「第4回発展方程式若手セミナー」

講演集

1983年 2月

序

この報告集は 1982年8月2日から5日までの4日間、長野県上松町国民宿舎ねざめホテルで開かれた「才4回発展方程式若手セミナー」における講演の内容を、講演者自身に執筆して頂いたものをまとめたものです。

「発展方程式論の現状と将来の方向を探るための若手研究者間の討論と情報交換の場」として始められた本セミナーも今回で4回めとなりましたが、台風の直撃による交通網の大混乱にもかかわらず、全国から41名の若手研究者の参加がありました。

丸尾健二氏の連続講演をはじめとする14の講演を中心として、自由で活発な発表・討論が行なわれ、楽しいセミナーとなりました。このような自由で楽しいセミナーが今後とも引き継がれ、発展方程式論及びその関連分野の将来のために少しでも寄与できますよう願っております。

最後に、今回のセミナーを開くにあたり、「作行会数学基金」にご援助頂きましたことを深く感謝致します。また本セミナーに対し、大春慎之助氏、丸尾健二氏には多くのご援助・ご協力を頂きました。更に、セミナーの準備とこの報告集の作成に際して、東京大学教養学部大学院生諸君に協力して頂きました。ここに関係者の方々に深く感謝致します。

1983年2月　才4回発展方程式若手セミナー世話人　高橋勝雄

参加者名簿

青木 暹 (山口大)
赤池 武志 (早大)
伊藤 達夫 (東大)
伊藤 正幸 (広大)
岩宮 敏幸 (航宇研)
栄 伸一郎 (広大)
大内 雅晴 (東海大)
大河内 広子 (早大)
岡沢 登 (東理大)
岡本 久 (東大)
観音 幸雄 (広大)
儀我 美一 (名大)
剱持 信幸 (千葉大)
小林 久寿雄 (富山大)
小山 哲也 (北大)
佐々木 茂 (神商高)
重田 多恵子 (お茶大)
仙葉 隆 (阪大)
高木 泉 (東北大)
高橋 勝雄 (東大)
滝川 真也 (広大)

竹中 俊美 (中工大)
田中 博 (阪大)
谷川 政雄 (筑波大)
堤 誉志雄 (東大)
永井 敏隆 (広大)
成田 良一 (東大)
橋本 一夫 (広大)
福田 賢一 (相工大)
藤平 知行 (慶大)
古谷 希世子 (都立大)
古屋 博行 (早大)
俣野 博 (広大)
丸尾 健二 (姫工大)
丸山 彰 (東電大)
水町 竜一 (東北大)
宮芝 晃一 (早大)
八木 厚志 (阪大)
山口 哲夫 (東海大)
山田 直記 (神大)
山田 義雄 (名大)

目　次

実ヒルベルト空間における 時間に関して二階の
非線型微分方程式について

姫工大
丸尾健二

序. Hは実ヒルベルト空間とし (,) はHの内積, ‖ ‖はノルムとする。 φ は Hから $(-\infty, \infty]$ への下半連続凸関数とするとき $\partial\varphi$ を φ の subdifferential としよう。
次の方程式を考えよう。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \partial\varphi u \ni f \\ u(0) = a, \quad \dfrac{du}{dt}(0) = b \end{cases}$$

H. Brezis が上記の方程式の解法を open problem として提出([1], [2])して以後 M. Schatzmann が Hが有限次元の場合 あるいは 初期値が特殊な場合における局所解について研究している([3], [4]) 程度であまり論文を見ない。
また 非線型発展方程式(基礎数学シリーズ)の中で 高村, 小西先生が申されている様に 上記の問題を一般的に解く事は困難であるので この論文では $\partial\varphi$ が次の様な形をしている時の研究をする事を目的としたい。

$$\partial\varphi = A + \partial I_K$$

ここで Aは Hでの正値自己共役作用素で Kを内点をもつ閉凸集合とするとき Kの indicator function I_K の subdifferential を ∂I_K とする。すなわち 次の方程式の解法の研究になる。

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + Au + \partial I_K u \ni f(\cdot, u) \\ u(0) = a \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = b \end{cases}$$

ここで $f(\cdot, x)$ は $[0,T] \times H$ から H への関数で

$$\begin{cases} \|f(t,x)\| + \|\dfrac{d}{dt} f(t,x)\| \leqq h(t)(1+\|x\|) & \text{for any } x \in H \\ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqq h(t)\|x-y\| & \text{for any } x, y \in H \end{cases}$$

を満たしているとする。今 $h \in L^1([0,T])$.

定義と定理.

まず (0.1) の解の定義をいう

Def 1.1 $u \in C([0,T], H)$ が (0.1) の解とは次の条件を満すものをいう。

1) $u \in W^1_\infty([0,T] : H) \cap \text{weak-}C([0,T], D(A^{1/2}))$

2) For any $t \in [0,T]$ $\quad u(t) \in D(A^{1/2}) \cap K$

3) 右,左微分 $\dfrac{d^+u}{dt}(t)$, $\dfrac{d^-u}{dt}(t)$ は $[0,T]$ 上で H の弱位相の意味で存在する。(但し 0とTとでは存在する方のみ)

4) $$\frac{1}{2}\left\|\frac{d^{\pm}u}{dt}(t)\right\|^2 + (Au(t), u(t)) \leqq \|b\|^2 + (Aa, a) + \int_0^t \left(\frac{du}{ds}(s), f(s, u(s))\right) ds$$

for any $t \in [0,T]$ (0, Tでは存在する方のみ)

5) $C([0,T] : H)$ 上の汎関数 F が存在して次の性質をみたしている

$F(\psi - u) \leqq 0 \qquad$ for any $\psi \in C([0,T] : K)$

and

$$\int_0^T \left(\frac{du}{ds}(s), \frac{d\psi}{ds}(s)\right) ds + \int_0^T \left(f(s, u(s)) - Au(s), \psi(s)\right) ds +$$

$$(b, \varphi(0)) - \left(\frac{du^-}{dt}(T), \varphi(T)\right) = F(\varphi)$$

for any $\varphi \in W_2^1([0,T] : H) \cap C([0,T] : D(A^{1/2}))$.

6) 初期値は次の意味でみたしている

$u(0) = a \qquad b - \frac{du^+}{dt}(0) \in \partial I_K a$

次に energy conserving solution も定義しておこう。

Def. 1.2 (energy conserving solution of (0.1))

$u \in C([0,T], H)$ が energy conserving solution とは次の性質を満すものをいう

1) u は解である

2) $u \in C([0,T], D(A^{1/2}))$

3) 右,左微分は H の強位相で存在する

4) Def 1.1 の 4) の不等号を等号にかえて成立する

定理 1.3 H は可分な実 Hilbert 空間として $D(A^{1/2})$ から H への埋めこみが compact とする。 今 $a \in D(A^{1/2}) \cap K$, $b \in H$ ならば (0.1) の解が存在する

注 解の一意性がない事は [3] の中に書いてある。

解の一意性を出す目的で energy conserving solution を研究しよう この為に K の境界 ∂K に次の条件を仮定しよう

仮定

1) 任意の $x \in \partial K$ に対して $\gamma(x) \in \partial I_K x$, $\|\gamma(x)\| = 1$ なる ∂K 上の外法線ベクトルがきまり
$\partial I_K x = \{\lambda \gamma(x) ;\ \forall \lambda \geq 0\}$ となっているとする。

2) 任意 $x, y \in \partial K$ で

$\|\gamma(x) - \gamma(y)\| \leqq N \|x-y\|$ を満たす

定理 1.4

上記の仮定のもと energy conserving solution が存在する

注 energy conserving solution も一意でない事は [3] に示してあるが ∂K の滑らかさと初期値との関係で局所的に一意性が言える事もある。すなわち

$\gamma(x)$ の ∂K 上の Fréchet 微分を T_x とする。

今 次のどれかをみたせば 十分小さい $T'>0$ に対して $[0,T']$ 上一意である。

1) a が K の内点になっている

2) $a \in \partial K$ かつ $(\gamma(a), b) \neq 0$

3) $a \in \partial K$, $(\gamma(a), b) = 0$ で

$(T_{1,a} b, b) + (f(0,a) - Aa, \gamma(a)) \neq 0$

但し ∂K は十分に滑らかとする。

今 energy conserving solution の性質を調べよう。

命題 1.5 仮定のもと energy conserving solution は次の性質を持っている

1) $\varphi(0) = 0$ で 単調増加な左連続な $[0,T]$ から $[0,\infty)$ への関数で 次の式をみたすものが唯一つ存在する

$$F(\psi) = \int_0^T (\bar{\gamma}(u(s)), \psi(s))\, d\varphi(s)$$

for any $\psi \in C([0,T], H)$

ここで
$$\bar{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma(x) & \text{if } x \in \partial K \\ 0 & \text{if } x \notin \partial K . \end{cases}$$

2)

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = \frac{d^-u}{dt}(t) - 2\left(\frac{d^-u}{dt}(t),\ \xi(u(t))\right)\xi(u(t)) \quad \text{for any } t \in (0,T)$$

energy conserving solution も一意でない為 (see [3]) ある意味での最小解の存在と一意性について考えてみよう。

今 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ は $[0,T]$ の内のある可算無限で dense な集合とおう。

Def. 1.6　$u \in C([0,T];H)$ が $\{t_i\}$-energy conserving solution とは次の性質をみたすものとしよう

命題 1.5 により energy conserving solution w に対して単調増加関数 φ が唯一つきまる為、この φ を φ_w とかく。このとき energy conserving solution の集合 M_i を次の様に帰納的にきめる。

$$M_0 = \{ w \ ;\ w \text{ は energy conserving solution of } (0.1) \}$$

$$M_1 = \{ v \in M_0 \ ;\ \varphi_v(t_1) = \min_{w \in M_0} \varphi_w(t_1) \}$$

$$M_2 = \{ v \in M_1 \ ;\ \varphi_v(t_2) = \min_{w \in M_1} \varphi_w(t_2) \}$$

$$M_{i+1} = \{ v \in M_i \ ;\ \varphi_v(t_{i+1}) = \min_{w \in M_i} \varphi_w(t_{i+1}) \}$$

このとき　$u \in \bigcap_{i=0}^{\infty} M_i$　となっている。

定理 1.7　仮定のもと　$a \in V \cap K$, $b \in H$ のとき $\{t_i\}$-energy conserving solution u は一意に存在する。

注. $\partial I_K u$ は大ざっぱに言って ∂K から受ける力と考えられるので M_1 は t_1 時間までに ∂K から受ける力のなした仕事の総和(積分)

と考えられる。又 M_{i+1} は energy conserving solution の部分集合 M_i の中で t_{i+1} 時間までに ∂K から受ける力のなした仕事の総和が最小になるものの集合である。
故に 概して言えば $\{t_i\}$ - energy conserving solution とは順次 $t_1, t_2, \cdots\cdots$ ごとに ∂K から受ける力のなした仕事の総和が最小になるものと考えられる。

定理の証明の概略

まず λ を十分小なる正の数とするとき $\partial I_{K,\lambda}$ を ∂I_K の吉田近似として $I_{K,\lambda}$ は I_K の吉田近似とする。
最初に次の方程式を考える。

$$(3.1)\begin{cases} \dfrac{d^2u_\lambda}{dt^2} + Au_\lambda + \partial I_{K,\lambda}u_\lambda = f(\cdot, u_\lambda(\cdot)) \\ u_\lambda(0) = a, \quad u_\lambda'(0) = b \end{cases}$$

まず (3.1) 式に対する energy 等式から次の補題を得る。

補題 3.1

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 + \|u_\lambda(t)\|^2 + \|A^{1/2}u_\lambda(t)\|^2 + I_{K,\lambda}(u_\lambda(t)) \leq Const.$$

ここで Const は λ と t に無関係。

次に K は内点を持つ閉凸集合と云う事と上記の補題を使用すれば 次の補題を得る。

補題 3.2

$$\int_0^T \|\partial I_{K,\lambda}u_\lambda(s)\|\, ds \leq Const.$$

ここで Const も λ に無関係。

さて定理 1.3 の概証をしよう。

今 $\|A^{1/2}u_\lambda(t)\| \leqq Const$ と $\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\| \leqq Const$ から Ascoli-Arzela's 定理を使用して $\{u_\lambda(t)\}$ は $u(t)$ に一様収束する部分列をもつ

又 $\|\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(t)\| \leqq Const$ から $\{\frac{du_\lambda}{dt}(t)\}$ は $\frac{du}{dt}(t)$ に L_2-弱収束する部分列をもつ

次に任意の $\psi \in C([0,T]:H)$ に対して

$$F_\lambda(\psi) = \int_0^T (\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t), \psi(t))\,dt$$ とおくと

H の可分性により

$$\lim_{\lambda_j \to 0} F_{\lambda_j}(\psi) = F(\psi)$$

となる $C([0,T]:H)$ 上の汎関数 F が存在する。ここで $\{\lambda_j\}$ は $\{\lambda\}$ の部分列である。

さて (3.1) より $\forall \psi \in C^1([0,T]:H) \cap C([0,T]:V)$ に対して

$$\int_0^T (\frac{du_\lambda}{ds}(s), \frac{d\psi}{ds}(s))\,ds + \int_0^T (f(s) - Au_\lambda(s), \psi(s))\,ds - (\frac{du_\lambda}{dt}(T), \psi(T))$$

$$+ (b, \psi(0)) = F_\lambda(\psi)。\qquad F_\lambda(\psi - u_\lambda) \leqq 0 \quad \text{for any } \psi \in C([0,T]:K)。$$

故に上記の事をすべて合せると解の存在がわかる。

さて定理 1 4 の概証をしよう。しばらくの間 $a \in \partial K$ とする。

仮定を使用すれば

$$\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t) = \ell_\lambda(t)\,\gamma(c_\lambda(t))$$

とかける。ここで $\ell_\lambda(t) = \|\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t)\|$, $c_\lambda(t) = c(u_\lambda(t))$ として

$$c(x) = \begin{cases} Proj_K x & \text{if } x \notin K \\ x\text{からの}\partial K\text{の最小キョリを求める}\partial K\text{上の点} & \text{if } x \in K. \end{cases}$$

次に $\mathbb{H} = H + iH$ (Hの複素化)の空間において $\alpha + \beta i \in \mathbb{H}$ に対して $\mathbb{A}(\alpha + \beta i) = A\alpha + iA\beta$ と定義するとき $\mathbb{A}$ を生成作用素に持つ group $\{U(t)\}_{-\infty < t < \infty}$ を考える。

すると (3.1) から次の表現を持つ。今 $i\mathbb{A}^{1/2} = \mathbb{D}$ とする

$$u_\lambda(t) = \tfrac{1}{2}(U(t)+U(-t))a + \tfrac{1}{2}(U(t)-U(-t))D^{-1}b$$

$$(3.2) \qquad + \tfrac{1}{2}\int_0^t (U(t-s)-U(s-t))D^{-1}f(s, u_\lambda(s))\,ds$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t (U(t-s)-U(s-t))D^{-1}l_\lambda(s)\,\gamma(C_\lambda(s))\,ds$$

今 仮定より　$\lambda_1 \neq \lambda_2$ に対して

$$\| \gamma(C_{\lambda_1}(s)) - \gamma(C_{\lambda_2}(s)) \| \leqq \mathrm{Const}\, \| u_{\lambda_1}(s) - u_{\lambda_2}(s) \|$$

$[0, T_0]$ 上でなりたつ。 T_0 は λ に関係しない小さな定数．

次に

$\int_0^t l_\lambda(s)\,ds = \psi_\lambda(t)$ とおくと　Hellyの選出定理とつかうと

$\lim_{\lambda_j \to 0} \psi_{\lambda_j}(t) = \psi(t)$ となる部分列がある.

$\| u_{\lambda_j}(t) - u_{\lambda_k}(t) \|$ を上記の式と上記の事実を使用することにより評価し Growall's inequality を使用すれば

$$\lim_{k,j\to\infty} \| u_{\lambda_j}(t) - u_{\lambda_k}(t) \| = 0 \qquad \text{がわかる。}$$

故に $u_{\lambda_j}(t)$ は $u(t)$ に一様収束する。

又 $\frac{du_\lambda}{dt}(t) = \tfrac{1}{2}(U(t)-U(-t))D\,a + \tfrac{1}{2}(U(t)+U(-t))b$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t (U(t-s)+U(s-t))f(s, u_\lambda(s))\,ds$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t (U(t-s)-U(s-t))\,l_\lambda(s)\,\gamma(C_\lambda(s))\,ds \quad \text{により}$$

上記と同じ様な方法により

$$\lim_{\lambda_j\to 0} \frac{du_{\lambda_j}}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \qquad a.e \quad t \in [0, T_0]\text{。}$$

次に $A^{1/2}$ を (3.2)にかけた式と上記と同じ様な方法をもちいれば

$$\lim_{\lambda_j\to 0} A^{1/2} u_{\lambda_j}(t) = A\,u(t) \qquad \text{for any } t \in [0, T_0]$$

となる。

次に (3.1) の energy 等式と上記二事実をつかえば　u は

energy 等式を満たす事がわかる。　故に $[0,T_0]$ 上 energy conserving solution の存在がわかる。

さて $a\in K$ ならば　線型の問題よりすでによくわかっている。故にこの場合局所的な energy conserving solution が得られる事は自明である。　この二つの事実から交互に解をつなぎ合せて ${}^\forall T>0$ まで解をのばすことができる。故に $[0,T]$ 上 energy conserving solution の存在がわかる。

次に $\xi(C_\lambda(\omega))$ は $u_\lambda(t)\longrightarrow u(t)$ に一様収束する事から $\xi(C(\omega))$ に一様収束するとしてよい。　一方 $\psi_\lambda(t)\longrightarrow\psi(t)$ に各点収束する事より

$$\int_0^T \rho_\lambda(\omega)\,(\xi(C_\lambda(\omega)),\ \psi(\omega))\,d\omega \longrightarrow \int_0^T (\bar\xi(C(\omega)),\ \psi(\omega))\,d\varphi(\omega)$$

がいえる。　一方 $F_\lambda(\psi)\longrightarrow F(\psi)$ より

$$F(\psi)=\int_0^T(\bar\xi(C(\omega)),\ \psi(\omega))\,d\varphi(\omega)$$ がわかる。

故に命題 1.5 がいえる。

定理 1.7 の概証

M_0 は ϕ 集合でない事は定理 1.4 より明らか。　今 $M_i\neq\phi$ ならば $\inf_{u\in M_i}\varphi_u(t_{i+1})=\lim_{j\to\infty}\varphi_{u_j}(t_{i+1})$ となる $\{u_j\}\subset M_i$ に対して

$$(3.3)\quad u_j(t)=\tfrac12(U(t)+U(-t))\,a+\tfrac12(U(t)-U(-t))\,D^{-1}b$$
$$+\tfrac12\int_0^t(U(t-s)-U(s-t))\,D^{-1}f(s,u_j(s))\,ds-\tfrac12\int_0^t(U(t-s)-U(s-t))\,D^{-1}\xi(u_j(s))\,d\varphi_{u_j}(s)$$

の表現をもつ。一方 $\{\varphi_{u_j}\}$ に対して Helly の選出定理を使用し定理 1.4 の証明と同様な証明をすれば $\lim_{j\to\infty}u_j=u$ (一様収束) なる energy conserving solution が得られて M_i の作り方より $u\in M_p\ (1\le p\le i)$ が帰納的に示される　故に $M_{i+1}\neq\phi$.

次に $u_i\in M_i$ for any i なる $\{u_i\}_{i=0}^\infty$ に対して (3.3) と同じ表現をして $\{\varphi_{u_i}\}$ に Helly の選出定理から $u_i\rightrightarrows u$ (一様収束) がいえる。

この事より　$\bigcap_{i=0}^\infty M_i\neq\phi$ がいえる。　故に $\{t_i\}$-energy conserving solution の存在がわかる。　次に $\{t_i\}$-energy conserving solution u に対する $\varphi_u(t)$ は dense の点 $\{t_i\}$ 上で $\varphi_u(t_i)$ が u に無関係な確定値になる事から 解の定義 1.1 の 5) の表現によって一意性がいえる。

終りに この種の問題は K が内点を持たぬ場合が重要な場合になる。しかし非常に困難な問題であると思われる。又一歩ゆずって K が内点を持っていても K が滑らかでないと energy conserving solution すら不明である。この周辺が今後の問題となると思っている。

文　献　表

[1] H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les sepaces de Hilbert. North-Holland '73

[2] H. Brezis, Monotonicity method in Hilbert spaces and some applications to nonlinear part. diff. eq. Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Acad. Press (1971).

[3] M. Schatzman. A class of nonlinear differential equations of second order in time. Nonlinear Analysis. 2. (1978) 355-373.

[4] M Schatzman, Sur une classe de problemes hyperboliques non lineaies, C.R. Acad. Sc. 277 (1973) A, 671-674.

[5] M Schatzman. A Hyperbolic prolem of Second order with Unilateral constrains: the Vibrating String with a Concave obstacle J. Math. Anal and Appli. 73, 138-191 (1980)

時間に依存する片側境界条件をもつ双曲型発展方程式の強解の存在について

佐々木　茂

§1. 問題と結果

Hを実Hilbert空間とし，その内積を$(\cdot,\cdot)$，ノルムを$|\cdot|$で表す。
Hにおける次の非線型双曲型発展方程式の初期値問題を考える。

$$(E)\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}(t)+Au(t)+\partial I_{K(t)}\left(\dfrac{du}{dt}(t)\right)\ni f(t) & 0\leq t\leq T \\ u(0)=u_0,\quad \dfrac{du}{dt}(0)=v_0 \end{cases}$$

ここで，AはHの上の正の半定符号自己共役作用素で，$K(t)$ $(0\leq t\leq T)$はHの凸閉集合の族である。各$t\in[0,T]$に対して，$I_{K(t)}$は$K(t)$の指標関数，つまり

$$I_{K(t)}(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x\in K(t) \\ +\infty & \text{if } x\notin K(t) \end{cases}$$

であり，$\partial I_{K(t)}$は$I_{K(t)}$の劣微分作用素，つまり

$$\partial I_{K(t)}(x)=\{z\in H:\ (z,x-y)\geq 0,\ {}^\forall y\in K(t)\}$$

である。$P(t)$によって$K(t)$の上への射影作用素を表し，Aおよび$K(t)$に対して，さらに次の条件を仮定する。

(A.1)　ある関数$a\in L^2(0,T;H)$が存在して，a.e. $t\in[0,T]$に対して

$$(1+\varepsilon A)^{-1}(x+\varepsilon a(t))\in K(t),\quad {}^\forall x\in K(t),\quad {}^\forall\varepsilon>0$$

を満たす。

(A.2)　ある強絶対連続関数$b:[0,T]\to H$が存在して，

$$b(t)\in D(A^{\frac{1}{2}})\cap K(t),\ \text{a.e. } t\in[0,T]\quad かつ\quad A^{\frac{1}{2}}b\in L^1(0,T;H)$$

を満たす。

(A.3)　任意の$x\in H$に対して，$P(\cdot)x:[0,T]\to H$は強可測関数である。

(A.4) ある連続関数 $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ が存在して，任意の $h \in]0,T[$ と任意の $v \in C([0,T];H)$ に対して，次を満たす。

$$\int_0^{T-h} |P(\tau+h)v(\tau) - P(\tau)v(\tau)|^2 d\tau \leq h^2 \omega\left(\sup_{t\in[0,T]} |v(t)| \right)$$

(E)の強解を次のように定義する。

［定義］ 関数 $u : [0,T] \to H$ が次の条件(S.1)～(S.4)を満たすとき，uは(E)の強解であるという。

(S.1) $u \in C^1([0,T];H)$ かつ $\frac{du}{dt}$は$[0,T]$で強絶対連続，

(S.2) a.e. $t \in [0,T]$に対して， $u(t) \in D(A)$ かつ $\frac{du}{dt}(t) \in K(t)$，

(S.3) a.e. $t \in [0,T]$に対して，

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + Au(t) + \partial I_{K(t)}\left(\frac{du}{dt}(t)\right) \ni f(t),$$

(S.4) $u(0) = u_0$ かつ $\frac{du}{dt}(0) = v_0$.

次の定理が成り立つ。

［定理］ 前述の条件に加えて，$u_0 \in D(A)$，$v_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}) \cap K(0)$ かつ $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ ならば，(E)の強解 uが唯一つ存在する。さらに，uは次の性質をもつ。

(i) $Au \in L^\infty(0,T;H)$

(ii) 任意の$t \in [0,T]$に対して $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}})$ かつ $A^{\frac{1}{2}}u \in C([0,T];H)$

(iii) a.e. $t \in [0,T]$に対して $\frac{du}{dt}(t) \in D(A^{\frac{1}{2}})$ かつ $A^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$

(iv) $\frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0,T;H)$

$K(t)$が時間に依存しない一定の凸閉集合である場合の，(E)の強解の存在と一意性については H. Brézis[3] で，regularity については，V. Barbu[1] で扱われている。これらの結果は V. Barbu[2] で紹介されている。さらに，H. Brézis[3] では この場合の(E)の弱解についても扱っている。

定理で用いた仮定は，H. Brézis[4] のものを用いた。

§.2. 定理の証明

一意性の証明は簡単なので省略する。

強解の存在を示すために、$\varepsilon>0, \lambda>0$ に対して、次の近似方程式を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u_{\varepsilon,\lambda}}{dt^2}(t) + A_\varepsilon u_{\varepsilon,\lambda}(t) + B_\lambda^t \dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt}(t) = f(t) & \text{a.e. } t\in[0,T] \\ u_{\varepsilon,\lambda}(0)=u_0, \quad \dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt}(0)=v_0 \end{cases}$$

ここで、A_ε と B_λ^t は それぞれ A と $\partial I_{K(t)}$ の吉田近似である。つまり

$$A_\varepsilon = A(1+\varepsilon A)^{-1}, \qquad B_\lambda^t = \frac{1}{\lambda}\{1-P(t)\}.$$

$A_\varepsilon x$ と $B_\lambda^t x$ は共に x について *Lipchitz* だから、(1)が解 $u_{\varepsilon,\lambda}$ をもち、$u_{\varepsilon,\lambda}\in C^1([0,T];H)$ と $\dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt}$ が $[0,T]$ で強絶対連続であることがわかる。$u_{\varepsilon,\lambda}$ に対して、次の補題が成り立つ。

[補題1] (i) $|u_{\varepsilon,\lambda}(t)|\leqq C_1$ (ii) $\left|\dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt}(t)\right|\leqq C_2$

ここで C_1, C_2 は $\varepsilon,\lambda>0$, $t\in[0,T]$ に依存しない定数である。

証明 $b:[0,T]\to H$ を条件(A.2)を満たす関数とする。A_ε の平方根を $A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ で表し、B_λ^t の単調性を考慮すると、a.e. $s\in[0,T]$ に対して、次を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\left|\frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}-b\right|^2+|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon,\lambda}|^2\right\} \\
&=\left(\frac{d^2u_{\varepsilon,\lambda}}{ds^2}-\frac{db}{ds}, \frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}-b\right)+\left(A_\varepsilon u_{\varepsilon,\lambda}, \frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}\right) \\
&=\left(f-A_\varepsilon u_{\varepsilon,\lambda}-B_\lambda^s\frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}-\frac{db}{ds}, \frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}-b\right)+\left(A_\varepsilon u_{\varepsilon,\lambda}, \frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}\right) \\
&\leqq\left(f-\frac{db}{dt}, \frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}-b\right)+\left(A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon,\lambda}, A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}b\right) \\
&\leqq\sqrt{2}\left(|f|+\left|\frac{db}{ds}\right|+|A^{\frac{1}{2}}b|\right)\left(\left|\frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{ds}-b\right|^2+|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon,\lambda}|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

上式の両辺を $[0,t]$ で積分して、Gronwall の補題(H.Brézis [5]の付録の補題A.5)を適用すると、(ii)が成り立つことがわかる。(i)は(ii)より示せる。

〔補題2〕 任意の $t\in[0,T]$ に対して

$$\int_0^t \left(B_\lambda^s \frac{du_{\varepsilon\lambda}}{ds}(s), \frac{d^2u_{\varepsilon\lambda}}{ds}(s)\right)ds \geq -C_3\left(\int_0^t \left|B_\lambda^s \frac{du_{\varepsilon\lambda}}{ds}(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。ここで，C_3 は ε, λ, t に依存しない正の定数である。

証明　　簡単のために，$\frac{du_{\varepsilon\lambda}}{dt} = v_{\varepsilon,\lambda}$ とおく。

$$(2)\quad \frac{1}{2\lambda}|(1-P(s+h))v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)|^2 - \frac{1}{2\lambda}|(1-P(s))v_{\varepsilon,\lambda}(s)|^2$$

$$-\left(\frac{1}{\lambda}(1-P(s))v_{\varepsilon,\lambda}(s), v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)-v_{\varepsilon,\lambda}(s)\right) = \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}$$

ここで，I, II, III はそれぞれ次式で与えられる。

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\lambda}|(1-P(s+h))v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)|^2 - \frac{1}{2\lambda}|(1-P(s+h))v_{\varepsilon,\lambda}(s)|^2$$
$$-\left(\frac{1}{\lambda}(1-P(s+h))v_{\varepsilon,\lambda}(s), v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)-v_{\varepsilon,\lambda}(s)\right)$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{2\lambda}|(1-P(s+h))v_{\varepsilon,\lambda}(s)|^2 - \frac{1}{2\lambda}|(1-P(s))v_{\varepsilon,\lambda}(s)|^2$$

$$\mathrm{III} = \left(\frac{1}{\lambda}(1-P(s+h))v_{\varepsilon,\lambda}(s), v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)-v_{\varepsilon,\lambda}(s)\right)$$
$$-\left(\frac{1}{\lambda}(1-P(s))v_{\varepsilon,\lambda}(s), v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)-v_{\varepsilon,\lambda}(s)\right).$$

射影作用素 $P(t)$ は，各 $t\in[0,T]$ に対して

$$0 \leq \frac{1}{2}|x-P(t)x|^2 - \frac{1}{2}|y-P(t)y|^2 - (y-P(t)y, x-y)$$
$$\leq |x-y|^2 \qquad \forall x, y\in H$$

を満たすから，これを I に用いると

$$\mathrm{I} \leq \frac{1}{\lambda}h^2 \sup_{0\leq t\leq T}\left\{\left|\frac{dv_{\varepsilon,\lambda}}{dt}(t)\right|^2\right\}$$

が成り立つことがわかる。また，II および III については，

$$\mathrm{II} \leq |P(s+h)v_{\varepsilon,\lambda}(s) - P(s)v_{\varepsilon,\lambda}(s)||B_\lambda^s v_{\varepsilon,\lambda}(s)|$$
$$+\frac{1}{2\lambda}|P(s+h)v_{\varepsilon,\lambda}(s) - P(s)v_{\varepsilon,\lambda}(s)|^2$$

$$\mathrm{III} \leqq \frac{1}{\lambda}|P(s+h)v_{\varepsilon,\lambda}(s)-P(s)v_{\varepsilon,\lambda}(s)||v_{\varepsilon,\lambda}(s+h)-v_{\varepsilon,\lambda}(s)|$$

が成り立つことがわかる。これらに注意して，(2)の両辺を $[0,t-h]$ $(0<h<t)$ で積分して，条件(A.4)を用いてから，両辺を h で割って $h\to 0$ とすると，補題が成立することがわかる。

[補題3] $\quad \left\| B_\lambda^t \dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_4\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

ここで，C_4 は ε，λ に依存しない定数である。

証明　(1)の両辺に $B_\lambda^t \dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt}$ をかけて，$[0,T]$ で積分して，A_ε の有界性，補題1(i)と補題2を用いると，この補題は示せる。

補題3を用いて，H. Brézis [5] の定理3.1と同様な手法を用いて，$\varepsilon>0$ を固定して，$\lambda\to 0$ としたとき，次のことが成り立つのがわかる。

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,\lambda} \longrightarrow u_\varepsilon & \textit{strongly in } C([0,T];H) \\ \dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt} \longrightarrow \dfrac{du_\varepsilon}{dt} & \textit{strongly in } C([0,T];H) \\ \dfrac{du_\varepsilon}{dt} \text{ は } [0,T] \text{ で強絶対連続} & \\ \dfrac{d^2u_{\varepsilon,\lambda}}{dt^2} \longrightarrow \dfrac{d^2u_\varepsilon}{dt^2} & \textit{strongly in } L^2(0,T;H) \\ B_\lambda^t \dfrac{du_{\varepsilon,\lambda}}{dt} \longrightarrow w_\varepsilon & \textit{strongly in } L^2(0,T;H) \end{cases}$$

さらに，u_ε と w_ε は次の関係を満たす。

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u_\varepsilon}{dt^2}(t) + A_\varepsilon u_\varepsilon(t) + w_\varepsilon(t) = f(t) \quad \text{a.e. } t\in[0,T] \\ \dfrac{du_\varepsilon}{dt}(t)\in K(t) \quad \text{a.e. } t\in[0,T] \quad \text{かつ} \quad w_\varepsilon(t)\in \partial I_{K(t)}\left(\dfrac{du_\varepsilon}{dt}(t)\right) \quad \text{a.e. } t\in[0,T] \\ u_\varepsilon(0)=u_0,\quad \dfrac{du_\varepsilon}{dt}(0)=v_0 \end{cases}$$

(3)の u_ε に対して，次の補題が成り立つ。

[補題4] (i) $|A_\varepsilon u_\varepsilon(t)| \leq C_5$. (ii) $\sqrt{\varepsilon}\,|A_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dt}(t)| \leq C_6$.
(iii) $|A^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon A)^{-1}\frac{du_\varepsilon}{dt}(t)| \leq C_7$. (iv) $\|\frac{d^2u_\varepsilon}{dt^2}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_8$.

ここで，C_5, C_6, C_7, C_8 は ε, t に依存しない定数である。

証明　補題2で $\lambda \to 0$ とした式に (3)の第1式を考慮すると，

$$(4) \quad \int_0^t \left|\frac{d^2u_\varepsilon}{ds^2}(s)\right|^2 ds \leq M_1\left(1+\int_0^t |A_\varepsilon u_\varepsilon(s)|^2 ds\right) \quad \forall t\in[0,T]$$

を得る。ここで M_1 は ε, t に依存しない定数である。一方，$\partial I_{K(t)}$ の定義より，a.e. $t\in[0,T]$ に対して

$$\left(\frac{d^2u_\varepsilon}{dt^2}(t) + A_\varepsilon u_\varepsilon(t) - f(t),\ \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) - v\right) \leq 0, \quad \forall v\in K(t).$$

が成り立つ。条件(A.1)を考慮して，上式で $v=(1+\varepsilon A)^{-1}\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(t)+\varepsilon a(t)\right)$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\left\{|A_\varepsilon u_\varepsilon|^2 + \left(\frac{du_\varepsilon}{dt}, A_\varepsilon\frac{du_\varepsilon}{dt}\right)\right\}$$
$$\leq 2\left(f, A_\varepsilon\frac{du_\varepsilon}{dt}\right) + \left|\frac{d^2u_\varepsilon}{dt^2}\right|^2 + |A_\varepsilon u_\varepsilon|^2 + |f|^2 + 3|a|^2$$

を得る。この式の両辺を $[0,t]$ で積分して，右辺の第1項を部分積分して，(4)を用いてから，Gronwallの不等式（H.Brézis [5] の付録の補題A.4）を用いると，

$$|A_\varepsilon u_\varepsilon(t)|^2 + \left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(t), A_\varepsilon\frac{du_\varepsilon}{dt}(t)\right) \leq M_2, \quad \forall t\in[0,T]$$

を得る。ここで M_2 は ε, t に依存しない定数である。これより，(i)が成り立つ。
(ii)と(iii)は上式に

$$(x, A_\varepsilon x) = \varepsilon|A_\varepsilon x|^2 + |A^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon A)^{-1}x|^2 \quad \forall x\in H,\ \varepsilon>0$$

が成立すること考慮すれば得られる。(iv)は (i)と(4)より得られる。

再び，強解の存在証明にもどる。$\varepsilon, \delta > 0$ とする。(4)と $\partial I_{K(t)}$ の単調性より，次式が成り立つのがわかる。

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\left|\frac{du_\varepsilon}{ds}-\frac{du_\delta}{ds}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon A)^{-1}u_\varepsilon - A^{\frac{1}{2}}(1+\delta A)^{-1}u_\delta\right|^2\right\}$$

(5)
$$\leq -\left(A_\varepsilon u_\varepsilon - A_\delta u_\delta,\ \varepsilon A_\varepsilon\frac{du_\varepsilon}{ds} - \delta A_\delta \frac{du_\delta}{ds}\right)$$
$$\leq \left(|A_\varepsilon u_\varepsilon| + |A_\delta u_\delta|\right)\left(\varepsilon\left|A_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{ds}\right| + \delta\left|A_\delta\frac{du_\delta}{ds}\right|\right)$$

この式を $[0,t]$ で積分して、補題4の(i),(ii)を考慮すると，$\varepsilon\to 0$ のとき

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{strongly in } C([0,T];H)$$
$$\frac{du_\varepsilon}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt} \quad \textit{strongly in } C([0,T];H)$$

が成立することがわかる。さらに 補題4の(iv)から

$\frac{du}{dt}$ は $[0,T]$ で 強絶対連続

であることと、$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ を満たす数列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在して，$n\to\infty$ のとき，

(6) $$\frac{d^2 u_{\varepsilon_n}}{dt^2} \longrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} \quad \textit{weakly in } L^2(0,T;H)$$

が成立することもわかる。以下、極大単調作用素の良く知られた手法を用いて、

$$u(t)\in D(A) \quad \text{and} \quad \frac{du}{dt}(t)\in K(t) \qquad \text{a.e. } t\in[0,T]$$
$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + Au(t) + \partial I_{K(t)}\left(\frac{du}{dt}(t)\right) \ni f(t) \qquad \text{a.e. } t\in[0,T]$$

も示せる。これは、u が (E)の強解であることを意味する。

定理の(i)は 補題4の(i)より示せる。(5)を $[0,t]$ で積分して，補題4の(i),(ii) を考慮すると，$\varepsilon\to 0$ のとき

$$A^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon A)^{-1}u_\varepsilon \longrightarrow v \quad \textit{strongly in } C([0,T];H)$$

がわかる。これに $A^{\frac{1}{2}}$ が閉作用素であることを考慮すると 定理の(ii)が示せる。定理の(iii)は，補題4の(iii)と 極大単調作用素が demiclosed であることから示せる。 定理の(iv)は (6)より成り立つ。

§.3. 定理の適用

Ωは$\mathbb{R}^n$の有界領域で，その境界$\partial\Omega$は十分なめらかであるとする。$Q=]0,T[\times\Omega$，$\Sigma=]0,T[\times\partial\Omega$とおく。関数$\psi\in L^2(0,T;H^2(\Omega))$は，

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\in L^2(Q), \qquad \psi(t,x)\leqq 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma$$

を満たすものとする。このとき，次の双曲型片側境界値問題を考える。

$$(\mathrm{U})\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\geqq\psi & \text{a.e. on } Q \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u+f & \text{a.e. on } \left\{(t,x)\in Q;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}>\psi\right\} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\geqq\Delta u+f & \text{a.e. on } \left\{(t,x)\in Q;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi\right\} \\ u(t,x)=0 & \text{a.e. on } \Sigma \\ u(0,x)=u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=v_0(x) & \text{a.e. on } \Omega \end{cases}$$

次の系が成り立つ。

［系］ 関数$u_0(x)$, $v_0(x)$, $f(t,x)$がそれぞれ，

$$u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \quad v_0\in H_0^1(\Omega), \quad v_0(x)\geqq\psi(0,x) \ \text{a.e. on } \Omega$$

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial t}\in L^2(Q)$$

を満たすならば，(U)は唯一つの解$u(t,x)$をもち，

$$u\in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in L^2(Q)$$

が成り立つ。

系の証明　　$H=L^2(\Omega)$とし，$A=-\Delta$, $D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$とおく。このとき，$D(A^{\frac{1}{2}})=H_0^1(\Omega)$となる。さらに，各$t\in[0,T]$に対して，

$$K(t)=\{u\in L^2(\Omega);\ u(x)\geq \psi(t,x)\quad \text{a.e. } x\in\Omega\}$$

とおいて．定理を適用する。

仮定(A.1)は，$a(t)=-\Delta\psi(t,x)$ とおくと成立する。なぜなら，$u\in K(t)$ とし，$v=(1+\varepsilon A)^{-1}(u-\varepsilon\Delta\psi)$ とおくと．$u-v=\varepsilon\Delta(\psi-v)$ を得る。この式に $(\psi-v)^+=\max\{0,\psi-v\}$ をかけて，Ω で積分して，Greenの公式を用いて．$u-\psi\geq 0$ a.e. on Ω に注意すると，

$$\int_\Omega |(\psi-v)^+|^2dx$$
$$=-\varepsilon\int_\Omega |\mathrm{grad}(\psi-v)^+|^2dx-\int_\Omega(\psi-v)^+(u-\psi)dx\leq 0$$

を得る。これは，$v\geq\psi$ a.e. on Ω，つまり，$v\in K(t)$ を意味する。

仮定(A.2)は，$b(t)=\max\{0,\psi(t,x)\}$ とおくと成立する。

$P(t)v(x)=\max\{v(x),\psi(t,x)\}$ であるから，仮定(A.3)は明らかに成立する。

$$\|P(t+h)v-P(t)v\|_{L^2(\Omega)}\leq\|\psi(t+h)-\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}\qquad \forall v\in L^2(\Omega)$$

が成り立つことに注意して，Schwartzの不等式や積分の順序交換を使うことによって，任意 $v\in C([0,T];H)$ と任意の $h\in\,]0,T[$ に対して

$$\int_0^{T-h}\|P(t+h)v(t)-P(t)v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\leq h^2\int_0^T\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt$$

が成立するのがわかる。これは仮定(A.4)が成立することを意味する。

したがって 定理を適用すると．(E)の強解 u が唯一つ存在することがわかる。$\partial I_{K(t)}$ の定義より，a.e. $t\in[0,T]$ に対して

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in K(t),$$
$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\Delta u-f\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-v\right)dx\leq 0\qquad\forall v\in K(t)$$

が成り立つ。この u が一般化された意味での (U)の解になっていることは，V. Barbu[2]の chapter IV の系3.4と同様の方法によって示せる。

参考文献

[1] V. Barbu, *On the regularity of solutions of hyperbolic nonlinear equations*, Ann. Math. Pura Appl. 45 (1973), 303-319.

[2] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and defferential equations in Banach spaces*, Noodhoff International Publ., 1976.

[3] H. Brézis, *Problém unilatéraux*, J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 1-164.

[4] H. Brézis, *Un problém d'évolution avec contraintes unilatérales depéndant du temps*, C. R. Acard. Sci. Paris 274 (1972), 310-312.

[5] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contraictions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973.

反応拡散系の2次元定常パターン

—— 定常二相自由境界問題との関連 ——

広島大学・理学部　伊藤正年

§1. 問題とその由来

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bdd, $\Sigma \equiv \partial\Omega$ smooth.

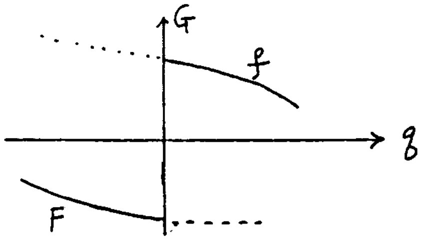
(1.1) $$\Delta q + G(q) = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

(1.2) $$\partial q/\partial N = 0 \qquad \text{on } \Sigma.$$

を考える。 N は Σ の外向き単位法線. ここで G は $q=0$ で不連続な関数で,

$$G(q) = \begin{cases} f(q) & q>0, \\ F(q) & q<0, \end{cases}$$

$f, F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\quad F<0<f$ $\quad$, $f', F' \le 0$.



定義 1.

q が (1.1), (1.2) の解とは

$q \in C^1(\mathbb{R})$, $\qquad \min q < 0 < \max q$

q は (1.2) を満し, $\Omega \setminus \{x : q(x)=0\}$ で (1.1) を満す。

問題0　(1.1)(1.2)の解を求めよ。

問題の由来：　反応拡散系

$$(1.3)\quad \partial p/\partial t = d\Delta p + P(p,q) \qquad \text{in } \Omega,\ t>0$$

$$(1.4)\quad \partial q/\partial t = \Delta q + Q(p,q) \qquad \text{in } \Omega,\ t>0$$

$$(1.5)\quad \cancel{\partial q}\ \partial p/\partial N = \partial q/\partial N = 0 \qquad \text{on } \Sigma\ \ t\geq 0$$

は、2種（p,qはそれぞれの濃度）が相互作用P,Qをしながらそれぞれ拡散するモデルとして諸科学に現れる系である。(1.5)は種がΩ内に閉じこめられている状況と考えられる。このモデルの興味ある特徴の一つに自励系でかつ拡散をもちながら、空間的に非一様な定常解が出現するということがある。((Prigogine & Gransdorff) [7]) それは pが自己触媒反応機構をもち、かつdが十分小さい~~場合~~に起ると考えられている。P,Qはp,q平面で下図の様な挙動をすると仮定する。

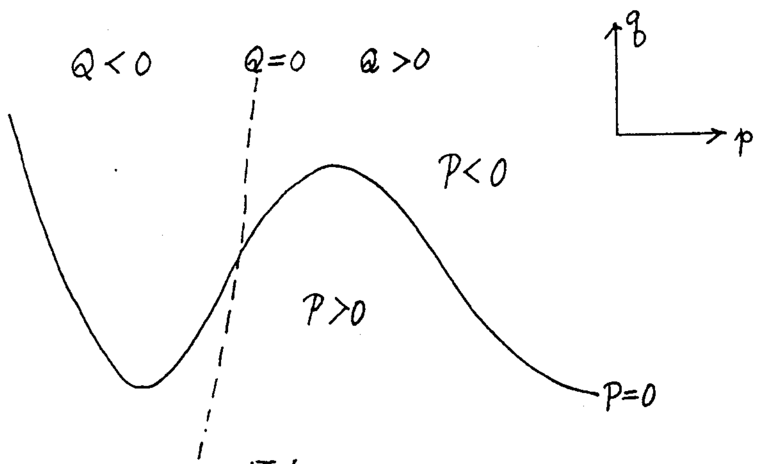


図1.

P=0の曲線がS字形をしていることに注意。

この時数値計算では付録の図の様なパターンが現われている。

この様な定常解の存在が数学的に言えるであろうか？
そこで (1.3)〜(1.4) の定常解問題を考える ($\partial p/\partial t = \partial q/\partial t = 0$)

実は $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ (区間) の場合には (1.3)〜(1.4) の定常解で空間的に大きな振幅をもつものの存在が知られている. (Fife [5], Mimura, Tabata & Hosono [15]). 我々はこれを $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の場合に拡張することを目的とする. 一次元の場合の approach を振りかえってみると.

1) $0<d \ll 1$ なので, 近似問題として $d=0$ をまず考える.

(1.6) $$P(p,q) = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

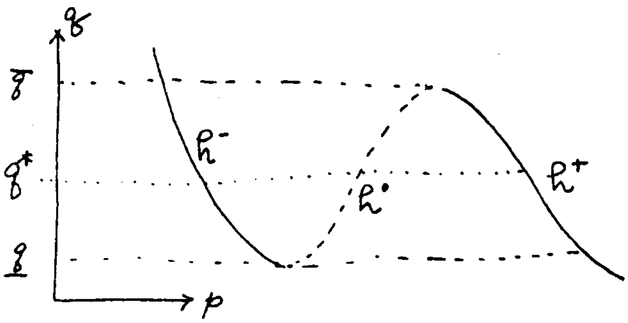
(1.7) $$\Delta q + Q(p,q) = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

(1.8) $$\frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{on } \Sigma.$$

(1.6) が p について解ければ $p = h(q)$ として (1.7) に代入

(1.9) $$\Delta q + Q(h(q), q) = 0$$

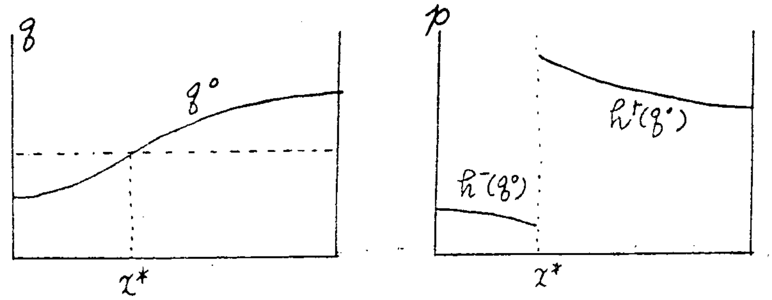
with (1.8) という スカラー方程式の問題となる. ところが (1.6) は S字曲線であったので $h(q)$ は三価となる. 枝を下図の様に h^-, h^0, h^+ とする.



q^* を h が三価となる区間 $I = (\underline{q}, \bar{q})$ 内にとって.

$$h(q) = \begin{cases} h^+(q) & q > q^* \\ h^-(q) & q < q^* \end{cases}$$

とする (Mimura [13]). この様な h に対し. (1.9) は $q = q^*$ で不連続な non-linearity をもつ方程式となるが. その C^1-級の解 q^0 は $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ の場合, 求積法により求められ. $p^0 = h(q^0)$ は不連続となる。



2). $0 < d \ll 1$ の場合, 上で求められた q^0, p^0 が (1.3)~(1.5)の定常解を近似していることが示される. 即ち.

$$J(q) \equiv \int_{h^-(q)}^{h^+(q)} P(p, q)\,dq$$

とするとき.

定理. $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ (区間). $J(q^*) = 0$, $J'(q^*) \neq 0$ とする.

$0 < d \ll 1$ のとき.

$$(SP) \begin{cases} d\Delta p + P(p, q) = 0 \\ \Delta q + Q(p, q) = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial N} = \dfrac{\partial q}{\partial N} = 0 \end{cases}$$

の解 p^d, q^d で

$d \to 0$ のとき

$$p^d \to p^0 \qquad \Omega \setminus \{x^* : q^0(x^*) = q^*\} \text{ で広ギ一様}$$

$$q^d \to q^0 \qquad \Omega \text{ で一様}$$

なるものが存在する　(Mimura et. al [15]).

Ω が一次元区間の場合は 求積法で (1.9) with (1.8) の解が得られたが, Ω が二次元領域では それを~~直接~~拡張できない。
そこで (1.9) (1.8) が問題となる. $q^* = 0$ と平行移動し, $G(q) = Q(R(q), q)$ としたものが (1.1), (1.2) である。

§2. 問題の reformulation.

問題 0 は Ω が円, 解 q が円対称の時には, 求積法でとける.
そこで Ω を摂動した時 解は連続的に存在するであろうか.

仮定1. Ω_0 円. q_0 を $\Omega = \Omega_0$ に対する (1.1)(1.2) の解とする

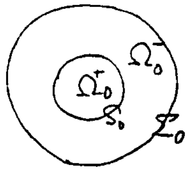
$S_0 = \{x \mid q_0(x) = 0\}$. $\qquad \Omega_0^{\pm} = \{x : q(x) \gtrless 0\}$

仮定2. $\overline{\Omega_0^+} \subset \Omega_0$

即5. $U_0 = q_0|_{\Omega_0^-}$, $u_0 \equiv q_0|_{\Omega_0^+}$ とかくと

(2.1)	$\Delta u_0 + f(u_0) = 0$	in Ω_0^+
(2.2)	$\Delta U_0 + F(U_0) = 0$	in Ω_0^-
(2.3)	$u_0 = U_0 = 0$	on S_0
(2.4)	$\partial U_0 / \partial N^0 = 0$	on $\Sigma_0 = \partial\Omega_0$
(2.5)	$\partial u_0 / \partial n^0 = \partial U_0 / \partial N^0$	on S_0

n° は S_0 の，N° は Σ_0 の外向き単位法線．



注．u_0, U_0 は C^∞ 級．

Notation: φ, ψ を それぞれ S_0, Σ_0 上の関数とする．

$$S_\varphi = \{\Phi(s) \equiv s + \varphi(s) n^\circ(s) : s \in S_0\}, \quad \Sigma_\psi = \{\Psi(\sigma) \equiv \sigma + \psi(\sigma) N^\circ(\sigma) : \sigma \in \Sigma_0\}$$

それぞれの外向き単位法線を n, N とする，Ω を Σ_ψ で囲まれる領域．
Ω^+ を S_φ で囲まれる領域　$\Omega^- = \Omega \setminus \{\Omega^+ \cup S_\varphi\}$．

問題1.　仮定1,2の下で，与えられた ψ に対し，以下を満たす φ, u, U を求める．

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega^+ \tag{2.6}$$

$$\Delta U + F(U) = 0 \quad \text{in } \Omega^- \tag{2.7}$$

$$u = U = 0 \quad \text{on } S \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0 \quad \text{on } \Sigma \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S. \tag{2.10}$$

注意　(2.6)(2.7),(2.8)より．Maximum Principle から．$u>0$, $U<0$ となり

$$g = \begin{cases} u & \text{in } \Omega_+ \\ U & \text{in } \Omega^- \end{cases}$$

とおけば，(2.10)より　$g \in C^1(\overline{\Omega})$ となり　g は (1.1),(1.2)の解となる。

注意　問題1 は いわゆる定常二相自由境界問題．

§3　解法と定理

もしも，φ，ψ が与えられているとすると，(2.6)〜(2.9) は Ω^+，Ω^- 上での u，U に関する 半線形楕円型境界値問題であり，これが解けると，(2.10) が成立するか否かが問題となる．

$$\Gamma(\varphi,\psi) \equiv \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}$$
$$= \langle n, (\nabla u - \nabla U)\circ\Phi \rangle \qquad \text{on } S_0$$

とおくと，次が成立する．

定理 3.1　　$\varepsilon > 0$，　$a \geq \varepsilon$　non integer

$\varphi \in H^{a+2}(S_0)$，$\psi \in H^{a+2}(\Sigma_0)$，$\|\varphi\|_{2+\varepsilon} + \|\psi\|_{2+\varepsilon}$ 十分小

$\Rightarrow$

(2.6)〜(2.9) の解 u，U が u_0，U_0 の十分近くで一意に存在して，

$$\Gamma : \overset{a+2}{V} \subset H^{a+2}(S_0) \times H^{a+2}(\Sigma_0) \longrightarrow H^{a+1}(S_0)$$

で C^2-級．

ここで $H^a(D)$ は D 上で $[a]$ 回連続微分可，その導関数が指数 $a-[a]$ の Hölder 連続な関数の全体．($V^{a+2} = \{ (\varphi,\psi) \in H^{a+2}(S_0) \times H^{a+2}(\Sigma_0) : \|\varphi\|_{2+\varepsilon} + \|\psi\| < d \}$　d は十分小．$\|\ \|_a$ はそのふつうの Hölder norm)

したがって 問題1は，

問題 2．　与えられた ψ に対し　$\Gamma(\varphi,\psi)=0$ を満す φ を求めよ

と表わされる．　仮定2により　$\Gamma(0,0)=0$ に注意せよ．

結果を述べるために、Diffraction problem $(DP)_0$ を導入する。

$$
(DP)_0 \begin{cases}
\Delta v + f'(u_0)v = 0 & \text{in } \Omega_0^+ \\
\Delta V + F'(U_0)V = 0 & \text{in } \Omega_0^- \\
v = V & \text{on } S_0 \\
v - \alpha^0 \left(\dfrac{\partial U}{\partial n^0} - \dfrac{\partial V}{\partial n^0}\right) = 0 & \text{on } S_0 \\
\dfrac{\partial V}{\partial N^0} = 0 & \text{on } \Sigma_0
\end{cases}
$$

ここで v, V が unknown. $\alpha_0 = \dfrac{\partial u^0}{\partial n^0} \Big/ (F(0) - f(0))$.

定理 (Main).

$(DP)_0$ の解は $v = V = 0$ に限るとする。

$\varepsilon > 0$. $a > \varepsilon$ noninteger

$\Rightarrow$

$\exists D^{a+b} \subset H^{a+b}(\Sigma_0)$ nbd of the origine

$\exists \pi : D^{a+b} \to H^{a+\varepsilon}(S_0)$

s.t. $\Gamma(\pi(\psi), \psi) = 0 \quad \forall \psi \in D^{b+a}$

さらに $\psi \in D^{a+b} \cap C^\infty \Rightarrow \pi(\psi) \in C^\infty$.

これは、Nash-Moser 型陰関数定理 (Zehnder [21]) を用いて示されるが、以下では、"$(DP)_0$ の一意性を仮定すること" 及び "古典的なものではなく Nash-Moser 型の陰関数定理を必要とすること" を形式的な approach によって簡単に示す。

$\Gamma(0,0) = 0$ の下で 問題 即ち $\Gamma(\varphi, \psi) = 0$ なる φ を求める問題は 陰関数定理の得意とするところであるが その キーポイントは $D_\varphi \Gamma(0,0)$ (Γ の φ に関する Frechet 微分) の有界な可逆性を示す

ことにある。 $D_\varphi\Gamma(0.0)$ は何か、その逆、$\delta\Gamma = D_\varphi\Gamma(0.0)\delta\varphi$ を解くとは何かをみてみよう。 Γ の定義より

$$(3.1)\qquad \begin{aligned}\delta\Gamma &= D_\varphi\Gamma(0,0)\delta\varphi \\ &= \langle \delta n, (\nabla u_0 - \nabla U_0)\rangle \\ &\quad + \langle n_0, \nabla\delta u - \nabla\delta U\rangle \\ &\quad + \langle n_0, (D^2 u_0 - D^2 U_0)n_0\rangle\delta\varphi.\end{aligned}$$

ここで $D^2 u_0$ は u_0 の Hessian. δu, δU は

$$(3.2)\qquad \Delta\delta u + f'(u_0)\delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega_0^+$$

$$(3.3)\qquad \Delta\delta U + F'(U_0)\delta U = 0 \qquad \text{in } \Omega_0^-$$

$$(3.4)\qquad \delta u + \langle n_0, \nabla u_0\rangle\delta\varphi = 0 \qquad \text{on } S_0$$

$$(3.5)\qquad \delta U + \langle n_0, \nabla U_0\rangle\delta\varphi = 0 \qquad \text{on } S_0$$

$$(3.6)\qquad \partial\delta U/\partial N^0 = 0 \qquad \text{on } \Sigma_0$$

の解である.

補題 3.2.

- $\langle n_0, \delta n\rangle = 0$, したがって $\langle \delta n, \nabla u_0 - \nabla U_0\rangle = 0$
- $\langle n_0, (D^2 u_0 - D^2 U_0)n_0\rangle = F(0) - f(0) < 0$

これより (3.1) は

$$(3.7)\qquad \delta\varphi = \frac{\delta\Gamma}{F(0)-f(0)} - \frac{1}{F(0)-f(0)}\langle n_0, \nabla\delta u - \nabla\delta U\rangle$$

$\delta\Gamma = D_\varphi\Gamma(0.0)\delta\varphi$ を $\delta\varphi$ に関して解くために (3.7)を用いて (3.4)(3.5)から $\delta\varphi$ を消去すると.

$$(3.8)\qquad \delta u = \delta U$$

$$(3.9)\qquad \delta u = -\alpha^\circ \langle n_0, \nabla \delta u - \delta U\rangle = -\alpha^\circ \delta\Gamma .$$

したがって 境界条件 (3.8), (3.9), (3.b) の下で (3.2),(3.3) を満す δu, δU が とければ それを(3.7)に代入して $\delta\varphi$ が $\delta\Gamma$に就いて解けたことになる. (3.2),(3.3),(3.8),(3.9),(3.b)は Diffraction problem と呼ばれ (Ladyzhenskaya & ~~Uraltzev~~ Ural'tseva [9]) 一意性と可解性の同値性が知られている. ($\alpha^\circ<0$のときは可解であるが. 今は $\alpha^\circ>0$). したがって 主定理では (DP)$_0$の一意性の仮定が必要になる. また. $D_\varphi\Gamma(0,0)$ は $H^{a+2}(S_0)\to H^{a+1}(S_0)$ であるが (3.7) より $D_\varphi\Gamma(0,0)^{-1}$ は $H^{a+1}(S_0)\to H^{a+2}(S_0)$ は期待出来ない. 高々 $H^{a+2}(S_0)\to H^{a+2}(S_0)$ であろう. これは 古典的な陰関数定理の適用外にある. この様な "Derivative loss" のため Nash-Moser 型の陰関数定理を用いることになる。

§4. 例.

(DP)$_0$ の一意性 必要十分条件が explicit に表わされる例をあげる。

$$P(p,q) = (p-kq)(p^2-1)$$
$$Q(p,q) = (p-b)$$

ここで $k>0$, $|b|<1$ は constant. $q^*=0$ で

$$h(q) = \begin{cases} 1 & 0<q<k \\ -1 & -k<q<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta q + G(q) = 0 & |x|<\ell . \\ \partial q/\partial|x| = 0 & |x|=0 \end{cases}$$

を考える. $G = \begin{cases} 1-b & 0<q<k \\ -1-b & -k<q<0 . \end{cases}$

$$k > \frac{(1-b^2)}{8} l \max\left(1, \frac{2}{1-b} \log\left(\frac{2}{1+b} - 1\right)\right)$$

で 円対称な解 g_0

$$g_0(\rho) = \begin{cases} u_0(\rho) = C - \dfrac{1-b}{4}\rho^2 & \rho = |x| < l_+ \\ U_0(\rho) = \dfrac{1+b}{4}(\rho^2 - l_+^2) - l_+^2 \log \dfrac{\rho}{l_+} & l_+ < \rho < l \end{cases}$$

をもつ． ここで $C = (1-b^2)l^2/8$， $l_+ = 2\sqrt{q(1-b)}$．

このとき $(DP)_0$ は

$$(DP)_0 \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } |x| < l_+ \\ \Delta V = 0 & \text{in } l_+ < |x| < l \\ v = V & \text{on } |x| = l_+ \\ v - \alpha^0 (\partial v/\partial \rho - \partial V/\partial \rho) = 0 & \text{on } \quad " \\ \dfrac{\partial V}{\partial \rho} = 0 & \text{on } |x| = l \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \frac{\partial g_0}{\partial \rho} \Big/ (F(0) - f(0)) = (1-b)l_+/4.$$

と表わされる．

定理4.1．

$$\exists \{b_j\}_{j=2}^{\infty} \quad \text{s.t.} \quad -1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_j < \cdots < 1$$

$$\lim_{j\to\infty} b_j = 1$$

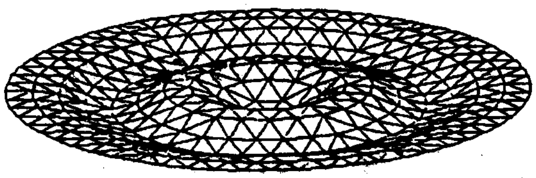
$(DP)_0$ の 解が $v = V = 0$ ~~___~~ に 限られるための必要十分条件は

$$b \neq b_j \quad (j = 2, 3, \cdots)$$

$$p_t = d_1 \Delta p + \{f(p) - q\} p$$
$$q_t = d_2 \Delta q + \{g(q) - p\} q$$

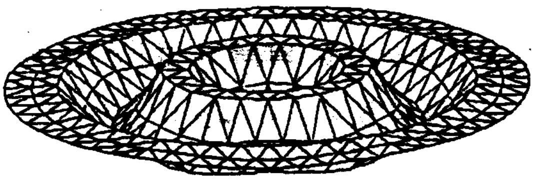
$f(p) = \frac{1}{9}(35 + 16p - p^2)$

$g(q) = 1 + \frac{2}{5} q$



$\# q \quad (t \to +\infty)$

D1 = 0.500000 D2 = 10.000000



$\# p \quad (t \to +\infty)$

D1 = 0.500000 D2 = 10.000000

References.

[1] Aris, R., The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysis I and II , Clarendon Press, Oxford.

[2] Dubois, D. M., Simulation of the spatial structuration of a patch of prey- predator plankton populations in the Southern bright of the Noth sea, Memoires Societe Royale des Sciences de Liege, 6^{e} serie, 7,(1975) 75-82.

[3] Dervieux, A. Perturbation des equations d'equilibre d'un plasma confine; comportent de la frontiere libre, etude de branches de solutions, INRIA Rapports de Recherche N^{o} 18.

[4] Fife, P., Mathematical aspcts of reacting and diffusing system, Lecture Note in Biomath. 28.(1979), Springer- Verlag, Berlin and New York.

[5] Fife, P., Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second order differential equations, J. Math . Anal. and Appls. 54, (1976) 497-521.

[6] Gierer, A. and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetika 12 , (1974) 30-39.

[7] Gransdorff, P. and I. Prigogine, Thermodynamics of structure, stability, and fluctuations, Willy-Interscience, New York.

[8] Hosono, Y. and M. Mimura, Singular perturbations for pairs of two-point boundary value problems of Neumann type, In Mathematical Analysis on Structure in Nonlinear Phenomena, Lecture Note in Num. Appl. Anal., 2 (1980) 79-138 Kinokuniya Tokyo.

[9] Ladyzhenskaya, O. A. and N. N. Ural'tseva, Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press New York.

[10] Levin, S. A., Population models and community structure in heterogeneous environment. In Studies in Mathematical biology. S. A. Levin, Ed. ; MAA Studies in Math. 16 (1978) 439-476.

[11] Levin, S. A. and L. A. Segel, Hypoyhesis for origin of planktonin patchiness, Nature, 259 (1976) 659.

[12] Mimura, M. Asymptotic behavior of prabolic system related to a planktonic prey-predator model, SIAM J. Appl. Math. 37 (1979) 499-512.

[13] Mimura, M., Striking patterns in a diffusion system related to the Gierer and Meinhardt model,

[14] Mimura, M., Y. Nishiura, and M. Yamaguchi, Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation probrem, in Proceedings, Int. Conf. on Bifurcation Theory and its Application to Scientific Disiplines, Anal. New York Acad. Sci. 316 (1979) 490-510.

[15] Mimura, M., M. Tabata, and Y. Hosono, Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, SIAM J. Math. Anal. 11 (1980) 613-631.

[17] Okubo, A., Diffusion-induced instability in model ecosystem, Tech. Rep. 86 Cheasapeak Bay Inst., Johns-Hopkins Univ. Baltimore Md.

[18] Segel, L. and J. Jackson, Dissipartive Structure; An explanation and an ecological example, J. Theor. Biol. 37 (1972) 545-559.

[19] Steele, J., Stability of plankton ecosistems, in Ecological Stability M. B. Usher and M. H. Williamson, Eds.; (1973) 179- 191, Chapman and Hall, London.

[20] Temam, R. Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, Comm. in Part. Diff. Eq., 2 (1977) 563-585.

[21] Zehnder, E., Generalized implicit function theorem with applications to some small divisor problems, I., Comm. Pure and Appl. Math. 28 (1975) 91-140.

[16] Nicolis, G. and I. Prigogine, Self-organization in Nonequilibrium System, Wiley-Interscience, New York. (1977)

保存則をあらわす方程式の弱解の，相空間を用いての構成法

名大・理　儀我美一
広島大・理　宮川鉄朗

一階単独準線型方程式の初期値問題

$$(M)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} A^i(u) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

を考える。ここで $x = (x_1, \cdots x_n)$，$u = u(x, t)$ そして A^i, $i=1$ は一変数の実数値連続微分可能関数とする。

この問題の時間についての大域弱解は従来粘性消滅法や差分法により構成されてきた。ここでそれらと異なった構成法で解の構成を行う。

この研究の動機は Kaniel [K] にある。彼は Navier-Stokes 方程式の大域解を 'kinetic model' を導入することによってつくろうとした。しかし残念なことに彼の最終結果に対する証明は [K] にはない。

我々の方法を説明するために，気体力学の２つの微視的（マイクロ）と巨視的（マクロ）をおもいおこそう。気

では 相空間での速度分布を支配するボルツマン方程式を考える。 ボルツマン方程式は気体の運動をマイクロに記述し、 流体力学の保存則はマクロの記述とされている。

まず (M) をマクロな保存則とみなそう。(M) に対応して非常に簡単な輸送方程式をマイクロな法則と思う。

(m) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi^j(\xi)\cdot f) = 0, \quad f(x,\xi,0) = f_0(x,\xi)$$

ここで $f = f(x,\xi,t)$ で $\varphi^j(\xi)$ は実一変数の関数とする。

f に対して マクロな量 v を $v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\xi,t)\,d\xi$ で対応させる。 反対に、標準的マイクロの量 $F(w,\xi)$ を、マクロの量 w が

(D) $$w = \int_{-\infty}^{\infty} F(w,\xi)\,d\xi$$

と分解できるように導入する。 ここで $F(w,\xi)$ は x に陽にはよらぬとする。 (M) と (m) を両立させる条件として φ^j と F に次の仮定をおく。

(C) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^j(\xi) F(w,\xi)\,d\xi = A^j(w) + C^j, \quad 1 \leq j \leq n$$

ここで C^j は定数とする。

(M) の近似解を構成するために $f_0 = F(u_0(x),\xi)$ として (m) をとく。 v を f に対応するマクロの量とする。 すると (C) と (D)

より容易に $t=0$ のところでは $v(x,t)$ は (M) の保存則をみたしていることがわかる。このことより時間区間を $[0,\delta]$ $[\delta,2\delta]$, … ときざり各小区間ごとに上のやり方をくりかえせば近似解ができそうなことが推察される。詳しくは次節をみよ。

これまでしられている解の構成法についてのべよう。粘性消滅法は Hopf [H] により導入され、方程式 (M) に対しては Kružkov [Kr] によって大域的弱解の存在がしめされた。差分法は Oleinik [O] で $n=1$ のときのみ実行され、後に Conway-Smaller [C-S] で問題 (M) の弱解がつくられた。その他に、非線形半群論を用いたものとして Crandall [C] や Oharu-Takahashi [O-T] がある。また Douglis [D] にはこれらとはちがった解の構成法がある。

解の一意性を保障するための条件としてエントロピー条件というものがある。その意味は例えば Lax [L] をみよ。

我々が本稿で構成する解はエントロピー条件をみたすかどうか現在までのところわかっていない。（上記の構成による解はすべてエントロピー条件をみたす。）

§ 近似解の構成と主結果

まず $F(w,\xi)$ を

$$F(w,\xi)=\begin{cases}1 & 0<\xi\leqq w\\ -1 & w\leqq\xi<0\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とし $\psi^a(\xi)=dA^a(\xi)/d\xi$ とする。すると明らかに F, ψ^a は (C) (D) を $C^a=-A^a(0)$ としてみたす。

次に $\delta>0$ に対して近似解 u^δ を次のようにつくる。

初期値 $u_0(x)$ に対して $f_0=F(u_0(x),\xi)$ として (m) を $0\leq t\leq\delta$ でとき $u^\delta(x,t)$ の $0\leq t\leq\delta$ での値を

$$u^\delta(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\xi,t)\,d\xi$$

で定義する。次に $u^\delta(x,\delta)$ を初期値とみて上と同様な操作をおこない $u^\delta(x,t)$ の $\delta\leqq t\leqq 2\delta$ での値を定義する。これを繰りかえせば $u^\delta(x,t)$ が $t\geqq 0$ で定まる。

あとのために記号を導入しよう。(m) の f を $f=U_t f_0$ と作用素を用いてあらわす。そして

$$(S_t a)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(U_t f_0)(x,\xi)\,d\xi,\quad f_0(x,\xi)=F(a(x),\xi)$$

という非線型作用素 S_t を導入する。すると $u^\delta(x,t)$ は

$$u^\delta(x,t) = (S_\tau \overbrace{S_\delta \cdots S_\delta}^{j\text{個}} u_0)(x) \qquad j\delta \le t < (j+1)\delta$$

$$\tau = t - j\delta$$

とかける。 $U_t f_0(x,\xi) = f_0(x - \varphi'(\xi)t, \xi)$ と陽にかけるから $u^\delta(x,t)$ も陽にかける。 $(\varphi'(\xi) = (\varphi^1(\xi), \cdots, \varphi^n(\xi)))$

(M)の大域解は初期値がどんなに滑らかでも途中で衝撃波があらわれて滑らかでなくなることが一般にはあらわれる。[L2]をみよ。したがって大域解を考えるときは最初から弱解で考えるべきである。

vが(M)の弱解であるとは

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}[v\phi_t + \sum_{i=1}^n A^i(u)\,\phi_{x_i}]\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0$$

が任意の $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ に対して成立するときをいう。

結果を定式化するために BV空間をつかう。これらについては Giusti [G] がくわしい。 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ に対し

$$BV(\Omega) = \{ g\in L^1_{loc}(\Omega);\ \int_Q |g(x+he_i)-g(x)|\,dx \le C|h|,$$

$$Q\subset\subset\Omega,\quad e_i=(0,\overset{i}{1},0),\quad C \text{ は } h \text{ によらぬ定数}$$

今 $\mathcal{J} = BV \cap L^\infty$ とおく。このとき結果は次のとおりである。

<u>定理1</u>. 初期値 u_0 が $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ に属するとする。

このとき $\{u^\delta\}_{\delta>0}$ は適当な部分列をとれば

$\delta \to 0$ で $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上のある関数 u にほとんど

すべての点で収束し、その極限関数 u は (M) の弱解

である。さらにこのような u は $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ に属し

また各 t に対して $u(\cdot, t)$ は $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ に属す。」

この方法で構成された解は次のような
比較定理がなりたつ

<u>定理2</u>. 初期値 $u_0, v_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ に対応する近似解
を u^δ, v^δ として、それぞれからつくられる解を u, v とする。
このときもし $u_0(x) \geq v_0(x)$ ならば

$$u(x,t) \geq v(x,t), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

となる。特に u_0 v_0 の片方を定数として上を使えば

$$(\inf_x u)(t) \geq \inf u_0, \quad (\sup_x u)(t) \leq \sup_x u_0$$

がいえる。また初期条件の単調性は保たれる。

すなわち　$x \in \mathbb{R}^n$　$h>0$ において
$$u_0(x+he_i) \geq u_0(x)$$
ならば　　$u(x+he_i, t) \geq u(x,t)$　　となる。

次に L^1 評価についてのべよう。

$M^i = \max\{|\varphi^{i\prime}(\xi)| \mid |\xi| \leq \|u_0\|_\infty\}$　$N^i = \max\{|\varphi^{i\prime}(\xi)| \mid |\xi| \leq \|u_0\|_\infty \text{ or } |\xi| \leq \|v_0\|_\infty\}$

$M = (M^1, \cdots M^n)$, $r = (r^1 \cdots r^n)$　$N = (N^1, \cdots, N^n)$

$Q(r)$ 直方体 $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < r_i\}$ とする。

定理3　$u_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ において

(i)
$$\int_{Q(r)} |u(x,t)|\,dx \leq \int_{Q(r+Mt)} |u_0(x)|\,dx$$

(ii)　$u_0, v_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ において
$$\int_{Q(r)} |u(x,t) - v(x,t)|\,dx \leq \int_{Q(r+N(t-s))} |u(x,s) - v(x,s)|\,dx \quad t \geq s$$
$$\leq \int_{Q(r+Nt)} |u_0(x) - v_0(x)|\,dx$$

さらに　$Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ において
(iii)　$u : [0, \infty) \longrightarrow L^1(Q)$ は連続になる。

注. 現在までのところ u がエントロピー条件をみたすかどうかはわからない。しかし、エントロピー条件をみたす解のもつ L^1 縮小性は 定理3(iii)によりもっている。著者達はエントロピー条件をみたすと予想している。

§ 鍵となる事実

u^s が BV 空間で有界であること、また分差式の弱解に収束するということを示すのに基本的補題をのべる。

<u>補題1.</u> (比較定理) $a(x) \geq b(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ ならば

$$(S_t a)(x) \geq (S_t b)(x) \quad \lrcorner$$

<u>証明</u> $f_0(x,\xi) = F(a(x),\xi)$; $g_0(x,\xi) = F(b(x),\xi)$ とおく。

このとき

$$S_t a - S_t b = \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f_0 - U_t g_0)\, d\xi$$

U_t 線型だから

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_t (f_0 - g_0)\, d\xi$$

F の定義より $a(x) \geq b(x)$ ならば $(f_0 - g_0)(x,\xi) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}$

一方 $(U_t f_0)(x) = f_0(x - \varphi(\xi)t, \xi)$ (但し $\varphi(\xi) = (\varphi^1(\xi), \cdots \varphi^n(\xi))$)

であるから U_t は正値性をもつ。よって

$$U_t(f_0 - g_0) \geq 0 \quad となり$$

結局

$$S_t a - S_t b \geq 0 \quad となる。$$

次は、L^1 評価に対応する補題である。

補題2. $a, b \in L^\infty \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $N=(N^1, \cdots N^n)$ $N^i = \sup\{|\varphi^{i\prime}(s)| \mid |s| \le \|a\|_\infty \vee \|b\|_\infty\}$

このとき

$$\int_{Q(r)} |S_t a - S_t b| \, dx \le \int_{Q(r+Nt)} |a - b| \, dx$$

つまり S_t は L^1 縮小性をもつ. ┘

証明. $$\int_{Q(r)} |S_t a - S_t b| \, dx = \int_{Q(r)} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; U_t(f_0 - g_0) \right|$$

$$\le \int_{Q(r)} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} |U_t(f_0 - g_0)| \, d\xi \right) = \int_{Q(r)} \int_{-\infty}^{\infty} |U_t(f_0 - g_0)| \, dx \, d\xi$$

U_t の定義より

$$\int_{Q(r)} |U_t f| \, dx \, d\xi \le \int_{Q(r+Nt)} |f| \, dx \, d\xi$$ がいえる。

但し $|\xi| > \|a\|_\infty \vee \|\xi\| \ge \|b\|_\infty$ なる ξ については $f \equiv 0$ とする。

このような ξ については $f_0 - g_0 \equiv 0$ だから.

よって $$\int_{Q(r)} |S_t a - S_t b| \, dx \le \int_{Q(r+Nt)} \int_{-\infty}^{\infty} |f_0 - g_0| \, dx \, d\xi$$

$$= \int_{Q(r+Nt)} |a - b| \, dx$$ ∎

これとそれに ξ 依存の有界性 (BVでの) をいうのである.

全体を通じて証明は非常に初等的かつ短い.

References

[C-S] E. Conway and J. Smoller, Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first-order equations in several space variables, Comm. Pure Appl. Math. 19(1966), 95-105.

[C]#

[D] A. Douglis, Layering methods for nonlinear partial differential equations of first order, Ann. Inst. Fourier 22(1972),141-227.

[G] E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Notes on Pure Math. 10, Australian National Univ., Canberra, 1977.

[H] E. Hopf, The partial differential equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. 3(1950), 201-230.

[K] S. Kaniel, A kinetic model for a mono-atomic gas, Preprint.

[Kr] S. N. Kruzkov, First order quasilinear equations in several independ variables, Math. USSR-Sb. 10(1970), 217-243.

[L1] P. D. Lax, Hyperbolic systems of consevation laws II, Comm. Pure Appl. Math. 10(1957), 537-566.

[L2] P. D. Lax, Nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin, Madison, 1963,pp.3-12.

[O-T] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 124-160.

[O] O. A. Oleinik, Discontinuous solutions of non-linear differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2)33(1963), 95-172.

#[C] M. G. Crandall, The semigroup approach to first order quasi-linear equations in several variables, Israel J. Math.12 (1972), 108-132.

結合定数が小さい1次元Dirac作用素の固有値.

東大・教養　成田良一

1次元Dirac作用素

$$H_\lambda = \alpha D_x + \beta + \lambda V \quad \text{in } \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^2)$$

の固有値について考える。ここで, α, β は $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ を満たす 2×2 エルミート行列. (簡単のために, $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と固定しておく.) V は 2×2 行列値函数, $D_x = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$, $\lambda > 0$ は結合定数である。

自由なDirac作用素 $H_0 = \alpha D_x + \beta$ は, $\mathcal{D}(H_0) = H^1(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^2)$ として $\mathcal{H}$ 上自己共役であり, スペクトルについては,

$$\sigma(H_0) = \sigma_{cont}(H_0) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

が成り立つ. V を short-range ポテンシャルとすると, H_λ は一般に, $(-1, 1)$ に有限個の固有値を持ち, それらの固有値達は, λ を小さくすると共に, 連続スペクトルの端点 ±1 に"吸収"される. 本稿では, $\lambda \ll 1$ の場合に, 固有値は存在するか, 存在する場合, λ に関する挙動はどうなるか, を問題とする。

Schrödinger作用素 $-\Delta + \lambda V$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ に対しては, V が負の short-range ポテンシャルとすると, 充分小さい λ に対する負の固有値は $n \geq 3$ ならば存在しない. $n = 1, 2$ のときは存在し, λ に関する挙動も判っている。([1], [2], [3], [4]). Dirac作用素に対しても, それと同様の結果が得られる。

§1. 仮定と結果.

エルミート行列 M に対して. 次の記号を用いる. $M = \mathrm{sgn} M \cdot |M|$ を極分解として. $M^{1/2} = \mathrm{sgn} M \cdot |M|^{1/2}$.

<u>V に対する仮定</u>

(V-0) $V(x) = \begin{bmatrix} \phi^+(x) & \overline{a(x)} \\ a(x) & \phi^-(x) \end{bmatrix}$, $\phi^\pm$ は実数値.

(V-1) V は H_0 - *form relatively bounded*

即ち. $\mathcal{D}(|V|^{1/2}) \supset \mathcal{D}(|H_0|^{1/2})$

$\exists a, b \geq 0$. $|(V^{1/2}u, |V|^{1/2}u)| \leq a \| |H_0|^{1/2} u \|^2 + b \|u\|^2$, $(u \in \mathcal{D}(|H_0|^{1/2}))$

(V-2) $V \in L^1(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^4)$

(V-3) $\begin{bmatrix} \phi^+ \\ a \end{bmatrix} \neq 0$, $\begin{bmatrix} \overline{a} \\ \phi^- \end{bmatrix} \neq 0$.

(V-1) より. *pseudo*-Friedrichs extension により. $\lambda \ll 1$ のとき. $H_\lambda = H_0 + \lambda V$ は *form sum* として自己共役である. さらに. (V-2) より. $\lambda \ll 1$ では $\sigma_{ess}(H_\lambda) = \sigma_{ess}(H_0) = \sigma(H_0)$ が示される。

$$e^+(\lambda) \equiv \inf(\sigma(H_\lambda) \cap [0, \infty))$$

$$e^-(\lambda) \equiv \sup(\sigma(H_\lambda) \cap (-\infty, 0])$$

$$k_1^\pm \equiv \mp \int \phi^\pm(x)\, dx.$$

(複号同順)

$$k_2^\pm \equiv - \iint \phi^\pm(x) |x-y| \phi^\pm(y)\, dx\, dy$$
$$- \iint \phi^\pm(x)\, \mathrm{sgn}(x-y)\, \mathrm{Im}\, a(y)\, dx\, dy$$

$$L^{1,\rho} \equiv \{ V \in L^1(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^4) \mid \int (1+|x|^\rho) |V(x)|\, dx < \infty \}$$

とおくと. 我々の主結果は次の様になる.

定理1　$0 \le {}^{\exists} p \le 2$, $V \in L^{1,p}$ かつ $k_1^{\pm} > 0$

或いは $1 \le {}^{\exists} p \le 2$　$V \in L^{1,p}$ かつ $k_1^{\pm} = 0$, $k_2^{\pm} > 0$ ならば

$\lambda << 1$ に対して $e^{\pm}(\lambda)$ は H_λ の単純固有値であり,

$$\sqrt{1 - e^{\pm}(\lambda)^2} = \begin{cases} k_1^{\pm}\lambda + o(\lambda^{p+1}) & (0 \le p < 1) \\ k_1^{\pm}\lambda + k_2^{\pm}\lambda^2 + o(\lambda^{p+1}) & (1 \le p < 2) \\ k_1^{\pm}\lambda + k_2^{\pm}\lambda^2 + O(\lambda^3) & (p = 2) \end{cases}$$

(複号は同順とする)

注1.3　$\int \phi(x)dx = 0$ ならば $\iint \phi(x)\,|x-y|\,\phi(y)dxdy < 0$

であるから, $\mathrm{Im}\,a$ が充分小さければ, $k_1^{\pm} = 0 \Rightarrow k_2^{\pm} > 0$.

固有値の非存在については次が成立する。

定理2

(i) ${}^{\forall} p < 1$, $V \in L^{1,p}$, $k_1^{\pm} > 0$, 或いは ${}^{\forall} p < 2$, $V \in L^{1,p}$, $k_1^{\pm} = 0$, $k_2^{\pm} > 0$

ならば, $\lambda << 1$ に対して, H_λ の $[0,1)$ 内の ($(-1,0]$ 内の) 固有値

は $e^{+}(\lambda)$ のみ ($e^{-}(\lambda)$ のみ) である.

(ii) ${}^{\forall} p < 1$, $V \in L^{1,p}$, $k_1^{\pm} < 0$, 或いは ${}^{\forall} p < 2$, $V \in L^{1,p}$, $k_1^{\pm} = 0$, $k_2^{\pm} < 0$

ならば, $\lambda << 1$ に対して, $e^{\pm}(\lambda) = \pm 1$

§2. Lippman-Schwinger 作用素

$\omega \in (0,1]$ に対して, Lippman-Schwinger 作用素 $K_\omega^{\pm}$ を

(2.1)　$K_\omega^{\pm} \equiv -|V|^{1/2}(H_0 - \theta^{\pm})^{-1} V^{1/2}$　$(\theta^{\pm} = \pm\sqrt{1-\omega^2})$

と定義すると．$K_\omega^\pm$ は Hilbert-Schmidt 型作用素．積分核：

(2.2) $K_\omega^\pm(x,y) = -|V|^{1/2}(x)(2\omega)^{-1}\{\beta+\theta^\pm+i\omega\,\mathrm{sgn}(x-y)\alpha\}V\quad y)$

補題 2.1

$\theta^\pm \in \sigma_p(H_\lambda) \Leftrightarrow \lambda^{-1}\in\sigma_p(K_\omega^\pm)$．さらに．写像 $u \mapsto |V|^{1/2}u$ は．$\ker(H_\lambda-\theta^\pm)$ から $\ker(1-\lambda K_\omega^\pm)$ への双射を与える．

$K_\omega^\pm$ は $\omega\downarrow 0$ で発散し．主要項は rank 1 の退化作用素

(2.3) $\omega^{-1}L^\pm(x,y) = \omega^{-1}\varphi^\pm(x)\cdot\psi^\pm(y)^*$

$(\varphi^\pm(x)=|V|^{1/2}(x)e^\pm,\ \psi^\pm(y)=\mp V^{1/2}(y)e^\pm,\ e^+=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ e^-=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$

である．少し一般化して $K_\omega^\pm$ を次の様に分解する。

(2.4) $K_\omega^\pm=\omega^{-1}L_\omega^\pm+M_\omega^\pm$，$L_\omega^\pm=\varphi_\omega^\pm(\psi_\omega^\pm,\cdot)_{\mathscr{H}}$，$(\varphi_\omega^\pm,\psi_\omega^\pm\in\mathscr{H}\setminus\{0\})$

補題 2.2.

$(1-\lambda M_\omega^\pm)^{-1}$ が存在するとき．$\lambda^{-1}\in\sigma_p(K_\omega^\pm)$ は次と同値．

(2.5) $\omega = g^\pm(\lambda,\omega) \equiv \lambda(\psi_\omega^\pm,(1-\lambda M_\omega^\pm)^{-1}\varphi_\omega^\pm)_{\mathscr{H}}$

さらに $\ker(1-\lambda K_\omega^\pm) = \mathrm{L.h.}\{(1-\lambda M_\omega^\pm)^{-1}\varphi_\omega^\pm\}$

$\|M_\omega^\pm\| \le m(\omega)\ (>0)$ として．$\omega^*\in(0,1]$，$\delta\in(0,1)$ に対して．

$\Lambda_{\delta,\omega^*} \equiv \{(\lambda,\omega)\mid 0<\omega\le\omega^*,\ 0<\lambda m(\omega)\le\delta\}$ とおくと．

補題 2.3

(1) 任意の $\omega\in(0,\omega^*]$ に対して．$\omega=g^\pm(\lambda,\omega)$，$(\lambda,\omega)\in\Lambda_{\delta,\omega^*}$ なる λ が唯一つ存在（それを $\lambda=\hat{\lambda}(\omega)$ と書く）して，$\lim_{\omega\downarrow 0}\hat{\lambda}(\omega)=0$ を満たすとする。そのとき $\hat{\lambda}$ は狭義単調増大．連続であり．逆函数を $\omega=\hat{\omega}(\lambda)$

とおくと．$\widetilde{\omega}(\lambda)=\sqrt{1-e^{\pm}(\lambda)^2}$．さらに，$e^{\pm}(\lambda)$ は単純固有値である．

(2) 任意の $(\lambda,\omega)\in\Lambda_{\delta,\omega^*}$ に対して．$\omega\neq g^{\pm}(\lambda,\omega)$ ならば．

$$\lambda\cdot m(\sqrt{1-e^{\pm}(\lambda)^2})>\delta.$$

証明は $e^{\pm}(\lambda)$ の連続性に注意して，補題2.1，2.2を用いるとよい。

§3. 定理の証明の概略．

定理1の証明には，$L^{\pm}_{\omega}$ として (2.3)の $L^{\pm}$ をそのまま用いる。対応する $M^{\pm}_{\omega}$，$\Lambda_{\delta,\omega^*}$，$g^{\pm}$ を同じ記号で書くと．

補題3.1　$V\in L^{1,p}$ $(0\leq p\leq 2)$ ならば，ある $p_p(\omega)>0$ が存在して．

$$\|M^{\pm}_{\omega}\|\leq\omega^{-1+p/2}p_p(\omega);\quad p_p(\omega)\leq{}^{\exists}p\ (0\leq p\leq 2),\ \lim_{\omega\downarrow 0}p_p(\omega)=0\ (0\leq p<2)$$

補題3.2　定理1と同じ仮定の下で．

$^{\exists}\delta\in(0,1)$ (pに依存しない)，$^{\exists}\omega^*_p\in(0,1]$，s.t. $^{\forall}\omega\in(0,\omega^*]$，

$^{\exists}{}_1\ \lambda=\widehat{\lambda}(\omega)$　$(\lambda,\omega)\in\Lambda_{\delta,\omega^*}$，　$\omega=g^{\pm}(\lambda,\omega)$

さらに．$\widehat{\lambda}(\omega)\sim\omega$　$(k^{\pm}_1>0)$，$\sim\omega^{1/2}$　$(k^{\pm}_1=0,\ k^{\pm}_2>0)$

(証明) $g^{\pm}(\lambda,\omega)=\lambda(\psi^{\pm},\varphi^{\pm})+\lambda^2(\psi^{\pm},M^{\pm}_{\omega}\varphi^{\pm})+\lambda^3(\psi^{\pm},M^{\pm\,2}_{\omega}(1-\lambda M^{\pm}_{\omega})^{-1}\varphi^{\pm})$

と展開して，次の評価と，$\omega\|M_{\omega}\|=o(1)$ を用いればよい。

補題3.3

(i) $(\psi^{\pm},\varphi^{\pm})=k^{\pm}_1$　　(ii) $(\psi^{\pm},M^{\pm}_0\varphi^{\pm})=k^{\pm}_2$　$(1\leq p\leq 2)$

(iii) $|(\psi^{\pm},M^{\pm}_{\omega}\varphi^{\pm})|=o(\omega^{-1+p})$　$(0\leq p<1)$，$=O(1)$　$(p=1)$

(iv) $|(\psi^\pm, (M_\omega^\pm - M_0^\pm)\varphi^\pm)| = o(\omega^{-1+p})$ $(1 \le p < 2)$, $= O(\omega)$ $(p=2)$

但し．$M_0^\pm$ は．積分作用素で．積分核は．

$$M_0^\pm(x,y) = -|V|^{1/2}(x)\frac{1}{2}\{|x-y|(\beta\pm 1) - i\,\mathrm{sgn}(x-y)\alpha\}V^{1/2}(y)$$

補題3.2と．補題2.3から．定理1が得られる．$\sqrt{1-e^\pm(\lambda)^2}$ の漸近展開は．$g^\pm(\lambda,\omega)$ の展開に $\omega=\tilde{\omega}(\lambda)$ を代入すればよい。また．定理2の $k_1^\pm=0$ の場合の(他の)固有値の非存在も．同様にしてわかる。

定理2の $k_1^\pm \neq 0$ の場合を示すためには．$L_\omega^\pm$ を．$\varphi_\omega^\pm(x)=e^{-\omega|x|}\cdot\varphi^\pm(x)$，$\psi_\omega^\pm(y)=e^{-\omega|y|}\cdot\psi^\pm(y)$ にとる。すると．対応する $M_\omega^\pm$ について．補題3.1の $\omega^{-1+p/2}$ は．ω^{-1+p} と改良されるから．定理2は得られる。

参考文献

[1] R. Blankenbecler, M.L. Goldberger and B. Simon, Ann. Phys., 108 (1977), 69-78

[2] M. Klaus, Ann. Phys., 108 (1977), 288-300

[3] ———, Helv. Phys. Acta, 52 (1979), 223-229

[4] B. Simon, Ann. Phys., 97 (1976), 279-288

Asymptotic Behavior of the Free Boundaries
Arising in One Phase Stefan Problems
in Several Space Dimensions

By

Hiroshi MATANO

§1. Introduction.

A Stefan problem is a mathematical model for describing the melting of a body of ice in contact with a region of water. In one phase Stefan problems, the ice is supposed to be maintained at 0°C. Hence the unknowns are the temperature distribution of water and the shape of the interface (free boundary) between ice and water.

In the case where the space dimension is one, the problem has been completely solved, and it is well known that, for any smooth initial data and boundary conditions, the solution is unique and exists globally in time (i.e. for $0 \leq t < \infty$) in the classical sense (see e.g. Friedman [4]). However, in the case of multi-dimensional spaces, a classical solution cannot necessarily be extended globally, since cusp singularities may sometimes appear on the free boundary. (This happens, for instance, when a portion of ice is in the process of being separated from the rest of the ice region by the continuous growing of the water region.)

Duvaut [3] has introduced a weak formulation of the above problem in terms of variational inequality, for which the solution exists globally in time. Following his formulation, several authors including Friedman, Kinderlehrer, Nirenberg and Caffarelli have carefully investigated the regularity and other properties of weak solutions. These studies have revealed that any singular point on the free boundary should have a cusp-like singularity [1] and that the solution is sufficiently smooth, say C^{∞}, in a neighborhood of any regular point [8]. Friedman and Kinderlehrer [5] have given an example in which the free boundary possesses no singular point for $0 \le t < \infty$, i.e. the solution is classical for all time. However, a strong geometric assumption on the initial data has been required in their approach.

The aim of this paper is to prove that *any weak solution is "eventually" classical.* That is, the interface between the ice and water regions is sufficiently smooth for all large t; hence so is the temperature distribution of water. It will also be shown that *the shape of the free boundary (i.e. the interface) approaches to that of a sphere in a certain manner as* $t \to \infty$. Of course the radius of this sphere goes to infinity as $t \to \infty$. Note that we shall impose no specific hypothesis on the geometric features of the initial and the boundary data. The only assumption required here is that the temperature of water at the prescribed boundary (i.e. the surface of a heat supplying obstacle located in the midst of water region) is bounded from below by a positive constant as $t \to \infty$.

To state the above results more precisely, let us introduce some notation. First, let G_1 be a bounded domain in R^n such that ∂G_1 is sufficiently smooth and that $R^n \setminus G_1$ is connected. Let G be a bounded domain containing $\bar{G}_1$. The boundary of G is also assumed to be smooth. It is supposed that, at the initial time $t = 0$, water occupies the region $G \setminus \bar{G}_1$, while the region $R^n \setminus G$ is occupied by ice that is maintained at 0°C. The water region at each $t \geq 0$ and the interface between water and ice are denoted by $\Omega(t)$ and $\Gamma(t)$ respectively. From the definition it follows that

$$\Omega(0) = G \setminus \bar{G}_1 ,$$

$$\partial\Omega(t) = \Gamma(t) \cup \partial G_1 \quad (t \geq 0).$$

The temperature of water will be denoted by $\theta = \theta(x,t)$. This is a function defined for $x \in \overline{\Omega(t)}$, $t \geq 0$ and supposed to satisfy the following initial and boundary conditions:

(1) $$\theta(x,0) = h(x), \quad (x \in \Omega(0)),$$

(2) $$\theta(x,t) = g(x,t), \quad (x \in \partial G_1,\ t \geq 0);$$

here h and g are given positive smooth functions satisfying

$$h(x) = \begin{cases} g(x,0) & (x \in \partial G_1), \\ 0 & (x \in \partial G). \end{cases}$$

The equations governing the phenomenon are as follows:

(3) $$\theta_t = \Delta\theta, \quad (x \in \Omega(t),\ t > 0),$$

(4) $$\theta = 0, \quad (x \in \Gamma(t),\ t > 0),$$

(5) $$\theta_t = \frac{1}{k}|\nabla\theta|^2, \quad (x \in \Gamma(t),\ t > 0),$$

where k is a given positive constant. Thus the problem is to find $\theta(x,t)$ and $\Gamma(t)$ satisfying (1) - (5) together with the condition

(6) $$\Gamma(0) = \partial G.$$

Although the problem (1) - (6) does not necessarily have a global classical solution, it always has a weak solution (in the sense of Duvaut) that exists globally in time. In his weak formulation, the temperature θ is locally given by the form $\theta = u_t$, where $u = u(x,t)$ is a solution of a certain variational problem (see §3 for details). Caffarelli and Friedman [2] have proved that θ is continuous on $(R^n \setminus G_1) \times [0,\infty)$, where we understand that $\theta(x,t) = 0$ for $x \notin \Omega(t) \cup \bar{G}_1$, $t \geq 0$. It is not difficult to see that θ is sufficiently smooth in the interior of the water region, since it satisfies there the heat equation $\theta_t = \Delta\theta$ in the sense of distributions. Further regularity of θ near the free boundary $\Gamma(t)$ depends on the regularity of $\Gamma(t)$. In other words, a weak solution is classical so long as $\Gamma(t)$ has no singular point on it.

§2. Main Theorems.

In what follows the pair $\theta(x,t)$, $\Gamma(t)$ will denote the weak solution to the problem (1) - (6). The notation in the preceding section will be used freely. The main theorems of this paper can now be stated as follows:

THEOREM 1. Suppose there are positive constants δ and M such that

$$\delta \le \int_{\partial G_1} g(x,t)\,dx \le M \tag{7}$$

holds for all $0 \le t < \infty$. Then there is a positive number T_0 such that $\Gamma(t)$ is sufficiently smooth for all $t \ge T_0$.

THEOREM 2. Let the same assumption as in Theorem 1 hold. Assume further that $n \ge 3$. Then there exist a positive number T_0 and a bounded convex set W in R^n such that for any $t \ge T_0$ and any point $x_0 \in \Gamma(t)$ the inward normal line to $\Gamma(t)$ at x_0 intersects the set W.

Combining Theorem 2 and the fact that the free boundary $\Gamma(t)$ is moving away from every finite region (i.e. any point outside G_1 will eventually be occupied by water), we get

COROLLARY 3. Let $n \geq 3$ and let (7) hold. Then, for any bounded set A in R^n, there exists a positive number T_A such that $\Omega(t) \cup \bar{G}_1$ is star-shaped with respect to any point of A for each $t \geq T_A$.

COROLLARY 4. Let $n \geq 3$ and let (7) hold. Let x_1 be any point in R^n and put

$$m(t) = \min_{x \in \Gamma(t)} \operatorname{dist}(x, x_1) ,$$

$$M(t) = \max_{x \in \Gamma(t)} \operatorname{dist}(x, x_1) .$$

Then $M(t) - m(t)$ remains bounded as $t \to \infty$.

REMARKS. (i) The condition (7) can be relaxed somewhat. For example, even if the integral of g tends to zero as $t \to \infty$, the assertion of Theorem 1 still remains true so long as the rate of decay is moderate. However, if this value decays very rapidly as $t \to \infty$, then the total amount of the heat energy to be supplied to the water region through the surface ∂G_1 becomes finite; therefore, only a finite portion of the ice region will be melted. In this case, it is very likely that the assertion of Theorem 1 is no longer true.

(ii) In the case $n = 2$, Corollary 3 still remains true, but the assertions in Theorem 2 and Corollary 4 should be weakened slightly. For example, the boundedness of $M(t) - m(t)$ will be replaced by

$$\lim_{t \to \infty} \frac{m(t)}{M(t)} = 1 .$$

However, if $g(x,t) = \text{const.}$ on $\partial G_1 \times [0,\infty)$, then Theorem 2 and its corollaries hold true even for $n = 2$.

(iii) In the case where g is independent of t, we have a sharp estimate for the growth order of the radius of $\Gamma(t)$, just as in the spherically symmetric case. More precisely, we have the following corollary:

COROLLARY 5. Let $n \geq 3$ and let g in (2) be independent of t. Then the difference between $M(t)$ (or $m(t)$) and

$$(Ct)^{1/n}$$

remains bounded as $t \to \infty$, where $M(t)$, $m(t)$ are as in Corollary 4 and C is a constant defined by

$$C = \frac{n}{ks_{n-1}} \int_{\partial G_1} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \gamma} \, dx ,$$

in which k is as in (5), s_{n-1} is the area of the $(n-1)$-dimensional unit sphere, i.e. $s_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$

with $\Gamma(\cdot)$ the usual gamma function, $\partial/\partial\gamma$ is the inward normal derivative on ∂G_1 and, finally, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ is the solution of the boundary value problem

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta\hat{\theta} = 0 & \text{in } R^n \setminus \bar{G}_1 , \\ \hat{\theta} = g & \text{on } \partial G_1 , \\ \lim_{|x|\to\infty} \hat{\theta}(x) = 0 . & \end{cases}$$

§3. Proof of Theorems.

Let us give a very rough sketch of the proof of the above results. The main tool is the maximum principle. And we follow the argument given by Jones in [7], where he has investigated the asymptotic behavior of solutions of certain semilinear diffusion equations in the whole space R^n.

First we show that, if a hyperplane P is sufficiently far from G_1, then

$$\theta(x,t) \le \theta(x^\lambda,t)$$

holds for all $x \in H$ and $t \ge 0$, where H is the half - space with boundary P (containing G_1) and x^λ denotes the reflection of x in the plane P. It then follows that for any small $\varepsilon > 0$ the level surface $\theta(x,t) = \varepsilon$ is smooth if t is large (we denote this surface by $\Gamma_\varepsilon(t)$), and the inward normal line to $\Gamma_\varepsilon(t)$ always hit a certain bounded convex set W that is independent of ε and t. This discussion is similar to that of Jones and also to the moving plane discussion given by Gidas, Ni and Nirenberg [6]. Finally, it will be shown that $\Gamma(t)$ has the same property as $\Gamma_\varepsilon(t)$, and therefore the ice region has a positive Lebesgue density at any point on $\Gamma(t)$. It implies, by virtue of the theorem of Caffarelli [1], that $\Gamma(t)$ is everywhere smooth for all large t; hence of class C^∞ (see [8]). This completes the proof of Theorem 1 together with that of Theorem 2.

References

[1] Caffarelli, L.A., The regularity of free boundaries in higher dimensions, Acta Math. 139, 155-184(1977).

[2] Caffarelli,L.A. and Friedman,A., Continuity of the temperature in the Stefan problem, Indiana Univ. Math. J. 28, 53-70(1979).

[3] Duvaut, G., Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zero degré), C.R.Acad. Sci. Paris 276, 1461-1463(1973).

[4] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs,N.J., 1964.

[5] Friedman,A. and Kinderlehrer,D., A one phase Stefan problem, Indiana Univ. Math.J. 24, 1005-1035(1975).

[6] Gidas,G. , Ni,Wei-Ming and Nirenberg,L., Symmetry and related properties via the maximum principle, Commun. Math. Phys. 68, 209-243(1979).

[7] Jones, C.K.R.T., Asymptotic behavior of a reaction-diffusion equation in higher space dimensions,(1981).

[8] Kinderlehrer,D. and Nirenberg,L., The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem, Comm. Pure. Appl. Math. 31, 257-282(1978).

非線形方程式 $-u'(t)\in\partial\varphi^t(u(t))$ の解の漸近挙動

早大・理工　古屋博行，宮寺晃一

Hを実ヒルベルト空間，$|\cdot|$，$(\cdot,\cdot)$でHのノルム及び内積を表し，φ^t $(t\in[0,\infty))$ をH上の proper l.s.c. convex な関数とする。コーシー問題：

$(CP:u_0)$ 　　$-u'(t)\in\partial\varphi^t(u(t))$ 　$0<t<\infty$ ，　$u(0)=u_0\in D(\varphi^0)$

の解の漸近挙動について考える。但し，$\partial\varphi^t$ は φ^tの劣微分作用素で，$u'(t)=(d/dt)u(t)$ in H とする。

$u:[0,\infty)\to H$ が $(CP:u_0)$の解であるとは 次の(i)～(iv)が満たされることをいう： (i) $u\in W^{1,2}_{loc}([0,\infty);H)$ 　　(ii) $u(0)=u_0$

(iii) $t\longmapsto\varphi^t(u(t))$ が$[0,\infty)$で局所有界　(iv) $-u'(t)\in\partial\varphi^t(u(t))$ a.e. $t\in[0,\infty)$

φ^tが時間に依存しない場合（i.e. $\varphi^t=\varphi$ $\forall t\in[0,\infty)$）のコーシー問題の解の漸近挙動については 既に Bruck [1]，Pazy [4]によって 良く知られているが φ^tが時間依存の場合の解の漸近挙動についての研究はあまりなされていないようである。

§1. $\varphi^t(u(t))$ の挙動

我々は，$\{\varphi^t\}=\{\varphi^t;0\leq t<\infty\}$に以下のような条件[A][B]をおく。

[A] 任意の $r\geq 0$ に対して 次のような $[0,\infty)$上絶対連続な関数a_r,b_rが存在する： (a1) $a_r'\in L^2(0,\infty)$ ，　(a2) $b_r'\in L^1(0,\infty)$ ，

(a3) $s\leq t$ であるような任意の $s,t\in[0,\infty)$ と $|z|\leq r$ なる任意の $z\in D(\varphi^s)$ に対して 次を満たす $\tilde{z}\in D(\varphi^t)$ が存在する。

$$(1.1)\quad\begin{cases}|\tilde{z}-z|\leq|a_r(t)-a_r(s)|(1+|\varphi^s(z)|^{\frac{1}{2}})\\ \varphi^t(\tilde{z})-\varphi^s(z)\leq|b_r(t)-b_r(s)|(1+|\varphi^s(z)|)\end{cases}$$

[B] φ^tは Hで proper l.s.c. convex な関数φ^∞に Mosco の意味で収束する。即ち，次の (b1)，(b2)が満足される：

(b1) $t_n \uparrow \infty$, $W\text{-}\lim_{n\to\infty} z_n = z$ in H $\Rightarrow$ $\liminf_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(z_n) \geq \varphi^{\infty}(z)$

(b2) 任意の $z \in D(\varphi^{\infty})$ と，$t_n \uparrow \infty$ なる任意の $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ に対して，$S\text{-}\lim_{n\to\infty} z_n = z$ in H かつ $\lim_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(z_n) = \varphi^{\infty}(z)$ を満足する $\{z_n\} \subset H$ が存在

[A]を仮定すれば，任意の $u_0 \in D(\varphi^0)$ に対して (CP; u_0) は $[0,\infty)$ 上で一意な解をもつことが知られている。(cf. Kenmochi [3])。

ここでは，(CP: u_0)の解 u に対して以下の記号を用いる。

$\Omega_S(u_0) \equiv \{ z \in H\ ;\ \exists \{t_n\} \subset [0,\infty)$ with $t_n \uparrow \infty$ such that $u(t_n) \xrightarrow{S} z$ in $H \}$

$\Omega_W(u_0) \equiv \{ z \in H\ ;\ \exists \{t_n\} \subset [0,\infty)$ with $t_n \uparrow \infty$ such that $u(t_n) \xrightarrow{W} z$ in $H \}$

$F(\varphi^{\infty}) \equiv \{ z \in H\ ;\ \varphi^{\infty}(z) = \min \varphi^{\infty} \}$ $\left(= \{ z \in H\ ;\ 0 \in \partial\varphi^{\infty}(z) \} \right)$

そのとき $\varphi^t(u(t))$ の挙動について次のような結果を得る。

定理 1 [A], [B]を仮定する。$u_0 \in D(\varphi^0)$ とし，u は $[0,\infty)$ 上で有界な (CP; u_0) の解とする。そのとき，次の(i)，(ii) が成立する。

(i) $\lim_{t\to\infty} \varphi^t(u(t)) = \min \varphi^{\infty}$，　(ii) $\phi \neq \Omega_W(u_0) \subset F(\varphi^{\infty})$

定理1より、次の2つの系が得られる。

系 1 定理1の仮定に加えて $F(\varphi^{\infty})$ が一点，即ち，$F(\varphi^{\infty}) = \{u_{\infty}\}$ と仮定する。 そのとき $W\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t) = u_{\infty}$ in H

系 2. 定理1の仮定に加えて，次の条件[C]を仮定する：

[C] 任意の $r \geq 0$ に対して H のコンパクト集合族 $\{S_r\} = \{S_r\ ;\ 0 \leq r < \infty\}$ が存在し，任意の $t \in [0,\infty)$ に対して $\{ z \in H\ ;\ |z| \leq r,\ |\varphi^t(z)| \leq r \} \subset S_r$ となる。

そのとき $\Omega_S(u_0) \neq \phi$ かつ $\Omega_S(u_0) \subset F(\varphi^{\infty})$ が成立する。

定理1の証明には以下の補題と命題が用いられる。

補題1 (i) 仮定[A][B]のもとで、次の[D]を満足する$\alpha_0>0$が存在する。

$$[D]\qquad \varphi^t(z)+\alpha_0(|z|+1)\geqslant 0 \qquad \forall t\in[0,\infty)\quad \forall z\in H$$

(ii) [A][D]を仮定する。$\sup_{t\geqslant 0}|u(t)|<r$ ならば次のエネルギー不等式が成立：

$$(1.2)\quad \varphi^t(u(t))-\varphi^s(u(s))+\frac{1}{2}\int_s^t|u'(\tau)|^2d\tau\leqslant\int_s^t\{k_{r,1}(\tau)\varphi^\tau(u(\tau))+k_{r,2}(\tau)\}d\tau \quad (0\leqslant s\leqslant t<\infty)$$

ここで $k_{r,i}\,(i=1,2)$ は [A]の関数a_r, b_rを用いて次のようにとれる。

$$k_{r,1}(\tau)=4|a'_r(\tau)|^2+|b'_r(\tau)|,\quad k_{r,2}(\tau)=k_{r,1}(\tau)(1+4\alpha_0(r+1))$$

明らかに $k_{r,i}\in L^1(0,\infty)$ である。

命題 [A][D]を仮定し、uは$[0,\infty)$上で有界な$(CP:u_0)$ $(u_0\in D(\varphi^0))$の解ならば

(i) $\lim_{t\to\infty}\varphi^t(u(t))$が存在して有限　(ii) $u'\in L^2(0,\infty:H)$ が成立する。

§2 解 $u(t)$ の挙動

$(CP:u_0)$, $u_0\in D(\varphi^0)$の解uの挙動を議論するために[A]より強い次の[A]*をおく。

[A]* 任意の$r\geqslant 0$に対して $a_r\in L^\infty(0,\infty)$, $a'_r\in L^2(0,\infty)$ かつ $b_r\in W^{1,1}(0,\infty)$ で[A]の(a3)を満足する$[0,\infty)$上の絶対連続な関数が存在する。

そのとき次のような結果を得る。

定理 2 仮定[A]*, [B]に加えて次の(2.1)をおく：

$$(2.1)\begin{cases}\text{任意の } z\in D(\varphi^\infty)\text{ に対して、} |z_t-z|\leqslant a(t;z),\ \varphi^t(z_t)\leqslant\varphi^\infty(z)+b(t;z)\\ \text{が a.e. } t\in[0,\infty)\text{で成立するような非負関数} a(\cdot;z)\in L^2(0,\infty),\ b(\cdot;z)\in L^1(0,\infty)\\ \text{と集合} \{z_t;\ 0\leqslant t<\infty\}\subset H \text{ が存在する。}\end{cases}$$

uを$[0,\infty)$上有界な$(CP;u_0)$ $(u_0\in D(\varphi^0))$の解とする。そのとき

(i) $\lim_{t\to\infty}\varphi^t(u(t))=\min\varphi^\infty$, (ii) $w\text{-}\lim_{t\to\infty}u(t)=u_\infty\in F(\varphi^\infty)$ in H

更に、[C]が仮定されるならば (ii)の収束は強収束である。

応用上は，[A]* よりも次の$[\tilde{A}]^*$が検証される場合が多い。

$[\tilde{A}]^*$ 任意の $r\geq 0$ に対し 以下の関数 $a_r\in W^{1,2}(0,\infty)$，$b_r\in W^{1,1}(0,\infty)$ が存在：任意の $s,t\in[0,\infty)$ ［必ずしも $s\leq t$ でない］ と $|z|\leq r$ なる $z\in D(\varphi^s)$ に対して，(1.1)を満足する $\tilde{z}\in D(\varphi^t)$ が存在する。

条件(2.1) は$[\tilde{A}]^*$,[B] より導かれる。従って，定理２において [A]を$[\tilde{A}]^*$で置き換えるとき，(2.1)なしで 同じ結論を得る。

定理２の証明には次の補題を用いる。

補題２ [A]*[B]を仮定する。m_0を $\varphi^\infty(z)\geq m_0$ $(z\in H)$を満足する数とする。そのとき，任意の $r>0$ に対して 次の(2.2)(2.3) を満たす T_r が存在する。

(2.2) $\varphi^t(z)+|b_r(t)|(1+|\varphi^t(z)|)\geq m_0$ $\quad\forall t\in[T_r,\infty)$，$\forall z\in H$ with $|z|\leq r$

(2.3) $\varphi^t(z)\geq -2|m_0|-1$ $\quad\forall t\in[T_r,\infty)$，$\forall z\in H$ with $|z|\leq r$

［定理２の証明の方針］ 仮定[A]*,[B]のもとでも 命題と定理１が成立するから，$\Omega_w(u_0)$ が一点から成ることを示せば証明は完了する。$u_\infty,\tilde{u}_\infty\in\Omega_w(u_0)$ をとる。(2.1) を u_∞ に対して用いると a.e. $t\in[0,\infty)$に対して $|z_t-u_\infty|\leq a(t:u_\infty)$ $\varphi^t(z_t)\leq\varphi^\infty(u_\infty)+b(t:u_\infty)=m_0+b(t:u_\infty)$を満足する$\{z_t:0\leq t<\infty\}$ が存在する。そのとき 劣微分作用素の定義と上の補題の(2.2)(2.3)より a.e. $t\in[T_r,\infty)$ に対し

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-u_\infty|^2\leq\varphi^t(z_t)-\varphi^t(u(t))+|u'(t)||u_\infty-z_t| \tag{2.4}$$
$$\leq b(t:u_\infty)+M|b_r(t)|+|u'(t)|a(t:u_\infty)\equiv\rho(t)\in L^1(T_r,\infty)$$

が成立する。但し，r,Mを $r>\sup_{t\geq 0}|u(t)|$，$M=1+\sup_{t\geq 0}|\varphi^t(u(t))|$に，$T_r$を(2.2)(2.3)を満足するようにとる。従って 任意の s,t，$(T_r\leq s\leq t<\infty)$ に対し

$$|u(t)-u_\infty|^2\leq|u(s)-u_\infty|^2+2\int_s^t\rho(\tau)d\tau$$

が成立することがわかる。その結果 $\lim_{t\to\infty}|u(t)-u_\infty|^2$ が存在することがわかる。$\tilde{u}_\infty$に対しても $\lim_{t\to\infty}|u(t)-\tilde{u}_\infty|$が存在することが言え，２つの極限を$\alpha,\tilde{\alpha}$とおくと内積の定義から $\alpha=\tilde{\alpha}$ が出る。従って $u_\infty=\tilde{u}_\infty$ となり，$\Omega_w(u_0)$は一点 ■

注　意　定理２で，(2.1)のかわりに次の(2.5)をおいても同じ結論を得る。

$$(2.5)\begin{cases} z \in F(\varphi^{\infty}) \text{ ならば　非負関数 } a(\cdot\,;z) \in L^2(0,\infty) \cap L^{\infty}(0,\infty),\ b(\cdot\,;z) \in L^1(0,\infty) \\ \text{と } |z_t - z| \leq a(t;z),\ |z_t^*| \leq b(t;z) \quad \text{a.e. } t \in [0,\infty) \text{ を満足するよ} \\ \text{な集合 } \{[z_t, z_t^*] \in H \times H\,;\, z_t^* \in \partial\varphi^t(z_t),\ 0 \leq t < \infty\} \text{ が存在する。} \end{cases}$$

§3.　解 $u(t)$ の有界性

φ^t が時間依存でない場合，$-u'(t) \in \partial\varphi(u(t))$ on $[0,\infty)$ の解の有界性と $F(\varphi) \neq \phi$ が必要十分であることが知られている［Pazy [4]］。我々の場合にもこの種の関係が成立する。

定理３　$[A]^*[B]$ 及び (2.1)を仮定する。uは $u_0 \in D(\varphi^0)$ に対する $(CP;u_0)$ の $[0,\infty)$上の解とする。そのとき

$$F(\varphi^{\infty}) \neq \phi \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ が } [0,\infty) \text{ で有界}$$

注　意　$[\tilde{A}]^*$ を仮定すれば，$[\tilde{A}]^*, [B]$ だけで　定理の結論が成り立つ。

定理３の証明では ($\Rightarrow$) の部分を示せばよい。以下では $[A]^*[B]$, (2.1)を仮定する。[B]によって　$\lim_{n\to\infty} z_n = z_{\infty}$，$\lim_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(z_n) = \varphi^{\infty}(z_{\infty})$ ($z_{\infty} \in F(\varphi^{\infty})$, $t_n \uparrow \infty$) を足する $\{z_n\} \subset H$ が存在するから $|z_n| \leq L$, $|\varphi^{t_n}(z_n)| \leq L$ となるようなLが存する。任意の n に対して　次のコーシー問題を考える；

$$(CP)_n \quad -u_n'(t) \in \partial\varphi^t(u_n(t)), \quad t_n < t < \infty, \quad u_n(t_n) = z_n.$$

T_nを　$r_0 > L + |z_{\infty}|$ として　次のように定義する。

$$T_n \equiv \sup\{T\,;\, t_n < T < \infty,\ |u_n(t) - z_{\infty}| < r_0,\ \forall t \in [t_n, T]\}$$

今 $r = |z_{\infty}| + r_0 + 1$ にとれば，$|u_n(t)| < r$ ($t \in [t_n, T_n]$) で，任意の $s, t \in [t_n, T_n]$ ($s \leq t$) に対して，エネルギー不等式 (1.2)が u_nに対しても成立する。これか

任意のnに対して $|\varphi^t(u_n(t))| \leqslant L_1$ $(t \in [t_n, T_n])$, $|u_n'|_{L^2(t_n, T_n; H)} \leqslant L_1$ を満足する定数$L_1>0$が存在することがわかる。 ここで，もし $T_n<\infty$ $(\forall n)$ と仮定するなら，(2.1) 及び 上述の事を用いることによって，

$$|u_n(T_n) - z_\infty| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

を示すことができる。これは T_nの定義に矛盾する。従って，少なくとも一つのnに対し$T_n=\infty$，即ち u_nは$[t_n,\infty)$上で有界であることがわかる。u_nとuを比較することにより，uの有界性が示される。

定理3に関しては 岩宮，高橋，両氏より有益な助言を得た。なお，本稿の詳細については[2]を参照されたい。

参考文献

1. R. E. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Funct. Anal., 18(1975), 15-26.
2. H. Furuya, K. Miyashiba and N. Kenmochi, Asymptotic behavior of solutions to a class of nonlinear evolution equations, preprint.
3. N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., 30(1981), 1-87.
4. A. Pazy, Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic behavior, Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium Vol. III, Reseach Notes in Math. 30, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

半線型発展方程式に応ずる半群の微分可能性について

福田賢一

I. X を Banach space, A を C_0-semigroup $T(t)$ の infinitesimal generator, F を local Lipshitz (X の各 bounded set 上で Lipshitz continuous) とする。

半線型発展方程式の Cauchy 問題

$$(CP:x) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = [A+F]u(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

に応ずる半群を $S(t)$ とする。

<u>目的</u>.

"F が continuously Gâteau (Fréchet) differentiable ならば $x \mapsto S(t)x$ もそうでなり, その微分 $dS(t)(x)$ は (t,x) について強連続 (i.e. $\forall w \in X$, $dS(t)(x)(w)$ は (t,x) について連続) となり, $S(t)x$ $(x \in D(A))$ は $(CP:x)$ の C^1-solution を与える." また逆に "$x \mapsto S(t)x$ が continuously G-differentiable のとき若干の条件の下で F もそうならねばならない." 等を示す。

II. $S(t)$ の構成・性質, その他の基本的事柄を記す。

$(CP:x)$ の mild solution $u(t,x)$, すなわち積分方程式

$$(IE:x) \qquad u(t,x) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\,F\,u(s,x)\,ds$$

を満す continuous function, の存在する最大区間を $[0, T(x))$ とする。

$T(x) \in (0, \infty]$ であるが、

(II − 1)　　$T(x) < \infty \Rightarrow \lim_{t \nearrow T(x)} \|u(t,x)\| = \infty$

すなわち有限時間内で爆発(blow-up)する可能性があり、
具体的な方程式でそうなる例は多く知られている。

このu(t.x)を用いて、

(II − 2)
$$\begin{cases} S(t)x = u(t,x) \;;\; t < T(x) \\ D(S(t)) = \{x \mid t < T(x)\} \end{cases}$$

で定める。

$x \mapsto T(x)$ $(0 < T(x) \leqq \infty)$ が、$X \to (0,\infty]$ の lower semi conti,
すなわち、

(II − 3)　　$T(x) \leqq \liminf_{y \to x} T(y)$

である事より、

(II − 4)　　$D(S(t))$ は X の open set.

また、

(II − 5)　　$\forall r > 0 \quad \exists T > 0$ s.t.

$$D(S(t)) \supset \{x \mid \|x\| \leqq r\} \quad (t \in [0, T]).$$

が成立する。

(II − 6)　　$\forall r > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists \omega_{r,T} > 0$

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leqq e^{\omega_{r,T} t} \|x - y\|$$

$$t \in [0, T], \; x, y \in D(S(t)), \; \|x\|, \|y\| \leqq r.$$

(II − 7)　　$A + F$ は $S(t)$ の i.g. 即.

$$[A + F]x = \lim_{h \to 0+} [S(h)x - x]/h, \quad x \in D(A).$$

$S(t)$ は非線型であるから、(II−7) は $(CP:x)$ の解の存在、$t \to S(t)x$ の微分可能性には直接むすびつかない。

$(CP:x)$ の discrete version として scheme

$$(DS:x)_\lambda \quad \begin{cases} [u_\lambda^m - u_\lambda^{m-1}]/\lambda = [A+F]\, u_\lambda^m \\ u_\lambda^0 = x \end{cases}$$

を考える。これは簡単な計算により

$$(DIE:x)_\lambda \quad u_\lambda^m = (I-\lambda A)^{-m} x + \lambda \sum_{i=1}^{m} (I-\lambda A)^{-(m-i+1)} F u_\lambda^i$$

と同値である。これは積分方程式 $(IE:x)$ の discrete version と見なせる。$S(t)x$ $(= u(t,x))$ は有限時間内で爆発する可能性がある。しかし、$(IE:x)$ の解 $S(t)x$ $(= u(t,x))$ の存在する最大区間 $[0, T(x))$ 上で $(DS:x)_\lambda$ の解 u_λ^m で近似され、しかも $[0, T(x))$ の compact subinterval 上で一様である。すなわち、次の事が成立する。

$$(\text{II}-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^\forall I\ (\subset [0, T(x))) : \text{compact interval} \quad {}^\exists C_0 > 0 \text{ s.t.} \\ {}^\forall C > C_0, \\ S(t)x = \lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda A - \lambda F_c)^{-[t/\lambda]} x, \quad t \in I. \\ \text{ここで } F_c \text{ は } F \text{ の集合 } \{x \mid \|x\| < C\} \text{ への制限,} \\ \text{収束は } I \text{ 上で一様} \end{array} \right.$$

F: locall Lipschitz を "X の各有界集合上で Lipschitz conti." としたが、"各点 $x \in X$ のある近傍上で Lipschitz conti." としても (II−1) ～ (II.7) までは同様に成立するが、(II−8) については若干の修正、すなわち "F_c の代りにある適当な

open set 上への F の制限を考えなければならない。

III　F が conti. G (or F)-differentiable のとき $x \to S(t)x$ の微分可能性について考える。

<u>定義 III-1</u>

F が continuously Gâteau differentiable とは、各 $x, w \in X$ について

$$(3.1) \quad dF(x)w = \lim_{h \downarrow 0} [F(x+hw) - Fx]/h$$

が存在して、

各 w について $x \longmapsto dF(x)w$ は連続、の事。

\# F が continuously G-differentiable ならば 自動的に $dF(x) : w \longmapsto dF(x)w$ は bounded linear となる事が示される。また F が ~~continuously~~ F-differentiable とは (3.1) の収束が w $(\|w\| \le 1)$ について一様であるとき。

<u>定理 III-2.</u>　F が continuously G-differentiable ならば $x \longmapsto S(t)x$ $(x \in D(S(t)))$ もそうであり、

$(t, s, w) \longmapsto dS(t)(x)w$ $((t, x, w) \in \{(t, s) \mid t < T(x)\} \times X)$

も continuous.

(略証)

continuous function $v(t, x, w)$ を

$$(DCP; x, w) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} v(t, x, w) = [A + dF(S(t)x)] v(t, x, w), \\ v(0, x, w) = w, \quad t \in [0, T(x)) \end{cases}$$

の mild solution, すなわち,

$$(DIE: x, w) \qquad v(t,x,w) = T(t)w + \int_0^t T(t-s)\, dF(S(s)x)\, v(s,x,w)\, ds$$

を満す連続関数とする。このとき $V(t,x)w = v(t,x,w)$ とおくと $V(t,x)$ は X の bounded linear operator で $V(t,x)w$ が (t,x,w) について連続である事がわかる。このの $V(t,x)$ が $x \mapsto S(t)x$ の G-微分になっている事，$V(t,x) = dS(t)(x)$ を示す。

$D(S(t))$: open，$D(S(s)) \supset D(S(t))$ $(s \leq t)$

より $x \in D(S(T))$，$w \in X$ とするとき，h 充分小さくとれば

$x + hw \in D(S(t))$ $(t \in [0,T])$ となっている。

$$[S(t)(x+hw) - S(t)x]/h - V(t,x)w$$

$$= \int_0^t T(t-s)\{FS(s)(x+hw) - F[S(s)x + hV(s,x)w]\}/h\, ds$$

$$+ \int_0^t T(t-s)\{F[S(s)x + hV(s,x)w] - FS(s)x - h\,dF(S(s)x)V(s,x)w\}/h\, ds$$

より，適当な定数 L_1, L_2 がとれて

$$\|[S(t)(x+hw) - S(t)x]/h - V(t,x)w\|$$

$$\leq L_1 \int_0^t \|[S(s)(x+hw) - S(s)x]/h - V(s,x)w\|\, ds$$

$$+ L_2 \int_0^t \|\{F[S(s)x + hV(s,x)w] - FS(s)x\}/h - dF(S(s)x)V(s,x)w\|\, ds$$

となる。最後の項は $h \to 0$ のとき，t について一様に 0 に収束する事が示される。ここで Gronwall 式の評価をすればよい。

(終)

定理 III−2. F が continuously G-differentiable ならば $S(t)x$ $(x \in D(A))$ は $(CP:x)$ の C^1-solution.

証明. $x \in D(A)$ とする。

$$\frac{1}{h}[S(t+h)x - S(t)x] = [S(t)S(h)x - S(t)x]/h$$
$$= dS(t)(x)[S(h)x - x]/h + \frac{o(\|S(h)x - x\|)}{h}$$

より

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = dS(t)(x)[A+F]x,$$

$dS(t)(x)[A+F]x$ は t について continuous ゆえ

$$\frac{d}{dt}S(t)x = [A+F]S(t)x \;(= dS(t)(x)[A+F]x)$$ となり

(CP : x) の C^1-sol を与える。 (終)

(定理 III-2 について)

Remark 1. F が F-differentiable のときも同様の事が得られる。すなわち, F の F-derivative $dF(x)$ が $B(X)$ の unif. op. top で連続ならば, $S(t)$ の F-derivative $dS(t)(x)$ も x について unif. op. top で連続, また $B(X)$ の strong. op. top で連続ならば $dS(t)(x)$ も x についてそうなる。ついでながら, 定義 III-1 は F の G-derivative が str. op. top で continuous と言う事, また F の G-derivative が unif. op. top で continuous のときは実は, F は F-differentiable となっていることはよく知られている。

Remark 2. $dS(t)(x)w \;(= V(t,x)w = U(t,x)w)$ は (DCP : x, w) の mild sol, すなわち (DIE : x, w) の解である事より $S(t)$ の G-derivative は product formula

$$dS(t)(x)w = \lim_{\lambda \downarrow 0} \prod_{i=1}^{[t/\lambda]} [I - \lambda A - \lambda dF(S(i\lambda)x)]^{-1} w$$
$$t \in [0, T(x)),$$

で表現される。また $J_\lambda^i x = (I - \lambda A - \lambda F_c)^{-i} x$ とおけば (u_λ^i)

$$dS(t)(x)w = \lim_{\lambda \downarrow 0} dJ_\lambda^{[t/\lambda]}(x)w$$

$$= \lim_{\lambda \downarrow 0} \prod_{i=1}^{[t/\lambda]} [I - \lambda A - \lambda dF(J_\lambda^i x)]^{-1} w$$

とも表わせる。

<u>Remark 3</u>. 各 $x \in X$ について

$$U_x(t,s) = dS(t-s)(S(s)x), \quad 0 \le s \le t \le T(x)$$

とおくと $U_x(t,s)$ は X の linear evolution operator となりまた.

$$U_x(t,s) = U_{S(s)x}(t-s, 0)$$

が成立する。

<u>Remark 4</u>. 各 $x, w \in X$ について

$$dF(x)w = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(dS(h)(x)w - T(h)x)$$
$$= \frac{d^+}{dt}(dS(t)(x)w - T(t)w)\Big|_{t=0}$$

が成立する。収束は各 w について, x : compact set 上で一様。

Remark 3, 4 より $A + dF(S(t)x)$ は $U_x(t,s)$ の i.g. である事がわかる。すなわち, $U_x(t+h,t)w = dS(h)(S(t)x)w$ に注目すれば, $w \in D(A)$ について

$$[U_x(t+h,t)w - w]/h = [dS(h)(S(t)x)w - T(t)w]/h$$
$$+ [T(h)w - w]/h$$
$$\to [A + dF(S(t)x)]w \quad (h \downarrow 0)$$

となる事がわかる。

次に $S(t)$ が continuously G-differentiable のとき F はどうなっているか考える。実際, 若干の条件を付ければ F も continuously G-differentiable である事が示される。

この条件は，全て F が continuously G-differentiable である場合の十分条件である。(Remark 2.3 等参照)

<u>定理 3.</u> $S(t)$ が conti G-differentiable で $dS(t)(x)w$ が (t,x,w) について continuous で

$$G(x)w = \lim_{t\to 0+}(dS(t)(x)w - T(t)w) \quad (x\in X,\ w\in D(A))$$

が存在し，各 w fixed するごとに x：compact set 上で収束が一様

$$\Longrightarrow \quad F : \text{conti } G\text{-differentiable}.$$

(略証)

$f(t)$ が conti で $f(0)=0$，$t=0$ での右微分 $f'(0)$ が存在するとき，Laplace 変換を用いれば

$$f'(0) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^T e^{-s/\lambda} f(s)\,ds$$

が成立する事より，

$$F_\lambda x = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^T e^{-s/\lambda}[S(s)x - T(s)x]\,ds \quad (x\in X)$$

とおくと $F_\lambda x \to Fx$ $(\lambda\downarrow 0)$。また同様に $x\in X$, $w\in D(A)$ について

$$G_\lambda(x)w = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^T e^{-s/\lambda}[dS(s)(x)w - T(s)w]\,ds$$

とおくと $G_\lambda(x)w \to G(x)w$ $(\lambda\downarrow 0)$ となり収束は x：compact set 上で一様となる事が示される。よって $G(x)w$ は x について連続。

F_λ は conti, G-differentiable で

$$F_\lambda(x+tw) - F_\lambda x = \int_0^t \frac{1}{\lambda^2}\int_0^T e^{-s/\lambda}[dS(s)(x+\theta w) - T(s)w]\,ds\,d\theta.$$

ここで $\lambda\downarrow 0$ とすると

$$(*)\quad F(x+tw) - Fx = \int_0^t G(x+\theta w)w\,d\theta,$$
$$x\in X,\quad w\in D(A).$$

となり

$$\lim_{t\downarrow 0}[F(x+tw)-Fw]/t = G(x)w,\quad x\in X,\ w\in D(A)$$

が成立する。　F は local Lipschitz ゆえ $G(x): w\mapsto G(x)w$ は X 全体で定義された bounded linear op $\overline{G}(x)$ に拡張される。

よって上記の式 $(*)$ はすべての $x, w\in X$ について成立する。よって F は G-differentiable である。また derivative $dF(x)w$ が x について連続である事簡単に示される　(終)

具体例として次の半線型波動方程式をあげる。

$$\begin{cases} \Omega\subset \mathbb{R}^n \text{ bounded domain with smooth boundary } \partial\Omega. \\ u_{tt} = \Delta u \pm |u|^{r-1}u,\quad t>0,\ x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0,\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=v_0(x),\ x\in\Omega \\ r\leqq \frac{n}{n-2},\quad n\geqq 3 \end{cases}$$

について $X = W_0^{1,2}(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $A=\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0\end{pmatrix}$

$F\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^{r-1}u\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0\end{pmatrix}$ とすれば

$(CP:x)$ の形に帰着され、A, F はそれぞれ定理 II の仮定を満している。

以上

ある種の自由境界条件をもつ放物型方程式

名大・理　山田義雄

最初に、この報告は、橋本佳明氏（名市大）、儀我美一氏（名大・理）との共同研究であることを断っておきます。

§1 問題.

Ω を R^N の有界領域とし、その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。次のような問題を考えよう。

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{cases}
u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + g(u(x,t)), & (x,t)\in \Omega\times(0,\infty),\\
u(x,t) = c(t), & (x,t)\in \partial\Omega\times(0,\infty),\\
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)\,d\Gamma = I(t), & t\in(0,\infty),\\
u(x,0) = a(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

（$\partial/\partial\nu$ は境界における外向き法線方向の微分）

ここで、g は Lipschitz 連続な関数、c は t のみに依存する未知関数、I は t について滑らかな与えられた関数、a は与えられた初期値である。(P) は、通常の Dirichlet 境界条件や Neumann 境界条件のような"しっかりした"境界条件をもっているわけではなくて、境界値が（境界の位置によらない）未知の値であるという意味で、自由境界条件をもっている。(P) のような境界条件は見慣れない形であるが、プラズマの定常問題

$$
\begin{aligned}
&\Delta u - \lambda u^- = 0 \qquad (\lambda>0:\ \text{given},\ u^- = -\min\{u,0\}) && \text{in } \Omega\\
&u = c \quad (\text{unknown constant}) && \text{on } \partial\Omega\\
&\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma = I \quad (\text{given constant})
\end{aligned}
$$

において現れてくる。(Berestycki-Brezis [1], Temam [3])

我々の問題 (P) は，プラズマの非定常問題と直接の関係はないが，解の存在を示すことは興味あることと思う．((P) は半線型放物型方程式に対する問題といえ，解の存在は自明ではない．) $L^2(\Omega)$-理論の枠内では，アプローチの仕方として 時間差分による方法と 半群理論による方法 の二通りがあることを紹介しよう．

記号
$$E = \{ u \in H^1(\Omega) \ ; \quad \gamma u = \text{constant} \quad (\gamma : \partial\Omega \text{上へのトレース作用素}) \}$$
を準備しておく．

§2 時間差分による方法

与えられたデータ a, I について 次を仮定する．

(A-1) $\quad a \in E, \quad I \in C^1[0,\infty)$

$T>0$ を固定し，$\tau = T/m$ とおく．$\{u_i^m\}_{i=0}^m$ を $u_0^m = a$,

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dfrac{u_{i+1}^m - u_i^m}{\tau} = \Delta u_{i+1}^m + g(u_i^m) & \text{in } \Omega, \\ u_{i+1}^m = c_{i+1}^m \ \ (\text{unknown constant}) & \text{on } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{i+1}^m}{\partial \nu} d\Gamma = I_{i+1}^m \ \ (\equiv I((i+1)\tau)) \end{cases}$$

によって決めてゆく．well-defined であることは 次のようにしてわかる．
$$v_{i+1}^m = u_{i+1}^m - c_{i+1}^m$$
とおけば，v_{i+1}^m は (2.1) の代わりに，次をみたす．

$$(2.2)' \quad \begin{cases} (I - \tau\Delta) v_{i+1}^m = f_i^m - c_{i+1}^m, \quad (f_i^m = u_i^m + \tau g(u_i^m)) & \text{in } \Omega \\ v_{i+1}^m = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_{i+1}^m}{\partial \nu} d\Gamma = I_{i+1}^m . \end{cases}$$

$-\Delta_D$ を $D(-\Delta_D)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $-\Delta_D u=-\Delta u$ (for $u\in D(\Delta_D)$) によって定義すれば (2.2)の才1, 2式より

$$v_{i+1}^m=(I-\Delta_D)^{-1}f_i^m-C_{i+1}^m\cdot(I-\Delta_D)^{-1}\cdot 1.$$

であるから. これを (2.2)の才3式に代入すれば. $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\{(I-\Delta_D)^{-1}\cdot 1\}d\Gamma>0$ (強最大値原理より.) より. C_{i+1}^m が一意に決り, v_{i+1}^m, u_{i+1}^m も一意に決ってゆく.

次に. 差分法でよくやるように (cf Temam [4]) $\{u_i^m\}$ に関する評価を導出してゆくわけである. (A.1)の下では. 次の評価が得られる.

(2.3) $\quad\|u_i^m\|^2\leq K$, $\quad i=0,1,\cdots,m,$

(2.4) $\quad\|\nabla u_i^m\|^2\leqq K,\quad i=0,1,\cdots,m,$

(2.5) $\quad\tau\sum_{j=1}^{i}\|\Delta u_j^m\|^2\leqq K,\quad i=1,2,\cdots,m,$

(2.6) $\quad\tau\sum_{j=0}^{i}\|(u_{i+1}^m-u_i^m)/\tau\|^2\leqq K,\quad i=0,1,\cdots,m-1,$

但し. K は m によらない正定数である.

例えば (2.3)について導いてみよう. (2.1)の才1式と u_{i+1}^m の L^2-内積をとると

$$\|u_{i+1}^m\|^2-(u_{i+1}^m,u_i^m)=\tau(\Delta u_{i+1}^m,u_{i+1}^m)+\tau(g(u_i^m),u_{i+1}^m).$$

上式の左辺は. 次のようになる.

$$\frac{1}{2}\{\|u_{i+1}^m\|^2-\|u_i^m\|^2+\|u_{i+1}^m-u_i^m\|^2\}.$$

又. 右辺の第1項は部分積分により.

$$\tau\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_{i+1}^m}{\partial\nu}\cdot u_{i+1}^m\,d\Gamma-\tau\|\nabla u_{i+1}^m\|^2=\tau I_{i+1}^m\cdot C_{i+1}^m-\tau\|\nabla u_{i+1}^m\|^2$$

となる. 一般に $u\in E$ に対して $\gamma u=C$ とおくと.

$$\begin{aligned}|C|=\left|\int_{\partial\Omega}\gamma u\,d\Gamma\right|/|\partial\Omega| &\leqq |\partial\Omega|^{-1/2}\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\leqq Const\cdot(\|u\|+\|\nabla u\|)\end{aligned}$$

の形の評価が成立するから.

$$|I_{i+1}^m \cdot C_{i+1}^m| \leqq M|C_{i+1}^m| \leqq M_1(\|u_{i+1}^m\| + \|\nabla u_{i+1}^m\|). \qquad M = \sup_{0\le t\le T}|I(t)|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\|\nabla u_{i+1}^m\|^2 + M_2(1 + \|u_{i+1}^m\|^2)$$

更に g の Lipschitz 連続性より.

$$|(g(u_i^m), u_{i+1}^m)| \leqq M_3\|u_{i+1}^m\|(1 + \|u_i^m\|)$$

$$\leqq M_4(1 + \|u_i^m\|^2 + \|u_{i+1}^m\|^2)$$

以上のことより.

$$\|u_{i+1}^m\|^2 - \|u_i^m\|^2 + \|u_{i+1}^m - u_i^m\|^2 + \tau\|\nabla u_{i+1}^m\|^2 \tag{2.7}$$
$$\leqq \tau M_5(1 + \|u_i^m\|^2 + \|u_{i+1}^m\|^2).$$

を得る. (2.7) を i について 0 から j まで加えれば.

$$\|u_{j+1}^m\|^2 + \sum_{i=0}^{j}\|u_{i+1}^m - u_i^m\|^2 + \tau\sum_{i=0}^{j}\|\nabla u_{i+1}^m\|^2$$

$$\leqq \|a\|^2 + M_5(T + 2\sum_{i=0}^{j+1}\|u_i^m\|^2)$$

が成立するから. Gronwall の不等式から (2.3) が導かれる. 残りの評価 (2.4)-(2.6) についても同様の原理で導かれる.

$[0,T]$ 上の階段関数 $\{u^m\}$, 折線関数 $\{v^m\}$ を

$$u^m(t) = u_i^m \qquad \text{if } t \in ((i-1)\tau, i\tau]$$

$$v^m(t) = u_{i-1}^m + \frac{1}{\tau}(u_i^m - u_{i-1}^m)(t - (i-1)\tau) \qquad \text{if } t \in [(i-1)\tau, i\tau]$$

によって決める. $\{u^m\}$ は (2.3)-(2.5) より $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ における有界列であり, $\{v^m\}$ は (2.3)-(2.6) より $C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ における有界列であり, しかも $\{v_t^m\}$ は $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ における有界列である. 更に (2.6) より $u^m - v^m$ は $m \to \infty$ のとき $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ の位相で 0 に収束することに注意しておく.

$\{u^m\}$, $\{v^m\}$ は

$$
\begin{cases}
v_t^n = \Delta u^n + g(u^n(t-\tau)), \quad (\tau = T/n). & \text{a.e. in } \Omega\times(0,T) \\
v^n = C^n(t) \ (\equiv \{C_i^n\} \text{より定義される折線関数}) & \text{on } \partial\Omega\times(0,T) \\
\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v^n}{\partial \nu} d\Gamma = I^n(t) \ (\equiv \{I_i^n\} \text{から定義される折線関数}) & \text{on } (0,T) \\
v^n(0) = a
\end{cases}
$$

をみたすことがわかるから、通常のコンパクト性を用いる論法によって、次の定理を示すことができる。

<u>定理2.1</u>　(P)の解 u で

$u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$

$u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.　　　for any $T>0$,

をみたすものが一意に存在する。

もし、与えられたデータ a, I に対して もっと強い条件 例えば

(A-2)　(A-1)の他に、更に、$a \in H^2(\Omega)$, $I \in C^2[0,\infty)$, $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial a}{\partial \nu} d\Gamma = I(0)$

をみたす。

を課せば、解の滑らかさを上げてゆくことができる。

<u>定理2.2.</u>　(A-2)が仮定されていれば、(P)の解 u は

$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$,　$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$

for any $T>0$

をみたす。

§3 半群理論による方法

問題 (P) を半群理論が適用できるようにするためには、工夫を要する。この節では、(A-1) の代わりに

$$(B\cdot 1) \quad a \in L^2(\Omega); \quad I \in C^{1+\eta}(0,\infty), \quad 0<\eta\leq 1.$$

を仮定しよう。

滑らかな関数 φ で、

$$\gamma\varphi = \text{定数}, \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Gamma = 1$$

をみたすものを一つとってくる。未知関数 v として新しく

$$(3.1) \qquad v = u - I(t)\varphi$$

を導入すると、v は、

$$(P_1) \begin{cases} v_t = \Delta v + I(t)\Delta\varphi - I'(t)\varphi + g(v + I(t)\varphi) & \text{in } \Omega\times(0,\infty) \\ v = c_1(t) \ (\equiv c(t) - I(t)\gamma\varphi) \text{ ; それ自身未知関数} & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty) \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial\nu} d\Gamma = 0 & \\ v(x,0) = a(x) - I(0)\varphi & \end{cases}$$

を満さなければならない。

$L^2(\Omega)$ において、次の作用素を定義する。

$$D(A) = \{ u \in H^2(\Omega)\cap E \ ; \ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} d\Gamma = 0 \},$$
$$Au = -\Delta u \quad \text{for} \quad u \in D(A).$$

A は、非負の自己共役作用素であることを確かめることができる。しかも、この A を用いると、(P_1) は $L^2(\Omega)$ における発展方程式

$$(3.2)\qquad \begin{cases} v_t = -Av + f(t,v) & ,\ t>0, \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

に書改めることができる。但し $f(t,v) = I(t)\Delta\varphi - I'(t)\varphi + g(v+I(t)\varphi)$
$v_0 = a - I(0)\varphi$. (3.2)は積分方程式

$$(3.3)\qquad v(t) = e^{-tA}v_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s, v(s))\,ds$$

に帰着できる。我々の仮定 (B-1) の下では、

$$\|f(t,v) - f(s,w)\| \leqq K(T)\{|t-s|^{\eta} + \|v-w\|\},$$
$$\forall s,t\in[0,T],\quad \forall v,w\in L^2(\Omega).$$

が成立しているから、積分方程式 (3.3) をみたす解 $v\in C([0,T];L^2(\Omega))$ が一意に存在することがわかるだけではなく、実は (3.2) をみたすこともわかる。(例えば、Henry [5] を参照せよ。) 言い換えれば、(3.3) の解 v は、$v\in C^1((0,T];L^2(\Omega))$ となり、(3.2) の第1式が $t>0$ で成立する。もとの問題の解 u は、(3.1) の関係によって求まる。

結果をまとめよう。

<u>定理3.1</u> (P) の解 u で、

$$u\in C([0,T];L^2(\Omega))\cap C^1((0,T];L^2(\Omega))\cap C((0,T];H^2(\Omega))$$
for any $T>0$,

をみたすものが一意に存在する。

§2と同様に、データに対する条件をもっと強くする；例えば、
(B-2). (B-1) に加えて、$a\in H^2(\Omega)\cap E$., $I(0) = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial a}{\partial\nu}d\Gamma$
を仮定すれば、$v_0 \equiv u_0 - I(0)\varphi$ は $D(A)$ に入るから、(P) の解 u の $t=0$ の近傍での正則性はよくなる。

<u>定理3.2</u>　$(B.2)$の下では　(P)の解 uは

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$$

をみたす。

<u>注意</u>　仮定としては　$(B.2)$の方が　$(A.2)$より少し弱いわけであるから、定理3.2の方が、定理2.2よりは よりと言える。

§4. あとがき

4.1. 問題(P)に対して 2通りのアプローチの仕方があることを述べてきたが、それぞれに長短があるように思われる。差分法による解の構成は、大変初等的な方法で、トレースに関する評価以外は むつかしい理論を必要としない。境界上の未知の値も しっかり求めることができるが、ただ、計算が少々長くなる難点がある。半群理論による方法は、「半群」に慣れ親しい人[redacted]とっては、わかりやすいが、そうでない人にとっては、あまり初等的[redacted]難しい[redacted]た。境界上の未知の値も、作用素の中に隠れてしまい、トレースをとって初めてわかるという、不便さがある。

4.2.　§2, §3 では $L^2(\Omega)$-理論の枠内で議論を進めてきたが、古典解の構成も可能である。Ladyženskaya 達の大著 [2] の結果を借用してゆけば、例えば、$g'(u)$の不連続点が有限個であること、及び

$(A\text{-}3)$　$(A.2)$に加えて、$\Delta a \in E$, かつ $a \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$、$(0<\alpha\le 1)$

が成立するとすれば、(P)の解 uは 古典解になることがわかる。([2]の記号を用いれば、uは $H^{2+\mu, 1+\frac{\mu}{2}}(\Omega\times(0,T))$、$(0<\mu<1)$ 空間に属する。)

参考文献

[1] H. Berestycki and H. Brezis ; On a free boundary problem arising in plasma physics, Nonlinear Analysis 8 (1980), 415-436.

[2] O.A. Ladyženskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'ceva ; Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, 1968., A.M.S.

[3] R. Temam ; Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, Comm. P.D.E. 2 (1977), 563-586.

[4]. R. Temam : Navier-Stokes Equations, North-Holland, 1977.

[5]. D. Henry ; Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. 840, Springer, 1981.

$A_0(t)$の定義域が変化する放物型ではない時間的非齊次方程式の解の構成について

都立大. 理. 古谷希世子
お茶大. 理. 高村幸男

§1. 序

Banach空間Xに於ける線型"双曲型", 即ち一般に放物型ではない発展方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A_0(t)u(t) & 0 \leqq t \leqq T \\ u(0) = u_0 \in D(A_0(0)) \end{cases}$$

の解の構成について考える. ここで $A_0(t)$ [illegible] 上の半群の生成素であり, またその定義域 $D(A_0(t))$ は時間 t に依り変化する.

簡単な応用例として Neumann条件をもつ波動方程式の混合問題を含むことを示しておく.

§2. 仮定と主要定理

X は可分な Banach空間, Yも Banach空間で Xに連続的稠密に埋め込まれ, またその単位球 $\{y \in Y ; |||y||| \leqq 1\}$ は Xでノルム$\|\cdot\|$について閉であるとする. ここで $\|\cdot\|$ と $|||\cdot|||$ とはそれぞれ X と Y とのノルムである. $\{A(t)\}_{0 \leqq t \leqq T}$ は X から X

への閉作用素の族ですべての $t\in[0,T]$ につき $D(A(t))$ は Y を含む。$\{Y(t)\}_{0\le t\le T}$ は Y の閉部分空間の族で、その単位球 $\{y\in Y(t)\,;\,|||y|||_t\le 1\}$ は X でノルム $\|\cdot\|$ について閉である。そして $A_0(t)$ を $A(t)$ の $Y(t)\to X$ への制限とする。

ここで言う $A(t)$ と $A_0(t)$ とは、それぞれ微分作用素と、境界条件付の微分作用素に対応するものと考えてよい。

以下の条件を置く。

(A−1) すべての $t\in[0,T]$ につき、$A_0(t)$ は X 上の有界 C_0-半群の生成素である。【従って $Y(t)$ 上の有界 C_0-半群の生成素ともなっている。】

(A−2) $\|\cdot\|$ と同値な X 上の t につき単調非増加なノルムの族 $\{\|\cdot\|_t\}_{0\le t\le T}$ が存在し、各 $\|\cdot\|_t$ につき $e^{sA_0(t)}$ は X 上の縮小半群となる。

(A−3) $|||\cdot|||$ と同値な Y 上の t につき単調非増加なノルムの族 $\{|||\cdot|||_t\}_{0\le t\le T}$ が存在し、各 $|||\cdot|||_t$ につき $e^{sA_0(t)}$ は $Y(t)$ 上の縮小半群となる。

(A−4) $A(\cdot)$ は $[0,T]$ から $B(Y,X)$ への強連続になる。ここで $B(Y,X)$ とは Y から X への有界作用素全体である。

$C(\varepsilon,t)$ と $h(\varepsilon,t)$ は $(\varepsilon,t)\in(0,1]\times[0,T]$ 上の正の値をとる関数で

(2.1) $h(\varepsilon,t)\downarrow 0,\quad C(\varepsilon,t)h(\varepsilon,t)\downarrow 0\quad \text{as } \varepsilon\downarrow 0$

をみたすものとする.

(A-5) 任意の $\varepsilon>0$, $t\in[0,T]$, $x\in Y(t)$, $s\in(t, t+h(\varepsilon,t)]$ につき, $y\in Y(s)$ が存在し

(2.2) $\|x-y\|_s \leqq \varepsilon C_1 |s-t| \, |||x|||_t$

(2.3) $|||x-y|||_s \leqq C_2 C(\varepsilon,t) |s-t| \, |||x|||_t$

をみたす. さらに $s=t+h(\varepsilon,t)$ で $x\in D(A_0(t))_{Y(t)\to Y(t)}$ のとき, y は

(2.4) $|||y|||_s \leqq (1+C_3 h(\varepsilon,t)) |||[I-h(\varepsilon,t)A_0(t)]x|||_t$

をみたす.

ここで $C_i\,(i=1,2,3)$ は, $\varepsilon, t, s, x, y, Y(t), Y(s)$ には依らない定数である.

注: 条件 (A-2) は T. Kato の安定条件 [5] と同値のもの.

定理. 上記の仮定をみたすとき

(2.5) $$u(t)=u_0+\int_0^t A_0(s)u(s)\,ds \qquad t\in[0,T]$$

の解 $u(t)\in Y(t)$ が一意に存在する.

§3. 近似解の構成

近似解 $\{u^\varepsilon(t) ; \varepsilon\downarrow 0\}$ を構成する.

任意に $\varepsilon\in(0,1]$ を固定し, $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ を以下の様に定めてゆく.

(a) (3.1) $t_0=0$

(3.2) $u^\varepsilon(t_0)=v^\varepsilon(t_0)=u_0$

(b) (2.1) と (A.4) を用いて $\varepsilon_1>0$ を十分小さく.

(3, ε_1) $\mathrm{Max}\{C(\varepsilon_1, t_0)h(\varepsilon_1, t_0),\ \varepsilon_1,$

$\| [A(t_0+h(\varepsilon_1, t_0))-A(t_0)]u_0\|_{t_0}\} \leqq \varepsilon.$

をみたす様にとり

(3.3) $h_1 \equiv h(\varepsilon, t_0)$

(3.4) $u^\varepsilon(t_1) \equiv (I-h_1A_0(t_0))^{-1}u_0 \in Y(t_0)$ 　ここで $t_1\equiv t_0+h_1$

とする.

以降

(3.5) $t_{\ell+1} \equiv t_\ell + h_{\ell+1}$ 　$\ell\in N$ 　とする.

$u^\varepsilon(t_k)$, $k\geqq 1$ について定義されたとする.

(c) (A-5) を用い, $v^\varepsilon(t_k)\in Y(t_k)$ を

$$(3,\#_k)\quad \begin{cases} \| u^\varepsilon(t_k)-v^\varepsilon(t_k)\|_{t_k} \leqq \varepsilon_k h_k ||| u^\varepsilon(t_k) |||_{t_{k-1}} \\ ||| u^\varepsilon(t_k)-v^\varepsilon(t_k)|||_{t_k} \leqq C_2 C(\varepsilon_k, t_{k-1}) h_k ||| u^\varepsilon(t_k) |||_{t_{k-1}} \\ ||| v^\varepsilon(t_k)|||_{t_k} \leqq (1+C_3h_k) ||| [I-h_kA_0(t_{k-1})]u^\varepsilon(t_k)|||_{t_{k-1}} \end{cases}$$

をみたす様にとる.

(d) $\varepsilon_{k+1} > 0$ を十分小さく

(3. ε_{k+1}). $\mathrm{Max}\{ C(\varepsilon_{k+1}, t_k) h(\varepsilon_{k+1}, t_k),\ \varepsilon_{k+1},$

$\| [A(t_k + h(\varepsilon_{k+1}, t_k)) - A(t_k)] U^{\varepsilon}(t_k) \|_{t_k},$

$||| h(\varepsilon_{k+1}, t_k) A_0(t_k) U^{\varepsilon}(t_k) |||_{t_k} \} \leqq \varepsilon$

をみたす様にとり,

(3.6) $h_{k+1} = h(\varepsilon_{k+1}, t_k)$

(3.7) $U^{\varepsilon}(t_{k+1}) \equiv (I - h_{k+1} A_0(t_k))^{-1} V^{\varepsilon}(t_k) \in Y(t_k)$

と定める.

以降 定数 C_i $(i \in \mathbb{N})$ は. $\varepsilon, \delta, s, t, x, y, Y(t), Y(s)$ には依らぬものである.

$\{U^{\varepsilon}(t_k)\}$ と $\{V^{\varepsilon}(t_k)\}$ の定義より次の命題を得る.

<u>命題 1</u>

(3.8) $||| U^{\varepsilon}(t_k) |||_{t_{k-1}} \leqq C_4 ||| U_0 |||_{t_0} \qquad k \in \mathbb{N}$

(3.9) $||| V^{\varepsilon}(t_k) |||_{t_{k-1}} \leqq C_4 ||| U_0 |||_{t_0} \qquad k \in \mathbb{N}$. ——

(3.10) $U^{\varepsilon}(t) \equiv \begin{cases} U_0 & t = t_0 \\ U^{\varepsilon}(t_k) & t_{k-1} < t \leqq t_k \end{cases}$ とする.

<u>命題 2</u>

(3.11) $\| U^{\varepsilon}(t_k) - U^{\varepsilon}(t_\ell) \|_{t_k}$

$\leqq C_4 [| t_k - t_\ell | + \varepsilon | t_{k-1} - t_{\ell-1} |] ||| U_0 |||_{t_0} \qquad t_\ell \leqq t_k$

(3.12) $\| V^{\varepsilon}(t_k) - V^{\varepsilon}(t_\ell) \|_{t_k} \leqq 2 C_4 | t_k - t_\ell | ||| U_0 |||_{t_0} \qquad t_\ell \leqq t_k$. —

命題 3.

$\{u^\varepsilon(t)\}$ は $\varepsilon\downarrow 0$ とするとき t について一様にノルム $\|\cdot\|$ で収束する. ——

命題3は. 次の命題4より得られる. 即ち. 2つの函数 $\{u^\varepsilon(t)\,;\,t_\ell\}$ と $\{u^{\varepsilon'}(t)\,;\,t_{\ell'}\}$ があるとき. $\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}\geqq\delta>0$, $\{t_\ell\}\cup\{t_{\ell'}\}\subset\{s_j\}$, $t_{k-1}=s_\ell<s_{\ell+1}<\cdots<s_{\ell+j}=t_k$. となる様な近似列 $\{u^\delta(s)\,;\,s_j\}$ を考えれば.

命題 4.

(3.13) $\|u^\varepsilon(t_k)-u^\delta(t_k)\|_{t_k}$

$$\leqq\|u^\varepsilon(t_{k-1})-u^\delta(t_{k-1})\|_{t_{k-1}}+C_5(\varepsilon+\delta)(h_k+h_{k-1}). \text{——}$$

を得る.

§4. 定理の証明の方針.

$$(4.1)\quad\begin{cases} u^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(t_k)\,, & u^\varepsilon(0)=u_0\\ v^\varepsilon(t)=v^\varepsilon(t_k)\,, & v^\varepsilon(0)=u_0\\ A^\varepsilon(t)=A(t_{k-1})\,, & \text{for } t_{k-1}<t\leqq t_k\end{cases}$$

と置けば

$$(4.2)\quad\begin{cases} h_k^{-1}[u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t-h_k)]-A^\varepsilon(t)v^\varepsilon(t+0) & \\ \quad=h_k^{-1}[v^\varepsilon(t+0)-u^\varepsilon(t-h_k)] & \text{for } t_{k-1}<t\leqq t_k\\ u^\varepsilon(t)=u_0 & \text{for } t=t_0\end{cases}$$

をみたす. 従って $t\in(t_{k-1},t_k]$ であれば.

(4.3) $u^{\varepsilon}(t) - u^{\varepsilon}(0)$

$$= \int_0^t A^{\varepsilon}(s) v^{\varepsilon}(s)\, ds + \sum_{\ell=2}^{k} \{ v^{\varepsilon}(t_{\ell-1}) - u^{\varepsilon}(t_{\ell-1}) \}$$

となる.

命題2と命題3とにより $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき t について一様にノルム $\|\cdot\|$ で $u^{\varepsilon}(t)$ と $v^{\varepsilon}(t)$ がある $u(t) \in X$ に収束することが示される.

次に適当に X の位相を入れかえ $A^{\varepsilon}(t) v^{\varepsilon}(t) \longrightarrow A(t) u(t)$ a.e. t as $\varepsilon \downarrow 0$ in (X, τ) となる様にし

$$u(t) = u_0 + \tau\text{-}\int_0^t A_0(s) u(s)\, ds$$ を得る.

これと X の可分性により

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A_0(s) u(s)\, ds \ , \ t \in [0, T]$$ を得る.

一意性は加藤の微分定理[4]より示される.

注: X と Y が回帰的Banach空間であれば もう少し仮定を弱めても命題1より Y で弱収束する部分列がとれ,命題3,命題4を使わずにすむ.

§5. 応用例

2階双曲型混合問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x) \dfrac{\partial}{\partial x_j} u(t,x)\right), \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega \end{cases}$$

$$(\mathrm{M\ P.})\quad \begin{cases} u(0,x)=u_0(x),\ u_t(0,x)=u_1(x), & x\in\Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\nu_i \frac{\partial}{\partial x_j}u(t,x)\Big|_{x\in\partial\Omega}=0, & 0\le t\le T \end{cases}$$

を考える。ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ の一様に C^m 級の領域。$(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ は $x\in\partial\Omega$ での $\partial\Omega$ の単位外法線。$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ は楕円型作用素で

$$(5.1)\quad \begin{cases} a_{ij}\in\mathcal{B}^2([0,T]\times\Omega) \\ \displaystyle\max_{t,x,i,j}\left\{|a_{ij}(t,x)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}(t,x)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(t,x)\right|\right\}\le M \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\ge d\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad d>0,\ {}^{\forall}(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \\ a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x) \qquad {}^{\forall}(t,x)\in[0,T]\times\Omega \end{cases}$$

をみたすものとする。

(M. P.) を発展方程式：

$$(\mathrm{A.M.P.})\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t)=A_0(t)v(t) & 0\le t\le T \\ v(0)=v_0=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix} \end{cases}$$

と書き表わす。ここで

$$(5.2)\qquad X=\begin{matrix}H^1(\Omega)\\ \times\\ L^2(\Omega)\end{matrix}\qquad\qquad Y=\begin{matrix}H^2(\Omega)\\ \times\\ H^1(\Omega)\end{matrix}$$

$$(5.3)\quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right), & & 0 \end{bmatrix} : Y \longrightarrow X .$$

$$(5.4)\quad B(t) = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} , \quad 0 \right] : Y \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) .$$

$$(5.5)\quad Y(t) = \left\{ \mathfrak{v} \in Y \;:\; B(t)\mathfrak{v}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\} .$$

$$(5.6)\quad A_0(t) = A(t)\big|_{Y(t)} .$$

X と Y とには次の様なノルムを入れる.

$$(5.7)\quad \|\mathfrak{v}\|^2 = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X .$$

$$(5.8)\quad |\!|\!|\mathfrak{v}|\!|\!|^2 = \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in Y .$$

$$(5.9)\quad \|\mathfrak{v}\|_t^2 = e^{-M't}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} \Big(a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)_{L^2(\Omega)} + (u,u)_{L^2(\Omega)} + (v,v)_{L^2(\Omega)} \Big] . \qquad \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X .$$

$$(5.10)\quad |\!|\!|\mathfrak{v}|\!|\!|_t^2 = e^{-M't}\left[\|A(t)\mathfrak{v}\|_t^2 + \|\mathfrak{v}\|_t^2 \right] \qquad \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in Y .$$

上記の様に定めれば定理の仮定をみたす.
【証明は紙面の都合で略させていただきます.】

REFERENCES

[1] F.E.Browder:On the Spectral Theory of Elliptic Differential Operators I,Math.Ann.142(1961),22-130.

[2] M.Ikawa:A Mixed Problem for Hyperbolic Equations of Second Order with Non-Homogeneous Neumann Type Boundary Condition. Osaka J.Math 6(1969),339-374.

[3] T.Kato and H.Tanabe:On the Analyticity of Solution of Evolution Equations.Osaka J.Math.,18(1967),1-4.

[4] T.Kato:Nonlinear Semigroups and Evolotion Equations.J. Math.Soc.Japan,19(1967)508-520.

[5] T.Kato:Linear Evolution Equations of "Hyperbolic" Type.J. Fac.Sci.Univ.Tokyo,Sec.IA,17(1970),241-258.

[6] T.Kato:Linear Evolution Equations of "Hyperbolic" Type II. J.Math.Soc.Japan,25(1973),648-666.

[7] K.Kobayasi:On a Theorem for Linear Evolution Equations of Hyperbolic Type.J.Math.Soc.Japan,31(1979)647-654.

[8] Y.Kōmura:On Linear Evolution Equations with Variable Domains.Func.Anal.& Neumerical Anal.Japan-France Seminar,(1976),223-230.

[9] H.Tanabe:Equations of Evolution,Iwanami-shoten,Tokyo.1975. (in Japanese);English transl.,Monogr.& Studies in Math.vol, 6.Pitman,1979.

非線型発展方程式に対する積公式について

北大理　小山哲也

§1. 問題及び結果.

Hilbert 空間 H における発展方程式

(I.V.P.) $\quad \frac{d}{dt}u(t) \in -\partial\varphi u(t) + Bu(t),\ t \geqq 0,\quad u(0) = u_0,$

の解 $u(t)$ を近似する積公式

$$[V(\tfrac{t}{n})e^{-\frac{t}{n}\partial\varphi}]^n u_0 \underset{s}{\rightarrow} u(t), \quad n \uparrow \infty,$$

の収束を示したい。

本稿では φ, B 及び (I.V.P.) に対し次のような条件を課する。

［φの条件］　φ は H 上の適正下半連続凸汎関数であり、次をみたす。

(Φ.1) 　各 $r \in \mathbb{R}$ に対し $\{u \in H \mid \varphi(u) \leqq r\}$ は Compact.

(Φ.1)′ 　$\varphi(u) \geqq 0$, 　$u \in \mathfrak{D}(\varphi)$.

［Bの条件］　B は H の一価作用素であり次をみたす。

(B.1) 　$\mathfrak{D}(\varphi) \subset \mathfrak{D}(B)$, $\|Bu\|^2 \leqq \ell(\varphi(u))$, $u \in \mathfrak{D}(\varphi)$. ただし ℓ は $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ の単調増大局所 Lipschitz 関数である。

(B.2) 　後述の条件をみたすような作用素族 $\{V(\tau)\}_{\tau>0}$ が存在する。

[$V(\tau)$ の条件]

(V.1) ある定数 $L \geq 0$ があって任意の $\tau > 0$ に対して

$\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(V(\tau))$, $\|\frac{1}{\tau}(V(\tau)-1)v\|^2 \leq L\|Bv\|^2$, $v \in \mathcal{D}(B)$.

(V.2) 任意の $T>0$ を固定する。$\tau_n \downarrow 0$, $v_n(t) \xrightarrow[s]{} v_0(t)$ $\underset{n\uparrow\infty}{}$ in $L^2(0,T;H)$, かつ $\sup\{\varphi(v_n(t)) \mid 0 \leq t \leq T, n=1,2,\cdots\} < \infty$ ならば、$v_0(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ かつ $\frac{1}{\tau_n}((V(\tau_n)-1)v_n(t) \xrightarrow[w]{} B v_0(t)$, $n\uparrow\infty$, in $L^2(0,T;H)$ が成立する。

ただし $\xrightarrow[s]{}$ ($\xrightarrow[w]{}$) は、H 又は $L^2(0,T;H)$ における強(弱)収束を意味し、$\widetilde{B}$ は B の $L^2(0,T;H)$ への拡張 ~~である~~。即ち、

$\widetilde{B}u = \{g \in L^2(0,T;H) \mid g(t) \in Bu(t) \quad a.e.\ t\}$,

$\mathcal{D}(\widetilde{B}) = \{u \in L^2(0,T;H) \mid \widetilde{B}u \neq \phi\}$.

[(I.V.P.) の条件]

(U) (I.V.P.) の強解はたかだか一つである。

ただし、$[0,T]$ 上 H 値関数 $u(t)$ が (I.V.P.) の強解であるとは、次をみたすこと。

i) $[0,T]$ 上絶対連続かつ $\frac{d}{dt}u(t) \in L^2(0,T;H)$,

ii) $u \in \mathcal{D}(\widetilde{\partial\varphi})$,

iii) $g \in \widetilde{\partial\varphi}u$ があって、

(I.V.P.)$_0$ $(d/dt)u(t) = -g(t) + Bu(t)$, a.e. $0 \leq t \leq T$, $u(0) = u_0$.

また、$u(t)$ が爆発時刻 T_b ($\leq \infty$) の極大強解であるとは、

i) $[0,T_b)$ 上定義されていて連続、

ii) 任意の $0<T<T_0$ に対し，$u(t)$ は $[0,T]$ 上で (I.V.P.) の強解，

iii) (I.V.P.) の強解であるような $u(t)$ の $[0,T_0]$ への拡張は存在しないということ。

注意1. 本来の Trotter 積公式から類推すれば $[e^{\frac{t}{n}B}e^{-\frac{t}{n}\partial\varphi}]^n u_0 \to u(t)$ を示すべきであろうが，一般には e^{tB} が意味をもたないので近似作用素 $V(t)$ で代用する。B が一価極大単調のときは，たとえば $V(\tau)=1+\tau B$ または $V(\tau)=1+\tau B_\tau$ とすれば，(V.1), (V.2) はみたされる。

注意2. Ishii[1] は，B が劣微分であるとき，(I.V.P.) の解が有限時間で爆発しうることを示した。したがって，我々の積公式も時間局所的ならざるをえない。

注意3. (U) は，たとえば次の条件があればみたされる。

(Φ.2) $\quad (u_1-u_2,\ u_1'-u_2') \geq C\varphi(u_1-u_2)$, $u_i \in D(\partial\varphi)$, $u_i' \in \partial\varphi u_i$, $i=1,2$, $C>0$.

(B.3) $\quad$ ある単調増大関数 $k:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ があって，$u_1,u_2\in D(\varphi)$

$$(u_1-u_2,\ Bu_1-Bu_2) \leq k(\varphi(u_1),\varphi(u_2))\,\varphi(u_1-u_2)^{1/2}\,\|u_1-u_2\|.$$

注意4. 解 $u(t)$ の定義により，$\varphi(u(t))$ は絶対連続。

以上の仮定 (Φ.1), (Φ.1)', (B.1), (B.2), (V.1), (V.2), (U) のもとで，次の結果がえられた。

定理 5. 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(\varphi)$ と $0 \le t < T_b$ に対し

$$(\mathrm{P.F.})\ \begin{cases} [V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^{[t/\tau]}u_0 \xrightarrow{s} u(t) & \text{in } H \text{ as } \tau\downarrow 0, \\ [V(t/n)e^{-(t/n)\partial\varphi}P]^n u_0 \xrightarrow{s} u(t), & \text{in } H \text{ as } n\uparrow\infty, \end{cases}$$

が成立する。ここで $u(t)$ は (I.V.P.) の唯一極大強解であり、T_b はその爆発時刻、P は $\overline{\mathcal{D}(\varphi)}$ への Projection, $[s]$ は $s \ge 0$ の整数部分である。収束は $[0, T_b)$ の Compact 集合上一様である。

系 6. 同じ情況で

$$(1)\ \begin{cases} \varphi(e^{-\tau\partial\varphi}P[V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^{[t/\tau]}u_0) \to \varphi(u(t)) & \tau\downarrow 0, \\ \varphi(e^{-(t/n)\partial\varphi}P[V(t/n)e^{-(t/n)\partial\varphi}P]^n u_0) \to \varphi(u(t)), & n\uparrow\infty, \end{cases}$$

が成立する。収束は $[0, T_b)$ の Compact 集合上一様である。

系 7. さらに (B.3) 及び

$$(\mathrm{B}.3)\quad \varphi(u_1) - \varphi(u_2) - (u_1 - u_2, u_2') \ge C\varphi(u_1 - u_2),\ C>0,\ u_i \in \mathcal{D}(\partial\varphi),\ u_i' \in \partial\varphi u_i,\ i=1,2,$$

がみたされるならば

$$(2)\ \begin{cases} \varphi(e^{-\tau\partial\varphi}P[V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^{[t/\tau]}u_0 - u(t)) \to 0 & \tau\downarrow 0 \\ \varphi(e^{-(t/n)\partial\varphi}P[V(t/n)e^{-(t/n)\partial\varphi}P]^n u_0 - u(t)) \to 0, & n\uparrow\infty, \end{cases}$$

が成立する。収束は $(0, T_b)$ の Compact 集合上一様である。

§2、証明の概要

$u_0 \in \mathcal{D}(\varphi)$ を任意にとり、離散な族 $\{e^{-\tau\partial\varphi}P[V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^k u_0\}_{k=0,1,2,\cdots}$ を次のように折れ線補間して関数 $F(\tau, t)$ を作る。

$$F(\tau, k\tau) = e^{-\tau\partial\varphi}P[V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^k u_0,\quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$F(\tau,t) = \left([t/\tau]+1-(t/\tau)\right)F(\tau,[t/\tau]\tau)$$
$$+\left((t/\tau)-[t/\tau]\right)F(\tau,([t/\tau]+1)\tau),\quad t\geq 0.$$

証明の大すじは，t の連続関数の族 $\{F(\tau,t)\}_{\tau>0}$ に，Compactness argument を適用することにより $F(\tau,t)\to u(t)$, $\tau\downarrow 0$ なる収束を得，その副産物として (P.F.), (1), (2) を得ようというものである。そのさい，Kato-Masuda [2] による評価

$$\varphi(v)-\varphi(e^{-\tau\partial\varphi}Py) \geq \frac{1}{\tau}(v-y,\,y-e^{-\tau\partial\varphi}Py)+\frac{1}{2\tau}\|y-e^{-\tau\partial\varphi}Py\|^2$$
$$v, y\in H,\quad \tau>0,$$

を用いてエネルギー評価を行なう。

§3. 応用.

$\Omega\subset R^N$ は有界領域，$\partial\Omega$ は smooth とする。このとき

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Delta u(t,x)+f(u(t,x)), & t>0,\ x\in\Omega,\\ u(t,x)=0, & t>0,\ x\in\partial\Omega,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

を考える。ただし，

f; i) 単調非減少.

ii) $f(\lambda_2)-f(\lambda_1)\leq(\lambda_2-\lambda_1)\{C_1(|\lambda_1|+|\lambda_2|)^{q-2}+C_2\}$, $\lambda_1\leq\lambda_2$,

$$q;\ \begin{cases} 2\leq q<\infty & \text{if } 2\geq N,\\ 2\leq q\leq \frac{2N-2}{N-2} & \text{if } 2<N, \end{cases}$$

とする。このとき $\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2dx$, $Bu=f(u)$, $D(\varphi)=W_0^{1,2}(\Omega)$ として §1 の結果が適用可能である。

また、$\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ とするとき、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \Delta u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\beta(u(t,x)), & t>0, \ 0<x<1, \\ u(t,x) = 0, & t>0, \quad x = 0, 1, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

$\beta \in C^2(\mathbb{R})$.

と同様に §1 の結果を適用できる。

[1] Ishii, H.: Asymptotic stability and blowing up of solution of some nonlinear equation. J. D. E., 26, 291-319 (1977).

[2] Kato, T. and Masuda, K.: Trotter's product formula for nonlinear semigroups generated by the subdifferentials of convex functionals. J. Math. Soc. Japan, 30. 169-177 (1978).

外部領域における非線型Schrödinger方程式の大域解について

東大・教養　堤 誉志雄

§1. 問題と結果.

次のような方程式を考える。

(1.1) $i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda |u|^p u$ in $[0,\infty) \times \Omega$

(1.2) $u(0,x) = u_0(x)$,

(1.3) $u|_{\partial\Omega} = 0$.

ここで、λは実定数、pは2以上の偶数である。領域Ωは$\mathbb{R}^n$におけるコンパクト集合の外部領域で、境界$\partial\Omega$は滑らかであるとする。

$\Omega = \mathbb{R}^n$の場合は、色々な結果が報告されているが（[2], [3], [4] 参照）、Ωが外部領域の場合は、Brezis & Gallouet [1] の結果以外は無いようである。彼らは、$n=2$, $p=2$の時、問題(1.1)-(1.3)が一意的な大域解を持つことを示した。ここでは、$n \geq 3$, pが2以上の偶数の時でも、領域Ωがあ

る条件を満たし初期値が十分小さいなら、やはり問題(1.1)-(1.3)は一意的な大域解を持つことを示す。

領域Ωについては、"Ωにおける波動方程式の基本解の特異性が十分時間がたてば無限遠方に飛んで行く"という条件を課す。この条件は、いわゆる"non-trappin condition"で、以後これを条件[A]と呼ぶことにする。この条件の正確な数学的表現については、Vainberg [5, the hypothesis D′, p. 11], Rauch [6, the hyrothesis (9.3), p. 476], Melrose [7] を参照せよ。具体的には、Ωの補集合が凸集合であるような領域Ωならば良い。

我々の主定理は次のようなものである。

<u>定理 1.1.</u>　$n \geq 3$とし、pを2以上の偶数とする。さらに、領域Ωが条件[A]を満たしていると仮定する。その時、$N \geq 3([\frac{n}{2}]+3)/2$となるような整数$N$に対して、ある$\varepsilon>0$

が存在して次の事が成立する。すなわち、もし初期値 $u_0(x)$ が不等式

$$(1.4)\quad \sum_{|\alpha|\leq 2N} \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_0\right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq N+[\frac{n}{2}]+4} \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_0\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$$

と適合条件を満たすなら、問題 (1.1) − (1.3) は一意的な大域解

$$u(t,\cdot) \in \left\{\bigcap_{k=0}^{N-1} C^k([0,\infty); H_0^1(\Omega)\cap H^{2(N-k)}(\Omega))\right\} \cap C^N([0,\infty); L^2(\Omega))$$

を持つ。

<u>注意 1.1.</u>　定理 1.1 で云う初期値の満たすべき適合条件とは、上で述べたような解 $u(t,x)$ が存在したとするなら、$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u|_{t=0}$ $(0\leq j\leq N-1)$ の境界 $\partial\Omega$ での値と境界条件 (1.3) が一致するための条件ということである。

我々は、京都大学の松村先生と西田先生が、圧縮性粘性流の方程式を解くのにつかった方法（[9] 参照）に従い、線型の Schrödinger 方程式に対する decay 評価と energy 評価をつかって大域解の存在を示す。

ここで、記号の定義をしておく。微分 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\beta}$ は単に

∂_x^α, ∂_t^j とそれぞれ略記する。 $[0,\infty)\times\Omega$ 上で定義された関数 $f(t,x)$ と、 $1\le p\le\infty$, $k\ge 0$, 非負整数 L に対し

$$[f;p,k,L](t)\equiv \sup_{s\in[0,t]} \sum_{|\alpha|+2j\le L} (1+s)^k \|\partial_x^\alpha \partial_s^j f(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}$$

と定義する。

§2. 局所解の存在と一意性.

問題(1.1)-(1.3)の局所解の存在とその一意性については次の定理が成立する。

<u>定理2.1.</u> N を $N\ge[\frac{n}{2}]+1$ となるような整数とし p を 2以上の偶数とする。その時、2つの正定数 ε' と T が存在して次の事が成立する。すなわち、もし初期値 $u_0(x)$ が不等式

(2.1) $$\sum_{|\alpha|\le 2N} \|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon'$$

と適合条件を満たすならば、問題(1.1)-(1.3)は一意的な局所解

$$u(t,\cdot)\in\Big\{\bigcap_{k=0}^{N-1} C^k([0,T];H_0^1(\Omega)\cap H^{2(N-k)}(\Omega))\Big\}\cap C^N([0,T];L^2(\Omega))$$

を持つ。

上の定理は、関数空間を適当に選んで、その空間で縮少写像

の原理を適用することにより得られる。

§3. ア・プリオリ評価

定理2.1より、初期値が小さい時の局所解の存在と一意性はすでにわかっているので、後はその局所解 $u(t,x)$ が存在するようなすべての時間 t に対して

$$(3.1)\quad \sum_{|\alpha|\le 2N} \|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon'$$

であることを示せば良い。但し、ε' は定理2.1にでてきたものである。そうすれば、局所解 $u(t,x)$ は任意の時間に接続することができ、問題(1.1)-(1.3)の大域解を得る。

そのために、次のような線型方程式を考える。

$$(3.2)\quad i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \qquad \text{in } [0,\infty)\times\Omega,$$

$$(3.3)\quad u(0,x) = u_0(x),$$

$$(3.4)\quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

f は以下で述べられる補題の中に現われる f のノルムがすべて有界となるような滑らかな関数で初期値 $u_0(x)$ も滑らかである

とする。従って問題(3.2)−(3.4)の滑らかな解$u(t,x)$が存在する。その時、次のような補題が成立する。

<u>補題 3.1.</u>　$n \geq 3$とし条件[A]が満たされていると仮定する。その時、非負整数Lに対して、問題(3.2)-(3.4)の解$u(t,x)$は次のようなdecay評価を満たす。

$$(3.5)\quad [u;\infty,\tfrac{n}{2},2L](t) \leq C_L\Big\{\sum_{|\alpha|\leq 2L+[\frac{n}{2}]+4}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^1(\Omega)}$$

$$+\sum_{|\alpha|\leq 2L+2[\frac{n}{2}]+5}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)} + [f;1,\tfrac{n}{2},2L+[\tfrac{n}{2}]+4](t)$$

$$+[f;2,\tfrac{n}{2},2L+2[\tfrac{n}{2}]+5](t)\Big\},\quad t\geq 0.$$

但し、C_Lはn, L, Ωだけに依存する正定数である。

ゼロDirichlet境界条件を持つ波動方程式に対しては、(3.5)のような型のdecay評価はY. Shibata [8]によって最近得られた。補題3.1.の証明の方針は[8]に従う。

<u>補題 3.2.</u>　$n \geq 3$とする。その時、非負整数Lに対して、問題(3.2)−(3.4)の解$u(t,x)$は次のようなenergy

評価を満たす。

$$(3.1)\qquad [u;\,2,\,c,\,2L](t) \le \bar{C}_L \Big\{ \sum_{|\alpha|\le 2L} \|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)} + [f,\,2,\,\tfrac{1}{2},\,2L](t) \Big\}, \quad t \ge 0.$$

但し、$\bar{C}_L$ は n, L, Ω だけに依存する正定数である。

補題 3.1, 3.2 と Matsumura & Nishida's method により、初期値を十分小さくとれば、問題 (1.1)−(1.3) の解に対して (3.1) のようなア・プリオリ評価を得る。故に、それと定理 2.1 を合わせて、問題 (1.1)−(1.3) の大域解を得る。

[参考文献]

[1] H. Brezis and T. Gallouet, Nonlinear Schrödinger evolution equations, Nonlinear Analysis, Theory, Method & Application, 4(4), 677−681 (1980).

[2] J. B. Baillon, T. Cazenave and M. Figueira, Equation de Schrödinger nonlinéaire, C.R. Acad. Sci., Paris, 284, 869−872 (1977).

[3] J. Ginibre and G. Velo, On a class of

nonlinear Schrödinger equations, J. Functinal Analysis, 32, 1-32, 33-71 (1979).

[4] R. T. Glassey, On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation, J. Math. Phys., 18, 1794-1797 (1977).

[5] B. R. Vainberg, On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of nonstationary problems, Russian Math. Surveys, 30:2, 1-58 (1975).

[6] J. Rauch, Asymptotic behaviour of solutions to hyperbolic partial differential equations with zero speeds, Comm. Pure Appl. Math., 31, 431-480 (1978).

[7] R. B. Melrose, Singularities and energy decay in accoustical scattering, Duke Math. Journal, 46(1), 43-59 (1979).

[8] Y. Shibata, On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain, preprint.

[9] A. Matsumura and T. Nishida, The initial

value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Proc. Japan Acad., 55, Ser. A, 337-342 (1979).

Phytoplankton population dynamics with **self-shading effect**

Hitoshi Ishii * and Izumi Takagi **

We consider the following nonlinear diffusion equation describing the population dynamics of phytoplankton:

$$(1)\qquad \begin{cases} p_t = p_{xx} - \omega p_x - \lambda p + f_0(I(p))p & \text{for } (x,t) \in (0,\ \ell) \times \mathbb{R}_+ , \\ p_x - \omega p = 0 & \text{at } x = 0, \ell , \\ p(x,0) = p_0(x) \geq 0 & \text{in } (0,\ \ell) , \end{cases}$$

where

$$I(p) = \int_0^x (\kappa + p(\xi,t))d\xi .$$

Here $\kappa \geq 0$, $\lambda > 0$ and $\omega \geq 0$ are constants and $f_0(r)$ is a Lipschitz continuous decreasing function such that $\lim_{r\to\infty} f_0(r) = 0$. For the biological aspect, see Shigesada and Okubo [2].

Let μ_1 be the largest eigenvalue of the following Sturm-Liouville problem:

$$(2)\qquad \begin{cases} \phi'' - \omega\phi' - \lambda\phi + f_0(\kappa x)\phi = \mu\phi & \text{in } (0,\ \ell) , \\ \phi' - \omega\phi = 0 & \text{at } x = 0 , \ell . \end{cases}$$

Note that this eigenvalue problem is associated with the linearization of (1) at the trivial stationary solution $p \equiv 0$. Then we can show the following theorem on the stationary solutions and the asymptotic behavior of the solutions of (1).

Theorem (a) If $\mu_1 \leq 0$, then the trivial solution $p \equiv 0$ is the unique nonnegative stationary solution and it is globally stable, that is, any solution $p(x,t)$ of (1) converges to 0 uniformly on $[0,\ \ell]$ as $t \to \infty$.

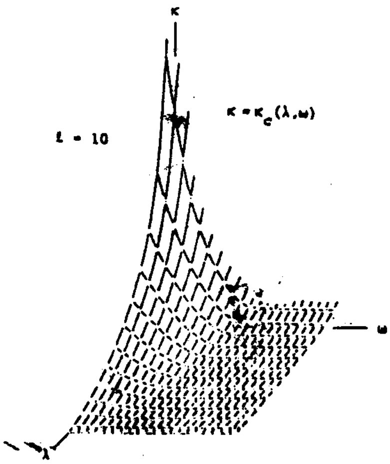
(b) If $\mu_1 > 0$, then there exists a unique positive stationary solution $p^*(x)$ and it is globally stable, that is, any solution $p(x,t)$ of (1) converges to $p^*(x)$ uniformly on $[0,\ \ell]$ as $t \to \infty$ unless $p_0(x) \equiv 0$.

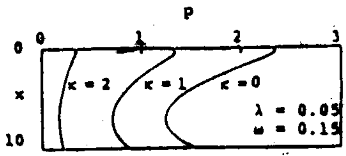
The sign of μ_1 can be discriminated by $(\kappa, \lambda, \omega)$

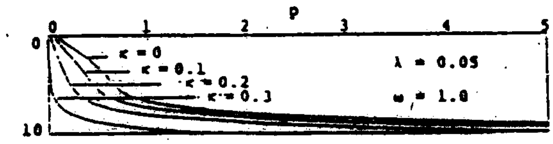
<u>Proposition</u> (i) If $\lambda \geq f_0(0)$, then $\mu_1 \leq 0$

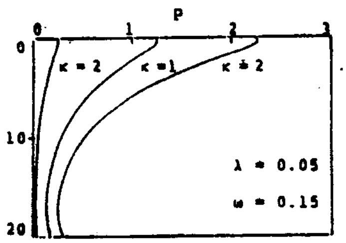
(ii) Assume $0 < \lambda < f_0(0)$. Then there exists a continuous function $\kappa_c(\lambda,\omega) > 0$ such that $\mu_1 > 0$ if $0 \leq \kappa < \kappa_c$ and $\mu_1 \leq 0$ for $\kappa \geq \kappa_c$.

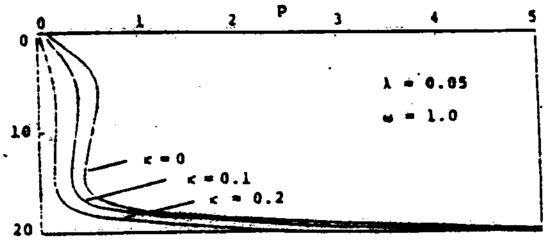
We here show some examples in the case of $f_0(r) = 1 - \exp(-e^{-r})$.











References

[1] H. Ishii and I. Takagi, Global stability of stationary solutions to a nonlinear diffusion equation in phytoplankton dynamics, preprint (1982).

[2] N. Shigesada and A. Okubo, J. Math. Biol. 12 (1981), 311-326.

* Department of Mathematics,
Faculty of Science and Engineering,
Chuo University,
1-13-27, Kasuga,
Bunkyo-ku, Tokyo 112

** Tokyo Metropolitan College
of Aeronautical Engineering,
8-53-1, Minami-Senju,
Arakawa-ku, Tokyo 116