolution dans les Hilberts et applications, J. Math. Pures Appl. 54 (1975), 53-74

[2] H. Brézis, Un problém d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972), 310-312

[3] H. Brézis, Operateurs maximaux monotones et semi groupes de contraiction dans les espaces de Hilbert, North-Holland, 1973.

[4] N. Kenmoch, Some nonlinear parabolic variational inequalities, Israel. J. Math. 22 (1975), 304-331

No.

Date

[5] S. Sasaki, On nonlinear hyperbolic evolution equations with unilateral conditions dependent on time, Proc. Japan. Acad, 59 (1983) 59 - 62

[6] S. Yostutani, Evolution equations associated with subdifferential, J. Math. Soc. Japan 31 (1978) 623 - 646

[7] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23 (1976), 491 - 515

拡散方程式の a priori 評価について

北大・小山哲也

セミナーで述べた内容には見落としがあり，ここでは少し後退した結果を述べます。

<u>0.</u> S^1 を一次元 Torus とし，区間 $[0,1]$ において 0，1 を同一視したものと同一視する。

$0<\alpha<1$ とし，$C_\alpha(S^1)$ を，S^1 上 α-Hölder 連続な関数からなる Banach 空間とする。$C_\alpha(S^1)$ 上の連続な seminorm ϕ_α を

(1) $$\phi_\alpha(u) \equiv \sup_{x,y\in S^1} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad u\in C_\alpha(S^1),$$

で定義する。

$$\max_{x\in S^1} |u(x)| + \phi_\alpha(u),$$

が $C_\alpha(S^1)$ の norm である。

Δ を distribution の意味の Laplacian とし，その定義域を

$$\mathfrak{D}(\Delta) = \{u\in C_\alpha(S^1) \mid \Delta u\in C_\alpha(S^1)\},$$

とする。このとき，次を示したい。

<u>Th.</u> Δ は $C_\alpha(S^1)$ 上 m-dissipative である。したがって $\overline{\mathfrak{D}(\Delta)}$ 上の縮小半群 $e^{t\Delta}$ が生成されるが，

(2) $$\phi_\alpha(e^{t\Delta}v) \leq \phi_\alpha(v), \quad v\in\overline{\mathfrak{D}(\Delta)}, \quad t>0,$$

が成り立つ。 //

じっさい，Crandall－Liggett の定理により，$\overline{D(\Delta)}$ 上の強連続半群 $e^{t\Delta}$ は生成されるが，$\overline{D(\Delta)} \subsetneq C_\alpha(S^1)$ であり，また $e^{t\Delta}$ の強微分可能性も保証されていない。しかし，$u(x,t) = (e^{t\Delta}v)(x)$ とすると，これは

(D) $\quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \Delta u(x,t)$, on $S^1 \times (0,\infty)$, $\quad u(x,0) = v(x)$, on S^1,

の distribution のいみの解である。以下，Th の証明をする。

<u>1.</u> X を Banach 空間，X^* をその dual，$\phi : X \to [0,\infty)$ を X 上の seminorm とするとき，

$$\partial\phi\, u \equiv \{ f \in X^* \mid \phi(v) - \phi(u) \geqq \langle v-u, f \rangle,\ {}^\forall v \in X \}$$

によって ϕ の劣微分作用素 $\partial\phi ; X \longrightarrow X^*$（多価）が定義される。ここで，$\phi$ の斉次性により，

$$f \in \partial\phi\, u \iff \begin{cases} \langle v, f \rangle \leqq \phi(v), & {}^\forall v \in X, \\ \langle u, f \rangle = \phi(u), \end{cases}$$

が分る。

<u>2.</u> $\mathcal{B}(S^1)$ を，S^1 上有界関数からなる Banach 空間とする。$\varepsilon > 0$ を fix し，

(3) $$OSC_\varepsilon(u) \equiv \sup_{x,y \in S^1, |x-y| \leqq \varepsilon} |u(x) - u(y)|,$$

とすると，OSC_ε は $\mathcal{B}(S^1)$ 上の連続な seminorm となる。ここで，

(4) $$\phi_\alpha(u) = \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{-\alpha} OSC_\varepsilon(u), \quad u \in C_\alpha(S^1),$$

が成立する。

<u>3.</u> $u \in \mathcal{B}(S^1)$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$x_\varepsilon, y_\varepsilon \in S^1$ があって，

(5) $$\begin{cases} |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \varepsilon, \\ u(x_\varepsilon) - u(y_\varepsilon) = \max\limits_{x, y \in S^1,\ |x-y| \leq \varepsilon} |u(x) - u(y)|. \end{cases}$$

であるとする。このとき，

(6) $$\langle v, f \rangle \equiv \{v(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)\}, \quad v \in \mathcal{B}(S^1)$$

によって $f \in \mathcal{B}(S^1)^*$ を定義すると，1 の結果により $f \in \partial \mathrm{osc}_\varepsilon\, u$ であることが分る。

<u>4.</u> Δ が m-accretive であることを示す。即ち，

(E) $$u(x) - \tau \Delta u(x) = v(x), \quad x \in S^1.$$

が，任意の $v \in C_\alpha(S^1)$ に対し，一意解 $u \in C_\alpha(S^1)$ をもち，かつ

(7) $$\phi_\alpha(v) \geqslant \phi_\alpha(u),$$

(8) $$\max_{S^1} |v| \geqslant \max_{S^1} |u|$$

であることを以下に示す。

<u>Step 1.</u> S^1 を m 等分して分点，$x_k^m = k/m$, $k = 0, 1, \cdots, m-1$, をつくる。$h = 1/m$ とおいて (E) の差分近似

(E)$_h$ $$u_h(x_k^m) - \tau \Delta_h u_h(x_k^m) = v(x_k^m), \quad k = 0, 1, \cdots, m-1,$$

をつくる。ここで，

$$\Delta_h u_h(x_k^m) \equiv h^{-2}[u(x_{k-1}^m) - 2u(x_k^m) + u(x_{k+1}^m)]$$

$$(x_m^m \equiv x_0^m,\ x_{-1}^m \equiv x_{m-1}^m \text{ とみなす。})$$

は，Δ の中心差分近似である。

$(E)_h$ は一意的に解ける。じっさい，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \{u_h(x_k^m)\}_{k=0,\dots,m-1} & & \{(1-\tau\Delta_h)u_h(x_k^m)\}_{k=0,\dots,m-1} \end{array}$$

は単射な線型写像であるから全射である。単射であることは次のようにして分る。今かりに

$$(1-\tau\Delta_h)u_h(x_k^m)$$
$$= (1+2\tau h^{-2})u_h(x_k^m) - \tau h^{-2}(u_h(x_{k-1}^m)+u_h(x_{k+1}^m)) \equiv 0,$$
$$u(x_{k_0}^m) = \max_k u_h(x_k^m) > 0$$

とすると，

$$\frac{1}{2}(u_h(x_{k_0+1}^m)+u_h(x_{k_0-1}^m)) = \frac{1+2\tau h^{-2}}{2\tau h^{-2}} u_h(x_{k_0}^m) > u_h(x_{k_0}^m)$$

となって，$u_h(x_{k_0\pm1}^m)$ のどちらか一方は $> u_h(x_{k_0}^m)$ となって矛盾。

同様な方法で

$$(9)\quad \begin{cases} \max_k u_h(x_k^m) \leqq \max_k v(x_k^m), \\ \min_k u_h(x_k^m) \geqq \min_k v(x_k^m) \end{cases}$$

も示される。

Step 2. $u_h(x) \equiv u_h(x_k^m)$ for $kh \leqq x < (k+1)h$ によって u_h を S^1 上に拡張する。同様に，$v_h(x) \equiv v(x_k^m)$, for $kh \leqq x < (k+1)h$ とする。$u_h, v_h \in \mathcal{B}(S^1)$ である。u_h に対して (5) をみたす $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in S^1$ がとれるので (6) によって $f \in \partial\,\mathrm{OSC}_\varepsilon u_h$ をつくると，

$$\mathrm{OSC}_\varepsilon(v_h) - \mathrm{OSC}_\varepsilon(u_h) \geqq \langle v_h - u_h, f\rangle = -\tau\langle \Delta_h u_h, f\rangle$$
$$= \tau h^{-2}\{2[u_h(x_\varepsilon)-u_h(y_\varepsilon)] - [u_h(x_\varepsilon+h)-u_h(y_\varepsilon+h)] - [u_h(x_\varepsilon-h)-u_h(y_\varepsilon-h)]\}$$
$$\geqq 0.$$

したがって，$\forall\varepsilon>0$ に対して，

(10) $$\mathrm{OSC}_\varepsilon(v_h) \geqq \mathrm{OSC}_\varepsilon(u_h).$$

ここで，$v\in C_\alpha(S')$ とすれば，

(11) $$\infty > \phi_\alpha(v) \geqq (\varepsilon+h)^{-\alpha}\mathrm{OSC}_\varepsilon(v_h) \geqq (\varepsilon+h)^{-\alpha}\mathrm{OSC}_\varepsilon(u_h).$$

じっさい，$v_h(z)=v([z/h]h)$，$0\leqq z<1$，$|[x/h]h-[y/h]h|\leqq|x-y|+h$ だから，

$$\phi_\alpha(v)=\sup_{x,y}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} \geqq \max_{x,y}\frac{|v_h(x)-v_h(y)|}{|[x/h]h-[y/h]h|^\alpha}$$

$$\geqq \max_{|x-y|\leqq\varepsilon}\frac{|v_h(x)-v_h(y)|}{(\varepsilon+h)^\alpha} = (\varepsilon+h)^{-\alpha}\mathrm{OSC}_\varepsilon(v_h).$$

Step 3. (9)，(11) を用いて，Ascoli-Arzela の定理と同様の議論をすれば，$h(n)\downarrow 0$ となる数列 $\{h(n)\}$ と $u\in C_\alpha(S')$ があって

$$u_{h(n)} \longrightarrow u,\quad n\to\infty,\quad (S' 上一様)$$

であることが分る。$v_{h(n)}\longrightarrow v$，($S'$ 上一様) は明らかだから，

$$u_h(x) - \tau\Delta_h u_h(x) = v_h(x),\qquad x\in S',$$

において $h\downarrow 0$ とすれば，$w=\tau^{-1}(u-v)\in C_\alpha(S')$ に対して，

$$\Delta_{h(n)}u_{h(n)} \longrightarrow w,\quad n\to\infty,\quad (S' 上一様)$$

が分る。$\varphi\in C^\infty(S')$ に対しては $\Delta_h\varphi\to\Delta\varphi$ (S' 上一様) だから，distribution の いみで $w=\Delta u$ であって，u は (E) の解である。しかも $u_h\to u$，$h\downarrow 0$ である。

Step. 4. (7)は，(10)において $h \downarrow 0$ とし，$\varepsilon^{-\alpha}$をかけて $\varepsilon > 0$ で sup. をとれば出る。(8)は(9)から出る。(4の証明終)

5. Crandall-Liggett の定理により，$\forall v \in \overline{\mathfrak{D}(\Delta)}$ に対し，

$$[1-\tfrac{t}{n}\Delta]^{-n} v \longrightarrow T_t v, \ (n \to \infty), \quad \text{強収束},$$

が分り，T_t は $\overline{\mathfrak{D}(\Delta)}$ 上の強連続縮小半群となる。これを $e^{t\Delta}$ と書く。(2)はあきらか．(Th の証明終)

6. 境界のある領域上でやりたかったのですが，今のところ出来ていません。とくに Dirichlet 条件をつけたとき，3. でいう x_ε, y_ε の一方が境界に来ると，Step 2 がうまく行かないので，他の方法を考えなくてはなりません。

ON THE NAVIER-STOKES-MAXWELL SYSTEM IN MAGNETOHYDRODYNAMICS

Zensho Yoshida
Department of Nuclear Engineering, University of Tokyo
Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113

Introduction

This report is a digest of the paper [3] which studies a system consists of the Navier-Stokes-type equations (parabolic parts) and the Maxwell equations (hyperbolic parts); Research has been done at Courant Institute of Mathematical Sciences in collaboration with Professor Yoshikazu Giga.

We consider the following system that is related to the dynamics of an incompressible plasma consisting of two-components -- electrons and ions.

$$\partial_t v_1 = \Delta v_1 - (v_1 \cdot \nabla) v_1 - (E + v_1 \times B) - R - \nabla p_1, \quad \text{div } v_1 = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t v_2 = \Delta v_2 - (v_2 \cdot \nabla) v_2 + (E + v_2 \times B) + R - \nabla p_2, \quad \text{div } v_2 = 0 \tag{2}$$

$$\partial_t B = -\text{rot } E \tag{3}$$

$$\partial_t E = \text{rot } B - (v_1 - v_2) \tag{4}$$

$$\text{div } B = 0, \quad \text{div } E = 0 \tag{5}$$

Here $R = -\zeta(v_2 - v_1)$ and ζ is a positive constant. Equations (1)-(2) are the Navier-Stokes equations with Lorentz's force $E + v_j \times B$. The term R represents the momentum-exchange rate between the two components. The equations (3)-(5) are corresponding to the Maxwell equations. We consider the initial value problem for (1)-(5) in a smoothly bounded domain Ω in $\mathbf{R}^3$, with boundary conditions

$$v_1 = v_2 = 0, \quad E \times n = 0 \quad \text{on} \partial\Omega,$$

where n is the normal vector to $\partial\Omega$.

In this paper we construct strong solutions of this system, using the nonlinear semigroup theory established by Komura [5,6]. In [10] we have applied his theory to solve the usual Navier-Stokes system. We show here that the previous method in [10] is also applicable to the system (1)-(5) although it includes hyperbolic parts (3)-(4). We first truncate the nonlinear terms of the system. The nonlinear semigroup theory gives a unique global strong solution of the truncated system. It turns out that the solution of the truncated system satisfies the original system at least locally-in-time. Moreover, we see, for small initial data, this globally solves the system.

1. Formulation

We give an operator-theoretic interpretation of the system (1)-(4), and introduce the corresponding evolution equation in a Hilbert space. For the fluid-dynamical part (1)-(2), the standard technique in the usual Navier-Stokes theory is useful.

Let $L^2(\Omega)$ denote the Hilbert space of square-integrable vector functions on Ω endowed with the usual inner product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $|\cdot|$. Let H_σ denote the space

$$H_\sigma = \{ v \in L^2(\Omega) \; ; \; \mathrm{div}\, v = 0, \;\; in\,\Omega, \;\; v\cdot n = 0 \;\; on\,\partial\Omega \}.$$

We consider a Hilbert space

$$H = H_\sigma \times H_\sigma \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

equipped with an inner product

$$< u, u' > = \int_\Omega u\cdot u' \, dx,$$

where

$$u=(v_1, v_2, B, E), \; u'=(v'_1, v'_2, B', E') \in H,$$

$$(v_1, v'_1, v_2, v'_2 \in H_\sigma, \quad B, B', E, E' \in L^2(\Omega)\,),$$

$|u|$ denotes the norm of u in H.

We denote by P the projector in $L^2(\Omega)$ onto H_σ. Applying P to (1)-(2), we get evolution equations

$$dv_j/dt = -Av_j - P(v_j\cdot\nabla)v_j \qquad (\mathrm{NS_j})$$

$$+ (-1)^j [P(E + v_j \times B) + R] \quad (a.e.\ t \geqslant 0), \; j=1,2,$$

where d/dt denotes the strong derivative in H_σ, $A = -P\Delta$ with domain

$$D(A) = \{ v \in H^2(\Omega) \cap H_\sigma \; ; \; v=0 \;\; on \;\; \partial\Omega \}.$$

We call A the Stokes operator, which is positive self-adjoint in H_σ. We can define the power A^α of A for every $\alpha \in \mathbf{R}$.

We now write $(\mathrm{NS_1})$, $(\mathrm{NS_2})$; (3), (4) as the following evolution equation:

$$du/dt = -Lu + Nu + Ru \qquad (a.e.\ t \geqslant 0), \qquad (\mathrm{NS\text{-}M})$$

where

$$Lu = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u,$$

$$\Lambda_1 u = (Av_1,\ Av_2,\ 0,\ 0),$$
$$D(\Lambda_1) = D(A)\times D(A)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega),$$
$$\Lambda_2 u = (PE,\ -PE,\ \mathrm{rot}\ E,\ -\mathrm{rot}\ B + v_2 - v_1),$$
$$D(\Lambda_2) = \{u\ ;\ v_1,\ v_2 \in H_\sigma,\ \mathrm{rot} E,\ \mathrm{rot} B \in L^2(\Omega),\ E\times n = 0\ on\ \partial\Omega\},$$
$$-Nu = (P(v_1\cdot\nabla)v_1,\ P(v_2\cdot\nabla)v_2,\ 0,\ 0) + (P(v_1\times B),\ -P(v_2\times B),\ 0,\ 0),$$
$$Ru = (-R,\ R,\ 0,\ 0).$$

We call this system *the Navier-Stokes-Maxwell system* ((NS-M) for short).

We consider (NS-M) with initial data

$$u(0) = u_o \in D(L),\quad u_o = (v_{1o},\ v_{2o},\ B_o,\ E_o).$$

The conditions

$$\mathrm{div}\ v_1 = 0,\quad \mathrm{div}\ v_2 = 0$$

in (1) and (2) are implicitly included in (NS-M). On the other hand, the condition (5) is dropped in (NS-M). However, if initial data B_o, E_o satisfy

$$\mathrm{div}\ B_o = 0,\quad \mathrm{div}\ E_o = 0,$$

(NS-M) implies (5). In what follows, we consider the initial value problem for (NS-M) in H.

2. A truncated system and nonlinear semigroups

To apply the general theory of nonlinear semigroups, we first introduce a truncated (NS-M) system. Let $\psi_M(s)$ $(s \geqslant 0)$ denote a cut function such that

$$\psi_M(s) = \begin{cases} 1 & : 0 \leqslant s \leqslant M' = M/2 \\ 2 - s/M' & : M' < s < M \\ 0 & : M \leqslant s. \end{cases}$$

Set

$$\Psi_M(u) = \psi_M(\|A^{1/2}v_1\|)\psi_M(\|A^{1/2}v_2\|)\psi_M(\|B\|).$$

We define a truncated operator S_M by

$$S_M u = -Lu + \Psi_M(u)Nu + Ru,\quad D(S_M) = D(L).$$

The standard estimate for the nonlinear term shows that Nu belongs to H if u is in $D(L)$, so S_M is well defined; see [2, 4, 9]. Since we have truncated the nonlinear term, and since L and $-R$ are non-negative, we have, for S_M,

Lemma 1. *There is a positive constant* $c = c(\Omega)$ *such that* $S_M - \omega I$ *is dissipative for* $\omega = \omega(M) = cM^4$, *that is,*

$$<(S_M - \omega I)u - (S_M - \omega I)u',\ u - u'> \leqslant 0$$

for all u, $u' \in D(S_M)$.

(outline of proof) For the nonlinear term Nu we have an estimate

$$|<\Psi_M(u)Nu - \Psi_M(u')Nu',\ u - u'>|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{2} |A^{1/2}(v_j - v'_j)|^2 + \omega(|B-B'|^2 + \sum_{j=1}^{2} |v_j - v'_j|^2),$$

where $u = (v_1, v_2, B, E)$, $u' = (v'_1, v'_2, B', E')$. The proof is similar to that of Lemma 2.1 in [10], so we omit it.

Lemma 2. *The dissipative operator* $S_M - \omega I$ *is hyperdissipative in* H, *that is, the range of* $I - \lambda(S_M - \omega I)$ *is equal to* H *for some* $\lambda > 0$.

(outline of proof) It is enough to prove that

$$-(L + \mu)u + \Psi_M(u)Nu + R = f, \quad \mu > 0$$

is solvable for all $f \in H$. We transform this into an integral equation

$$-u + (L+\mu)^{-1}(\Psi_M(u)Nu + Ru) = (L+\mu)^{-1}f,$$

and apply the Leray-Schauder degree theory to prove that there is a solution in V:

$$V = \{(v_1, v_2, B, E) \in H\ ;\ v_j \in H^1(\Omega),\ v_j = 0 \ on\ \partial\Omega,\ j=1,2\}$$

which is equipped with a norm $|u|_V^2 = <(\Lambda_1+\mu)u, u>$. This method is standard for the Navier-Stokes equations (cf. [7]). Regularity results shows that the solution u is in $D(L)$.

We can now apply the nonlinear semigroup theory to S_M.

Proposition 1. *The operator* S_M *generates a nonlinear semigroup* $T_M(t)$ *in* H. *The function* $u(t) = T_M(t)u_0$ *for* $u_0 \in D(S_M)$ *is absolutely continuous in* $t \geqslant 0$ *with values in* H. *Moreover,* $u(t)$ *uniquely and globally solves the truncated system*

$$du/dt = S_M u \qquad (a.e.\ t \geqslant 0), \qquad u(0) = u_0. \tag{6}$$

We have an estimate

$$|S_M T_M(t)u_0| \leqslant e^{\omega(t-s)}|S_M T_M(s)u_0| \qquad a.e.\ t \geqslant s \geqslant 0.$$

3. Existence theorems

In this section, we show that $T_M(t)u_o$ solves the original (NS-M) at least locally-in-time, provided that M is sufficiently large. We also prove that $T_M(t)u_o$ solves (NS-M) globally-in-time, if $|u_o|$ is sufficiently small.

We begin with an energy estimate.

Lemma 3 (Energy estimate). *Set $u(t) = T_M(t)u_o$. Then we have the energy inequality*

$$|u(t)|^2 + 2\int_0^t \sum_{j=1}^2 |A^{1/2}v_j(s)|^2 ds \leqslant |u_o|^2, \tag{7}$$

where $u = (v_1, v_2, B, E)$.

(proof) Take the inner product of u and the both sides of (6), and integrate it over $[0,t]$. Then, the result follows from

$$\sum_{j=1}^2 |A^{1/2}v_j|^2 = <\Lambda_1 u,\, n> = <Lu,\, u>,$$

$$<-Lu + kNu + Ru,\, u> \leqslant -<\Lambda_1 u,\, u> \leqslant 0 \quad \text{for every} k \in \mathbf{R}.$$

We also have the following a priori estimate.

Lemma 4 (Growth-rate estimate for enstrophy). *The function $A^{1/2}v_j(t)$ $(j=1,2)$ is continuous from $[0,\infty)$ to H_σ, where $u(t) = T_M(t)u_o$, $u = (v_1, v_2, B, E)$. Set $\alpha = |u_o|^2$ and $\delta = (\alpha+\alpha^3)^{1/3}$. We have*

$$|A^{1/2}v_j(t)|^2 - |A^{1/2}v_j(s)|^2 \leqslant |A^{1/2}v_j(s)|^2 + \delta, \quad 0 \leqslant t-s \leqslant t_o, \tag{8}$$

where

$$t_o = C(\Omega)(|A^{1/2}v_j(s)|^2 + \delta)^{-2}.$$

(proof of the a priori estimate) The idea of the proof is similar to that of (2.24) in [1]. Multiply Av_j to (NS$_j$) and integrate it over Ω to get

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}v_j|^2 + |Av_j|^2$$

$$\leqslant |(E,Av_j)| + |((v_j\cdot\nabla)v_j, Av_j)| + |(v_j\times B, Av_j)| + |(R, Av_j)|$$

The fourth term in the right hand side is dominated by $C_1|Av_1|\times(|v_1| + |v_2|)$. Using the estimates for nonlinear terms (see [1,2,4]) and Young's inequality, we get

$$\frac{d}{dt}|A^{1/2}v_j|^2 + |Av_j|^2 \leqslant C_2(|A^{1/2}v_j|^6 + \alpha^2|A^{1/2}v_j|^2 + \alpha),$$

where $\alpha = |u_0|^2$. This in particular implies

$$dy(t)/dt \leq C_3(y(t) + \delta)^3, \quad \delta = (\alpha^3 + \alpha)^{1/3}$$

with $y(t) = |A^{1/2}v_j(t)|^2$. Setting $z(t) = y(t)+\delta$, we get

$$z(t) \leq \frac{z(s)}{\sqrt{1 - 2C_3(z(s))^2(t-s)}}, \quad t \geq s \geq 0.$$

This implies

$$z(t) \leq 2z(s), \quad 0 \leq t-s \leq t_0$$

with $t_0 = 3/(8C_3(z(s))^2)$, which is the desired result.

Lemma 4 gives a local existence theorem for the system (NS-M).

Theorem 1 (local existence). *Choose M' ($= M/2$) such that $2|A^{1/2}v_j(0)| + \delta \leq M'$, where δ is defined in Lemma 4. There is a positive constant T such that, for $t \in [0,T]$, $u(t) = T_M(t)u_0$ solves (NS-M) uniquely.*

(proof) We apply Lemma 4 with $s=0$. The assumption for M' now implies that $|A^{1/2}v_j(t)| \leq M'$ for $t \in [0,t_0]$. The energy estimate (7) gives $|B(t)| \leq |u_0| \leq M'$. These two estimates imply that, for $t \in [0,t_0]$, $u(t) = T_M(t)u_0$ solves (NS-M). Thereby, the proof is completed.

Theorem 2 (global existence for small initial data). *Choose M' as in Theorem 1. Then there is a positive constant $\epsilon = \epsilon(M,\Omega)$ such that $u(t) = T_M(t)u_0$ uniquely and globally solves (NS-M) for $|u_0| < \epsilon$.*

(outline of proof) To show this theorem, we use the energy estimate (7) for $|A^{1/2}v_j|$. To derive upper bound for $|A^{1/2}v_j|$, this estimate is not enough because there may appear narrow spikes in the graph of $|A^{1/2}v_j|$ with respect to t. The estimate (8) prohibits such spikes, so we get upper bound for $|A^{1/2}v_j|$. The energy estimate (7) also gives bound for $|B|$. Detail of the proof is omitted.

APPENDIX

Evolution equations in incompressible-fluid-dynamics have a significant property, that is, the combination of the convective nonlinearity and energy dissipativity. A simple example is the Navier-Stokes system of incompressible viscous fluids:

$$\partial_t v = \Delta v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p, \qquad \text{div } v = 0 \quad in\ \Omega,$$

$$v = 0 \quad on\ \partial\Omega.$$

The linear term Δv dissipates the total energy $|v|_{L^2}/2$. On the other hand, the convective nonlinear term $(v\cdot\nabla)v$ does not contribute to the change of the total energy, although it gives local transport of energy. In plasma physics, we see a similar property for the fluid-dynamical equations; see equation (7).

A plasma is a highly ionized gas, which is considered a mixture of two fluids -- electrons and ions; for example see [8]. Therefore, we should consider the interaction of the fluids with the electro-magnetic field. In the framework of fluid dynamics, the evolution of an incompressible plasma can be described by the following system:

$$m_1 n\partial_t v_1 = \nu_1\Delta v_1 - m_1 n(v_1\cdot\nabla)v_1 - en(E + v_1\times B) - R - \nabla p_1$$

$$m_2 n\partial_t v_2 = \nu_2\Delta v_2 - m_2 n(v_2\cdot\nabla)v_2 + eZn(E + v_2\times B) + R - \nabla p_2$$

$$\text{div } v_1 = 0, \quad \text{div } v_2 = 0$$

$$\partial_t B = -\text{rot } E, \quad \text{div } B = 0, \quad \text{div } E = 0$$

$$\partial_t \epsilon_o E = \text{rot } \mu_o^{-1} B - ne(Zv_2 - v_1).$$

Here, subscripts 1 and 2 respectively represent the quantities corresponding to electrons and ions.
v_j: macroscopic fluid velocity, p_j: thermal pressure ($j = 1,2$)
B: magnetic flux density, E: electric field
m_j: mass of a particle, ν_j: viscosity ($j = 1,2$)
n: number density, e: elementary charge
Z: charge number, ϵ_o: vacuum dielectric constant
μ_o: vacuum permeability.
The term R represents the momentum-exchange rate between the two components, which can be written as $R = -\zeta(v_2 - v_1)$ where ζ is a positive constant. The condition div $E = 0$ follows from the charge neutrality and the incompressibility of the plasma.

The Ohm-Navier-Stokes system [11] is a one-fluid approximation of the Navier-Stokes-Maxwell system, which is derived by neglecting the displacement current, Hall effect and so on; see [8]. The Ohm-Navier-Stokes system has a strong mathematical analogy with the Navier-Stokes system. Strong solutions have been constructed in [11].

REFERENCES

[1] C. Foias and R. Temam, Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 339-368.

[2] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal., 16 (1964), 269-315.

[3] Y. Giga and Z. Yoshida, On the equations of the two-component theory in magnetohydrodynamics, submitted to Comm. in Partial Differential Equations.

[4] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32 (1962), 243-260.

[5] Y. Komura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493-507.

[6] Y. Komura, Differentiability of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375-402.

[7] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969.

[8] K. Miyamoto, Plasma Physics for Nuclear Fusion, MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, 1981.

[9] R. Temam, Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, London, 1977.

[10] Z. Yoshida and Y. Giga, A nonlinear semigroup approach to the Navier-Stokes system, submitted to Comm. in Partial Differential Equations.

[11] Z. Yoshida and Y. Giga, On the Ohm-Navier-Stokes system in magnetohydrodynamics, J. Math. Phys., 24 (1983), 2860-2864.

3次元 Euler 方程式の外部問題

東大 教養　菊地慶祐

序.

$\mathbb{R}^3$ 中，有限個の物体 $O_1, \cdots, O_m$ を過る非圧縮理想流体の運動を考える。O_j $(j=1,\cdots,m)$ の境界は十分滑らかとする。流体は $O_1 \cup \cdots \cup O_m$ の外部領域 $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (O_1 \cup \cdots \cup O_m)$ に存在するとする。ただし Ω は単連結であることを仮定する。流体の運動は $Q_T = \Omega \times [0, T]$ において Euler 方程式

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = f \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

で記述されるものとする。

無限遠方においては

$$(2) \quad \lim_{|x| \to \infty} v(x,t) = v_\infty \qquad t \in [0, T]$$

境界 $\partial\Omega = S$ 上では

$$(3) \quad v \cdot n|_S = 0 \qquad t \in [0, T]$$

とし，初期条件は

$$(4) \quad v(x, 0) = v_0(x) \qquad x \in \Omega$$

で与えられるものとする。

ここで $v = v(x,t)$ は速度ベクトル，$p = p(x,t)$ は（スカラー値）圧力，

$f=f(x,t)$ は外力ベクトル，$v_0(x)$ は初期速度ベクトル，v_∞ は定数ベクトル，$v\cdot n|_S$ は速度 v の S 上での外向き法線成分を表わす。この小論では，f，v_∞，v_0 が与えられたとき，(1)～(4)を満たす解 $\{v, p\}$ の存在と一意性について考える。

§1. Notation，結果及び歴史

〈歴史〉　Ω が3次元有界領域の場合，Ebin and Marsden [1] が幾何学的手法により解の存在を示し，Swann [2.1] が Schauder の不動点定理により解の存在を示した。その他，Bourguignon and Brezis [3]，Temam [4] などが解の存在を示した。$\Omega=\mathbb{R}^3$ の場合，Swann [2.2]，Kato [5.1] が粘性消滅の方法で，Cantor [6] が幾何的手法により，それぞれ解の存在を示した。以上 Ω が3次元の場合の主な論文であるが，いずれも構成された解は，時間に関して局所的である。Ω が2次元有界領域の場合，解の存在は Judovič [7]，Kato [5.2] などの研究がある。また $\Omega=\mathbb{R}^2$ の場合は McGrath [8] が，Ω が2次元外部領域の場合は Kikuchi [9] による研究がある。2次元の場合はいずれも構成された解は，時間に関し，大域的なものである。

〈Notation〉

Ω 及び Q_T 上の実数値スカラー関数またはベクトル値関数に対し，以下のように Banach 空間を定義する。

$L^p(\Omega)$；Ω上のL^p-空間，ノルム $|\cdot|_p$ ($1\leq p\leq\infty$)．

$W_s^p(\Omega)$；s階のL^p-Sobolev空間，ノルム $|\cdot|_{p,s}$ ($1\leq p\leq\infty$)．

$C_0^s(\overline{\Omega})$；s回連続微分可能で，$\overline{\Omega}$上 compact support をもつもの全体．

$D^\alpha u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{\alpha_3}u(x)$　　$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$とする

$C^{1,0}(\Theta_T)$：　$u\in C(\Theta_T)$かつ$D_x u\in C(\Theta_T)$なる関数全体．

$1<p<\infty$，$\delta\geq 0$，$s\geq 0$に対して，ノルム $|\cdot|_{p,s,\delta}$を次のように定義する．

$|u|_{p,s,\delta}\equiv\sum_{|\alpha|\leq s}|\sigma^{\delta+|\alpha|}D^\alpha u|_p$，ただし $\sigma(x)=\sqrt{1+|x|^2}$．

$M_{s,\delta}^p$；$C_0^s(\overline{\Omega})$のノルム $|\cdot|_{p,s,\delta}$に関する completion．

Xをノルム $|\cdot|_X$なる Banach 空間とする。このとき

$1\leq p\leq\infty$に対して　$L^p((0,T);X)$でXに値をとるものL^p有界な関数全体を表わし，$C([0,T];X)$でXに値をとるもの連続関数全体を表わす。　$1\leq p\leq\infty$に対して　$\|u\|_p\equiv\sup_{t\in[0,T]}|u(t)|_p$．

ベクトル値関数 uに対して　u_τでS上の tangential 成分を表わす。

その他　通常使用される notation を用いる。

＜結果＞

Theorem

$p>3$，$0\leq\delta<1-3/p$とする。

初期値v_0と外力fに対して次の仮定をおく

(i)　$v_0\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$：$\mathrm{rot}\,v_0\in M_{1,\delta+2}^p$，$\mathrm{div}\,v_0=0$，$v_0\cdot n|_S=0$

$v_0|_{|x|\to\infty} = v_\infty$, $\quad \int_{S_j} (\mathrm{rot}\, v_0)\cdot n\, ds = 0 \quad (j=1,\cdots,m)$

ただし S_j は O_j の境界

(ii) $f \in C(\bar{Q}_T)\cap C^{1,0}(Q_T)$: $\mathrm{rot}\, f \in L^\infty((0,T);M^p_{0,\delta+2})\cap L^1((0,T);M^p_{1,\delta+2})$

$$\int_{S_j}(\mathrm{rot}\, f)\cdot n\, ds = 0 \quad (j=1,\cdots,m) \text{ for a.e. } t\in[0,T].$$

このとき，$\mathrm{rot}\, v_0$, v_∞, $\mathrm{rot}\, f$, Ω のみに依存する定数 $T_0>0$ ($T_0\leqq T$) が存在し，(1)～(4) は $[0,T_0]$ 上の解 $\{v, p\}$ をもつ。またそれは次の条件：$v-v_\infty \in C([0,T_0];M^p_{1,\delta+1})\cap L^\infty((0,T_0);M^p_{2,\delta+1})$,

$$\frac{\partial v}{\partial t}\in L^\infty((0,T_0);M^p_{1,\delta+1}),\ \nabla p \in L^\infty((0,T_0);C(\bar{\Omega}))$$ をみたす。

上のような解は一意である。(ただし，pについては，tのみの関数を加える自由度はある。)

§2. 解の構成

2.1. Iteration Scheme

$u = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - f$ とおく。uに rot を作用させると，$\mathrm{div}\, v=0$ を用いて，$\mathrm{rot}\, u = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\, v) + (v\cdot\nabla)(\mathrm{rot}\, v) - (\mathrm{rot}\, v\cdot\nabla)v - \mathrm{rot}\, f$ を得る。

このとき，$\mathrm{rot}\, u = 0$ となるベクトル関数 v を見つければ，Ωが準連結より，スカラー値関数 p が存在して $u=-\nabla p$ をみたす。(see Lemma 1). よって上の v が (1) の解となる。以上のことを考慮して，次の iteration scheme を考える。

0次近似： $v_0 = v_0$（初期値）， $\omega_0 = \mathrm{rot}\, v_0$（初期渦度）

[A] v_{n-1} が与えられているとき ω_n を求める式

$$(2.1)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega_n + (v_{n-1}\cdot\nabla)\omega_n - (\omega_n\cdot\nabla)v_{n-1} = \mathrm{rot}\, f \\ \mathrm{div}\, \omega_n = 0 \\ \omega_n|_{t=0} = \mathrm{rot}\, v_0 \end{cases}$$

[B] ω_n が与えられているとき，v_n を求める式

$$(2.2)\quad \begin{cases} \mathrm{rot}\, v_n = \omega_n & \mathrm{div}\, v_n = 0 \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v_n = v_\infty & v_n\cdot n|_S = 0 \end{cases}$$

2.2. Harmonic field

Lemma 1. ベクトル値関数 $u \in C(\Omega)$ が $\mathrm{rot}\, u = 0$ (generalized) を満たすとする．このとき スカラー関数 $g \in C^1(\Omega)$ が存在して $u = \nabla g$ を満たす

Corollary 2. ベクトル値関数 $u \in C^1(\bar{\Omega})$ が次の条件をみたすとする．

$\mathrm{div}\, u = 0$， $\mathrm{rot}\, u = 0$， $u\cdot n|_S = 0$， $u|_{|x|\to\infty} = 0$

このとき $u = 0$.

証 Lemma 1 はよく知られた結果であるが．Cor. 2 は Lemma 1 及び 外部 Neumann 問題の一意性より 得られる．

境界が十分滑らかならば，single layer potential を用いて 次の Lemma 3 をみたす harmonic fields が得られる

Lemma 3 Harmonic fields $h_1, \cdots, h_m$ ($\mathrm{rot}\, h_j = 0$, $\mathrm{div}\, h_j = 0$) が

存在して 次の条件をみたす。 (i) $h_{j\tau}=0$ on S

(ii) $\int_{S_k} h_j\cdot n\,ds=\delta_{jk}$ $(k=1,\cdots,m)$ (iii) $h_j(x)=O(\frac{1}{|x|^2})$ as $|x|\to\infty$.

Corollary 4. vector 値関数 u が 次の条件 (i)～(iv) をみたすとする.

(i) $\mathrm{rot}\,u=0$ (ii) $\mathrm{div}\,u=0$ (iii) $u_\tau=0$ (iv) $u|_{|x|\to\infty}=0$

このとき $u=\sum_{j=1}^m c_j h_j$, ただし c_j $(j=1,\cdots,m)$ は定数。

- Lemma 3で得られた m 個の harmonic fields の張る空間を H_n で表わす。また $H_n^\perp \equiv L_2\ominus H_n$ とする.

2.3. 線形楕円型方程式 (2.2) について

Morrey [10] Ch.7 の Hodge 分解についての議論のアナロジー及び Nirenberg - Walker [11] の結果より. 次の定理を得る。

Theorem 5. $p>3$, $S\geqq 0$, $0\leqq\delta<1-3/p$ とする。このとき. 任意のベクトル値関数 $w\in M^p_{s,\delta+2}$ $(\subset L^2(\Omega))$ が $w\in H_n^\perp$ をみたすならば. $u\in M^p_{s+2,\delta}$ が一意的に存在し. 次の方程式を満たす。

$$-\Delta u=w\ ,\quad u_\tau=0,\quad \mathrm{div}\,u|_S=0,\quad \int_{S_j}u\cdot n\,dS=0\quad (j=1,\cdots,m).$$

一意性は Cor. 4 より従う。

- $w\in M^p_{s,\delta+2}$; $\mathrm{div}\,w=0$, $w\in H_n^\perp$ に対して 上の Th. 5 より得られる解を u として. operator F を $F(w)(x)=\mathrm{rot}\,u(x)$ で定義する。このとき $F(w)$ は 次の性質をもつことが 簡単な計算により容易にわかる。

$$\mathrm{div}\,F(w)=0,\quad F(w)\cdot n|_S=0,\quad F(w)\in M^p_{s+1,\delta+1},\quad \mathrm{rot}\,F(w)=w.$$

さらに $F(w)$ は次のように評価される。

(2.3) $\|F(w)\|_{p,s+1,\delta+1} \leqq k_1 \|w\|_{p,s,\delta+2}$, ただし k_1 は w に依存しない定数。

以上のことから iteration [B] に関しては、

$v_n = F(w_n) + v_0 - F(\mathrm{rot}\, v_0)$ とおくことで次の結果を得る。

<u>Proposition 6</u>. $w_n \in C([0,T]; M^p_{1,\delta+2})$ か $\mathrm{div}\, w_n = 0$, $w_n \in H^{\perp}_n$ をみたすならば (2.2) の解 v_n が一意的に存在し、$v_n - v_\infty \in C([0,T]; M^p_{2,\delta+1})$ であり、次の評価をみたす。

$$\|v_n - v_\infty\|_{p,2,\delta+1} \leqq k_1(\|w\|_{p,1,\delta+2} + |Dv_0|_{p,1,\delta+2}) + |v_0 - v_\infty|_{p,2,\delta+1},$$

ここで定数 k_1 は (2.3) による。

一意性は Cor. 2 から従う。

2.4. 線形双曲型方程式 (2.1) について

(2.1) の解 w_n を次のプロセスにより構成する。

(I) $\overline{Q}_T$ における stream line $(X_n(x,t;s), s)$ を常微分方程式

$$(2.4)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds} X_n(x,t;s) = v_{n-1}(X_n(x,t;s), s) \\ X_n(x,t;t) = x \end{cases}$$

の解とする。

$v_{n-1} \cdot n|_S = 0$ より $(X_n(x,t;s), s)$ は境界 $S \times [0,T]$ に到達しない。

よって $X_n(x,t;s)$ は一意的に global に存在する。

さらに定義式 (2.4) 及び $\mathrm{div}\, v_{n-1} = 0$ より $X_n(x,t;s)$ は次の性質を持つ。

$$
(2.5)\begin{cases}
\text{(i)}\ X_n(\cdot,t;s)^{-1} = X_n(\cdot,s;t) \\
\quad G_n(x,t;s) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} X_n^k(x,t;s)\right)_{j,k=1,2,3} \text{ とおけば} \\
\text{(ii)}\ G_n(x,t;t) = E \quad (3\times 3 \text{ identity matrix}) \\
\text{(iii)}\ \det G_n(x,t;s) = 1 \quad (\text{測度保存}) \\
\text{(iv)}\ G_n(x,t;s) \text{ は } \frac{d}{ds}u(s) = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} v_{n-1}^k(y,s)_{|y=X_n(x,t;s)}\right)_{j,k=1,2,3} u(s)
\end{cases}
$$

の fundamental matrix solution である。

(II) (2.1)の解 w_n は，次の式で与えられる。

$$w_n(x,t) = G_n(x,t;t)G(x,t;0)^{-1}\,\mathrm{rot}\,v_0(X_n(x,t;0))$$
$$+G_n(x,t;t)\int_0^t G_n(x,t;s)^{-1}\,\mathrm{rot}\,f(X_n(x,t;s),s)\,ds.$$

$w_n(x,t)$ が (2.1)の解であることは，上の定義式は微分方程式

$$\frac{d}{ds}w_n(X_n(x,t;s),s) = (w_n(X_n(x,t;s),s)\cdot\nabla_y)v_{n-1}(y,s)_{|y=X_n(x,t;s)}$$
$$+\,\mathrm{rot}\,f(X_n(x,t;s),s)$$

の解であり，かつ(2.4)を考慮することにより，容易にわかる。(2.5)を用いることで，iteration [A]に対して 次の結果を得る。

<u>Proposition 7</u> v_{n-1} が $v_{n-1}-v_\infty \in C([0,T];M^p_{2,\delta+1})$，$\mathrm{div}\,v_{n-1}=0$，$v_{n-1}\cdot n|_S=0$ をみたすとする。このとき (2.1)の解 $w_n \in C([0,T];M^p_{1,\delta+2})$ が一意的に存在し，$w_n \in H^{\frac{1}{n}}$ であり，次の評価をみたす。

$$|w_n(t)|_{p,1,\delta+2} \le k_2\left(|\mathrm{rot}\,v_0|_{p,1,\delta+2} + \int_0^t (|\mathrm{rot}\,f(s)|_{p,1,\delta+2} + |w_n(s)|_{p,1,\delta+2})\,ds\right.$$
$$\left. + k_3\|w_n\|_{p,1,\delta+2}\int_0^t |D^2 v_{n-1}(s)|_{p,0,\delta+3}\,ds\right).$$

2.5. 収束について

Propositions 6, 7 より，n について一様な評価を得る。

<u>Lemma 8</u>　$K = k_4(|Dv_0|_{p,1,\delta+2} + \int_0^T |\mathrm{rot}\, f(s)|_{p,1,\delta+2})$ とおく，ただし $k_4 \leq 2^{10}$。$T_0 > 0$ を $\mathrm{rot}\, v_0$, v_∞, $\mathrm{rot}\, f$, Ω のみに従属する定数とする，($T_0 \leqq T$)。このとき，$t \in [0, T_0]$ に対して，n について一様に

$$\sup_{s \in [0,t]} |w_n(s)|_{p,1,\delta+2} \leq K \quad \text{を得る。}$$

(注) もっと詳しく言えば，T_0 は次の不等式をみたせば十分である。

$T_0 \leqq 1 / \{k_5(K + 2|Dv_0|_{p,1,\delta+2}) + |v_0|_\infty\}$，ただし，$k_5$ は Ω のみに従属する定数である。

∘ $\zeta_n = w_n - w_{n-1}$, $u_n = v_n - v_{n-1}$ とおく。(2.1), (2.2) より

$$(2.6)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\zeta_n + (v_{n-1}\cdot\nabla)\zeta_n - (\zeta_n\cdot\nabla)v_{n-1} = (w_{n-1}\cdot\nabla)u_{n-1} - (u_{n-1}\cdot\nabla)w_{n-1} \\ \zeta_n|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$(2.7)\quad \begin{cases} \mathrm{rot}\, u_n = \zeta_n, & \mathrm{div}\, u_n = 0 \\ u_n\cdot n|_S = 0, & \lim_{|x|\to\infty} u_n = 0. \end{cases}$$

が成立する。

このとき Propositions 6, 7, Lemma 8 の評価より

$$|\zeta_n(t)|_{p,0,\delta+2} \leq k_6 K \int_0^t |\zeta_{n-1}(s)|_{p,0,\delta+2}\, ds$$

これより，すべての n について

$$|\zeta_n(t)|_{p,0,\delta+2} \leq 2K \frac{(k_6 K t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{を得る。}$$

また u_n についても同様の評価が成立し，

w_n は $w_0+\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n$ に $M^p_{0,\delta+2}$ の位相で強収束し，また v_n は $v_0+\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ に $M^p_{1,\delta+1}$ の位相で強収束する。

<References>

[1] Ebin, D and Marsden, J. Ann. Math. 92 (1970), pp. 102–153.

[2.1] Swann, H.S.G. Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), pp. 167–180.

[2.2] 〃 Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), pp. 373–397.

[3] Bourguignon, J.P. and Brezis, H. J. Funct. Anal. 15 (1974), pp. 341–363.

[4] Temam, R. J. Funct. Anal. 20 (1975), pp. 32–43.

[5.1] Kato, T. J. Funct. Anal. 9 (1972), pp. 296–305.

[5.2] 〃 Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), pp. 188–200.

[6] Cantor, M. J. Funct. Anal. 18 (1975), pp 73–84.

[7] Judovič, V. Math. Sb. N.S. 64 (1964), pp 562–588 (Russian)
= A.M.S. Transl. (2) 57 (1966), pp. 277–304.

[8] McGrath, F.J. Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1968), pp 329–348

[9] Kikuchi, K. 東大理学部紀要 Sec. IA 30 (1983), pp. 63–92.

[10] Morrey, Jr., C.B. "Multiple integrals in the calculus of variations" Springer-Verlag, (1966).

[11] Nirenberg, L. and Walker, H. J. Math. Anal. Appl. 42 (1973), pp 271–301.

時間に依存する領域における2次元Euler方程式について

北大・理　小薗英雄

序

非圧縮性理想流体の運動を支配するEuler方程式が平面において領域の境界が時間と共に動く場合に解をもつか？という問題について考える。時間に対して固定された境界については、T. Kato [1]（内部問題）及び K. Kikuchi [2]（外部問題）に述べられている。さて問題を定式化しよう。

$\{\Omega(t)\}_{0\le t\le T}$ を $\mathbb{R}^2$ における有界領域の族とし、その境界 $\partial\Omega(t)$ は C^∞ 級かつ t について滑らかに変形するとしよう。次の仮定を設ける。

A.1　$\partial\Omega(t)$ は互いに交わらない滑らかな $m+1$ 個の単純閉曲線 $\{\Gamma_j(t)\}_{j=0}^{m}$ から成っている。ここに

$\{\Gamma_j(t)\}_{j=1}^{n}$ はすべて $\Gamma_0(t)$ の内部にあるとする。

A.2　$\overline{\Omega(t)}$ から $\overline{\Omega(0)}$ の上への t について滑らかな微分位相同型写像が存在する。

A.3　すべての $t\in[0,T]$ について $\Omega(t)$ の面積は $\Omega(0)$ の面積に等しい。

仮定から，$\partial\Omega(t)$ は $R^2\times R_+$ で定義された C^∞ 函数 γ の零点で表わすことができる。すなわち

$\partial\Omega(t)=\{x=(x^1,x^2)\,;\,\gamma(x,t)=0\}$ かつ $\nabla\gamma(\hat{x},t)\neq 0$ for $\hat{x}\in\partial\Omega(t)$.

$Q_T=\bigcup_{0\le t\le T}(\Omega(t)\times\{t\})$ において次の初期・境界値問題 (E) について考察する。

$$
(E)\begin{cases}
(E.1)\quad \dfrac{\partial v^i(x,t)}{\partial t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{2} v^j(x,t)\dfrac{\partial v^i(x,t)}{\partial x^j}+\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x^i}=f^i(x,t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2. \quad \text{in } Q_T, \\
(E.2)\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{2}\dfrac{\partial v^j(x,t)}{\partial x^j}=0 \qquad\qquad \text{in } Q_T, \\
(E.3)\quad \dfrac{\partial\gamma(\tilde{x},t)}{\partial t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{2} v^j(\tilde{x},t)\dfrac{\partial\gamma(\tilde{x},t)}{\partial x^j}=0 \quad \text{for } \tilde{x}\in\partial\Omega(t),
\end{cases}
$$

$$(E.4)\quad v^i(x,0) = v_0^i(x) \qquad i=1,2.$$

ここに，$v = v(x,t) = (v^1(x,t),\ v^2(x,t))$，$p = p(x,t)$ は各々 $(x,t)\in Q_T$ における未知な流体速度，圧力であり，$v_0 = v_0(x,t) = (v_0^1(x,t),\ v_0^2(x,t))$，$f = f(x,t) = (f^1(x,t),\ f^2(x,t))$ は各々与えられた初期速度，外力を表わす．

この報告書の主張定理を述べよう．

定理

$v_0 \in C^{1+\theta}(\overline{\Omega(0)})$，$\operatorname{div} v_0 = \dfrac{\partial v_0^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial v_0^2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } \Omega(0)$

$$\frac{\partial \gamma(\tilde{x},0)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} v_0^j(\tilde{x}) \frac{\partial \gamma(\tilde{x},0)}{\partial x^j} = 0 \qquad \text{for } \tilde{x}\in\partial\Omega(0)$$

かつ $f\in C^{1+\theta,0}(\overline{Q}_T)$，$0<\theta<1$ を仮定する．このとき $\{v,p\}\in C^{1,1}(\overline{Q}_T)\times C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ なる (E) の解が存在する．このような解は，速度 $v=v(x,t)$ については $(x,t)\in\overline{Q}_T$ のベクトル値函数として一意であり，圧力 $p=p(x,t)$ については変数 t についてだけの不定性をもつ．

証明は T. Kato [1] の場合 すなわち 柱状領域 $Q_T = \Omega \times [0, T]$ の問題に帰着させることによる。[1] の方法は 大ざっぱに言って，Helmholtz 分解，渦度 $\mathrm{rot}\, v$ に関する特性曲線の方法 及び Schauder の不動点定理 の 3つである。(E) に対してこれらを使うには Riemann 幾何学的な立場から考察することが必要である。

1. 定理の証明の概要

我々は まず 仮定 A.2，A.3 を用いて (i) (E) を各 $\partial\Omega(t)$ の接線方向にのみ成分をもつ速度場の方程式系に書き換える。次にその $Q_T = \bigcup_{0\leq t\leq T}(\Omega(t)\times\{t\})$ における方程式系を (ii) 微分幾何の方法により 柱状領域 $\tilde{Q}_T = \tilde{\Omega}\times[0, T]$ におけるそれに変数変換する。最後に (iii) $\tilde{Q}_T$ 上の方程式系について 一意可解性を T. Kato [1] と同様に Schauder の不動点定理を用いて示す。

この報告書では、上の(i),(ii) を説明することにより、(E) の幾何学的考察について述べる。それにより T. Kato [1] への帰着が明らかになるであろう。(iii) については H. Kozono [4] を参照されたい。

2. 斉次境界条件への帰着

まず定理の証明の鍵となる補題を述べる。

<u>補題</u>　仮定 <u>A.2</u>，<u>A.3</u> のもとで柱状領域：$\tilde{Q}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T]$ 及び $\overline{Q}_T$ から $\overline{\tilde{Q}}_T$ の上への時間を保つ微分位相同型写像 Φ ; $(y, t) = \Phi(x, t) = (\varphi^1(x,t), \varphi^2(x,t), t)$ が存在して

$$\det\left(\frac{\partial \varphi^i(x,t)}{\partial x^j}\right)_{1\le i,j\le 2} = 1$$

がすべての $(x, t) \in \overline{Q}_T$ について成り立つ。

証明は、T. Miyakawa and Y. Teramoto Theorem 4.3 を参照。

さて境界条件 (E.3) は、$\nu(\tilde{x}, t) \equiv -\frac{\partial \gamma(\tilde{x},t)}{\partial t} / |\nabla \gamma(\tilde{x},t)|$,

$n_t(\tilde{x}) \equiv \nabla\gamma(\tilde{x},t)/|\nabla\gamma(\tilde{x},t)|$　とおくことにより

$$v(\tilde{x},t)\cdot n_t(\tilde{x}) = \nu(\tilde{x},t) \quad \text{for} \quad \tilde{x}\in\partial\Omega(t)$$

と書ける．γ の性質から $n_t(\tilde{x})$ は $\tilde{x}\in\partial\Omega(t)$ における単位法線ベクトルを与える．従って (i) は次の問題を考察すればよい。

<u>問題</u>　$\bar{Q}_T$ 上の 2 次元 C^∞ ベクトル値函数 w で

$$\begin{cases} \operatorname{div} w = 0 \ , \quad \operatorname{rot} w = 0 & \text{in } Q_T \\ w(\tilde{x},t)\cdot n_t(\tilde{x}) = \nu(\tilde{x},t) & \text{for } \tilde{x}\in\partial\Omega(t) \end{cases}$$

を満すものを見い出せ。

<u>解答</u>．よく知られているように上の w の存在は調和函数の Neumann 問題に帰着される．その可解性は仮定 <u>A.3</u> を用いて $\displaystyle\int_{\partial\Omega(t)} \nu(\tilde{x},t)\, ds(\tilde{x})_t = 0$

($ds(\tilde{x})_t$ は $\partial\Omega(t)$ の線素) を示すことにより分る。

問題の w を用いて　$u(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$

とおくことにより (E) を u について書こう．すなわち

$$
(E')\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u,\nabla)u + (w,\nabla)u + (u,\nabla)w + \nabla p = F & \text{in } Q_T, \\
\operatorname{div} u = 0 & \text{in } Q_T, \\
u(\tilde{x},t)\cdot n_t(\tilde{x}) = 0 & \text{for } \tilde{x}\in\partial\Omega(t), \\
u(\cdot,0) = a & ,
\end{cases}
$$

ここに，$F = f - \dfrac{\partial w}{\partial t} - (w,\nabla)w$ ， $a = v_0 - w(\cdot,0)$ ．

3. (E′) に対する幾何学的考察

(E′) を Euclid 空間における部分多様体 $(\Omega(t), g)$ 上のベクトル場の方程式と見なそう。ここに g は標準的な計量．

$u = \sum_{i=1}^{2} u^i(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ， $w = \sum_{i=1}^{2} w^i(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ， $F = \sum_{i=1}^{2} F^i(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$\in \mathfrak{X}(Q_T)$: Q_T 上のベクトル場 ， $p = p(x,t) \in C^\infty(Q_T)$ と見て $u_t = p_{t*}u$ ， $w_t = p_{t*}w$ ， $F_t = p_{t*}F \in \mathfrak{X}(\Omega(t))$

を定める．ここに p_t は Q_T から $\Omega(t)$ への標準的な射影．

このとき (E′) の第一式は次のように書ける．

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{u_t}u_t + \nabla_{w_t}u_t + \nabla_{u_t}w_t + \nabla p(\cdot,t) = F_t$$

on $\Omega(t)$ ． ∇ は $(\Omega(t), g)$ 上の Riemann 接続．

$\varphi_t \equiv \Phi(\cdot, t)$ は $\overline{\Omega(t)}$ から $\bar{\tilde{\Omega}}$ の上への微分位相同型写像となるから $\tilde{\Omega}$ に $g_t \equiv (\varphi_t^{-1})^* g$ により計量を与えよう。このとき、

$$\tilde{u}_t = \varphi_{t*} u_t \ , \quad \tilde{w}_t = \varphi_{t*} w_t \ , \quad \tilde{F}_t = \varphi_{t*} F_t \quad \in \mathfrak{X}(\tilde{\Omega})$$

$$\tilde{p}_t = p(\cdot, t) \circ \varphi_t^{-1} \quad \in C^\infty(\tilde{\Omega})$$

を定め、(E') の両辺に微分写像 φ_{t*} を作用させれば、

$$(T.E)\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \left(\dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial y^j}{\partial t} \nabla_j^t \tilde{u}^i + \sum_{j,k=1}^{2} \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j} \dfrac{\partial^2 x^j}{\partial t \partial y^k} \tilde{u}^k \right) \dfrac{\partial}{\partial y^i} \\ \quad + \nabla^t_{\tilde{u}_t} \tilde{u}_t + \nabla^t_{\tilde{w}_t} \tilde{u}_t + \nabla^t_{\tilde{u}_t} \tilde{w}_t + \nabla^t \tilde{p}_t = \tilde{F}_t \qquad on \ \tilde{\Omega}, \\ div_t \, \tilde{u}_t = 0 \qquad on \ \tilde{\Omega}, \\ g_{t,\tilde{y}}(\tilde{u}_t(\tilde{y}), \tilde{n}_t(\tilde{y})) = 0 \qquad for \ \tilde{y} \in \partial\tilde{\Omega} \\ \tilde{u}_0 = \tilde{a} \end{cases}$$

ここに、$\tilde{u}^i = \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j} u^j$, $\tilde{a} = \varphi_{0*} a$, $\tilde{n}_t(\tilde{y})$ は g_t に関する $\tilde{y} \in \partial\tilde{\Omega}$ における単位法ベクトル, ∇^t, div_t は各々 $(\tilde{\Omega}, g_t)$ 上の Riemann 接続, 発散である.

以上の考察から、方程式系(E)を解くことは、次の幾何学的な言葉で述べられる。

GEOMETRIC FOMULATION OF MOVING BOUNDARY PROBLEM (E)

$\tilde{\Omega}$を境界のある向き付けられた2次元可微分多様体とし、$\{g_t\}_{0\le t\le T}$を$\tilde{\Omega}$上の$Riemann$計量の1-パラメーターの族とする。次の仮定を設ける。

仮定　$\tilde{\Omega}$の全体積：$\int_{\tilde{\Omega}} \omega_t$　はtによらず一定。

ここにω_tはg_tから定まる体積要素。

このとき$(\tilde{\Omega}, g_t)$上でベクトル場$\tilde{u}_t$、スカラー函数$\tilde{p}_t$に関する方程系(T.E)を解け。

最後に、T.Kato [1]への帰着について触れよう。(T.E)はベクトル場の方程式であるが、計量g_tにより微分形式のそれと見なすことができる。実際、共変微分は$\mathcal{L}ie$微分と外微分とに書けることに注意すればよい。従って[1]によるHelmholtz分解は$(\tilde{\Omega}, g_t)$上の微分形式に対する

de Rahm-Hodge 分解を用いればよい．また渦度 $\mathrm{rot}\, u$ に対しては外微分 $d\langle \tilde{u}_t \rangle$ について、曲がった計量 g_t に関する特性曲線の方法を考える．ここに $\langle \tilde{u}_t \rangle$ は g_t により $\tilde{u}_t \in \mathfrak{X}(\tilde{\Omega})$ を一次微分形式とみたものである．これら2つから (T.E) について Schauder の不動点定理が適用できる．

References

[1] T.Kato, On Classical Solutions of the Two-Dimensional Non-Stationary Euler Equation , Arch.Rational Mech. Anal. 25 (1967),188-200.

[2] K.Kikuchi, Exterior Problem for the Two-dimensional Euler Equation, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sec.IA,30 (1983),63-92.

[3] T.Miyakawa and Y.Teramoto, Existence and periodicity of weak solutions of the Navier-Stokes equations in a time dependent domain, Hiroshima Math.J. 12 (1982),513-528.

[4] H.Kozono, On existence and uniqueness of a global classical solution of the two-dimensional Euler equation in a time dependent domain, 北海道大学修士論文.

完全流体の自由境界問題における摂動と分岐

東京大学　理学部　　岡本　久

１．　星の周囲を循環している完全渦無し流体の外側の自由境界の運動を次のようにして定式化する。

仮定１．　２次元モデルである。（赤道を通る平面内の流れ）。

２．　表面張力係数を正の定数とする。

３．　星の表面 Γ は平面内の原点を中心とし半径 1 の円周であるとする。

このとき，流体及び自由表面 γ の運動は，定常状態にあるとすれば，流れの関数 V を用いて次のように表現される。

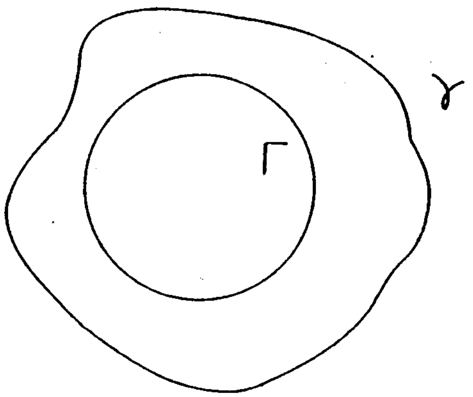
問題１．　次の（１．１）から（１，４）を満足する関数 V 及び Γ の外側にある閉曲線 γ を求めよ。

(1.1) $$\Delta V = 0 \qquad \text{in } \Omega_\gamma ,$$

(1.2) $$V|_\Gamma = 0, \quad V|_\gamma = a ,$$

(1.3) $$\frac{1}{2}|\nabla V| + Q + \sigma K_\gamma = \text{constant} \quad \text{on } \Omega_\gamma ,$$

(1.4) $$|\Omega_\gamma| = \omega_0 .$$



ここで，Ω_γ は Γ と γ で囲まれた2重連結領域であり，a，σ，ω_0 は，与えられた定数である。σ は表面張力係数である。Q は Γ の外側で定義された関数で，例えば，$Q=Q_0(r)=-g/r$ ととる。（ g は正定数，r は原点からの距離 ）。$|\Omega_\gamma|$ は Ω_γ の面積である。

2．　自明解．

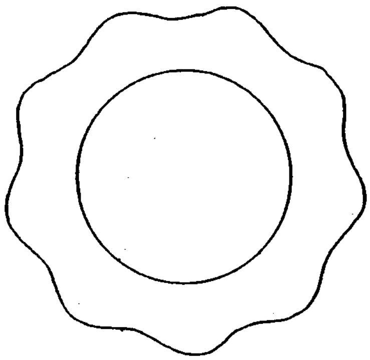
$Q_0(r)=-g/r$ とおく。$Q=Q_0$ のときには，$r_0>1$ を $\pi(r_0^2-1)=\omega_0$ で決め，原点を中心とし，半径 r_0 の円周を γ_0 とすると，γ_0 は Q_0 に対する解である。実際，このとき V は

$$V=V(r)=\frac{a}{\log r_0}\log r \qquad (1<r<r_0)$$

で与えられる。この自明解が安定であるかどうかを議論したい。

3．　自然数 n に対し，a_n を次式で定義する。

$$a_n=\left(\frac{\dfrac{\sigma(n^2-1)}{r_0^2}+\dfrac{\partial Q_0}{\partial r}(r_0)}{\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{n}{r_0}\dfrac{r_0^n+r_0^{-n}}{r_0^n-r_0^{-n}}}\right)^{\frac{1}{2}} r_0\log r_0$$



定理1．　$Q=Q_0(r)$ とする。n を固定し，

$$a_m\neq a_n \qquad (m\neq n)$$

と仮定すれば，a_n は分岐点である。すなわち，a_n の近くには，n ケのうねりを持つ上図のような解がある。

定理2．　$a\notin(a_n)$ を固定する。このとき，Q が Q_0 に十分近ければ，Q に対応する解が γ_0 の近くで一意に存在する。

証明には次のような考察が必要である。 $0<\alpha<1$ を固定し， $C^{3+\alpha}(S^1)$ の元 u に対し，極座標で

$$(r_0 + u(\theta), \theta) \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表示される閉曲線を γ_u とする。 γ_u と Γ で囲まれた領域を Ω_u とする。このとき，

$$\Delta V_u = 0 \quad \text{in } \Omega_u \qquad V_u|_{\Gamma} = 0\ , \quad V_u|_{\gamma_u} = a$$

で定まる関数を V_u と書くことにする。 そうして，写像 F を次のように定義する。

$$F(a,Q;u,\xi) = (F_1(a,Q;u,\xi), F_2(a,Q;u,\xi))$$

$$F_1(a,Q;u,\xi) = \left(\frac{1}{2}|\nabla V|^2 + Q \right)\Big|_{\gamma_u} + \sigma K_u - \xi_0 - \xi\ ,$$

$$F_2(a,Q;u,\xi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r_0 + u(\theta))^2 d\theta - \pi - \omega_0$$

where K_u is the curvature of γ_u.

このとき， $F(a, Q; \cdot, \cdot)$ は $C^{3+\alpha}(S^1) \times \mathbb{R}$ の原点の近傍で定義され， $C^{3+\alpha}(S^1) \times \mathbb{R}$ に値をとる滑らかな写像になる。 F の重要な性質は，次の2点である。

1） $F(a, Q_0; 0, 0) = (0, 0)$

2） $F(a, Q; u, \xi) = (0, 0) \Longleftrightarrow (\gamma_u, V_u)$ が解。

この写像の線型化を実行し，陰関数定理及び分岐理論を適用すると，定理1，2が得られる。

3. 非定常問題.

安定性を論ずるためには，まず，非定常問題を解かねばならない。それは，次のように定式化される。

問題2.

Find a time-dependent closed Jordan curve $\gamma(t) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 ; r = \gamma(t,\theta),\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ and functions V, P satisfying the conditions (3.1)-(3.8) below.

(3.1) $$\Delta V = 0 \qquad \text{in } Q_{T,\gamma} \equiv \bigcup_{0<t<T} \Omega_{\gamma(t)},$$

(3.2) $$V(t,1,\theta) = 0 \qquad \text{for } 0 < t < T,\ 0 \le \theta < 2\pi,$$

(3.3) $$\frac{\partial}{\partial\theta} V(t,\gamma(t,\theta),\theta) = \gamma(t,)\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,\theta) \qquad (0 < t < T),$$

(3.4) $$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}|\nabla V|^2 + P - \frac{g}{r}\right) = 0 \qquad \text{in } Q_{T,\gamma},$$

(3.5) $$-\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}|\nabla V|^2 + P - \frac{g}{r}\right) = 0 \qquad \text{in } Q_{T,\gamma},$$

(3.6) $$P = \sigma K_{\gamma(t)} \qquad \text{on } \gamma(t),$$

(3.7) $$V(0,r,\theta) = V_0(r,\theta), \qquad \gamma(0,\theta) = \gamma_0(\theta),$$

(3.8) $$|\Omega_{\gamma(t)}| \equiv \omega_0 .$$

__REMARK__. We assume that $\gamma_0 \in C^{5+\alpha}(S^1)$ and that

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \gamma_0(\theta)^2 d\theta - \pi = \omega_0.$$

この問題もやはり定常問題と同様に摂動法で（時間に対して局所的に）解くことができる。

定理3.　ある $\lambda > 18.125$ が存在して γ が C^{λ} −級であり，$r_0 - \gamma$ のノルムが十分小さければ，解が，ある有限区間 $[0, T]$ で存在する。

証明のなかで，方程式の線型化を行い，それをスペクトル解析することによって，次の定理を得ることができる。

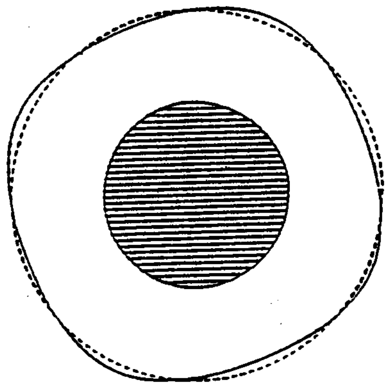
定理4.　a が十分大きければ，自明解は不安定である。

スペクトルの様子は ［3］に示されている。

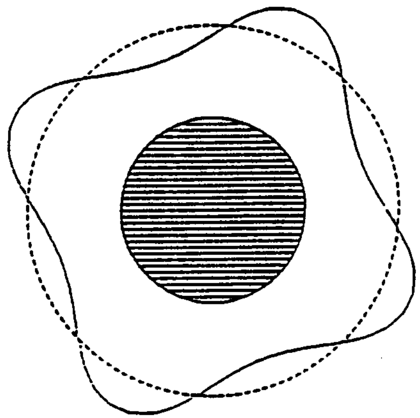
5.　数値計算例.

a を小さい所に固定して，Q を少し摂動した場合を，境界要素法をもちいて計算した。（計算は，東大 理 の 東海林 まゆみ 氏 と協同で当たった。）

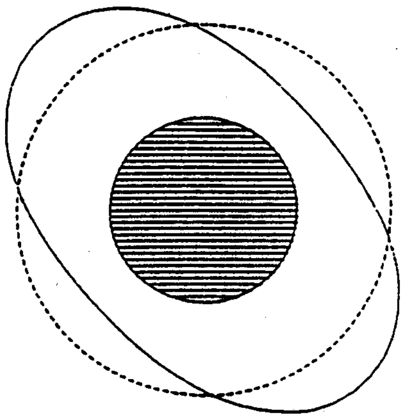
D = -2.D/r(2.D+SIN(4x))
partition = 64
iteration = 4
parameter a = .1
surf.tension= 1
vmax = .0000285



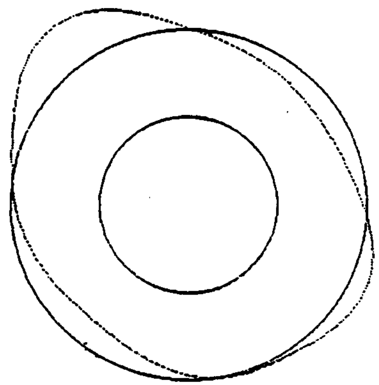
D = -2.D/r(2.D+SIN(4x))
partition = 64
iteration = 9
parameter a = .1
surf.tension= .2
vmax = .0000483



Q = -2.0/r(2.0+SIN(2x))
partition = 84
iteration = 17
parameter a = .1
surf.tension= .5
vmax = .0000761



iteration = 15
-.123006 -.229474 -.227512 -.177199 -.0860606 .11462 .424212 .48976 .211
.0149927 -.105018 -.222006 -.290804 -.273981 -.147153 -.0184256 .0245973
.102981 .208095 .0811175
分割数 = 20
circulation parameter a = .1
surface tension = .3
Q = - 3/r(3 + sin(5θ) + sin(2θ))



文献

[1] H. Okamoto: A stationary free boundary problem for a circular flow with or without surface tension, Proc. Japan Acad. 58 (1982) 422-424.

[2] H. Okamoto: Bifurcation phenomena in a free boundary problem for a ciculating flow with surface tension, to appear in Math. Meth. Appl. Sci.

[3] H. Okamoto: Nonstationary or stationary free boundary problems for perfect fluid with surface tension, to appear in the Proc. of Nonlinear P.D.E. in Hiroshima '83.

Study of Free Boundary Problems Arising in Ecology

Yoshio Yamada (Nagoya University)

This is a joint work with M. Mimura (Hiroshima Univ.) and S. Yotsutani (Miyazaki Univ.).

§ 1. Problem

This report is concerned with a simplified free boundary problem arising in ecology. We consider the situation where two species, which cannot coexist in the same region, struggle to get their own habitats. These species live in a one-dimensional region, which has fixed boundaries $x = 0,1$ and a free boundary $x = s(t)$. Denote by $V = V(x,t)$ ($W = W(x,t)$) the population density of a species dwelling the region $0 \leq x \leq s(t)$ ($s(t) \leq x \leq 1$). It is assumed that the time evolution of V and W is described by

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&V_t = \mu V_{xx} + VF(V), && 0 < x < s(t), && 0 < t < \infty, \\
&W_t = \nu W_{xx} + WG(W), && s(t) < x < 1, && 0 < t < \infty,
\end{aligned}
$$

where μ,ν are positive constants and F,G are locally Lipschitz continuous functions satisfying $F(0) > 0$, $G(0) > 0$ and $F(\alpha) = G(\beta) = 0$ with some $\alpha,\beta > 0$. On the fixed boundaries $x = 0,1$ and at the time $t = 0$, we impose the conditions

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
&V(0,t) = M, \quad W(1,t) = N, && 0 < t < \infty, \\
&s(0) = \ell, && \\
&V(x,0) = V_0(x), && 0 < x < \ell, \\
&W(x,0) = W_0(x), && \ell < x < 1,
\end{aligned}
$$

where M,N are positive constants and V_0, W_0 are non-negative functions. We also assume that the free boundary $x = s(t)$ is determined by the interaction between V and W in the following sense

$$
(3) \qquad \begin{aligned} & V(s(t),t) = W(s(t),t) = 0, && 0 < t < \infty, \\ & \dot{s}(t) = -\mu_1 V_x(s(t),t) - \nu_1 W_x(s(t),t), && 0 < t < \infty, \end{aligned}
$$

where $\dot{s} = ds/dt$ and μ_1, ν_1 are positive constants.

Our purpose is to study existence, uniqueness, regularity and asymptotic behavior of solutions for (1)-(3). It is very convenient to introduce a new function

$$
u(x,t) = \begin{cases} V(x,t)/\alpha & \text{for } 0 \leq x \leq s(t) \\ -W(x,t)/\beta & \text{for } s(t) \leq x \leq 1. \end{cases}
$$

The original problem (1)-(3) is reduced to the following form

$$
(4) \qquad u_t = \begin{cases} \mu u_{xx} + uf(u), & \text{in } S^-, \\ \nu u_{xx} + ug(u), & \text{in } S^+, \end{cases}
$$

$$
(5) \qquad u(0,t) = m, \quad u(1,t) = -n, \qquad 0 < t < \infty,
$$

$$
(6) \qquad u(v,0) = \phi(x), \qquad 0 < x < 1,
$$

$$
(7) \qquad u(s(t),t) = 0, \qquad 0 < t < \infty,
$$

$$
(8) \qquad \dot{s}(t) = -\mu' u_x(s(t)-0,t) + \nu' u_x(s(t)+0,t), \qquad 0 < t < \infty,
$$

$$
(9) \qquad s(0) = \ell,
$$

where $S^-(S^+)$ is the open subset of $Q = (0,1) \times (0,\infty)$ in which $x < s(t)$ $(x > s(t))$. (In (8), $u_x(s(t)-0,t)$ and $u_x(s(t)+0,t)$ denote the limits of $u_x(x,t)$ at $x = s(t)$ from the left and right respectively.) When $f \equiv 0$ and $g \equiv 0$, the reduced problem (4)-(9) is quite similar to a one-dimensional Stefan problem for which there are a lot of contributions (see Rubinstein [3], Yotsutani [5] and the references therein).

§ 2. Assumptions and Results

In what follows, we consider (4)-(9) (which is denoted by (P)) in place of (1)-(3).

The following assumptions are imposed.

(A.1) f is locally Lipschitz continuous on $(-a,\infty)$ with some $a > 0$, monotone non-increasing on $[0,1]$ and satisfies

$$f(u) > 0 \quad \text{on } [0,1), \quad f(1) = 0 \quad \text{and} \quad f(u) < 0 \quad \text{on} \quad (1,\infty).$$

(A.2) As a function of $u \in (-a,\infty)$, $g(-u)$ has the same properties as f in (A.1).

(A.3) $0 < m \leq 1$ and $0 < n \leq 1$.

(A.4) $0 < \ell < 1$.

(A.5) $\phi \in H^1(0,1)$ satisfies $\phi(0) = m$, $\phi(\ell) = 0$, $\phi(1) = -n$ and $(\ell-x)\phi(x) \geq 0$ for $0 \leq x \leq 1$.

Our first result is concerned with the global solvability of (P).

THEOREM I. *There exists a unique pair of functions* $\{u,s\} \in C(\bar{Q}) \times C([0,\infty))$ *such that*

(i) $s(0) = \ell$, $\dot{s} \in L^3(0,\infty)$ *and*

$$d \leq s(t) \leq 1-d \qquad \text{for } 0 \leq t < \infty,$$

with a constant $d \in (0,1)$ *depending on* $\mu,\mu',\nu,\nu',m,n,f,g$ *and* ϕ.

(ii) u *satisfies* (5)(6)(7) *everywhere and*

$$0 \leq u \leq M \equiv \max\{1, \sup_{0\leq x\leq \ell} \phi(x)\} \qquad \text{in } S^-,$$

$$0 \geq u \geq -N \equiv \min\{-1, \inf_{\ell\leq x\leq 1} \phi(x)\} \qquad \text{in } S^+.$$

(iii) $u^{\pm} \in C([0,\infty);H^1(0,1)) \cap L^\infty(0,\infty;H^1(0,1))$, *where* $u^+ = \max\{u,0\}$ *and* $u^- = -\min\{u,0\}$.

(iv) $u_t \in L^2(S^-) \cap L^2(S^+)$.

(v) u_t, $u_{xx} \in C(S^-) \cap C(S^+)$ *and* u *satisfies* (4) *everywhere.*

(vi) For each $\delta > 0$, u_x *is Hölder continuous in* $(x,t) \in \overline{S^{\mp}} \cap \{t \geq \delta\}$ *and* $\dot{s}$ *is Hölder continuous in* $t \in [\delta,\infty)$.

(vii) $\{u,s\}$ *satisfies* (8) *everywhere.*

Since the global existence result is established, we are in a position to study the asymptotic behavior of the solution $\{u,s\}$ constructed in Theorem I. Let $\{u(\cdot,\cdot;\phi,\ell),s(\cdot;\phi,\ell)\}$ denote the solution of (P) with initial data $\{\phi,\ell\}$. We introduce the *ω-limit set* associated with the orbit $\{\{u(\cdot,t;\phi,\ell),s(t;\phi,\ell)\};\ t \geq 0\}$

$$\omega(\phi,\ell) = \{\{u^*,s^*\} \in H^1(0,1)\times(0,1);\ \text{there exists a sequence } \{t_n\}\uparrow\infty \tag{10}$$
$$\text{such that } s(t_n;\phi,\ell)\to s^*,\ u(t_n;\phi,\ell)\to u^* \text{ in } C[0,1] \text{ and}$$
$$u^{\pm}(t_n;\phi,\ell)\to(u^*)^{\pm} \text{ in } H^1(0,1) \text{ as } n\to\infty\}.$$

It is said that the sequence $\{u(t_n;\phi,\ell),s(t_n;\phi,\ell)\}$ converges to $\{u^*,s^*\}$ in *Ω-topology* if it has the convergence properties stated in (10).

THEOREM II. *(i) $\omega(\phi,\ell)$ is non-empty and connected in Ω-topology.*

(ii) If $\{u^*,s^*\}\in\omega(\phi,\ell)$, then $\{u^*,s^*\}$ satisfies

$$\text{(SP)}\quad \begin{cases} \mu u^*_{xx} + u^* f(u^*) = 0,\quad u^*\geq 0, & \text{in } (0,s^*),\\ \nu u^*_{xx} + u^* g(u^*) = 0,\quad u^*\leq 0, & \text{in } (s^*,1),\\ u^*(0) = m,\quad u^*(s^*) = 0,\quad u^*(1) = -n, & \\ -\mu' u^*_x(s^*-0) + \nu' u^*_x(s^*+0) = 0\,. & \end{cases}$$

Theorem II helps us to get a useful information about the asymptotic behavior of solutions for (P). For example, if (SP) has isolated solutions, then $\{u(t;\phi,\ell),s(t;\phi,\ell)\}$ approaches one of them (in Ω-topology) as $t\to\infty$. (See the paper of Aronson, Crandall and Peletier [1], where stability for degenerate nonlinear diffusion equations is discussed by using the ω-limit set and the comparison principle.)

We next investigate (SP) with the aid of an auxiliary problem

$$\text{(AP)}\quad \begin{cases} \mu v_{xx} + v f(v) = 0,\quad v\geq 0, & \text{in } (0,\xi),\\ \nu v_{xx} + v g(v) = 0,\quad v\leq 0, & \text{in } (\xi,1),\\ v(0) = m,\quad v(\xi) = 0,\quad v(1) = -n, & \end{cases}$$

where $\xi \in (0,1)$ is any fixed number.

THEOREM III. *(i) For every* $\xi \in (0,1)$, *(AP) has a unique solution* $v = v(\cdot;\xi)$.

(ii) $\{v(\cdot;\xi),\xi\}$ *is a solution of (SP) if and only if* ξ *is a zero point of* $V(\xi) \equiv -\mu' v_x(\xi-0;\xi) + \nu' v_x(\xi+0;\xi)$.

(iii) If $\xi_1 < \xi_2$ *are zero points of* V, *then* $v(\cdot;\xi_1) \leq v(\cdot;\xi_2)$ *in* $[0,1]$.

(iv) (SP) has a maximal solution $\{\bar{u},\bar{s}\} \equiv \{v(\cdot;\bar{s}),\bar{s})\}$ *and a minimal solution* $\{\underline{u},\underline{s}\} \equiv \{v(\cdot;\underline{s}),\underline{s})\}$ *such that any solution* $\{u^*,s^*\}$ *of (SP) satisfies*

$$\underline{s} \leq s^* \leq \bar{s} \quad \text{and} \quad \underline{u} \leq u^* \leq \bar{u} \quad \text{in } [0,1].$$

Here $\bar{s}$ *is the greatest zero point of* V *in* $[0,1]$ *and* $\underline{s}$ *is the least zero point of* V *in* $[0,1]$.

Finally we state stability or instability of solutions of (SP) in connection with the asymptotic behavior of solutions of (P).

THEOREM IV. *(i) The maximal solution* $\{\bar{u},\bar{s}\}$ *of (SP) is globally and asymptotically stable from above in the sense that, if* $\ell \geq \bar{s}$ *and* $\phi \geq \bar{u}$ *in* $[0,1]$, *then* $s(t;\phi,\ell) \geq \bar{s}$ *for* $t \geq 0$, $u(x,t;\phi,\ell) \geq \bar{u}(x)$ *for* $(x,t) \in \bar{Q}$ *and*

$$\lim_{t\to\infty} \{u(\cdot,t;\phi,\ell), s(t;\phi,\ell)\} = \{\bar{u},\bar{s}\} \quad \text{in } \Omega\text{-topology}. \tag{11}$$

(ii) The minimal solution $\{\underline{u},\underline{s}\}$ *of (SP) is globally and asymptotically stable from below; that is, the assertion of (i) remains true with* $\{\bar{u},\bar{s}\}$ *and* $\geq$ *replaced by* $\{\underline{u},\underline{s}\}$ *and* $\leq$.

(iii) Let $(0 <)\xi_1 < \xi_2(< 1)$ *be two adjacent zero points of* V. *If* $\{\phi,\ell\}$ *satisfies*

$$v(\cdot;\xi_1) \leq \phi \leq v(\cdot;\xi_2) \quad \text{in } [0,1] \quad \text{and} \quad \xi_1 \leq \ell \leq \xi_2, \tag{12}$$

then $\{u(t;\phi,\ell), s(t;\phi,\ell)\}$ *satisfies* (12) *for every* $t \geq 0$. *Moreover, if* $V(\xi) > 0$ $(V(\xi) < 0)$ *for* $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$, *then* $\{v(\cdot;\xi_2),\xi_2\}(\{v(\cdot;\xi_1),\xi_1\})$ *is asymptotically stable from below (from above); that is, for any* $v(\cdot;\xi_1) <$

$\phi \leqq v(\cdot;\xi_2)$ *and* $\xi_1 < \ell \leqq \xi_2$ $(v(\cdot;\xi_1) \leqq \phi < v(\cdot;\xi_2)$ *and* $\xi_1 \leqq \ell < \xi_2)$ *, the convergence property* (11) *holds with* $\{\bar{u},\bar{s}\}$ *replaced by* $\{v(\cdot;\xi_2),\xi_2\}$ $(\{v(\cdot;\xi_1),\xi_1\})$.

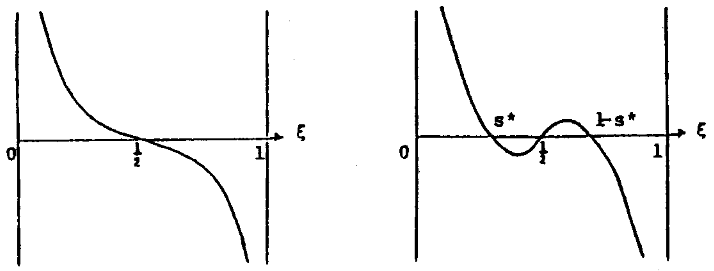
As a special case of (P), we take

$\mu = \nu$, $\mu' = \nu'$, $m = n$ and $f(u) = g(-u)$

to explain our stability results. Define $X_0 = X_0(m,\mu,f)$ by

$$X_0 = \int_0^m (F_1(m) - F_1(u))^{-1/2} du, \text{ where } F_1(u) = \frac{2}{\mu}\int_0^u vf(v)dv.$$

By a simple calculation, V has a single zero point $\xi = 1/2$ for $X_0 \geqq 1/2$ (see Fig. 1) and three points $\xi = s^*$, $1/2$, $1-s^*$ (with some $s^* \in (0,1/2)$) for $X_0 < 1/2$ (see Fig. 2).



Graph of $V(\xi)$ for $X_0 \geqq 1/2$

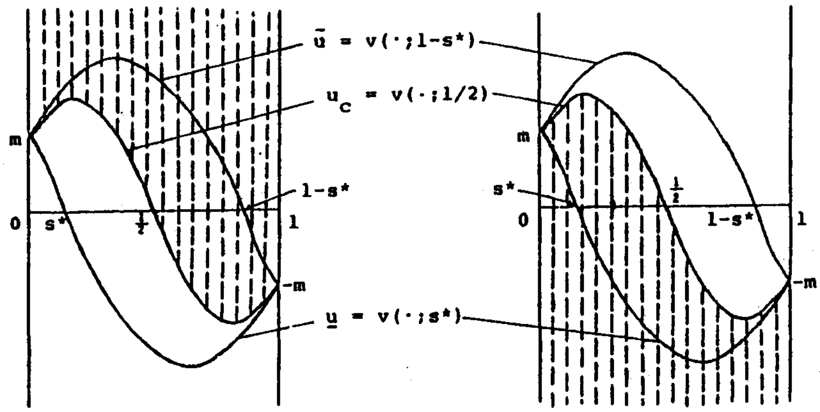
Fig. 1.

Graph of $V(\xi)$ for $X_0 < 1/2$

Fig. 2.

For $X_0 \geqq 1/2$, $\omega(\phi,\ell)$ consists of a single point $\{u_c,1/2\}$ by Theorem II ; so that Theorem IV implies that $\{u_c,1/2\}$ is globally and asymptotically stable from above and below. On the other hand, (SP) has three distinct solutions $\{\underline{u},s^*\}$, $\{u_c,1/2\}$ and $\{\bar{u},1-s^*\}$ for $X_0 < 1/2$. Since $V(\xi) < 0$ for $\xi \in (s^*,1/2)$ and $V(\xi) > 0$ for $\xi \in (1/2,1-s^*)$, Theorem IV assures the asymptotical stability (from above and below) of $\{\underline{u},s^*\}$ and $\{\bar{u},1-s^*\}$, while $\{u_c,1/2\}$ is not stable (see Fig. 3).

The above considerations suggest us to take X_0 as a bifurcation parameter and get bifurcation results. If $X_0 \geqq 1/2$, then the unique solution



(a) Domain of attraction for $\{\bar{u},1-s^*\}$ in case $X_0 < 1/2$

(b) Domain of attraction for $\{\underline{u},s^*\}$ in case $X_0 < 1/2$

Fig. 3.

$\{u_c,1/2\}$ of (SP) is globally asymptotically stable. However, as X_0 becomes smaller than 1/2, $\{u_c,1/2\}$ loses its stability and two bifurcated solutions $\{\underline{u},s^*\}$ and $\{\bar{u},1-s^*\}$ obtain their stability.

§ 3. Proofs of Theorems

3.1. Proof of Theorem I.

The proof is completed by dividing it into several steps. Using the arguments in Evans and Kotlow [2] or Yotsutani [5], one can show the local existence of a solution for (P) in the framework of L^2-theory. Regularity properties of this solution is proved by the standard parabolic regularity results (see [2] and [4]).

Before proceeding to further investigation, we prepare a comparison theorem for (P). Let $\{u,s\} \in C([0,1] \times [0,T]) \times C([0,T])$ be a smooth function. (It is sufficient to assume the same regularity for $\{u,s\}$ as a classical solution of (P).) We say that $\{u,s\}$ is a *supersolution* (*subsolution*) *of* (P) *on* $[0,T]$ *with data* $\{\phi,\ell\}$ if $\{u,s\}$ satisfies (4)-(9) with the equality signs in (4), (5) and (8) replaced by the inequality signs $\geq$ ($\leq$).

COMPARISON THEOREM. *Let* $\{u^1, s^1\}$ *be a supersolution of* (p) *on* $[0,T]$ *with data* $\{\phi^1, \ell^1\}$ *and let* $\{u^2, s^2\}$ *be a subsolution of* (P) *on* $[0,T]$ *with data* $\{\phi^2, \ell^2\}$. *If* $\phi^1 \geq \phi^2$ *in* $[0,1]$ *and* $\ell^1 > \ell^2$, *then* $u^1 \geq u^2$ *in* $[0,1] \times [0,T]$ *and* $s^1 > s^2$ *in* $[0,T]$. *Moreover, if one of* $\{u^i, s^i\}(i=1,2)$ *is a classical solution of* (P), *then the above assertion holds with* $\ell^1 > \ell^2$ *and* $s^1 > s^2$ *replaced by* $\ell^1 \geq \ell^2$ *and* $s^1 \geq s^2$.

The uniqueness of classical solutions of (P) is derived from Comparison Theorem. Furthermore, this theorem insures that the free boundary is distant from the fixed boundaries for all $t \geq 0$. Therefore, making use of the energy method, one can show the global existence result in the usual way.

3.2. Proof of Theorem II.

The essential point in the proof is to show the compactness of the orbit $\{(u(\cdot,t;\phi,\ell),\ s(t;\phi,\ell));\ t \geq 0\}$ in Ω-topology. This is accomplished with the aid of the theory of evolution equations and the embedding theorem for differential operators. To complete the proof, it suffices to employ the technic often used in the study of dynamical systems (cf. [1]).

3.3. Proof of Theorem III.

Since (SP) is a free boundary problem for ordinary differential equations, it is not difficult to prove Theorem III.

3.4. Proof of Theorem IV.

The proof is carried out by combining Theorem II and Comparison Theorem. Similar arguments can be found in [1].

§ 4. Some Remarks

REMARK 4.1. Even if we drop the monotonicity assumptions on f and g, Theorems I and II remain true. However, the uniqueness of solutions for

(AP) is not shown; so that the analysis of (SP) will become more complicate.

REMARK 4.2. In the case $m = 0$ or $n = 0$, the free boundary $x = s(t)$ may hit one of the fixed boundaries $x = 0,1$ in a finite time. Therefore, we need more careful analysis to get complete information about the behavior of solutions for (P).

An analogous situation takes place when the Dirichlet boundary conditions (5) are replaced by the Neumann boundary conditions.

REMARK 4.3. If (8) is replaced by

$$\dot{s}(t) = \mu' u_x(s(t)-0,t) - \nu' u_x(s(t)+0,t),$$

then some numerical experiments exhibit the existence of periodic solutions for (P). The study in this case seems interesting from a mathematical point of view.

References

[1] D. Aronson, M. G. Crandall and L. A. Peletier; Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem, Nonlinear Analysis 6 (1982), 1001-1022.

[2] L. C. Evans and D. B. Kotlow; One-dimensional Stefan problems with quasilinear heat conduction (preprint).

[3] L. I. Rubinstein; The Stefan Problem, Translations of Math. Monographs Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[4] D. G. Schaeffer; A new proof of the infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem, J. Differential Equations 20 (1979), 266-269.

[5] S. Yotsutani; Stefan problems with the unilateral boundary condition on the fixed boundary I, Osaka J. Math. 19 (1982), 365-403; II , III, IV (to appear in Osaka J. Math.).

ウズの方程式について。(特異摂動問題)

東北大・理　水町竜一

Ω を半平面 $\{(x_1,x_2);\ x_1>0\}$, $T>0$ とし, $\Omega\times(0,T)$ に於る次の線形放物型方程式の $\varepsilon\downarrow 0$ に於る特異摂動問題を考える。

$$
(1)\quad\begin{cases}
\partial_t\omega-\varepsilon\Delta\omega+(u\cdot\nabla)\omega=0 & \text{in } \Omega\times(0,T)\\
\omega\big|_{t=0}=\varphi & \text{in } \Omega\\
B\omega=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T)
\end{cases}
$$

ここに $u=(u_1(x,t),u_2(x,t))$ は後述の仮定(A1)を満たす $\overline{\Omega\times(0,T)}$ 上の vector 値関数で $u\cdot\nabla=\sum_{j=1}^{2}u_j\partial_{x_j}$. 又 B は $\Omega\times(0,T)$ 上の関数 f に次で定まる $\partial\Omega\times(0,T)$ 上の関数 Bf を対応させる作用素である。(以下で, $y=(y_1,y_2)$ に対し $\hat{y}=(-y_1,y_2)$ とする)

$$
Bf(x_2,t)=\lim_{x_1\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_1}\log\left|\frac{x-\hat{y}}{x-y}\right|f(y,t)\,dy_1dy_2
$$

$B\omega=0$ なる境界条件を課す事により, $\operatorname{div}v(\cdot,t)=0$, $\operatorname{rot}v(\cdot,t)=\omega(\cdot,t)$, $v(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega}=0$ なる $\Omega\times(0,T)$ 上の vector 値関数 v の存在が保障される。即, (1)は非圧縮粘性流体のウズ ω がみたすべき方程式の線型化になっている。

方程式の係数 u については次を仮定する。

仮定(A1).
$$
\begin{cases}
u\in C([0,T],\mathcal{B}^2(\overline{\Omega})),\ \partial_t u\in C([0,T],\mathcal{B}^1(\overline{\Omega})).\\
\operatorname{div}u(\cdot,t)=0, & 0\le t\le T\\
u(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega}=0, & 0\le t\le T
\end{cases}
$$

又初期値 φ については次を仮定する。

仮定(A2).
$$
\begin{cases}
\varphi\in\mathcal{B}^3(\Omega)\cap\mathcal{B}^4(\overline{\Omega})\cap L^1(\Omega)\\
B\varphi=0 & (t\text{に依存しない関数として})\\
\varphi\big|_{\partial\Omega}=0
\end{cases}
$$

（注。講演で述べた時に比べ仮定を強くした。又以下の論議も変更した点が多い。講演には本質的な点で誤りがあった）

得られた結果を述べる前に，(1) で $\varepsilon=0$ とし境界条件 $B\omega=0$ を無視した方程式 (1_0) の解 ω_0 を構成する。

命題1. 次で定まる $X^{-1}_{t,\tau}$ $(0\le\tau, t\le T)$ を使って (1_0) の解 ω_0 は $\omega_0(x,t)=\varphi(X^{-1}_{t,0}(x),t)$ で表せる。

ここに $X^{-1}_{t,\tau}$ は次で定まる Ω 上の変換 $X_{t,\tau}$ の逆変換である。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X_{t,\tau}(x)=u(X_{t,\tau}(x),t) \\ X_{\tau,\tau}(x)=x \end{cases}$$

次の定理を示す事が本稿の目的である。

定理 仮定 (A1), (A2) のもとで，次を満たす (1) の解 ω_ε が存在する。

$$\omega_\varepsilon=\omega_0+b_\varepsilon+\gamma_\varepsilon$$

ここに b_ε, γ_ε は ε, x, t によらない定数 M, C に対し次をみたす。

$$|b_\varepsilon(x,t)|\leqq M\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{Cx_1^2}{4\varepsilon t}}$$

$$|\gamma_\varepsilon(x,t)|\leqq M\sqrt{\varepsilon}$$

以下 ω_ε を，次の方程式 (2), (3) の解 $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ により $\omega_\varepsilon=\omega^{(1)}+\omega^{(2)}$ として構成する。

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\omega^{(1)}-\varepsilon\Delta\omega^{(1)}+(u\cdot\nabla)\omega^{(1)}=0, & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ \omega^{(1)}\big|_{t=0}=\varphi & \text{in } \Omega \\ \omega^{(1)}\big|_{\partial\Omega}=0 & [0,T] \end{cases}$$

$$
(3)\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}\omega^{(2)} - \varepsilon\Delta\omega^{(2)} + (u\cdot\nabla)\omega^{(2)} = 0 & \text{in } \Omega\times(0.T) \\
\omega^{(2)}\big|_{t=0} = 0 & \text{in } \Omega \\
B\omega^{(2)} = -B\omega^{(1)} & \text{in } \Omega\times(0.T)
\end{cases}
$$

定理はいくつかの命題を組み合せて証明される。

命題２　$\omega^{(1)}$を(2)の唯一の有界な解とする。$\omega^{(1)}$はεによらずに$B^{2,1}(\Omega\times(0.T))$で有界であり，$\varepsilon$によらない定数$M$に対して$|\omega^{(1)}(x.t)-\omega_0(x.t)|\leqq M\sqrt{\varepsilon}$をみたす。

命題３．$B\omega^{(1)}$，$\frac{\partial}{\partial t}(B\omega^{(1)})\in B^{1,0}(\Omega\times(0.T))$であり，$1<p<\infty$に対し

$$
\|B\omega^{(1)}\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}} + \|\frac{\partial}{\partial x_2}B\omega^{(1)}\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}} \leqq C_p\left(\|\omega^{(1)}\|_{B^{2,1}(\Omega\times(0.T))} + \|\frac{\partial}{\partial t}\omega^{(1)}\|_{B^{1,0}(\Omega\times(0.T))} + \|\omega^{(1)}\|_{L^\infty(0.T;L^1(\Omega))}\right)
$$

が定数C_pに対して成立する。

命題２は仮定から容易に従う。命題３は，$\frac{\partial}{\partial x_2}B$が，固定された$t$に対して，trace operator と，Calderon-Zygmund 作用素の合成である事から従う。次に$\omega^{(2)}$の構成の為いくつか記号を導入する。

$$G_1(x, y) = \frac{1}{\pi}\frac{y_1}{y_1^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$Z(x.t;\xi.\tau) = (4\pi\varepsilon(t-\tau))^{-1}e^{-\frac{|x-X_{t,\tau}(\xi)|^2}{4\varepsilon(t-\tau)}}$$

$$H(x.t;\xi.\tau) = Z(x.t;\xi.\tau) - Z(x.t;\hat{\xi},\tau)$$

$$\Phi_1(x.t;\xi_2.\tau) = \left(\frac{x_1^2}{2\varepsilon(t-\tau)^2} - \frac{1}{t-\tau}\right)Z(x.t;\xi.\tau)\Big|_{\xi_1=0}$$

$$\Phi_2(x.t;\xi_2.\tau) = \int_0^t\iint_\Omega H(x.t;y,s)\,dy_1dy_2ds\cdot L_{y,s}\Phi_1(y.s;\xi_2,\tau)$$

$$\Phi_j(x.t;\xi_2.\tau) = \int_0^t\iint_\Omega H(x.t;y^{(1)},s^{(1)})dy_1^{(1)}dy_2^{(1)}ds^{(1)}\cdot\prod_{i=1}^{j-2}\int_0^{s^{(i)}}\iint_\Omega L_{y^{(i)}s^{(i)}}(y^{(i)},s^{(i)};y^{(i+1)},s^{(i+1)})\,dy_1^{(i+1)}dy_2^{(i+1)}ds^{(i+1)}\cdot\Phi_1(y^{(j-1)},s^{(j-1)};\xi_2,\tau) \quad , j=3,4,\cdots$$

但し $L_{y.s} = -\frac{\partial}{\partial s} + \Delta_y + u(y.s)\cdot\nabla_y$ であり, $X_{t.\tau}(\hat{y}) = \hat{X}_{t.\tau}(\xi)$ とする。I'lin-Karashinikov-Oleinik : Linear Equations of the Second Order of Parabolic Type (Russ. Math. Sur. 17) と同様にして $\Phi = \sum_{j=1}^{\infty}\Phi_j$ が $\Omega\times(\tau.T)$ で $L_{x.t}\Phi(x.t;\xi_2.\tau) = 0$ をみたすことが示される。$\omega^{(2)}$ は

$$\omega^{(2)}(x.t) = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x.t;\xi_2.\tau)\rho(\xi_2.\tau)d\xi_2 d\tau \equiv \digamma\rho(x.t)$$

によって構成できる。(これは三重層ポテンシャルである。) ρ は

$$(4)\qquad B\digamma\rho = \phi$$

なる積分方程式を $\phi = -B\omega^{(1)}$ に対して解かさねばならない。

命題4. $\rho \in C^{1+\ell,\frac{1+\ell}{2}}(\partial\Omega\times(0.T))$ で Hölder norm 有界とする. $(\ell>0)$ この時,

$$B\digamma\rho = \rho + K_1\rho + K_2\rho.$$

ここに

$$K_1\rho(x_2.t) = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G_1(x_2.y)\Phi_1(y.t;\xi_2.\tau)dy_1dy_2\right\}\rho(\xi_2.\tau)\,d\xi_2 d\tau$$

$$K_2\rho(x_2.t) = \sum_{j=2}^{\infty}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G_1(x_2.y)\Phi_j(y.t;\xi_2.\tau)\quad\rho(\xi_2.\tau)\,dy_1dy_2\,d\xi_2 d\tau$$

(∵) 積分順序の交換を $\iint_{\Omega}G_1(x_2.y)\left\{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1\rho\, d\xi_2 d\tau\right\}dy_1dy_2$ に対して行うと, $\rho + K_1\rho$ となる. $K_2\rho$ の各項は可積分であり, Fubini が使える.

命題5. K_1 は $1<p<\infty$ に対し $L_p(\partial\Omega\times(0.T))$ の有界作用素であり, $(1+K_1)^{-1}$ も $L^p(\partial\Omega\times(0.T))$ の ε によらずに有界な作用素である.

(∵) K_1 の核 k_1 に対し, $(x_2.t)$ - Fourier 変換 $\mathcal{F}(\lambda.\eta)$ は

$$|\mathcal{F}(\lambda.\eta)| \leq \int_0^{\infty}|e^{it\eta}|dt\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\varepsilon t}|\lambda|}{\sqrt{\varepsilon t}}\cdot\xi\, e^{-\xi^2-\sqrt{\varepsilon t}|\lambda|\xi-\varepsilon t\lambda^2}d\xi dt = \frac{1}{2}.\quad(\xi = \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon t}})$$

$|\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}|\ |\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{F}|\ |\lambda\eta\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\eta}\mathcal{F}|$ は有界.

をみたし, $\sum_{i=1}^{\infty}K_1^i$ は, Marcinkiewicz - I'lin の定理により収束し L_p 有界である.

命題6　K_2 は $1 \leqq p \leqq \infty$ に対し $L_p(\partial\Omega \times (0.T))$ の有界作用素であり、作用素 norm は ε. T によらぬ定数 M によって MTe^{MT} で評価される。

(∵) $\int_0^T dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(x.y)\,dy_1 dy_2 \,|\Phi_j(y.t:\xi_2.\tau)|$

$$\leqq \int_0^T dt \cdot \int_0^t \iint |H(y.s:y'.s')|\,dy_1 dy_2 ds \cdot \int_0^{s'} \iint |L_H(y'.s':y''.s'')|\,dy_1' dy_2' ds' \cdots \iint |L\Phi_1|\,dy_1^{j-1} dy_2^{j-1}$$

$$\leqq \frac{M^{j-1}T^{j-1}}{(j-2)!}$$

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(x.y)\,dy_1 dy_2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_j(y.\tau:\xi_2.\tau)|\,d\xi_2 d\tau \leqq \frac{M^{j-1}T^{j-1}}{(j-2)!}$$

の評価式の成立と、補間による。

命題7.　方程式(4)は $\phi \in \mathcal{L}_p(\partial\Omega \times (0.T))$, $1<p<\infty$ に対し $\rho \in \mathcal{L}_p(\partial\Omega \times (0.T))$ なる解を一意にもつ。ρ は ε によらず、ϕ に連続に依存する。

(∵)　$\rho = (1 + (1+K_1)^{-1}K_2)^{-1}(1+K_1)^{-1}\phi$ によって、$c \cdot MT_0 e^{MT_0} = \frac{1}{2}$ (C は命題5による $(1+K_1)^{-1}$ の norm) なる T_0 に対し、$[0.T_0]$ で一意な解が存在する。これを延長すれば良い。

命題8.　命題7に於て、ϕ. $\phi_{x_2} \in W_p^{1-\delta}(\partial\Omega \times (0.T))$, $\delta>0$. $1<p<\infty$ ならば ρ. $\rho_{x_2} \in W_p^{1-\delta}(\partial\Omega \times (0.T))$ かつ、ρ は ε によらず ϕ に連続に依存する。

(∵)　$\phi_{x_2} = \rho_{x_2} + K_1\rho_{x_2} + K_2\rho_{x_2} + K_3\rho$.

$$K_3\rho = \iint G_1 \int_0^t\int \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)(\Phi - \Phi_1) \cdot \rho \quad d\xi_2 d\tau \cdot dy_1 dy_2$$

などが成り立ち、K_3 に対しても命題6と同じ結論が得られる事などから帰着する。

命題9. ρ, $\rho_{x_2} \in W_p^{1-\delta}(\partial\Omega \times (0.T))$ ならば $|F\rho(x:t)| \leqq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon t}} e^{-\frac{c x_1^2}{4\varepsilon t}}$.

命題9は、Hölder 空間へのうめこみと、直接の評価式による。さらに、$t=0$ で $Bw^{\varepsilon}=0$ より $\rho(\,,0)=0$ となり、これから定理の評価が従う。//

On Separation Points of Solutions to Prandtl Boundary Layer Problem

北大．理．松井伸也

1. Introduction

The equations for 2-dimensional stationary boundary layer theory of incompressible fluid past a rigid wall are

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} uu_x + vu_y &= \nu u_{yy} - p_x , \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned}$$

in the domain $D_A = \{(x,y);\ 0 < x < A,\ 0 < y < \infty\}$ (see [2], [4], [6] and [7]). Here the subscripts x and y denote the partial differentiation with respect to the corresponding variable, (x,y) are orthogonal coordinates in the boundary layer with x representing the length along the wall and y the perpendicular distance from the wall, $u = u(x,y)$ and $v = v(x,y)$ are the corresponding unknown velocity components. The constant ν is a viscous coefficient. Finally $p = p(x)$ is a pressure function. Let $U = U(x)$ be an exterior streaming speed; we assume that p(x) and U(x) satisfy the Bernoulli law and the origin (0,0) is not a stagnation point, i.e.,

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{aligned} U(x)U_x(x) + p_x(x) &= 0, \\ U(0) &> 0. \end{aligned}$$

The appropriate boundary conditions are

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} &u = v = 0 \quad \text{for } y = 0, \\ &u(x,y) \to U(x) \text{ as } y \to \infty, \text{ uniformly in } x. \end{aligned}$$

In order to obtain a well-set problem, we suppose that at an initial position, say $x = 0$, an initial datum $u_0(y)$ is assigned to the velocity component u, i.e.,

$$(1.4) \qquad u(0,y) = u_0(y) \text{ given } (0 \leq y < \infty).$$

We study the existence of the separation point of the flow determinstically.

Here after we assume that the initial datum $u_0(y)$ belongs to $I^{2+\alpha} = I^{2+\alpha}(\nu,U)$ (for notations see Section 2) and that the exterior streaming speed $U(x)$ and the pressure gradient $p_x(x)$ have following properties:

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} &U(X_0) = 0 \text{ for some point } X_0 \ (0 < X_0 < \infty) \text{ and,} \\ &U(x) > 0 \text{ for } 0 \leq x < X_0 , \end{aligned}$$

(1.6) The pressure $p(x)$ is sufficiently smooth, and if $p_x(c) = 0$ at a point $x = c$, then a certain N-th derivative does not vanish at this point.

Now we mention our theorems (see [1]).

Theorem 1. For the problem (1.1), (1.3) and (1.4) there exists a solution $(u,v) \in P^2([0,s))$ such that the point $(s,0)$ is its separation point and the inequality $0 < s < X_0$ holds.

If we put $S(u_0) = s$ in Theorem 1, then we obtain the mapping $S(u_0)$ from $I^{2+\alpha}$ to $(0,X_0)$.

Theorem 2. (i) For the fixed viscosity, no separation point exists near the point $(X_0,0)$:

(1.7) $$\sup\{ S(u_0);\ u_0 \in I^{2+\alpha} \} < X_0.$$

(see [9]).

(ii) For the viscosity ν tending to zero if the pressure gradient p_x is monotone non increasing, then there exist $u_0^{(\nu)} \in I^{2+\alpha}(\nu,U)$ and $u_0 \in I^{2+\alpha}$ (without the compatibility condition) such that

(1.8) $$u_0^{(\nu)} \to u_0 \quad \text{in } B^1([0,\infty)) \text{ and} \qquad S(u_0^{(\nu)}) \to 0 \text{ as } \nu \to 0.$$

In physical or numerical experiments ([8] and[9]) it is always assumed that the initial datum $u_0(y)$ is the constant $U(0)$ which does not belong to the class $I^{2+\alpha}$ and so that the separation point is independent of the viscosity .

On the other hand, O.A.Oleinik[2] proved the local existence and the uniqueness of a solution (u,v) in some domain D_{A_0} to the problem (1.1), (1.3) and (1.4) with a certain initial datum. Theorem 1 means that this local solution can be continued to the separation point. Recently

Liu-Lee[5] have tried to prove such a result among others, but we cannot understand their proofs. To prove Theorem 1, we use essentially Lemma 1, 2 and 3 described below and to obtain (1.7) we compare our solution with the Blasius'.

In Section 2 we give a suitable definition of a separation point, notations mentioned above and the lemmas.

2. Preliminaries and Lemmas

For an interval $[a,A]$ $[0,\infty)$ let $B^0([a,A]\times[y_0,\infty)$ be the Banach space of uniformly bounded functions defined over $[a,A]\times[0,\infty)$ with supremum norm. For α $(0 < \alpha < 2/3)$ and $y_0 > 0$ let $C^\alpha([a,A]\times[y_0,\infty))$ be the set of continuous functions $u(x,y) \in C^0([a,A]\times[y_0,\infty))$ which satisfy

$$| u(x_1,y_1) - u(x_2,y_2)| \leq M\{|x_1-x_2|^{1/2} + |y_1-y_2|\}^\alpha$$

for $(x_i,y_i) \in [a,A]\times[y_0,\infty)$ $(i = 1,2)$ and $M = M(y_0,u)$,

and let $C^\alpha([a,A]\times(0,\infty)) = \bigcap_{y_0>0} C^\alpha([a,A]\times[y_0,\infty))$.

Furthermore let $B^\alpha([a,A]\times(0,\infty))$ be the set of uniformly bounded functions belonging to $C^\alpha([a,A]\times(0,\infty))$. We also define $C^\alpha((0,\infty))$, $B^\alpha((0,\infty))$ and $B^{2+\alpha}((0,\infty))$by the analogous way. Then we define the space of the initial data:

$I^{2+\alpha}(\nu,U) = \{u(y) \in C^2([0,\infty))\cap B^{2+\alpha}((0,\infty))$; $u(0)= 0$, $u_y(0) > 0$, $u_y(y) \geq 0$ for $y \geq 0$, $u \to U(0)$ as $y \to \infty$ and $\nu u_{yy}(y) - p(0) = O(y^2)$ as $y \to 0$ $\}$.

The condition in $I^{2+\alpha}$

$$(2.1) \qquad \nu u_{yy}(y) - p_x(0) = O(y^2) \text{ as } y \to 0$$

is the compatibility condition.

The space of the solutions to the problem (1.1), (1.3) and (1.4) is given as follows:

Let $P^2([a,A])$ be a set of all functions (u,v) such that

(i) u, u_x, u_y, u_{yy}, v and $v_y \in C^0([a,A]\times[0,\infty))$,

(ii) $u(x,y) > 0$ in $[a,A]\times(0,\infty)$,

(iii) $u_y(x,0) > 0$ for $x \in [a,A]$,

(iv) u, u_y, $u_{yy} \in B^0([a,A]\times[0,\infty))$.

Then we define our space by

$$P^2([0,A)) = \bigcap_{0<A'<A} P^2([0,A']).$$

Now we define the separation point of a solution to the problem (1.1),(1.3) and (1.4):

Definition. A point $(s,0)$ is a separation one of a solution (u,v) to our problem in the domain D_s, if the solution (u,v) belongs to $P^2([0,s))$ and for some sequence (x_n,y_n) in $[0,s)\times[0,\infty)$

$$(x_n,y_n) \to (s,0) \text{ and } u_y(x_n,y_n) \to 0 \text{ (as } n \to \infty).$$

Here we note that physicists call $(s,0)$ a separation point if $u_y(s,0) = 0$ for a solution (u,v) (see [8],[9]). Our definition of the separation point is the same one as the above for a solution $(u,v) \in P^2([0,s])$ without the condition

(iii) at $x = s$ in its defnition. But it is very difficult to find such a solution under our assumptions.

We consider the transformation of the independ variables in the system (1.1) of the form

$$(2.2) \qquad x = x, \ \psi = \psi(x,y),$$

where

$$u = \psi_y(x,y) \ , \ v = -\psi_x(x,y) \ , \psi(x,0) = 0.$$

If we put $w(x,\psi) = u^2(x,y)$, then the transformation (2.2) reduces the problem (1.1),(1.3) and (1.4) to the Von Mises' form:

$$(2.3) \qquad L(w) = V\sqrt{w}w_{\psi\psi} - w_x = 2p_x \text{ in } G_A,$$

with the conditions

(2.4) $w(x,0) = 0$, $w(x,\psi) \to U^2(x)$ as $\psi \to \infty$, uniformly in any compact subset of $[0,A)$,

$$(2.5) \qquad w(0,\psi) = w_0(\psi),$$

where

$$G_A = \{(x,\psi);\ 0 < x < A,\ 0 < \psi < \infty\},$$

$$w_0(\int_0^y u_0(t)dt) = u_0^2(y).$$

Let $I_M^{2+\alpha} = \{ w(\psi);\ w(\int_0^y u(t)dt) = u^2(y),\ u \in I^{2+\alpha}\}$.

Then $w(\psi) \in I_M^{2+\alpha}$ if and only if

$$w,\ w_\psi,\ \sqrt{w}w_{\psi\psi} \in B^0([0,\infty)) \cap C^\alpha((0,\infty)),$$

$$w(0) = 0,\ w_\psi(0)>0,\ w_\psi(\psi) \geq 0 \text{ for } \psi \geq 0,$$

$$w(\psi) \to U^2(0) \text{ as } \psi \to \infty \text{ and}$$

$$(2.6) \qquad \mu(\psi) = V\sqrt{w(\psi)}w_{\psi\psi}(\psi) - 2p_x(0) = O(\psi) \text{ as } \psi \to 0.$$

Let $P_M^{2+\alpha}([0,A]) = \{ w(x,\psi);$

$w,\ w_x,\ w_\psi,\ \sqrt{w}w_{\psi\psi} \in B^0(\bar{G}_A) \cap C^\alpha([0,A]\times(0,\infty)),$

$|w_x| \leq K\psi^{1-\beta}$ and $w_\psi \geq m$ in $[0,A]\times[0,\psi_1]$ and

$w(x,\psi) > \ell$ for $\psi > \psi_1 \}$,

where positive constants ψ_1, m, ℓ depend on w. Furthermore for any β $(0 < \beta < 1/2)$ the positive constant K depends on ψ_1, β and w.

Let $P_M^{2+\alpha}([0,A)) = \bigcap_{0<A'<A} P_M^{2+\alpha}([0,A'])$.

Here we remark on Oleinik's local solutions (see [2] or [3]):

A solution $(u,v) \in P^2([0,A_0])$ of the problem (1.1), (1.3) and with the initial datum $u_0 \in I^{2+\alpha}$ (without $u_{0_y}(y) \geq 0$ for $y > 0$) exists, if a solution $w \in P_M^{2+\alpha}([0,A_0])$ of the problem (2.3), (2.4) and (2.5) exists.

Now we mention the essential lemmas and their colloaries (see [1]).

Lemma 1. Let $w(x,\psi)$ be Oleinik's local solution. Then there exist positive constants M_1 and λ such that

$$|w_x| \leq M_1\psi \text{ for } 0 \leq x \leq A_0 \text{ and } 0 \leq \psi \leq \lambda.$$

Corollary. Let $w(x,\psi)$ be as in Lemma 1. Then the section $w(x,\cdot)$ satisfies the compatibility condition (2.6) for any x $(0 \leq x \leq A_0)$.

Lemma 2. Suppose that the pressure gradient p_x is monotone non increasing on $[0,1]$ and the point X_0 in (1.5) equals to 1. Then for any positive constant k there exist positive constants γ and $A < 1$ such that if $w(x,\psi)$ be a solution to the problem (2.3),(2.4) and (2.5) with w, w_ψ, w_x and $\sqrt{w}w_{\psi\psi} \in C^0([0,A]\times[0,\infty))$ and if

$$w_0(\psi) \le k\psi\int_0^1 p_x(t)dt \quad \text{for } 0 \le \psi \le 2/k,$$

then

$$w(x,\psi) \le F(x,\psi)$$

$$\equiv k\psi\left\{2\int_{x/A}^1 p_x(t)dt(1-\gamma\psi) + 2\gamma\psi\int_x^1 p_x(t)dt\right\}$$

for $0 \le x \le A$, $0 \le \psi \le 1/\gamma$.

Corollary. There exists no solution $w(x,\psi)$ to the problem (2.3),(2.4) and (2.5) in G_{X_0}, which belongs to the class $P_M^{2+\alpha}([0,X_0))$ and whose section $w(x,\cdot)$ belongs to $I_M^{2+\alpha}$ for any x $(0 \le x < X_0)$.

For a point $X_1 (0 < X_1 < X_0)$, let k_1 and k_2 be $\min\limits_{0\le x\le X_1} U^2(0)$ and $\max\limits_{0\le x\le X_1} |p_x(x)|$ respectively. Furthermore let W be the subset of $I_M^{2+\alpha}$ such that for $w_0(\psi) \in W$

$$\inf\{w_{0_\psi}(\psi);\ 0 \le \psi \le \psi_0\} \ge k$$

where ψ_0 and k are ,a priori, sufficiently small positive numbers.

Then we have

Lemma 3. For any $w_0 \in W$, the constant A_0 may be chosen depending only on Ψ_0, k, k_1 and k_2, but independent of w_0.

References

[1] Matui, S. and Shirota, T.: On separation points of solutions to Prandtl boundary layer problem, Hokkaido Math. Jour., (to appear)

[2] Oleinik, O. A.: On a system of equations in boundary layer theory, U.S.S.R. Comp. Math. Phys., 3, 650-673 (1963)

[3] Oleinik, O. A.: Lecture N.1 - Lecture N.5, Semi. Ist. Naz. Alta Math., 1, 332-436 (1965)

[4] Oleinik, O. A.: Mathematical Problems in Boundary Layer Theory, Lecture Notes, Dept. Univ. of Minesota, Mineapolis, Minesota (1969)

[5] Liu, C. S., and Lee, C. H.: On the solution of the Prandtl boundary layer equations containing the point of zero skin friction, Arch. Rat. Mech. Anal., 79, 291-304 (1982)

[6] Nickel, K.: Parabolic equations with applications to boundary layer theory, P. D. E. and Conti. Mech., ed. R. Langer, The Univ. Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 319-330 (1961)

[7] Fife, P. C.: Considerations regarding the mathematical basis for Prandtl's boundary layer theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 28, 184-216 (1968)

[8] Schlichting, H.: Boundary-Layer Theory, McGraw Hill Co., New York (1979)

[9] Landau, L. D., and Lifshitz, E. M.: Fluid Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 145-156 (1966)

Navier-Stokes方程式の統計的解

東大・教養　亀島伸朗

§統計的解の概念.

乱流現象は速度,圧力等の物理量が空間的時間的にランダムにゆらぐことで特徴づけられる。通常この乱流現象を定量的に記述するためには,一定の平均操作により,このランダムなゆらぎを除去することが行なわれる。平均操作の前提として流速 $u(t,x)$ の確率分布を求める問題が考えられる。

ここでは,流速 $u(t,x)$, 圧力 $p(t,x)$ は, Navier-Stokes 方程式:

$$
(\mathrm{N.S.})\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & (\nu\text{は定数} > 0) \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}
$$

に従うとする。[1]に従って,初期値 $u(0,\cdot)$ の分布 μ が与えられたとき,対応する(N.S.)の弱解の集合の上の確率測度 P を求めることを問題にする。すなわち,Ω を空間領域として

$\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n \,;\, \operatorname{div} u = 0\}$

$\mathcal{H}$: $\mathcal{V}$ の $L^2(\Omega)^n$ での closure.

とすると,

問題　初期値の分布として $\mathcal{H}$ 上の Borel 確率測度 μ が与えられたとき,(N.S.)の弱解のクラスを含む適当な関数空間 $\mathfrak{X}$ 上の確率測度 P で次の性質①②をみたすものを求める。

① (N.S.)の弱解から成る集合 $\mathcal{W}\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ （$\mathcal{Z}$のBorel集合）が存在して．$P(\mathcal{W})=1$ 。すなわち．"Pの台"は．(N.S.)の弱解の上にある。

② $\gamma_0 : \mathcal{Z}\ni u(\cdot,\cdot)\longmapsto u(0,\cdot)\in\mathcal{H}$ に対し．$P(\gamma_0^{-1}\cdot)=\mu$ 。すなわち．Pの"初期値"が μ と一致する。

このPを．(N.S.)の"統計的解"と呼び．これを構成することを目的とする。

境界の滑らかな有界領域上では．初期値の平均エネルギーが有限（$\int_{\mathcal{H}}\|u_0\|_{\mathcal{H}}^2\,d\mu(u_0)<\infty$）の仮定の下で．同種の解が[1]により一種のGalerkin法で構成されている。以下では類似の手法により．無限領域を含む任意の空間領域での統計的解の存在定理を示す。

§問題の定式化

Ωを$\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ の領域として．上述の $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ 以外に次の関数空間を定義する。但しすべて実数体上のvector空間とする。

$\mathcal{H}_1$: $\mathcal{V}$の $H^1(\Omega)^n$ でのclosure．

$$H(r)=\left\{u\in(\mathcal{D}'(\Omega))^n\ ;\ \|u\|_{H(r)}^2=\int_\Omega(1+|x|^2)^r|u(x)|^2dx<\infty\right\}$$

$$H_1(r)=\left\{u\in(\mathcal{D}'(\Omega))^n\ ;\ \|u\|_{H_1(r)}^2=\int_\Omega(1+|x|^2)^r\left(|u(x)|^2+|\nabla u(x)|^2\right)dx<\infty\right\}$$

$\mathcal{H}(r)$, $\mathcal{H}_1(r)$; $\mathcal{V}$のそれぞれ $H(r)$, $H_1(r)$ でのclosure．

$\mathcal{H}$の双対空間 $\mathcal{H}'$を$\mathcal{H}$と同一視すると．$r>0$として．
$\mathcal{H}_1(r)\subset\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}=\mathcal{H}'\subset\mathcal{H}_1'\subset\mathcal{H}_1(r)'$，$\mathcal{H}(r)\subset\mathcal{H}=\mathcal{H}'\subset\mathcal{H}(r)'$ が

成立する。

$u \in \{u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H});\ \frac{du}{dt} \in L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1(\Gamma)')\}$ が、N-S 方程式の"弱解"であるとは、

$$\frac{du}{dt} + Au + B(u,u) = f$$

が成立することであると定義する。但し、$f \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1')$ は、与えられた外力で、$\alpha > 1$ は定数とする。A, B は、

$$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1' \ , \ \langle Au, v \rangle = \nu \langle \nabla u, \nabla v \rangle$$

$$B : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1' ,$$

$$\langle B(u,v), w \rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u^i(x) v^j(x) \frac{\partial w^j(x)}{\partial x^i} dx$$

とする。ここで $\langle \cdot , \cdot \rangle$ は $L^2(\Omega)^n$ の内積である。

以上を前提にして、上述の問題を定式化する。

<u>定理</u>（統計的解 P の存在定理）

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$, open, $f \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1')$, μ は、$\mathcal{H}$ 上の Borel 確率測度で、$\int_{\mathcal{H}} \|u_0\|_{\mathcal{H}} d\mu(u_0) < \infty$ とする。このとき、次の性質をみたす $Z = L^2(0,T;\mathcal{H}(\Gamma)') \cap C(0,T;\mathcal{H}_1(\Gamma)')$ 上の Borel 確率測度 P が存在する。

i) $\mathcal{L} = \{u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H});\ \frac{du}{dt} \in L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1(\Gamma)')\}$
$(1 < \alpha \leq \frac{4}{n})$ に対し $\mathcal{L} \in \mathcal{B}(Z)$ で、$P(\mathcal{L}) = 1$

さらに、(N.S.) の弱解から成る $\mathcal{L}$ の閉集合 $\mathcal{W} \in \mathcal{B}(Z)$ が存在して、$P(\mathcal{W}) = 1$

ii) $\gamma_0 : Z \ni u \longmapsto u(0) \in \mathcal{H}_1(\Gamma)'$ に対して、$P(\gamma_0^{-1} \cdot) = \mu$

iii) (energy不等式)

$$\int \left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} + \|u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H}_1)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1(r)')} \right) dP(u)$$

$$\leq C\left(\int \|u_0\|^2_{\mathcal{H}} d\mu(u_0) + \|f\|_{L^2(0,T;\mathcal{H}_1')} + 1 \right) \qquad \left(1 < \alpha \leq \frac{4}{n}\right)$$

以上.

証明は. Galerkin法による。すなわち. ①近似解を構成し ②その compactness を示し. 収束部分列を得る。③最後に その収束極限が定理の i)〜iii)の性質をみたすことを 証明する。

§ 近似解の構成

$\mathcal{H}$の m 次元部分空間を E_mとして. $C(0,T;E_m)$上に P の近似解 P_mを構成する。評価の都合上. $\mathcal{H}$の特別な基底を定める。

$\mathcal{H}_1(r)$ は、$\mathcal{H}$に compactに埋め込まれるから. $\mathcal{H}$の完全正規直交系 $\{e_j\}$で. $\mathcal{H}_1(r)$で直交するものが存在する。$\{e_j\}_{j=1}^m$ で生成される $\mathcal{H}$の部分空間を E_mとして. $\mathcal{H}$から E_mへの projection を π_mとする。

N-S方程式の近似方程式として.

$$\frac{du_m}{dt} + \pi_m(Au_m + B(u_m, u_m) - f) = 0$$

を考えると. これは. u_mについての常微分方程式で. $u_m(0)$を定めると. $u_m \in C(0,T;E_m)$が一意に定まる。この写像を S_mとする。

$$S_m : E_m \ni u_m(0) \longmapsto u_m \in C(0,T;E_m)$$

Pの近似解 P_mとして 初期値の分布 μの $S_m\pi_m$による像をとる。すなわち.

$$P_m = \mu\left((S_m \pi_m)^{-1} \cdot\right)$$

P_mは、$C(0,T;E_m)$上のBorel測度として定義されるが、$C(0,T;E_m) \subset Z = L^2(0,T;\mathcal{H}(r)') \cap C(0,T;\mathcal{H}_1(r)')$であるから、$P_m$は、$Z$上のBorel測度とみなすことができる。

§ 近似解のcompactness

近似方程式の解 u_m に関し、次の apriori 評価を得る。

$$\|u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_m(\tau)\|^2 d\tau \leq e^{\nu T}\left(\|u_m(0)\|^2 + \nu^{-1}\int_0^t \|f(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_1'} d\tau\right)$$

さらに $v \in \mathcal{V}$ として、$\left|\left\langle \frac{du_m}{dt}, v\right\rangle\right|$ を評価する。

$$\left|\left\langle \frac{du_m}{dt}, v\right\rangle\right| \leq \left|\langle Au_m, \pi_m v\rangle\right| + \left|\langle B(u_m,u_m), \pi_m v\rangle\right| + $$
$$+ \left|\langle f, \pi_m v\rangle\right|$$
$$\leq \left(\|u_m\|_{\mathcal{H}_1} + \|u_m\|^2_{L^4(\Omega)} + \|f\|_{\mathcal{H}_1'}\right) \cdot \|\pi_m v\|_{\mathcal{H}_1}$$

ここで、$r > 0$、$\{e_j\}$は$\mathcal{H}_1(r)$で直交していることを使うと、

$$\|\pi_m v\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|\pi_m v\|_{\mathcal{H}_1(r)} \leq \|v\|_{\mathcal{H}_1(r)}$$

が成立し、$\alpha \geq 1$に対し

$$\left\|\frac{du_m}{dt}\right\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1(r)')} \leq \|u_m\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1)} +$$
$$+ 4\|u_m\|^{2-\frac{n}{2}}_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} \cdot \|u_m\|^{\frac{n}{2}}_{L^{\frac{n\alpha}{2}}(0,T;\mathcal{H}_1)} + \|f\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1')}$$

$u_0 \in \mathcal{H}$に対し、$u_m = S_m \pi_m u_0$だから、上の不等式の両辺をμで積分すると、P_mに関する次の評価が得られる。

$$\int \left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} + \nu \|u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H}_1)} \right) d\mathcal{P}_m(u) \leqq$$
$$\leqq 2 e^{\nu T} \left(\int \|u_0\|^2 d\mu(u_0) + \nu^{-1} \|f\|_{L^2(0,T;\mathcal{H}_1')} \right)$$

$$\int \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1(r)')} d\mathcal{P}_m(u) \leqq$$
$$\leqq \int \|u\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1)} d\mathcal{P}_m(u) + 2\int \|u\|^{2-\frac{n}{2}}_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} \times \|u\|^{\frac{n}{2}}_{L^{\frac{n\alpha}{2}}(0,T;\mathcal{H}_1)} d\mathcal{P}_m +$$
$$+ \|f\|_{L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1')}$$

第2式の右辺は、$\alpha \leqq 2$, $\frac{n\alpha}{2} \leqq 2$ すなわち $\alpha \leqq \frac{4}{n}$ のとき第1式の評価より m に関して有界。

$\alpha > 1$, $r > 0$ に対し、

$$\mathcal{L} = \left\{ u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H}) ; \frac{du}{dt} \in L^\alpha(0,T;\mathcal{H}_1(r)') \right\}$$

は、$Z = L^2(0,T;\mathcal{H}(r)') \cap C(0,T;\mathcal{H}_1(r)')$ に compact に埋め込まれる。後述の Prokhorov の定理を使うと、上の評価より、$\{\mathcal{P}_m\}$ の次の意味での compactness が示される。

" $r > 0$, $1 < \alpha \leqq \frac{4}{n}$ のとき、Z 上の確率測度 P と $\{\mathcal{P}_m\}$ の部分列 $\{\mathcal{P}_{m_k}\}$ が存在し、Z 上の任意の有界連続関数 φ に対し、

$$\int \varphi(u)\, d\mathcal{P}_{m_k}(u) \xrightarrow{k} \int \varphi(u)\, dP(u)$$

が成立する。"

以下、この P が統計的解の性質 i)〜iii) をみたすことを示せばよい。

補題（Prokhorovの定理）

距離空間 X 上の Radon 測度の族 $\mathfrak{M}$ が次の i), ii) をみたすと仮定する.

i) $\sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \mu(X) < \infty$

ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対し. X の compact 集合 K が存在し.

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \mu(X\setminus K)<\varepsilon$$

このとき. X 上の測度 μ_0 と $\mathfrak{M}$ の部分列 $\{\mu_n\}$ が存在し. X 上の任意の有界連続関数 φ に対し.

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu_n(x) \xrightarrow{n} \int_X \varphi(x)\, d\mu_0(x)$$

以上.

Prokhorovの定理の証明は [3] 等に与えられている。

§P の性質

$u\in Z\cap L^2(0,T;\mathcal{H}_1)$, $v\in\mathcal{H}_1(\Gamma)$ に対し.

$$L_t(u,v)=\langle u(t)-u(0),\, v\rangle+\int_0^t\langle Au(\tau)+B(u(\tau),u(\tau))- \\ - f(\tau),\, v\rangle d\tau$$

と定める。φ として. Z 上の実数値連続関数で. 有界集合の外で 0 となるもの, v として. $v\in\mathcal{V}$ をとると. $L_t(\cdot,v)$ は Z 上連続関数になる。一方. 近似解 P_m に関し.

$$\int L_t(u,\pi_m v)\,\varphi(u)\, dP_m(u)=0$$

が成立するから. $m\to\infty$ として.

$$\int L_*(u,v)\,\varphi(u)\,d\rho(u)=0$$

以上より、$L_*(\cdot, v)$ は、ρ - a.e. で 0。この事実から存在定理の性質 i), ii) が得られる。

iii) は容易である。

Reference

[1] M. I. Vishik, A. I. Komech and A. V. Fursikov; Some Mathmatical Problems of Statistical Hydrodynamics, Russian Mathmatical Survey 34:5 ('79)

[2] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков ; Математические Задачи Статистической Гидромеханики, ('80) Наука

[3] I. I. Gihman, A. V. Skorohod ; The Theory of Stochastic Process I, ('74) Springer