第3回
発展方程式
若手セミナー
報告集

序

この報告集は昭和56年8月3日から8月6日の期間に長野県の早稲田大学追分セミナーハウスで開催された、「第3回発展方程式若手セミナー」で行なわれた全講演内容を講演者自身にお願いして執筆して頂いたものです。

「発展方程式論の現状と将来の方向を探るための若手研究者間の討論と情報交換の場」として始められた本セミナーも今回で3回目を迎え、その参加者も過去最高の47人に達しました。

大春愼之助先生の教育的かつ示唆に富んだ特別講演をはじめとして、広い関連分野から熱のこもった講演を頂き、講演を中心として活発な討論が行なわれ、盛況のうちに頭初の目的を達する事ができました。これまで過去3回の本セミナーの参加者及び世話人の、この様な細やかな努力を核にしてこのセミナーが今後とも若い研究者の間で引き継がれ、延いては日本の発展方程式論及びその関連分野の将来の発展に些かでも寄与できます様願ってやみません。

最後に、今回のセミナーを開するに当り、「作行会数学基金」からの援助を頂きました事を、ここに深く感謝致します。また、セミナーの場を早稲田大学追分セミナーハウスに求めるに際し、その厳しい利用規則等の困難にもかかわらず、大春愼之助先生のご奔走に依りこれを実現する事ができました。更に、この報告集の作成にあたっては、大阪大学の八木厚志氏神崎房子氏のご好意に甘え、その仕事の大部分をお願いしてしまうことになりました。ここに関係者の方々に深く感謝する次第です。

昭和56年12月

第3回発展方程式若手セミナー　世話人　大谷光春

参加者名簿

大春慎之助（早大）
大谷光春（東海大）
釼持信幸（千葉大）
小林和夫（相模工大）
岩宮敏幸（航宇研）
福田賢一（相模工大）
清水眞（神奈川大）
高木泉（都航高専）
高橋勝雄（東大）
新井勉（東京電大）
谷川政雄（筑波大）
森本芳則（名大）
儀我美一（名大）
山田義雄（名大）
丸尾健二（姫工大）
八木厚志（阪大）
山田直記（神大）
永井敏隆（広大）
伊藤正幸（広大）
成川公昭（広大）
丸山彰（東京電大）
伊藤達夫（東大）
小杉正子（早大）
小林久寿雄（富山大）
神田茂雄（早大）
羽田一郎（早大）
橋本一夫（早大）
谷口昌孝（早大）
大河内広子（早大）
柳原敦子（早大）
藤平知行（慶大）
古谷希世子（都立大）
小山哲也（北大）
新倉保夫（名大）
辻本順一（阪大）
寺本恵昭（広大）
水町竜一（東大）
宮原一成（早大）
杉本哲治（早大）
古屋博行（早大）
宮芝晃一（早大）
小泉致人（早大）
小池茂昭（早大）
堤誉志雄（東大）
篁義郎（東大）
大内雅晴（東海大）
田中博（阪大）
佐々木茂（阪大）
塩田倫也（阪大）

目　次

遅れを持つ半線型発展方程式の解の構成と微分可能性

福田賢一

1. Banach space X において，delay を持つ半線型発展方程式の initial function problem

$$(IF;\varphi,\tau)\begin{cases} \frac{d}{dt}x(\varphi,\tau)(t) = A(t)x(\varphi,\tau)(t) + F(t, x_t(\varphi,\tau)) \\ x(\varphi,\tau)(\tau) = \varphi \in C \qquad 0 \le \tau \le t \end{cases}$$

について考える。ここで $A(t)$ は linear evolution op. $W(t,s)$ の generator， $C = C(I)$ は区間 $I = [-r,0]$ (or $(-\infty,0]$) から X への連続関数全体の作る Banach space で，norm を $\|\cdot\|_C$．また $F: [0,T]\times C \to X$ は

$$(F.1) \qquad \|F(t,\varphi) - F(t,\psi)\| \le \beta(r,t)\|\varphi-\psi\|_C$$
$$\text{for } s\in[0,t],\ \|\varphi\|,\|\psi\|\le r$$

$$(F.2) \qquad t \mapsto F(t,\varphi) \text{: continuous for each } \varphi\in C .$$

本文では，$(IF;\varphi,\tau)$ に応ずる evolution operator を構成し（この場合もはや X の作用素ではなく，C の作用素），F が continuously Fréchet differentiable のとき，構成された evolution op. も continuously F-differentiable となり，F-derivative が product formula で表現され，適当な initial function φ について $(IF;\varphi,\tau)$ が C'-solution を持つ（この様な φ は C で dense）事，等々を示す。

$A(t)$ については，linear evolution operator $W(t,s)$ を

$$W(t,\tau) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\prod_{i=1}^{[(t-\tau)/\lambda]}[I-\lambda A(\tau+i\lambda)]^{-1}x$$

で構成し，$W(t,s)$ の infinitesimal generator となっているとする。この事が成立するために，もっと弱くてもよいが，一応次のよく知られた条件；

(L.1) For each $t \in [0, T]$, $A(t)$ is closed, $D(A(t))$: indep of t,
$\overline{D(A(t))} \equiv X$;

(L.2) $\exists \omega$, $A(t)$ $(t \in [0,T])$ は type ω の C_0-semigroup の infinitesimal generator;

(L.3) $\exists L > 0$ $\forall x \in D(A(t))$ $t, \tau \in [0, T]$

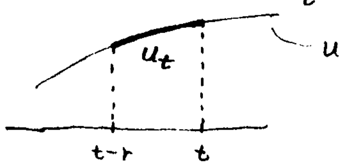
$$\|A(t)x - A(\tau)x\| \leqq |t-\tau| \, L(\|x\|)(1 + \|A(t)x\|),$$

を仮定しておく。

u が区間 $I \cup [0,T]$ から X への連続関数とするとき, C の元 u_t $(t \in [0,T])$ を

$$u_t(\theta) = u(t+\theta) \quad (\theta \in I)$$

で定義する。



2.

$(IF; \varphi, \tau)$ に応じて 次の semilinear Volterra equation

$$(VE: \tau, \varphi) \quad \begin{cases} x(\varphi,\tau)(t) = W(t,\tau)x(\varphi,\tau)(t) + \displaystyle\int_\tau^t W(t,s)F(s, x_s(\varphi,\tau))\, ds \\ x(\varphi,\tau)(\tau) = \varphi \end{cases}$$

が考えられる。これは $(IF; \varphi, \tau)$ の mild solution を与えているが $\varphi \mapsto F(t,\varphi)$ は $(F.1)$ より, local でしか Lipshitz でないので global sol.は望めず local sol しかない。この事について,

<u>Lemma I</u>

i) $\forall \tau > 0$, $\forall \varphi \in C$, $\exists T(\tau, \varphi) > \tau$ s.t.

"$[\tau, T(\tau,\varphi))$ は $(VE: \tau, \varphi)$ の解 $x(\varphi,\tau)(t)$ の存在する最大区間".

ii) If $T(\tau, \varphi) < \infty$, then $\displaystyle\lim_{t \uparrow T(\tau,\varphi)} \|x(\varphi,\tau)(t)\| = \infty$

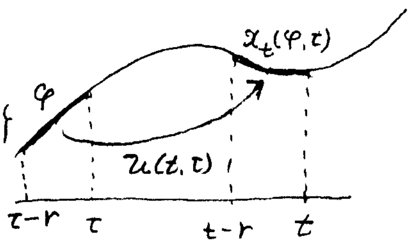
iii) $(t, \varphi) \mapsto T(\tau, \varphi)$ は $\displaystyle T(t,\varphi) \leqq \liminf_{\substack{t' \to t \\ \varphi' \to \varphi}} T(t', \varphi')$

<u>proof.</u> Delay のない場合の証明, (たとえば Segal, Ann. Math 63') と類似した方法で示される

[終]

Volterra equation (VE: τ,φ) の解 $x(\varphi,\tau)(t)$ で，空間 C の作用素 $\mathcal{U}(t,\tau)$ を次の様に定める；

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t,\tau)\varphi = x_t(\varphi,\tau) \\ D(\mathcal{U}(t,\tau)\varphi) = \{\varphi\in C \mid t < T(\tau,\varphi)\} \end{cases}$$



$\mathcal{U}(t,\tau)$ の domain は t,τ に depend するし，empty かもしれない。Lemma 1 より $D(\mathcal{U}(t,\tau))$ は C の open set である事が示される。また $\mathcal{U}(t,\tau)$ は evolution property: $\mathcal{U}(\tau,\tau)\varphi=\varphi$ ($\varphi\in C$), $\mathcal{U}(t,\tau)\varphi=\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau)\varphi$ ($\tau<s<t<T(\tau,\varphi)$)，を満し，$(t,\tau)\mapsto\mathcal{U}(t,\tau)\varphi$ は $\{(t,\tau)\mid t<T(\tau,\varphi)\}$ 上で連続であり，$\varphi\mapsto\mathcal{U}(t,\tau)\varphi$ は (t,τ) について一様な local Lipshitz である事が示される。

上で定義した $\mathcal{U}(t,\tau)$ を $A(t)$ と $F(t,\varphi)$ より構成するのだが，$\mathcal{U}(t,\tau)$ は C での作用素ゆえ，$A(t)$ と $F(t,\varphi)$ より，C における nonlinear operator $\mathcal{A}(t)$ を次の様に定義する。

$$\begin{cases} \mathcal{A}(t)\varphi = \dot{\varphi} \qquad (\dot{}\ \text{は微分}) \\ D(\mathcal{A}(t)) = \{\varphi \mid \dot{\varphi}\in C,\ \varphi(0)\in D(A(t)) \\ \qquad\qquad\qquad \dot{\varphi}^-(0) = A(t)\varphi(0)+F(t,\varphi)\} \end{cases}$$

この $\mathcal{A}(t)$ は dissipative とはなってはおらず また (L.3) の様な t についての Lipshitz 性はない，しかし，$\mathcal{A}(t)$ は Chambers–Oharu [Pacific. J. 71'] の D-operator となっており，$D(\mathcal{A}(t))$ は $\overbrace{C\ \text{で dense}}^{\text{から(A.1)より } t \text{ に indep.}}$ である。

さて，この $\mathcal{A}(t)$ を用いると initial function problem (IF: φ,τ) は形式的に次の様な，空間 C における非線型発展方程式の Cauchy 問題

$$(CP:\varphi,\tau)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = \mathcal{A}(t)u(t) \\ u(\tau)=\varphi \end{cases}$$

に書き替えられる。 $\mathcal{A}(t)$ から $\mathcal{U}(t,\tau)$ を構成するのに Crandall–Pazy [Israel J 72'] の結果はもち論使えない。

<u>Theorem 1.</u> (A.1)〜(A.3), (F.1).(F.2) を仮定.

(i) $\mathcal{U}(t,\tau)\varphi = \lim_{\lambda\downarrow 0} \prod_{i=1}^{[(t-\tau)/\lambda]} (I-\lambda\mathcal{A}(\tau+i\lambda))^{-1}\varphi$, $\varphi \in D(\mathcal{U}(t,\tau))$

$t\in[\tau, T(\tau,\varphi))$, 収束は compact interval 上で一様.

(ii) $\mathcal{A}(t)$ は $\mathcal{U}(t,\tau)$ の infinitesimal generator.

この定理については Fitzgibbon (J. Diff. eq. 79'), また 小林(和)-小林(良)-大喬 の近刊予定の論文も参考となる,

証明は, $\mathcal{A}(t)$ が D-operator となっている事, また resolvent $(I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}$ は C 全体では定義できないが, ある有界集合に制限すれば十分小さい λ について定義され, $t\mapsto(I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}\varphi$ は連続で

$$[(I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}\varphi](\theta) = e^{\theta/\lambda}(I-\lambda A(t))^{-1}\{\varphi(0)+F(t,(I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}\varphi\}$$
$$+\beta_\lambda\varphi(\theta) \quad \theta\in I \quad (\text{ただし } \beta_\lambda\varphi(\theta) = \tfrac{1}{\lambda}e^{\theta/\lambda}\int_\theta^0 e^{-s/\lambda}\varphi(s)ds)$$

となっており, また $\mathcal{U}(t,\tau)$ が $(VE;\varphi,\tau)$ により定義されている事等を用い示す。

3. Differentiability

まず F に differentiabity を仮定したとき, $\mathcal{U}(t,s)$ も differentiability を持つ事を示す。すなわち;

<u>Theorem 2.</u> (A.1)〜(A.3), (F.1)(F.2) 仮定. F は

$$(D)\begin{cases} \varphi\mapsto F(t,\varphi) \text{ は Fréchet differentiable で} \\ (t,\varphi)\mapsto dF(t,\varphi)w \ (w\in C) \text{ は continuous} \end{cases}$$

を満すならば,

$\varphi\mapsto\mathcal{U}(t,\tau)\varphi$ $(\varphi\in C)$ も F-differentiable で,

$(t,\varphi) \longmapsto d\mathcal{U}(t,\tau)(\varphi)w$ は continuous for each $w\in C$.

を示す。まず次を考える;

$$(IF;\varphi,\tau,w) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(w)(t) = A(t)y(w)(t) + dF(t,\mathcal{U}(t,\tau)\varphi)y_t(w) \\ y(w)(\tau) = w\in C, \quad \tau\le t< T(\tau,\varphi) \end{cases}$$

及び

$$(VE;\varphi,\tau,w) \quad \begin{cases} y(w)(t) = W(t,\tau)w(0) + \int_\tau^t W(t,s)dF(s,\mathcal{U}(s,\tau)\varphi)y_s(w)ds \\ y(w)(\tau) = w\in C, \quad \tau\leqq t< T(t,\varphi) \end{cases}.$$

ここで、各 t, φ について C の linear operator $\mathcal{B}(t,\varphi)$ を

$$\begin{cases} \mathcal{B}(t,\varphi)w = \dot{w} \\ D(\mathcal{B}(t,\varphi)) = \{ w \mid \dot{w} \in C \quad w(0) \in D(A(t)), \\ \qquad\qquad \dot{w}^-(0) = A(t)w(0) + dF(t,\varphi)w \} \end{cases}$$

で定義すると、$(IV:\varphi,\tau,w)$ は次の C における Cauchy problem;

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = \mathcal{B}(t, \mathcal{U}(t,\tau)\varphi)\, u(t) \\ u(t) = w \end{cases}$$

に書き替えられる。ここで $dF(t,\varphi)$ が C の bounded linear operator で有る事に注意して、Theorem 1 を適用すれば、各 w について

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \prod_{i=1}^{[(t-\tau)/\lambda]} [I - \lambda \mathcal{B}(\tau + i\lambda, \mathcal{U}(\tau+i\lambda,\tau)]^{-1} w$$

は $[\tau, T(\tau,\varphi))$ の compact subinterval I で一様に収束し、$(VE:\varphi,\tau,w)$ の解作用素を定め、bounded linear operator を定めている。これが $d\mathcal{U}(t,\tau)(\varphi)w$ となっている事を示す。次の lemma を用意する。

<u>Lemma 2.</u> $(A.1) \sim (A.3)$, $(F.1)$, $(F.2)$, (D) 仮定

$\varphi \mapsto (I - \lambda\mathcal{A}(t))^{-1}\varphi$ は continuously Fréchet differentiable で

$$d(I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}(\varphi)w = [(I - \lambda\mathcal{B}(t, (I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}\varphi)]^{-1} w$$

<u>proof</u> $(t,\varphi) \mapsto (I-\lambda\mathcal{B}(t,\varphi))^{-1}w$ は continuous で

$$[(I-\lambda\mathcal{B}(\lambda,\varphi))^{-1}w](\theta) = e^{\theta/\lambda}(I-\lambda A(t))^{-1}\{w(0) + dF(t,\varphi)w\} + \beta_\lambda w(\theta)$$

となっている事と、Theorem 1. の証明で述べた $(I-\lambda\mathcal{A}(t))^{-1}$ の同様な表現とを使い、計算すればよい。 [終]

以上より、resolvent の積を $J_\lambda^m = \prod_{i=1}^{m} [I - \lambda\mathcal{A}(\tau+i\lambda)]^{-1}$ とおけば

$$J_\lambda^{[(t-\tau)/\lambda]}(\varphi + w) - J_\lambda^{[(t-\tau)/\lambda]}\varphi = \prod_{i=1}^{[(t-\tau)/\lambda]} [I - \lambda\mathcal{B}(\tau+i\lambda, J_\lambda^i \varphi)]^{-1} w + \varepsilon_\lambda(\|w\|)$$

となる。

前式の第1項，第2項はそれぞれ $\mathcal{U}(t,\tau)(\varphi+w)$, $\mathcal{U}(t,\tau)\varphi$ に行く，また右辺第1項は，$(t,\varphi)\mapsto(I-\lambda B(t,\varphi))^{-1}w$ の continuity と先に述べた事実より，収束する．また $\limsup_{\lambda\downarrow 0}\varepsilon_\lambda(\|w\|)=o(\|w\|)$ が示され

$$\mathcal{U}(t,\tau)(\varphi+w)-\mathcal{U}(t,\tau)\varphi=\lim_{\lambda\downarrow 0}\prod_{i=1}^{[(t-\tau)/\lambda]}\underbrace{[I-\lambda B(\tau+i\lambda,J_\lambda^i\varphi)]^{-1}w}$$

$$(\text{or } \prod[I-\lambda B(\tau+i\lambda,\mathcal{U}(\tau+i\lambda,\tau)\varphi)]^{-1}w\ )$$

$$+\ o(\|w\|)$$

となり Th. 2 が示される。次に $t\mapsto F(t,s)$ に微分可能性を仮定して

<u>Theorem 3.</u> (A,1)〜(A,3)，(F,1)，(F,2) 仮定，

$t\mapsto F(t,\varphi)$ が differentiable で $(t,\varphi)\mapsto\partial_t F(t,\varphi)$ が continuous とすると $\mathcal{U}(t,\tau)\varphi$ ($\varphi\in D(\mathcal{A}(\tau))$, $t\in[\tau,T(\tau,\varphi))$) は (CP,φ,τ) の C^1-solution で $x(\varphi,\tau)(t)=[\mathcal{U}(t,\tau)\varphi](0)$ ($\varphi\in D(\mathcal{A}(\tau))$) は initial function problem $(IF:\varphi,\tau)$ の C^1-solution である。

<u>proof.</u> 証明はかなり大変であるが，$\mathcal{A}(t)$, $F(t,\varphi)$ が time に dep. しない場合，つまり $\mathcal{A}(t)\equiv A$，$F(t,\varphi)\equiv F(\varphi)$ のときは簡単に示される。この場合 $\mathcal{A}(t)\equiv\mathcal{A}$，で $\mathcal{U}(t,s)$ でなく semigroup $\mathcal{S}(t)$ である。実際

$\varphi\in D(\mathcal{A})$ とすれば $h>0$ として

$$[\mathcal{S}(t+h)\varphi-\mathcal{S}(t)\varphi]/h=d\,\mathcal{S}(t)(\varphi)[\mathcal{S}(h)\varphi-\varphi]/h$$
$$+\,o(\|\mathcal{S}(h)\varphi-\varphi\|)/h$$

$h\downarrow 0$ として

$$\frac{d^+}{dt}\mathcal{S}(t)\varphi=d\,\mathcal{S}(t)(\varphi)\mathcal{A}\varphi$$ 故に，$\mathcal{S}(t)\varphi\in D(\mathcal{A})$，

$t\mapsto dS(t)(\varphi)w$ は continuous 故 $\mathcal{S}(t)\varphi$ ($\varphi\in D(\mathcal{A})$) は

$\frac{d}{dt}S(t)\varphi=\mathcal{A}\,\mathcal{S}(t)\varphi$ の C^1-sol となり $x(\varphi)(t)=(\mathcal{S}(t)\varphi)(0)$ $(IF:\varphi)$ の C^1-sol となる． 以下 略 (終)

＊ 文献については，本文で示した物の他 Hall, Browder, Webb, Travis 等の一連の論文（詳しくは Fitzgibbon の reference を参照）の他，大橋（学術研究 27号，78'，早大教育）等を見られたい。

非線形縮小半群の漸近的挙動について

大河内広子（早大・理工）

$\{S(t)\}$ を実Hilbert空間 H の閉凸集合 C 上で定義された非線形縮小半群とする。ここでは、$x \in C$ に対して $S(t)x$ の $t \to \infty$ の挙動について論じる。

§1. $\{S(t)\}$ が劣微分作用素により生成される場合

$\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ を適正下半連続な凸関数とする。φ の劣微分 $\partial\varphi$ は次のように定義される多価作用素である：

$$\partial\varphi(x) = \{ y \in H : \langle \xi - x, y \rangle \leqq \varphi(\xi) - \varphi(x) \quad \forall \xi \in H \}.$$

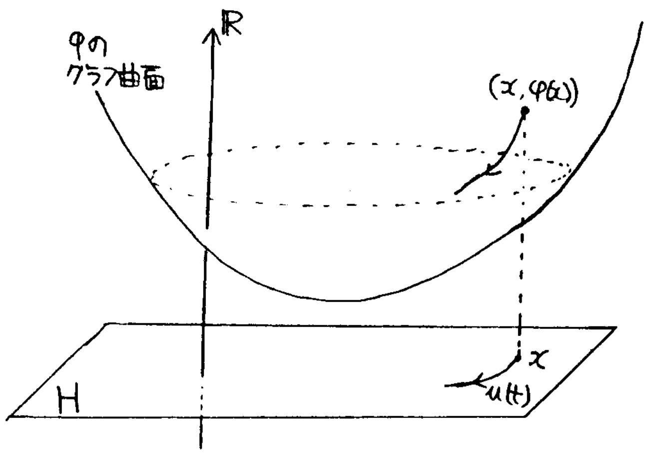
このとき、以下のことが知られている。

1) $\partial\varphi$ は極大単調作用素であり、従って $C \equiv \overline{D(\partial\varphi)}$ を定義域とする縮小半群 $\{S(t)\}$ を生成する。

2) $x \in C$ に対して $u(t) = S(t)x$ とおくと、$u(t)$ は初期値問題

$$u'(t) \in -\partial\varphi(u(t)), \quad u(0) = x$$

の解であり、$u(t)$ の軌跡は、φ のグラフ曲面上の点 $(x, \varphi(x))$ に置かれた質点が曲面上を最も急な下降ですべり落ちる軌跡を H へ射影したものに等しい。



3) 2) から想像できることであるが、集合 $\{ \xi \in H : \varphi(\xi) = \min \varphi \}$ は、半群 $\{S(t)\}$ の不動点の集合 F と等しい。

2) 及び 3) に関連して命題『$F \neq \phi \Rightarrow S(t)x$ は $t \to \infty$ のとき F の元に（何かの位相で）収束する』を予想できるが、実際次のことが成立する：

4) $F \neq \phi \Leftrightarrow \underset{t\to\infty}{w\text{-}\lim} S(t)x$ が存在する。　このとき $\underset{t\to\infty}{w\text{-}\lim} S(t)x \in F$.

しかし $\underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim} S(t)x$ が存在しない φ がある。

従って次の疑問が起きる：$S(t)x$ が $t\to\infty$ のとき強収束するような φ の条件は何か？

これに対して次の条件が知られている。

(a) $F\neq\phi$ かつ適当な $\lambda>\min\varphi$ に対して，集合 $\{y\in H:\ \varphi(y)\leq\lambda\}$ と任意の有界集合との共通部分が相対 compact.

(b) (Bruck [3]) φ が even，すなわち

$$\varphi(x)=\varphi(-x), \qquad x\in H.$$

(b)' (Gripenberg [4], Okochi [5]) 適当な $\alpha\in(0,1]$ に対して

$$\varphi(x)\geqq\varphi(-\alpha x) \qquad (x\in H)$$

条件(a)と(b)(b)' は異なった条件であるが、これらを合わせたものとして次の(c)を得た。

(c) $F\neq\phi$ かつ $H=X_1\oplus X_2$ と直交分解できて以下を満たす。

$(c)_a$ 適当な $\lambda>\min\varphi$ に対して，集合 $\{y\in X_1:\ \varphi(y)\leq\lambda\}$ と任意の有界集合との共通部分が相対 compact,

$(c)_{b'}$ 適当な $\alpha\in(0,1]$ に対して次が成立する

$$\varphi(x_1+x_2)\geqq\varphi(x_1-\alpha x_2) \qquad (x_1\in X_1,\ x_2\in X_2).$$

条件(c)を一般化して次の定理を得る。

<u>定理 1.</u> $F\neq\phi$ かつ適当な $\lambda>\min\varphi$，$\alpha\in(0,1]$ 及び Fréchet 微分可能な写像 $B: D(\partial\varphi)\cap\{y:\varphi(y)\leq\lambda\}\longrightarrow H$ が存在して以下を満たす：

(C_1) 集合 $\{Bx:\ x\in D(\partial\varphi),\ \varphi(x)\leq\lambda\}$ と任意の有界集合との共通部分が相対 compact, かつ

(C_2) $\varphi(x)\geq\varphi(Bx-\alpha(I-B)x)$ （但し I は恒等写像）.

このとき各 $x\in C$ に対して $\displaystyle s\text{-}\lim_{t\to\infty}S(t)x$ が存在して F の元である.

§2. $\{S(t)\}$ が一般の場合

Aを縮小半群$\{S(t)\}$の生成作用素とし、Fを$\{S(t)\}$の不動点の集合とする。ここでは、$S(t)x$ $(x\in C)$ の時間平均 $\sigma(t;x)=\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau$ の収束について考える。($A=\partial\varphi$ の場合は $\lim_{t\to\infty}\|S(t)x-\sigma(t;x)\|=0$ である。)

これに関して、次のことが知られている。

1) $F\neq\phi \Leftrightarrow \mathop{w\text{-}\lim}_{t\to\infty}\sigma(t;x_0)$ が存在する。
このとき 各$x\in C$に対して、$\mathop{w\text{-}\lim}_{t\to\infty}\sigma(t;x)$ が存在してFの元である。

2) (Baillon [1]) Aが odd, すなわち $[x,y]\in A$ iff $[-x,-y]\in A$
$\Rightarrow$ 各$x\in C$ に対して $\sigma(t;x)$ が $t\to\infty$のとき Fの元に強収束する。

注1. 劣微分の定義より "$A=\partial\varphi$, φ: even $\Rightarrow$ A: odd" であるから上述のBaillonの結果は §1の条件(4)の拡張になっている。

Baillonの結果 2) を拡張して次を得た。

定理2′ Hの適当な閉線形部分空間Xに対して $P=\mathrm{Proj}_X$ としたとき、生成作用素Aが次を満たすとする:

$$[x,y]\in A \quad \text{iff} \quad [Px-(I-P)x,\,-y]\in A.$$

このとき、各$x\in C$に対して $\mathop{s\text{-}\lim}_{t\to\infty}\sigma(t;x)\in F$ である。

注2. 定理2′の条件は 集合 $A\subset H\times H$ が 閉線形部分集合 $X\times\{0\}\subset H\times H$ について対称であることを意味している。$X=\{0\}$ ならば Aは odd である。

定理2′を更に拡張して次の定理を得た。

定理2 適当な $z\in F$ と Hの閉線形部分集合Xが存在して $P=\mathrm{Proj}_X$ としたとき 次の(i)(ii)を満たすとする。

(i) 適当な定数C_i $(i=1,2,3)$が存在して、不等式

$$C_1\{\langle Py_1, x_1-z\rangle+\langle Py_2, x_2-z\rangle\}+C_2\langle P(y_1+y_2), x_1+x_2-2z\rangle$$
$$+C_3\{\langle y_1, x_1-z\rangle+\langle y_2, x_2-z\rangle\}+\langle y_1+y_2, x_1+x_2-2z\rangle \geq 0$$

が 各$[x_j, y_j]\in A$ $(j=1,2)$ に対して成立する,

(ii) $x \in C$ に対し 周期関数 v $(v(t+p) = v(t),\ \forall t \geq 0)$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \| PS(t)x - v(t) \| = 0 \quad かつ \quad \| v(t) - z \| \equiv const.$$

このとき $\sigma(t; x)$ は $t \to \infty$ のとき F の元に強収束する。

注3. 定理2は、定理1の特別な場合と定理2′の拡張である；
定理1で特に $B = Proj_X$ の場合（すなわち条件(c)） $\Rightarrow$ 仮定(i)(ii)，
定理2′ $\Rightarrow$ 仮定(i), (ii).

注4. $X = \{0\}$ すなわち $P = 0$ ならば 条件(i)は Gripenberg [4] により与えられている。

References.

[1] J. B. Baillon, Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les contractions impaires, C. R. Acad. Sc. 283, 587-590 (1976).

[2] H. Brezis, Asymptotic behavior of some evolution systems, Nonlinear Evolution Equations (ed. by M. Crandall), Academic Press, 141-154 (1978).

[3] R. E. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Funct. Anal. 18, 15-26 (1975).

[4] G. Gripenberg, On the asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups, Math. Scand. 385-397 (1979).

[5] H. Okochi, A note on asymptotic strong convergence of nonlinear contraction semigroups, Proc. Japan Acad. 56, 83-84 (1980).

On the semigroup approach to a semi-linear hyperbolic system

宮原 一成(早大. 理工)
大春 慎之助(早大. 教育)

次の半線形双曲形方程式の初期問題

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x} = au - uv & \text{for } u(t,x),\ v(t,x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial v}{\partial x} = -bv + uv & 0 \le t \le T \text{: given},\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = w(x) \ge 0 \\ v(0,x) = z(x) \ge 0 \end{cases}$$

(ただし定数は $\lambda \neq \mu$, $a, b \ge 0$ を満す。)
を考える。これは Yamaguti - Niizeki [3] により扱われたもので、一次元空間 $\mathbb{R}$ をそれぞれ速さ λ, μ で移動する prey u, predator v の生態形モデルを表わし、a, $-b$ の定数はそれぞれ u, v の増殖率, 死亡率を表わす。
ここでは非線形半群論の立場から、この問題への応用を試みる。

0. 準備

方程式 (*) を Lebesgue 空間 $L^1(\mathbb{R})$ で考える。そこで

$$X = L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \quad (L^1(\mathbb{R}) \text{ と } L^1(\mathbb{R}) \text{ の直積空間})$$

とし、X 上のノルム $\|\cdot\|_X$ を、

$$\|U\|_X = \|u\|_1 + \|v\|_1, \quad \text{for } U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X$$

($\|\cdot\|_1$ は L^1-norm)
と定義する。次に X 上の operator A, B を

$$AU = \begin{bmatrix} (\lambda \frac{\partial}{\partial x} + aI) u \\ (\mu \frac{\partial}{\partial x} - bI) v \end{bmatrix}, \quad BU = \begin{bmatrix} -uv \\ uv \end{bmatrix} \quad (I \text{ は identity map.})$$

とすると (*) は Banach 空間 X における次の半線形発展方程式

$$(\mathrm{EE})\quad \frac{d}{dt}U(t)=(A+B)U(t),\quad 0\le t\le T$$
$$U(0)=\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}\in X^+ \qquad (X^+ \text{は} X \text{の非負関数の全体})$$
$$\left(\text{where}\quad U(t)=\begin{bmatrix} u(t,\cdot) \\ v(t,\cdot) \end{bmatrix}\in X\right)$$

に帰着される。したがってここでは(EE)に応ずる非線形半群を構成し、その性質を調べる事を試みる。

1. 作用素$(A+B)$の性質

作用素Aは容易にわかるように、order-preservingな(C_0)-半群の生成作用素で、X上で$A-a$はdissipativeである。ところがBは"かけ算作用素"でしかないので$(A+B)$はいくら平行移動してもdissipativeにならない。しかし、作用素Bは次のような意味で"局所的にLipschitz連続"である。すなわち、X上のl.s.c.な汎関数Pを

$$P(U)=\|u\|_\infty+\|v\|_\infty,\quad U=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\in X,\ (\|\cdot\|_\infty \text{は} L^\infty(R)\text{-norm})$$

と定義し、

$$X_\alpha=\{U\in X;\ P(U)\le\alpha\},\quad X_0=\bigcup_{\alpha>0}X_\alpha=D(P)$$

とすると、簡単な計算により

(a) $U,\tilde U\in X_\alpha \Rightarrow \|BU-B\tilde U\|_X\le 4\alpha\|U-U\|_X$

が成り立つ。このことから作用素$(A+B)$は次の条件を満す

$$(H_1,X_\alpha)\quad \langle (A+B)U-(A+B)\tilde U,\ U-\tilde U\rangle_s\le(a+4\alpha)\|U-\tilde U\|_X \quad \text{for } U,\tilde U\in X_\alpha$$

ここで$\langle X,Y\rangle_s=\sup\{(X,f);\ f\in F(Y)\}$、$F$は$X$上のduality mappingとする。以上により作用素$(A+B)$は「局所的に、すなわち各$X_\alpha(\alpha>0)$上で、タイプωの消散作用素」であることがわかる。

2. (EE)に対する差分法

前節で作用素$(A+B)$は$(H_1;X_\alpha)$の条件を満すことが示された。そこで次に、我々は(EE)に対する離散的近似を導入し、その離散近似の解に対し、Kobayasi-Kobayashi-Oharuの収束定理[1]、[2]、を用いて、求める非線形半群を構成

する。

$$(DS)\begin{cases} \frac{1}{h}(U_k^n - U_{k-1}^n) = (A+B)U_k^n + E_k^n \\ U_0^n = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in X^+ \end{cases}$$

where $n \geq 1$, $h = \frac{T}{n}$, $1 \leq k \leq n$,

$$U_k^n = \begin{bmatrix} u_k^n \\ v_k^n \end{bmatrix}, \quad E_k^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_k^n v_k^n + u_{k-1}^n v_{k-1}^n \end{bmatrix}$$

と定義する。(DS)は(EE)に対して次の"適合条件"を満す差分法であることがわかる。すなわち

Lemma 初期関数 w, z が $\in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}))^+$, で $\|w\|_\infty = M_1$, $\|z\|_\infty = M_2$ とすると (DS)の解$\{U_k^n\}$が存在して、次の条件を満す。

(i) $\|u_k^n\|_\infty \leq M_1(1-ah)^{-k}$,

$\|v_k^n\|_\infty \leq (1+bh)^{-k}(1+hM_1(1-ah)^{-k})^k \cdot M_2$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \{\max_{1\leq k\leq n} \|E_k^n\|_X\} = 0$.

(注、条件(i)は差分法(DS)の解$\{U_k^n\}$が汎関数$P(\cdot)$に関して stable であることを示す。)

(Sketch of proof) 今 nを十分大きくとって固定し、$k=1$と仮定する。また $\Lambda_1 = \lambda\frac{\partial}{\partial x}$, $\Lambda_2 = \mu\frac{\partial}{\partial x}$ とおく。

(I) $(\Lambda_2 - bI)$が(C_0)-半群 $e^{t(\Lambda_2-bI)}$を生成することより、(DS)はv_k^nについて解けて、

$$v_k^n = [I - h(\Lambda_2 - bI)]^{-1}(v_{k-1}^n + h u_{k-1}^n v_{k-1}^n)$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{h}} e^{t(\Lambda_2-bI)}(v_{k-1}^n + h u_{k-1}^n v_{k-1}^n)\,dt \quad \cdots (1)$$

$u_{k-1}^n, v_{k-1}^n \in (L^\infty(\mathbb{R}^1) \cap L^1(\mathbb{R}))^+$ とすると(1)を用いて、

$$\|v_k^n\|_i \leq (1+bh)^{-1}(1+\|u_{k-1}^n\|_\infty)\|v_{k-1}^n\|_i \quad (i = 1 \text{ or } \infty) \cdots (2)$$

かつ $v_k^n \in (L^\infty \cap L^1)^+$ であることが計算できる。

(II) $v_k^n\cdot$ を $L^1(\mathbb{R})$ 上のかけ算作用素,

$$v_k^n\cdot\ ;\ u \to v_k^n u \quad \text{for } u\in L^1(\mathbb{R})$$

と定義すると、$v_k^n \in L^\infty(\mathbb{R})$ より、これは $L^1(\mathbb{R})$ 上の有界線形作用素となる。ここで Trotter の積公式を用いると、作用素 $(\Lambda_1 + aI - v_k^n\cdot)$ は (C_0)-半群を生成し、

$$e^{t(\Lambda_1+aI-v_k^n\cdot)} = e^{aI}\cdot \lim_{m\to\infty}\left[e^{t\Lambda_1/m}\, e^{-t v_k^n\cdot/m}\right]^m \quad \cdots (3)$$

と表わせる。このことより (DS) は u_k^n についても解けて

$$u_k^n = [I - h(\Lambda_1 + aI - v_k^n\cdot)]^{-1} u_{k-1}^n$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{h}}\, e^{t(\Lambda_1+aI-v_k^n\cdot)}\, u_{k-1}^n\, dt \quad \cdots (4).$$

また (4) より

$$\|u_k^n\|_i \le (1-ah)^{-1}\|u_{k-1}^n\|_i \quad (i = 1 \text{ or } \infty) \quad \cdots (5)$$

かつ $u_k^n \in (L^\infty(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R}))^+$ が出る。

以上の操作を $k=2,3,\cdots$ とくり返せば求める $\{U_k^n\}$ を構成できる。また (i) は (2), (5) より出る。(ii) についても (1), (4) を用いてノルムの評価を行うことにより得られる。 (q.e.d.)

3. 主要結果

前節の Lemma により、(DS) の解 $\{U_k^n\}$ に前述の収束定理 [1], [2] を用いて、$U(t) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ kh\to t}} U_k^n$ $(0\le t\le T)$ とおくことにより次の定理を得る。

Theorem 次の条件を満す X_0 上の非線形半群 $\{S_t\,;\,t\ge 0\}$ が存在する。

(i) $\begin{bmatrix} w \\ z\end{bmatrix} = W \in X_0^+$ に対し、$U(t) = S_t W$ とおくと、$U(t)$ は (EE) に対する一意な mild solution, i.e.

$$U(t) = e^{tA}W + \int_0^t e^{(t-s)A} B\,U(s)\,ds, \quad 0\le t\le T$$

となり

(ii) $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t)\end{bmatrix} \in X_0^+$, かつ

$$\|u(t)\|_\infty \le e^{at}\|w\|_\infty, \quad \|v(t)\|_\infty \le e^{-bt} e^{t\|w\|_\infty e^{at}}\cdot\|z\|_\infty$$

(iii) もし $W\in D(A)$ ならば $U(t)$ は X_0 上の C^1-solution を与え

(iv) $\|U(t)\|_X = \|u(t)\|_1 + \|v(t)\|_1 \le e^{at}\|w\|_1 + e^{-bt}\|z\|_1, \quad t\ge 0$

を満す。

(Sketch of proof) (ii) は Lemma, (i) より出る。(iii) は $B'(U(t)) = \begin{bmatrix} -v(t) & -u(t) \\ v(t) & u(t) \end{bmatrix}$, $(t \geq 0)$ とおくと、$B'(U(t))$ は各 t について、X 上の有界線形作用素。作用素"$A+B'(U(t))$"に対する発展方程式に、再び Kobayasi-Kobayashi-Oharu の定理を用いると、各 $W \in D(A)$ に対して、一意な mild solution $V(t)$ が存在し、$V(t) = e^{tA}(A+B)W + \int_0^t e^{(t-s)A} B'(U(s))V(s)\,ds$ を満すことがわかる。次に、

$$V_h(t) = \frac{1}{h}[U(t+h) - U(t)], \quad A_h = (e^{hA} - I)/h$$

$$B'_h(U(t)) = \begin{bmatrix} -v(t+h) & -u(t) \\ v(t+h) & u(t) \end{bmatrix} \quad E_h(U(t)) = \begin{bmatrix} v(t) - v(t+h) & 0 \\ v(t+h) - v(t) & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} V_h(t) - V(t) &= e^{tA}(A_h - A)W \\ &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{sA} BU(t+h-s)\,ds - e^{tA}BW \\ &+ \int_0^t e^{sA} E_h(U(t-s))V(t-s)\,ds \\ &+ \int_0^t e^{sA} B'_h(U(t-s))\big[V_h(t-s) - V(t-s)\big]\,ds \end{aligned}$$

となって、$h \to 0$ としたとき、右辺1行目～3行目は0に収束する。よって $\|V_h(t) - V(t)\|_X \leq \nu(h) + K\int_0^t \|V_h(s) - V(s)\|_X\,ds$. ただし $\nu(h) \to 0$ as $h \to 0$。ここで Gronwall を用いれば

$$\|V_h(t) - V(t)\|_X \leq \nu(h)e^{Kt} \quad \therefore\ V_h(t) \to V(t) \text{ in } X \text{ as } h \to 0$$

(iv) は Kato の Lemma より得る。(q.e.d.)

参考文献

[1] K. Kobayasi and S. Oharu, On nonlinear evolution operators associated with certain nonlinear equations of evolution, Lecture notes in Appl. Anal., 2, Kinokuniya Book store Co, (1980), 139-210.

[2] K. Kobayasi, Y. Kobayashi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Banach spaces, to appear in Osaka Math. J.

[3] M. Yamaguti and S. Niizeki, On the Cauchy problem for a semi-linear hyperbolic system, J. Math. Kyoto Univ. 20-4 (1980) 625-634.

ある条件をみたすaccretive operatorから生成される非線形縮小半群の漸近的挙動について

藤平知行・慶大 工

1 序論

Pazy [6], Nevanlinna-Reich [4], Bruck-Reich [1] は m-accretive opr A が"convergence condition"をみたすときに、$-A$ から生成される半群が $t\to\infty$ のときに強収束することや、implicit scheme

$$x_n + h_n A x_n \ni x_{n-1} + e_n, \quad n \geq 1$$

をみたす $\{x_n\}$ の強収束を論じている。ここでは、m-accretive より弱い Kobayashi-Kobayasi [3] で述べられている条件で議論しよう。(以下、記号や定義はこれらの文献を参照)

さて、X を実Banach空間, J を双対写像とする。A を accretive opr として A に課す2つの条件を述べよう。

まず、次の条件 (R) ([3]) を考える。

(R) 各 $x\in D_a(A)$ と各 $M>0$ に対し、次の性質をみたす x の近傍 U と正定数 K が存在する: $u\in D_a(A)\cap U$ で $|Au|\leq M$ なる任意の u に対し正数列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在し $\varepsilon_n\to 0$ かつ $dist(R(I+\varepsilon_n A), u)\leq K\varepsilon_n^2$, $n\geq 1$.

次に"convergence condition"について述べよう。([1][4][6])

A を Browder の意味の accretive opr で $0\in R(A)$ とし、かつ $A^{-1}0$ が proximinal (i.e. $x\in X$ に対し $\{y\in A^{-1}0 \mid \|x-y\| = dist(x, A^{-1}0)\}\neq\phi$)

かつ 凸とする。今 P を $A^{-1}0$ の上への nearest pt mapping の selection とすると、$j \in J(x-Px)$ ですべての $y \in A^{-1}0$ に対して、$(y-Px, j) \leq 0$ なる j が存在するので、それを $J_P(x-Px)$ とかくことにする。 この設定で、A が convergence condition をみたすとは、もし $[x_n, y_n] \in A$ $\|x_n\| \leq C$, $\|y_n\| \leq C$ かつ $\lim_{n\to\infty}(y_n, J_P(x_n - Px_n)) = 0$ ならば、$\lim_{n\to\infty}(x_n - Px_n) = 0$ なる $A^{-1}0$ の上への nearest pt mapping の selection P が存在することである。

2 定理と補題

示したいのは次のことである。

定理 A を (R) かつ convergence condition をみたす accretive opr とし、$S = \{S(t)\}$ を $-A$ により生成される縮小半群とする。そのとき、任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して、

$\lim_{t\to\infty} S(t)x \equiv f \in A^{-1}0$.

注意 上の定理で、A が m-accretive のときは、[1] で述べられている。 $-A$ が半群 S を生成するということについては、Kobayashi [2], Kobayashi-Kobayasi [3], Takahashi [7] を参照。

証明には、次の補題を用いる。

補題 1 A を (R) をみたす accretive opr, S を $-A$ により生成される縮小半群とする。このとき、任意の $x \in D_a(A)$ と $\lambda > 0$ に対し次の性質をもつ $T_{x,\lambda} > 0$ が存在する:
任意の T $(0 < T \leq T_{x,\lambda})$ を固定すると任意の $\nu > 0$ に対し、分割 $\Delta^\nu = \{0 = t_0^\nu < t_1^\nu < \cdots < t_{N_\nu}^\nu = T\}$ と Δ^ν 上の階段関数の組 (u^ν, ε^ν) が存在して、次の性質をもつ.

(a) $t_k^\nu - t_{k-1}^\nu \leq \nu$, $k=1,\cdots,N_\nu$

(b) $$u^\nu(t) = \begin{cases} x = x_0^\nu, & t=0 \\ x_k^\nu, & t \in (t_{k-1}^\nu, t_k^\nu] \end{cases}$$

$$\varepsilon^\nu(t) = \varepsilon_k^\nu, \quad t \in (t_{k-1}^\nu, t_k^\nu]$$

ここで、$\{x_k^\nu\}_{k=0}^{N_\nu}$ と $\{\varepsilon_k^\nu\}_{k=1}^{N_\nu}$ は次をみたす.

$$\frac{x_k^\nu - x_{k-1}^\nu}{t_k^\nu - t_{k-1}^\nu} + Ax_k^\nu \ni \varepsilon_k^\nu, \quad k=1,\cdots,N_\nu .$$

(c) $\|y_k^\nu\| \leq |Ax| + \lambda$, $k=1,\cdots,N_\nu$

ここで、$y_k^\nu = \varepsilon_k^\nu - (x_k^\nu - x_{k-1}^\nu)/(t_k^\nu - t_{k-1}^\nu)$.

(d) $\int_0^T \|\varepsilon^\nu(t)\|\, dt \leq \nu$.

(e) $\|S(t)x - u^\nu(t)\| \leq \nu$, $t \in [0,T]$.

<u>補題 2</u>　A を (R) をみたす accretive opr とする。任意の $x \in D_a(A)$, $\lambda > 0$, $T > 0$ をとる。このとき、$[0,T]$ 上で定義された Lip 連続関数 $u(t)$ が存在して次をみたす.

(i) $u(0) = x$

(ii) $\|u(t) - u(s)\| \leq |t-s|\ |Ax|$

(iii) $u(T) \in D_a(A)$ かつ $|Au(T)| \leq |Ax|$

(iv) 任意の $\nu > 0$ に対し、分割 $\Delta^\nu = \{0 = t_0^\nu < t_1^\nu < \cdots < t_{N_\nu}^\nu = T\}$ と Δ^ν 上の階段関数の組 (u^ν, ε^ν) が存在して、補題1 の (a)〜(d) と次の (e)' をみたす.

(e)' $\|u(t) - u^\nu(t)\| \leq \nu$, $t \in [0,T]$.

<u>補題 3</u>　A を (R) をみたす accretive opr とし、S を $-A$ により生成される縮小半群とする。このとき、任意の $x = x_0 \in D_a(A)$, $\lambda > 0$, $\nu > 0$, $p > 1$ に対して、

正数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{[x_n, y_n]\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ が存在して、次をみたす

(1) $\{h_n\} \in \ell^p \setminus \ell^1$

(2) $\|y_n\| \leq |Ax| + \lambda$, $n \geq 1$

(3) $x_n + h_n A x_n \ni x_{n-1} + e_n$, $n \geq 1$

ここで、$e_n = x_n - x_{n-1} + h_n y_n$。かつ $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k\| < \nu$。

(4) $\|x_n - S(t)x\| \leq \nu$, $t \in (t_{n-1}, t_n]$, $n \geq 1$

ここで、$t_n = \sum_{k=1}^{n} h_k$。

さらに A が convergence condition をみたすとき、

$\lim_{n\to\infty} x_n \equiv x^\nu \in A^{-1}0$。

注意 補題 1, 2 は [2] [3] [7] の結果やその証明の idea を組み合わせれば証明できる。

補題 3 の (1) (3) (4) は、A が次の (R_t) で成立する。

(R_t) $\liminf_{\lambda\to 0+} \lambda^{-1} dist(R(I+\lambda A), x) = 0$, $\forall x \in \overline{D(A)}$.

補題 3 の (4) は x_n と $S(t_n)x$ が近いことを示しているが A が m-accretive のとき resolvent の積 $\prod J_{h_n}$ と $S(\sum h_n)$ が近いことは、Passty [5] で述べられていた。筆者は 1979 年に [4] が発表されたとき、Passty と独立に、A が (R_t) をみたす場合にこの事実に気づいた。

最後に、$S(t)x$ の $t\to\infty$ のときの収束を示すのに、(4) の性質をもつ $\{x_n\}$ の収束がいえればよいわけであるが、その際 $\{x_n\}$ は (3) の implicit scheme をみたしている必要はないということに注意する。

文献

[1] Bruck-Reich : A general convergence principle in nonlinear functional analysis, J. Nonlinear Ana., 4, 939-950 (1980)

[2] Y. Kobayashi : Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups., J. Math. Soc. Japan, 27, 640-665 (1975)

[3] Y. Kobayashi-K. Kobayasi : On perturbation of non-linear equations in Banach spaces., Publ. RIMS. Kyoto Univ., 12, 709-725 (1977)

[4] Nevanlinna-Reich : Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces., Israel J. Math., 32, 44-58 (1979)

[5] Passty : Thesis, Univ. of Southern California (1978)

[6] Pazy : Strong convergence of semigroups of non-linear contractions in Hilbert space., MRC Report # 1828 (1978)

[7] T. Takahashi : Convergence of difference approximation of nonlinear evolution equations and generation of semigroups., J. Math. Soc. Japan, 28, 96-113 (1976)

等方弾性体の境界許容可制御性

広島大・総合科・成川公昭

1. 序

Ω をなめらかな境界 S をもつ R^n の有界領域とし、平衡状態が Ω を占める線型弾性体の振動を考える。平衡時、位置 $x\ (\in\Omega)$ にある質点が時刻 t において平衡点より $u(x,t)=\{u_i(x,t)\}_{1\le i\le n}$ だけずれていたとすると、変位ベクトル $u(x,t)$ は次の弾性方程式系をみたすことが知られている。(c.f. Landau-Lifshitz [1], Duvaut-Lions [2])

$$(1)\quad \begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + g_i(x), \quad 1\le i\le n, \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\nu_j\sigma_{ij} = f_i(x,t), \quad 1\le i\le n, \quad \text{on } S\times(0,\infty) \end{cases}$$

ここで、$\nu=\{\nu_i\}_{1\le i\le n}$: 単位外法線ベクトル, $\rho(x)$; 密度,
$g(x)=\{g_i(x)\}_{1\le i\le n}$: 質点 x にはたらく外力,
$f(x,t)=\{f_i(x,t)\}_{1\le i\le n}$; 境界に加わる力 であり、
stress tensor σ_{ij} は strain tensor $\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ と線型関係

$$(2)\quad \sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(u)$$

をみたすものとする。

われわれは、境界に加わる力 $f(x,t)$ を制御できるものとし、それを control と考え、与えられた集合 (constraint set と呼ぶ) を動き得るものとする。このとき、次の許容制御問題を考える。

<u>考える問題</u>

2つの振動状態が与えられたとき、一方の状態を他方の状態に移す control f が constraint set の中に存在するか

例えば、境界を小さな力で押すだけによって、如何なる振動状態が制御可能か。

一般の線型弾性体 (1) については、まだ結果が得られていないので、ここでは、等方弾性体についてのみ考える。等方弾性体とは、$\rho(x) = $ 定数、$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})$ で与えられるものである。
ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，λ, μ は正定数で Lamé 定数と呼ばれる。正規化し、$\rho(x) = 1$. とし、この場合に方程式 (1) を簡単の為、

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + g(x) \\ \partial u / \partial \nu_A = f(x, t) \end{cases}$$

とかく。

2. 制限のない場合の可制御性.

まず control に制限のない場合の可制御性を得る。

定理 1. $m \geq 2$, $g(x) \in H^{m-2}(\Omega)$

$\Longrightarrow$

$\exists T_0 > 0$ s.t. $H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)$ は $\mathcal{E}^0_t(0, T_0; H^{m-3/2}(S))$ の中で exactly controllable である。

即ち、

任意の $[u_0, v_0]$, $[u_1, v_1] \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)$ に対し、control $f(t) \in \mathcal{E}^0_t(0, T_0; H^{m-3/2}(S))$ と、この $f(t)$ に対する (3) の解 $u(t)$ が $\mathcal{E}^0_t(0, T_0; H^m(\Omega)) \cap \mathcal{E}^1_t(0, T_0; H^{m-1}(\Omega))$ の中に存在し、

$$[u(0), \tfrac{\partial u}{\partial t}(0)] = [u_0, v_0], \quad [u(T_0), \tfrac{\partial u}{\partial t}(T_0)] = [u_1, v_1]$$

をみたす。

(注) 以後 このことを symbolically に

$$[u_0, v_0] \xrightarrow[f]{} [u_1, v_1] \quad \text{at } T_0$$

とかくことにする。

この定理は、"controllability via stabilizability" principle により、次の補題1.(stabilizability)を示すことにより得られる。
("controllability via stabilizability" principle については、Russell [3] を参照せよ。)

<u>補題</u> 1. $m \geq 2$ とする。このとき、$K \in \mathcal{L}(H^m(\Omega), H^{m-3/2}(S))$ と、正定数 M, γ が存在し、$f = Ku$ とおいた (3) の任意の解 $u(t)$ に対し、

$$\text{(4)} \quad \| [u(t), \tfrac{\partial u}{\partial t}(t)] \|_{H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)}$$
$$\leq M e^{-\gamma t} \| [u(0), \tfrac{\partial u}{\partial t}(0)] \|_{H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)}$$

が成りたつ。

補題1.は次の補題2により、初期値を2つにわけて、$\mathbb{R}^n$ に拡張し、方程式 $\partial^2 u/\partial t^2 = Au$ を $\mathbb{R}^n$ 全体で考え、2つの波動方程式に分解し、(即ち、縦波と横波)、波動方程式の local energy decay より得られる。

<u>補題</u> 2 $m \geq 1$, B; $\Omega \cup S$ を含む $\mathbb{R}^n$ の有界開球、とする。この B に対し、次の性質 i) ~ iv) をもつ $H^m(\Omega)$ から $H^m(\mathbb{R}^n)$ への有界線型作用素、E, F が存在する。

任意の $u \in H^m(\Omega)$ に対し、

i) $Eu + Fu = u$ in Ω,

ii) $\operatorname{div} Eu = 0$,

iii) $\varphi \in H^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ が存在し、$Fu = \operatorname{grad} \varphi$,

iv) $\operatorname{supp}(Eu) \cup \operatorname{supp}(Fu) \subset B$.

<u>注意</u>　一般の線型弾性体 (1) に対し補題 1 の証明が得られないため、話しを等方弾性体の場合に限った。補題 1 さえ得られれば、以後の結果は一般の線型弾性体に対しても全く同様に得られる。

定理 1 における control の構成法より次の系 1 が得られる。

<u>系 1.</u>　$m \geqq 2$,　$g(x) = 0$

$\Longrightarrow$

$\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. 任意の $[u, v] \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)$,

$\| [u, v] \|_{H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)} < \delta$ に対し. $f \in \mathcal{E}_t^0(0, T_0 ; H^{m-3/2}(S))$ が存在し、

$$\sup_{0<t<T_0} \| f(t) \|_{H^{m-3/2}(S)} < \eta \quad \text{かつ} \quad [0, 0] \xrightarrow[f]{} [u, v] \text{ at } T_0 .$$

3　constraint sets と 許容可制御性

$m \geqq 2$ とし. G^m を $H^{m-3/2}(S)$ の閉、連結部分集合とする。このとき. constraint sets of controls $\mathcal{F}(G^m)$ を次の様に定義する.

$$(5) \quad \mathcal{F}(G^m) = \bigcup_{T>0} \{ f \in \mathcal{E}_t^0(0, T ; H^{m-3/2}(S)) \mid f(t) \in G^m \text{ for all } t \in [0, T] \} .$$

このとき.

<u>定義</u>　D $(\subset H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega))$ は admissibly controllable in the constraint set $\mathcal{F}(G^m)$

$\Longleftrightarrow$

任意の $[u_0, v_0]$, $[u_1, v_1] \in D$ に対し. $\exists T > 0$, $\exists f \in \mathcal{F}(G^m)$ s.t.

$$[u_0, v_0] \xrightarrow[f]{} [u_1, v_1] \quad \text{at } T .$$

注意. $[u_0, v_0] \xrightarrow[f]{} [u_1, v_1]$ at T とすると. compatibility condition により.

$$\partial u_0/\partial \nu_A = f(0), \quad \partial u_1/\partial \nu_A = f(T) \quad \text{である。}$$

故に. D が admissibly controllable in $\mathcal{F}(G^m)$

$\Rightarrow$

$$D \subset \{[u, v] \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega) \mid \partial u/\partial \nu_A \in G^m\}.$$

上式の右辺の集合を M^m とおくと. 次の主要定理を得る。

定理 2 $m \geq 2$, $g(x) \in H^{m-2}(\Omega)$.

$\exists\, h(x) \in G^m$ s.t.

$$(6) \quad \int_\Omega \langle g(x), \varphi(x) \rangle dx = -\int_S \langle h(x), \varphi(x) \rangle dS$$

for any $\varphi \in R \equiv \{\varphi(x) = c + Lx \mid c \in R^n,\ L : n \times n \text{ 歪対称行列}\}$.

($\langle\ ,\ \rangle$ は n 次元ユークリッド内積)

$\Rightarrow$

集合 M^m は admissibly controllable in the constraint set $\mathcal{F}(G^m)$.

仮定より $Aw = g$, $\partial w/\partial \nu_A = h$ の解 $w \in H^m(\Omega)$ が存在する. $u(t)$ の代りに $u(t) - w$, G^m の代りに $G^m - h$ を考えることにより, $g = 0$, $G^m \ni 0$ のとき示せば十分。 この場合, 系 1. とエネルギー等式を使い admissible controllability in $\mathcal{F}(G^m)$ を示すが, 証明は略。

4. 境界を小さな力で押す時の constraint set と許容可制御性.

最初にあげた例. 境界を小さな力で押すという制限のついた場合を考える. 力の大きさの制限を $\eta > 0$, 弾性体の表面のマサツ係数を γ. $(0 < \gamma < 1)$. とすると,

- 力の大きさの制限 ： $\eta > |f(x,t)|$ $(= \langle f(x,t), f(x,t)\rangle^{1/2})$,
- "押す" ということより. $\langle \nu, f\rangle < 0$,
- 表面に働く接方向の力はマサツ力によって実現されるから.

$$|f - \langle \nu, f\rangle \nu| < \gamma |\langle f, \nu\rangle| ,$$

の制限が与えられる。

以上をまとめて.

$$(7) \qquad G^m = \{ h \in H^{m-3/2}(S) \mid |h| < \eta ,\ \langle \nu, h\rangle < -(1+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}} |h| \}$$

とおくことにより、$\mathcal{F}(G^m)$ が この場合の constraint set と考えられる。

このとき. 次の定理が得られる。

定理 3. $m > n/2 + 1$, $g(x) \in H^{m-2}(\Omega)$ とする。
このとき.

$$\left| \int_\Omega g(x)\, dx \right| , \quad \left| \int_\Omega \{x_i g_j(x) - x_j g_i(x)\}\, dx \right| \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

が η に比べ十分小さいならば 集合 M^m は admissibly controllable in $\mathcal{F}(G^m)$ である。

更にもし $|h| < \eta$ の制限をとりはずせば, 任意の $g(x) \in H^{m-2}(\Omega)$ に対し M^m は admissibly controllable in $\mathcal{F}(G^m)$ である。

(証明は略)

参考文献

[1] ランダウ・リフシッツ , 弾性理論 (理論物理学教程), 東京図書訳.
[2] G. Duvaut and J.L. Lions , Les Inéqations en Mécanique et en Physique , Dunod , Paris , 1972.
[3] D.L. Russell , A Unified Boundary Controllability Theory for Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations , Studies in Appl. Math. 52 (1973), 189 - 211.

Free Boundary Problems of the Stefan-Type

for Nonlinear Parabolic Equations with Obstacles

千葉大教育　剱持信幸

§1. 問題の設定

ここでは obstacle "$u \leq \psi$" の下での非線型放物型方程式

$$u_t - a(u_x)_x = 0$$

に対する Stefan タイプの問題を考える。問題設定のために、次の記号を用いる。

$H = L^2(0,\infty)$,　$X = W^{1,p}(0,\infty)$,　$2 \leq p < \infty$,　$0 < T < \infty$.

2変数関数 $u = u(x,t)$ $(0 \leq x < \infty,\ 0 \leq t \leq T)$ をベクトル値関数 $u(t) = u(\cdot,t)$ としばしば同一視する。

与えられた正数 l_0, 関数 u_0 on $[0,\infty)$, obstacle ψ on $[0,\infty)\times[0,\infty)$ に対し、次の性質をみたす単調増加な曲線 $x = l(t)$, $0 \leq t \leq T$, 非負関数 $u = u(x,t)$, $0 \leq x < \infty$, $0 \leq t \leq T$, を求める問題を $P(l_0, u_0, \psi)$ で表わす:

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{array}{ll}
(\mathrm{a1}) & u \in C([0,T];H) \cap W^{1,2}(\delta,T;H)\ (\forall \delta > 0),\quad u(0) = u_0. \\[1ex]
(\mathrm{a2}) & u(t) \in K_{l}(t) \equiv \left\{ z \in X;\ \begin{array}{l} z = 0 \text{ on } [l(t),\infty) \\ z \leq \psi(\cdot,t) \text{ on } [0,\infty) \end{array} \right\} \text{ for a.e. } t \in [0,T]. \\[2ex]
(\mathrm{a3}) & (u'(t), u(t) - z)_H + \displaystyle\int_0^\infty a(u_x)(x,t)\bigl(u_x(x,t) - z_x(x)\bigr)\,dx \leq 0, \\[1ex]
 & \qquad\qquad \forall z \in K_l(t),\quad \text{a.e. } t \in [0,T].
\end{array}
\right.
$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} (\ell 1) & \ell \in C([0,T]) \cap W^{1,2}(\delta, T) \quad (^\forall \delta > 0), \quad \ell(0) = \ell_0. \\ (\ell 2) & \ell'(t) = -a(u_x)(\ell(t)-, t) \qquad \text{for a.e. } t \in [0,T]. \end{cases}$$

次の条件の下で $P(\ell_0, u_0, \psi)$ を扱う.

(A) $a(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $a(0)=0$, 連続 かつ

$$C_0 |r|^p \le a(r) r \le C_1 |r|^p, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$C_0 |r - r'|^{p-1} \le a(r) - a(r'), \quad ^\forall r, r' \in \mathbb{R}, \quad r \ge r'$$

(ただし C_0, C_1 は正の定数)

を満たす.

(B) $\psi = \psi(x,t)$ は $[0,\infty) \times [0,\infty)$ で 有界,連続 で

(*) $\psi \ge C_2$ on $[0,\infty)\times[0,\infty)$ (C_2 は 正の定数),

かつ, 関数 $\gamma \in W^{1,2}(0,\infty)$ で

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma \ge 0 \quad \text{on } [0,\infty)$$

$$|\psi(x,s) - \psi(x,t)| \le |\gamma(t) - \gamma(s)|, \quad ^\forall x, s, t \in \mathbb{R}$$

となるものが存在する.

<u>注意1.</u> 上記の系(I)は形式的に次のように書くことができる:

$$(\mathrm{I}')\begin{cases} u \le \psi \quad \text{on } [0,\infty)\times[0,\infty), \quad u_t - a(u_x)_x \le 0 \quad \text{on } (0,\infty)\times(0,\infty), \\ u_t - a(u_x)_x = 0 \quad \text{on the region } \{u < \psi\} \\ a(u_x)(0+, t) = 0 \quad \text{if } u(0,t) < \psi(0,t), \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{for } 0 < x < \infty, \\ u(\ell(t), t) = 0 \quad \text{for } 0 < t < T. \end{cases}$$

注意2. 固定された境界 $x=0$ 上のみに obstacle が与えられる場合や，非線境界条件が与えられる場合については，Fasano-Primicerio [1]，Yotsutani [3] 等の結果があるが，我々の問題では obstacle が領域内部にまでおよぶ場合を考えている。

注意3. 我々の問題では，自由境界として $x=\ell(t)$ と，obstacle "$u\leq\psi$" によって生ずるものが考えられるが，条件(B)の(*)はこれら二つの自由境界が交わらないことを保証する。

§2. 解の存在

存在定理は次の様に述べられる。

定理1. (A),(B)を仮定する。$0<\ell_0<\infty$，$u_0\in X$，$0\leq u_0\leq\psi(\cdot,0)$ on $[0,\infty)$，$u_0=0$ on $[\ell_0,\infty)$ とする。このとき，$P(\ell_0,u_0,\psi)$ の解 $\{\ell,u\}$ (on $[0,T]$) で次の性質をみたすものが存在する：

$$\ell\in W^{1,2}(0,T),\quad u\in C([0,T];X),\quad u'\in L^2(0,T;H).$$

この定理の証明の方針は次の通り。

$\Lambda(\ell_0)\equiv\{\ell\in C([0,T]);\ \ell(0)=\ell_0,\ \ell$ は単調増加$\}$ とおき，

各 $\ell\in\Lambda(\ell_0)$ に対し

$$\varphi_\ell^t(z)=\begin{cases}\int_0^\infty A(z_x(x))\,dx & \text{if } z\in K_\ell(t),\\ \infty & \text{otherwise},\end{cases}$$

(ただし，$A(r)=\int_0^r a(s)\,ds,\ r\in\mathbb{R}$)

を考える．このとき，φ^t_ℓ，$0\le t\le T$，は H 上の proper l.s.c. 凸関数であることは容易にわかる．しかも系(I)はコーシー問題

$$CP(\varphi^t_\ell; u_0)\quad \begin{cases} -u'(t)\in\partial\varphi^t_\ell(u(t)), & 0<t<T,\\ u(0)=u_0 \end{cases}$$

で表現される．さて，各 $\ell\in\Lambda(\ell_0)$ に対し，$CP(\varphi^t_\ell; u_0)$ の解 u^ℓ が存在するが，

$$[Q\ell](t) = \ell_0 - \int_0^t a(u^\ell_x)(\ell(\tau)-,\tau)\,d\tau,\quad 0\le t\le T.$$

とおくことによって，作用素 $Q:\Lambda(\ell_0)\longrightarrow\Lambda(\ell_0)$ が定義される．もし，Q の不動点 ℓ (i.e. $Q\ell=\ell$) が存在するなら，組 $\{\ell, u^\ell\}$ は $P(\ell_0, u_0, \psi)$ の解を与えることは容易に理解されるだろう．時間依存の劣微分作用素を含むコーシー問題に関するいくつかの結果及び不動点定理を使うことによって，実際に Q の不動点を見つけることができる．

注意4.　初期値 u_0 がもっと一般の場合（例えば，$u_0\in H$，$0\le u_0\le\psi(\cdot,0)$ a.e. on $[0,\infty)$，$u_0=0$ a.e. on $[\ell_0,\infty)$ の場合）にも $P(\ell_0, u_0, \psi)$ の解が存在することが予想されるが，今の所，わかっていない．

§3. 解の一意性

解の一意性は (A) よりもっと強い条件 (A′) の下で示される．

(A′)　$a(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $a(0)=0$，狭義単調増加，
bi-Lipschitz 連続とする，i.e.

$$C_0'(r-r')\le a(r)-a(r')\le C_1'(r-r'),\ \forall r,r'\in\mathbb{R},\ r\ge r'.$$

さらに，$a(\cdot)$ は 2回微分可能で

$$|a''(r)|\le C_3(1+|r|)\ ,\ \forall r\in\mathbb{R}$$

とする．ただし C_0'，C_1'，C_3 は正の定数．

本節では　$X=W^{1,2}(0,\infty)$　とする．

定理2.　(A′)，(B) を仮定する．$0<l_0<\infty$，$u_0\in X$，
$0\le u_0\le\psi(\cdot,0)$ on $[0,\infty)$，$u_0=0$ on $[l_0,\infty)$ かつ

$$u_0(x)\le K(l_0-x)\ ,\ \forall x\in[0,l_0]\quad (K\text{は正定数})$$

とする．このとき，$P(l_0,u_0,\psi)$ の解は一意的である．

$\{l,u\}$ を $P(l_0,u_0,\psi)$ の解とする．$\mathbb{R}$ 上の smooth な関数 ζ で，十分小さい正数 δ に対し，

$$0\le\zeta\le1\ \text{on}\ \mathbb{R},\quad \zeta=1\ \text{on}\ [0,\infty),\quad \zeta=0\ \text{on}\ (-\infty,-\delta]$$

を満たすものを用いると，自由境界 l は

$$l(t)=l_0-\int_0^t\int_0^\infty \zeta_x(x-l(\tau))a(u_x)(x,\tau)\,dx\,d\tau$$
$$-\int_0^t\int_0^\infty \zeta(x-l(\tau))u_t(x,\tau)\,dx\,d\tau,\qquad 0\le t\le T$$

で表現される．この表現と，非線型放物型変分不等式に対する解の比較定理を用いることによって，定理2が証明される．

解の存在・一意性の証明に関して詳しくは筆者[2]を参照.

References

1. A. Fasano and M. Primicerio, Il problema di Stefan con condizioni al contorno non lineari, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa, 26(1972), 711-737.

2. N. Kenmochi, Free boundary problems of the Stefan-type for nonlinear parabolic equations with obstacles, preprint.

3. S. Yotsutani, Stefan problem with the unilateral boundary condition on the fixed boundary, I, preprint.

広島大学
寺本恵昭

毛管現象に附随する変分問題

$\mathbb{R}^n (n\geq 2)$ の有界開集合 Ω を底面とする様な管内に液体を入れた場合，その液体の表面は，次のエネルギー汎関数

$$J(u)=\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}+\int_\Omega u^2 dx - \kappa\int_{\partial\Omega} u\, dH_{n-1}$$

H_{n-1} は $n-1$ 次元 Hausdorff 測度，κ は定数：$0<\kappa<1$

を最小にする様な Ω 上の関数で表わされる，と考えられる

この変分問題を，Ω 上の有界変動関数全体のなす関数空間 $BV(\Omega)$ で，考える．ここで，$u\in BV(\Omega)$ とは，$u\in L^1(\Omega)$ かつ，

$$\int_\Omega |Du| = \sup\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i g_i \cdot u\, dx\ ;\ g_i\in C_0^1(\Omega),\ \sum_{i=1}^n g_i^2(x)\leq 1\right\} < +\infty$$

であるものと定義する．

$H_{n-1}(\partial\Omega)<+\infty$ であれば，$u\in BV(\Omega)$ に対して，汎関数 $J(u)$ の値が，$+\infty$ になることも含めて，計算できる．第1項の定義は，

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} = \sup\left\{\int_\Omega (g_0+\sum_{i=1}^n D_i g_i\cdot u)\,dx\ ;\ g_i\in C_0^1(\Omega),\ \sum_{i=0}^n g_i^2(x)\leq 1\right\}$$

第3項の $\partial\Omega$ 上での積分は，$u\in BV(\Omega)$ の $\partial\Omega$ 上への trace をとって計算したもの．

変分問題は，Ω に仮定をおいて，$J(\cdot)$ が $BV(\Omega)$ で，下に有界であることを先ず示す．次に $BV(\Omega)$ の有界集合の compact 性を用いて，minimizing sequence $\{u_j\}$ から，$^\exists v\in BV(\Omega)$ に $L^1(\Omega)$ で収束する部分列がとれて，$L^1(\Omega)$ での収束に関して，$J(\cdot)$ が下半連続であることを用いて，解が求められる．

$J(\cdot)$ が，下に有界であること：

$x\in\partial\Omega$ において，次の量を考える．

$$g(x)=\limsup_{r\searrow 0}\left\{\int_{\partial\Omega}\varphi_A\, dH_{n-1}\Big/\int_A |D\varphi_A|\ ;\ A\subset\Omega(x,r),\ \mathrm{meas}\,A>0\right\}$$

$\Omega(x,r)=\Omega\cap B_r(x)$，$B_r(x)$ は，中心 x，半径 r の球．

この量は，一般に $g(x)\geq 1$．$\partial\Omega$ が C^1 級なら，$g(x)=1$ となる．

更に，$Q=\sup_{x\in\partial\Omega} g(x)<+\infty$ とおくと，$\partial\Omega$ 上の u の積分が，co-area formula を用いて，u の，Ω における変分と，L^1-norm で．

評価できる。
そして、κは、$\kappa Q<1$をみたしているとすると、$BV(\Omega)$上、$J(\cdot)$が下に有界であることが導かれる。

更に$\kappa Q<1$ならば、minimizing sequence $\{u_j\}$について、$\|u_j\|_{L^1(\Omega)}$、並びに、$\int_\Omega |Du_j|$が、jについて一様有界となり、Rellichの定理から、$BV(\Omega)$の或る関数uにL^1-normで収束する部分列がとれる。
一方、汎関数$J(\cdot)$がL^1-normに関して、下半連続であることが、

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Du_j|^2}$$

の下半連続性、Fatouの補題等を用いて証明される。
従って、$\{u_j\}$から選んだ部分列の極限$u\in BV(\Omega)$が、変分問題の解

$$J(u) = \inf\{J(v)\,;\, v\in BV(\Omega)\}$$

となることがわかる。
$J(\cdot)$の凸性から、解の一意性も導かれる。

残る問題は、解の滑らかさであるが、Ω内部における、解uの正則性については、$u\in C^\infty(\Omega)$となり、方程式

$$\mathrm{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 2u$$

をΩで満たすことが分っている。
$\partial\Omega$に然るべき滑らかさを仮定して、もし解uが$C^2(\overline{\Omega})$となることが分れば、$\partial\Omega$上で、境界条件

$$\nu\cdot\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \kappa$$

を満たさなければならない。ここで、νは外向き単位法線ベクトルだから、この境界条件は、液体表面と管の壁面とが、観察により決定される接触角を、なすことを示している。
得られた変分問題の解が、現象を記述しているかどうかは、実際に観察される、この接触角を達成していることに拠って、判断される。
然し、解uの境界における振舞いは、連続性も含めて、現在まで

何も分っておらず，J(·)の境界条件付きEuler-Lagrange方程式

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 2u \quad \text{in } \Omega$$

$$\nu \cdot \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \kappa \quad \text{on } \partial\Omega$$

を満たすかどうかは，不明である．

参考．

E. Giusti, Boundary value problems for non-parametric surfaces of prescribed mean curvature
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), 3. (1976)

非線型双曲型方程式のHopf bifurcation

名古屋大. 理　新倉保夫

1. 結果

1次元双曲型方程式

$$
(P)\quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu + \lambda f(u) + g(u) = 0 & (1) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (2) \\ u(t,x) = u(t+2\pi, x) & (3) \end{cases}
$$

の時間について周期2πの解の分岐問題を考える。ここでcは実定数，λは実パラメーターであって，関数fおよびgは次をみたす。

(a.1)　$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$は単調増加な連続関数で$f(0)=0$をみたす.

(a.2)　$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$は連続関数で$g(0)=0$および次をみたす;

$$
\lim_{u \to 0} \frac{g(u)}{f(u)} = 0
$$

<u>Theorem</u>　cを$\partial_t^2 - \partial_x^2$の固有値とすると(a.1), (a.2)のもとで　$(\lambda, u) = (0, 0)$は(P)の分岐点である。

2. 証明のための準備

(2.1)　$L^2 = \{ u \in L^2((0,2\pi)\times(0,\pi)) \mid u$ は(2)と(3)をみたす$\}$

とおくと，$A \equiv \partial_t^2 - \partial_x^2$は$L^2$上の自己共役作用素で

あることにより

(2.2) $$L^2 = N \oplus N^{\perp}, \quad \text{where} \quad N = \text{kernel}\, A$$

と直交分解される。

作用素 A に対して次がなりたつ。

Lemma 2.1

(1) $A: N^{\perp} \longrightarrow N^{\perp}$ は自己共役作用素で定義域は $H^1 \cap N^{\perp}$ である

(2) $A: C^{n+1} \cap N^{\perp} \longrightarrow C^n \cap N^{\perp}$ は同型写像である。 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

Lemma 2.2　c は実数とする。

(1) $A + c;\ N^{\perp} \longrightarrow N^{\perp}$ は指数ゼロの Fredholm 作用素で定義域は $H^1 \cap N^{\perp}$ である。

(2) $A + c;\ C^{n+1} \cap N^{\perp} \longrightarrow C^n \cap N^{\perp}$ は指数ゼロの有界な Fredholm 作用素である。 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

Lemma 2.3　$c \neq 0$ とする。

(1) $A + c:\ L^2 \rightarrow L^2$ は指数ゼロの Fredholm 作用素で定義域は $H^1 \cap N^{\perp} \oplus N$ である

(2) $A + c;\ C^{n+1} \cap N^{\perp} \oplus C^n \cap N \longrightarrow C^n$ は指数ゼロの有界な Fredholm 作用素である。

◎ 以上の準備のもとで f, g が C^1 函数のとき定理を証明する。
(f, g が連続函数でも定理は成立するが証明は省略する。)

3. c が 0 でない固有値のときの Theorem の証明.

Lemma 2.3 より

$$L^2 = K \oplus K^\perp , \quad \text{where} \quad K = \mathrm{kernel}(A+c)$$

と直交分解できる。dim K は偶数である. さて

(3.1) $$X = C^1 \cap N^\perp \oplus C^0 \cap N, \qquad Y = C^0$$

とおくと Lemma 2.3 より $A+c ; X \to Y$ は指数ゼロの Fredholm 作用素で

$$X = K \oplus (K^\perp \cap X) \quad , \quad Y = K \oplus (K^\perp \cap Y)$$

と直交分解される。すなわち. $u \in X$ は $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in K$, $u_2 \in K^\perp \cap X$ と分解される。

我々は次の 2つの実パラメーター λ, μ をもつ modified problem

$$(\tilde{P}) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu + \mu \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \lambda f(u) + g(u) = 0 & (1') \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(t,x) = u(t+2\pi, x) \end{cases}$$

を考える。P_K , $P_K^\perp$ をそれぞれ $K, K^\perp$ への射影とする。
$(\tilde{P})$ は次の 2つの方程式に帰着される。

(3.2) $$\mu \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \lambda P_K f(u_1+u_2) + P_K g(u_1+u_2) = 0$$

(3.3) $$(A+c) u_2 + \lambda P_K^\perp f(u_1+u_2) + P_K^\perp g(u_1+u_2) = 0$$

(3.3) は Banach 空間の陰函数定理により u_2 についてとける;

$$u_2 = h(\lambda, u_1) \in C^1(\mathbb{R} \times K \longrightarrow C^1 \cap N^{\perp} \cap K^{\perp} \oplus C^0 \cap N)$$

これを (3.2) に代入することにより

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \lambda P_K f(u_1 + h(\lambda, u_1)) + P_K g(u_1 + h(\lambda, u_1)) = 0 \tag{3.4}$$

(3.4) の左辺を $F(\lambda, \mu, u_1)$ とおくと F は
$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times K \setminus \{0\} \longrightarrow K \setminus \{0\}$ への連続写像のクラスとして

$$F(\lambda, \mu, u_1) \simeq \mu \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \lambda P_K f(u_1) \simeq \mu \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \lambda u_1 \tag{3.5}$$

がなりたつ。（$\simeq$ は homotopic であることをあらわす）

__Proposition 3.1__ $F(\lambda, \mu, u_1)$ が $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times K \setminus \{0\} \longrightarrow K \setminus \{0\}$ の連続写像として $\mu \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \lambda u_1$ に homotopic ならば $(\lambda, \mu, u) = (0, 0, 0)$ は $(\tilde{P})$ の分岐点である。

証明は，"Hopf bifurcation arising from nonlinear perturbations and parabolic functional differential equations"（著者の preprint）にある。多くのスペースを要するので省略する。

Proposition 3.1 により $(\tilde{P})$ が分岐解をもつことがわかったが，$(\tilde{P})$ が分岐解をもつならば必然的に $\mu = 0$ でなければならないことを示そう。それにより (P) において $(\lambda, u) = (0, 0)$ で分岐がおこることがわかる。

$\tilde{f}, \tilde{g}$ を f, g の原始関数とする。すなわち

$$\tilde{f}' = f, \quad \tilde{g}' = g.$$

$$S \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_t \times (1')\, dx\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big[\frac{1}{2}(u_t)^2_t + \frac{1}{2}(u_x)^2_t + \frac{c}{2}(u^2)_t$$

$$+ \mu(u_{1,t})^2 + \lambda \tilde{f}(u)_t + \tilde{g}(u)_t \Big]\, dx\, dt$$

$$E(t) = \int_0^{\pi} \Big[\frac{1}{2}(u_t)^2 + \frac{1}{2}(u_x)^2 + \frac{c}{2}u^2 + \lambda \tilde{f}(u) + \tilde{g}(u) \Big] dx$$

とおくと

$$S = E(2\pi) - E(0) + \mu \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (u_{1,t})^2 dx = 0$$

$E(2\pi) = E(0)$, $u_{1,t} \neq 0$ であるから $\mu = 0$

以上により c が 0 でない固有値のとき Theorem が示された。

4 $c = 0$ の場合の Theorem の証明

(3.2), (3.3) において $\mu = 0$, $c = 0$, $k = N$ とおくことにより次式をえる。($u = u_1 + u_2$, $u_1 \in C \cap N$, $u_2 \in C^1 \cap N^{\perp}$ である).

(4.1) $\lambda P_N f(u_1+u_2) + P_N g(u_1+u_2) = 0$

(4.2) $Au_2 + \lambda P_N^{\perp} f(u_1+u_2) + P_N^{\perp} g(u_1+u_2) = 0$

(4.2) は前と同様に陰函数定理により

$$u_2 = h(\lambda, u_1) \in C^1(R \times C^0 \cap N \longrightarrow C^1 \cap N^{\perp})$$

ととける。これを (4.1) に代入して次をえる。

(4.3) $\lambda P_N f(u_1 + h(\lambda, u_1)) + P_N g(u_1 + h(\lambda, u_1)) = 0$

(4.3) の左辺を $F(\lambda, u_1)$ とおくと F は
$R \setminus \{0\} \times C^0 \cap N \setminus \{0\} \longrightarrow C^0 \cap N \setminus \{0\}$ への連続写像として

(4.4) $F(\lambda, u_1) \simeq \lambda P_N f(u_1) \simeq \lambda u_1$

である。 U を zero の充分小さい近傍とすると

$\lambda > 0$ に対して $F_\lambda \equiv F(\lambda, \cdot)$ は、次をみたす

(4.5) $\mathrm{Deg}(F_\lambda, U, 0) = \mathrm{Deg}(\lambda I, U, 0) = \{1\}$

$\lambda < 0$ に対して

(4.6) $\mathrm{Deg}(F_\lambda, U, 0) = \mathrm{Deg}(\lambda I, U, 0) = \{1, -1\}$

分岐がおこらないとすると ある区間 $-\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$ に対して
F_λ は自明な解しかもたぬから F_λ は homotopy である
したがって $\mathrm{Deg}(F_\lambda, U, 0)$ は λ に依存しない。これは
(4.5) (4.6) に矛盾する すなわち分岐がおこる

Note; $\mathrm{Deg}(\cdot, \cdot, \cdot)$ は generalized degree function である。
整数の集合値（$\pm\infty$ も含む）であることに注意！

Striking Patterns for a Reaction-Diffusion System

高木 泉 (都立航空高専)

Gierer と Meinhardt によって生物の形態形成のモデルとして提唱された次の拡散−反応系の定常解について考察する(生物学的な意味については [1] をみよ):

$$
\text{(GM)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{u}{m} + \dfrac{u^2}{v} + p, & 0<x<1,\ t>0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v + u^2, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & x = 0, 1 \end{cases}
$$

但し d_1, d_2 は正の定数であり, m, p は次のような定数である:

$$0 \leqq p < 1, \qquad m > (1-p)/(1+p).$$

系(GM)は 定数定常解 $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ をもつ:

$$\bar{u} = m(1+p), \qquad \bar{v} = \bar{u}^2.$$

定数解のまわりでの非定数定常解の存在と安定性は分岐理論によって解析される([4]をみよ).

本稿では, 十分大きな d_2 に対し, 定数解から離れたところにも定常解が存在し, $d_1 \to 0$ のとき, $u(x)$ の L^1−ノルムは有界にとどまるが $u(x)$ の最大値はいくらでも大きくなることを示す. (このような解は striking-pattern とよばれている.)

同様の結果が西浦廉政氏によっても得られていることを注意しておく.

さて, Nishiura [3] によると, d_2 が十分大きいときには, (GM)の定常解は次の shadow system の解によって近似されることがわかっている:

$$
\text{(SS)} \begin{cases} d_1 u'' - \dfrac{u}{m} + \dfrac{u^2}{\xi} + p = 0, & u'(0) = u'(1) = 0, \\ \xi = \int_0^1 u(x)^2 dx. \end{cases}
$$

この系(SS)については Keener [2] の研究があるが, ここでは楕円函数を用いた陽な表示を与えよう.

まず，$F(u,\xi) = u^3/(3\xi) - u^2/(2m) + \rho u$ とおく．3次方程式 $F(a,\xi) - F(u,\xi) = 0$ は a の適当な範囲で3実根 $u = c, a, b$ $(c < a < b)$ をもつ．次に

$$k^2 = \frac{b-a}{b-c}, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

とおく．このとき $\xi \geqslant \bar{v}$ に対し

$$(C) \qquad \frac{E}{K} = \frac{\bar{u}-c}{b-c}$$

となるように a を選ぶことができる．

<u>定理</u>　各 $\xi > \bar{v}$ に対し，(SS) の単調増加な解が存在し，

$$d_1 = \frac{b-c}{6\xi K^2}, \quad u(x) = c + \frac{a-c}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 Kx}$$

とかける．但し a は (C) をみたす．$\mathrm{sn}\, x$ は Jacobi の楕円函数である．更に $\xi \to +\infty$ のとき

(i) $d_1 \to 0$，(ii) $u(0) = a \to m\rho$，

(iii) $u(1) = b = 3\xi/(2m) - 2m\rho + O(\xi^{-1})$，

(iv) $\int_0^1 u(x)dx = \bar{u}$．

単調でない解は，上の解を鏡映と周期性によって接続して得られることを注意しておこう．

d_2 が十分大きいとき，(GM) の定常解は (SS) の解 (u, ξ) に近いから，striking patterns の存在は上の定理から従う．

文献

[1] A. Gierer and H. Meinhardt, Kybernetik, 12 (1972), 30-39.

[2] J. P. Keener, Stud. Appl. Math., 59 (1978), 1-23.

[3] Y. Nishiura, Research Report #79-12, Kyoto Sangyo Univ., 1979.

[4] I. Takagi, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 221-246

[5] I. Takagi, *A Priori Estimates for Stationary Solutions of an Activator-Inhibitor Model due to Gierer and Meinhardt*, to appear in Tôhoku Math. J.

準線型放物型発展方程式 $du/dt + A(t,u)u = f(t,u)$ の局所解の存在と t についての解析性について.

東京都立大学 理学研究科 古谷希世子

§0. Introduction.

準線型放物型発展方程式;

(1) $\quad du/dt + A(t,u)u = f(t,u), \quad u(0) = u_0$

の局所解の存在と t についての解析性を考える。未知函数 u は Banach 空間 X の値をとる t の函数であり, t と $u \in X$ を固定したとき, $-A(t,u)$ は X に於ける解析的半群の生成素, $f(t,u)$ は X の元であるとする。

$A(t,u)$ の定義域が t, u に依らず一定の場合については, Соболевский が [6] で詳しく述べており, その結果を利用し, Massey III [5] は (1) の局所解を t について解析的に拡張している.

私は $A(t,u)$ の定義域は必ずしも一定ではないが, $A(t,u)$ のある分数巾 $A(t,u)^h$ ($h^{-1} \in \mathbb{N}_+$) の定義域が t, u に依らず一定の場合について Kato [4] の線型理論に基づき考察した。分数巾の定義域が一定であるものは, Neumann 問題への応用上重要である. 尚 $A(t,u)$ の分数巾の定義域が一定の場合の (1) の局所解の存在を Соболевский [7] が示してはいるが, これは結果のみを記したもので, しかも定理の条件にはっきりしない部分があり, この後も証明を付けたもの, あるいは類似の結果を示したものは発表されていない様である。

$A(t, A_0^{-\alpha}u)^h$ が u について Lipschitz 連続: $\|A(t, A_0^{-\alpha}u)^h A(t, A_0^{-\alpha}w)^{-h} - I\| \leqq C\|u-w\|$ の場合は [1], [2] を見て頂くとして、本稿では $A(t, A_0^{-\alpha}u)$ が u について Hölder 連続: $\|A(t, A_0^{-\alpha}u)^h A(t, A_0^{-\alpha}w)^{-h} - I\| \leqq C\|u-w\|^{\eta}$ ($\eta < 1$) の場合について取り扱おう。

以下では $L(X)$ により X から X への線型作用素の全体を, $B(X)$ により X から X への有界線型作用素の全体を表し, $\|\cdot\|$ により X または $B(X)$ のノルムを表すことにする。$\Sigma(\phi; T) \equiv \{t \in \mathbb{C} ; |\arg t| < \phi,\ 0 \leqq |t| < T\}$ は複素平面上の扇形, $\rho(A)$ は A のレゾルヴァント集合, $D(A)$ は A の定義域とする。また C_i ($i \in \mathbb{N}_+$) は t, s, v, w 等に依らぬ定数である。

§1. 仮定と結論. まず $a \in X$ を定義しよう. 次の仮定を置く

$a-1)$ $\exists h = m^{-1}$, $2 \leqq m \in \mathbb{N}$. $0 \leqq \exists \alpha < h/2$ s.th. $A_0^{-\alpha} \in B(X)$: well-defined, $u_0 \in D(A_0^{1+\alpha})$。ここで $A_0 \equiv A(0, u_0)$.

$a-2)$ $\exists T_0 > 0$ s.th. $A_{u_0}(t) \equiv A(t, u_0) : X \longrightarrow X$; well defined for $\forall t \in [0, T_0)$.

$a-3)$ $\rho(A_{u_0}(t)) \supset$ 左半平面, $\exists C_1 > 0$ s.th. $\|(\lambda - A_{u_0}(t))^{-1}\| \leqq C_1(1+|\lambda|)^{-1}$ for $\mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0$, $D(A_{u_0}(t))$: dense in X for $\forall t \in [0, T_0)$

$a-4)$ $D(A_{u_0}(t)^h) \equiv D$ for $\forall t \in [0, T_0)$, $\exists C_2$, $\exists C_3$, $1-h+\alpha < \exists \sigma \leqq 1$

s.th. $\begin{cases} \|A_{u_0}(t)^h A_{u_0}(s)^{-h}\| \leqq C_2 \\ \|A_{u_0}(t)^h A_{u_0}(s)^{-h} - I\| \leqq C_3 |t-s|^\sigma \quad \text{for } \forall t, s \in [0, T_0) . \end{cases}$

$a-5)$ $f_{u_0}(t) \equiv f(t, u_0) \in X$: well defined for $t \in [0, T_0)$, $f_{u_0}(0) \in D(A_0^h)$
$\exists C_4 > 0$ s.th. $\|f_{u_0}(t) - f_{u_0}(s)\| \leqq C_4 |t-s|^\sigma$ for $\forall t, s \in [0, T_0)$.

以上の仮定の下. Kato[4] の結果を適用する. Kato の定理より

$$(\#) \qquad d\hat{u}/dt + A_{u_0}(t)\hat{u} = f_{u_0}(t), \qquad \hat{u}(0) = u_0$$

の解が存在して, 一意である. そこで

$$(2) \qquad a \equiv \frac{d^+}{dt} A_0^\alpha \hat{u}(t)\Big|_{t=0}, \quad \text{ここで } \hat{u} \text{ は } (\#) \text{ の解}$$

とする。

(2)で定めた a を用いて, 以下の仮定を置く:

$A-1)$; $a-1)$ と同じ

$A-2)$ $A_0^{-1} : X \longrightarrow X$; 完全連続

$A-3)$ $\exists R > 0$, $\exists T_0 > 0$, $\exists \phi_0 > 0$ s.th. $A(t, A_0^{-\alpha} v) \in L(X)$: well defined. for $\forall t \in \Sigma(\phi_0 ; T_0)$, $\forall v \in N \equiv \{w \in X ; \|w - A_0^\alpha u_0\| < R\} \cap [Y + \{A_0^\alpha u_0\}] \cup \{A_0^\alpha u_0\}$。
ここで $Y = \bigcup_{t>0} \{v \in X ; \|v - (A_0^\alpha u_0 + ta)\| < tM\}$ $(0 < M \leqq \|a\|)$.

。 $\forall t, s \in \Sigma(\phi_0 ; T_0)$, $\forall w, v \in N$ につき $A-4) \sim A-7)$ が成立するとする。

$A-4)_{(3)}$ $\begin{cases} \rho(A(t, A_0^{-\alpha} w)) \supset \text{left half-plane}, \ \exists C_1 > 0 \text{ s.th. } \|(\lambda - A(t, A_0^{-\alpha} w))^{-1}\| \\ \leqq C_1(1+|\lambda|)^{-1} \text{ for } \mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0. \ D(A(t, A_0^{-\alpha} w)) : \text{dense in } X。 \end{cases}$

$A-5)$ $D(A(t, A_0^{-\alpha} w)^h) = D$

$A-6)$ $\exists C_2$, $\exists C_3$, $1-h+\alpha < \exists \sigma \leqq 1$, $(1-h+\alpha'')/(1-\alpha) < \exists \eta < 1$ $\alpha < \alpha'' < h$

$$\text{s.th.} \begin{cases} \| A(t, A_0^{-\alpha} w)^h A(s, A_0^{-\alpha} v)^{-h} \| \leqq C_2 \\ \| A(t, A_0^{-\alpha} w)^h A(s, A_0^{-\alpha} v)^{-h} - I \| \leqq C_3 \{ |t-s|^\sigma + \|w-v\|^\eta \} . \end{cases}$$

A-7) $f(t, A_0^{-\alpha} w) \in X$: well defined, $\exists C_4 > 0$

s.th. $\| f(t, A_0^{-\alpha} w) - f(s, A_0^{-\alpha} v) \| \leqq C_4 \{ |t-s|^\sigma + \|w-v\|^\eta \}$.

A-8) $\Phi : (\Sigma(\phi_0 ; T_0) \setminus \{0\}) \times N \longrightarrow B(X)$: analytic.

$$(t, w) \longmapsto A(t, A_0^{-\alpha} w)^h A_0^{-h}$$

A-9) $\Psi : (\Sigma(\phi_0 ; T_0) \setminus \{0\}) \times N \longrightarrow X$: analytic.

$$(t, w) \longmapsto f(t, A_0^{-\alpha} w)$$

Theorem 1. (局所解の存在). A-1) ~ A-7) を仮定する. 但し $\Sigma(\phi_0 ; T_0)$ の代わりに $[0, T_0)$ とする. このとき $0 < \exists S_1 \leqq T_0$ s.th. $\exists u \in C^1((0, S_1) ; X) \cap C([0, S_1) ; X)$: u は (1) の解, となる。

Theorem 2. (t についての解析性) A-1) ~ A-9) を仮定する。このとき $0 < \exists T \leqq T_0$, $0 < \exists \phi \leqq \phi_0$, $\exists K > 0$, $1-h < \exists k < 1$. $\exists u : \Sigma(\phi ; T) \longrightarrow X$; 連続

$$\text{s.th.} \begin{cases} u(0) = u_0,\ u(t) \in D(A(t, u(t))),\ \|A_0^\alpha u(t) - A_0^\alpha u_0\| < R \text{ for } t \in \Sigma(\phi ; T) \setminus \{0\} \\ u : \Sigma(\phi ; T) \setminus \{0\} \longrightarrow X : \text{analytic},\ du/dt + A(t, u(t)) u(t) = f(t, u(t)) \text{ for} \\ t \in \Sigma(\phi ; T) \setminus \{0\},\ \|A_0^\alpha u(t) - A_0^\alpha u_0\| \leqq K |t|^k \text{ for } t \in \Sigma(\phi ; T) \end{cases}$$ となる.

§.2. Sketch of Proofs. Th. 1 の Pr. $\zeta \in ((1-h+\alpha')/\eta, 1-\alpha)$, $0 < \varepsilon < 1$, $L > 0$ とし

$$F(S) \equiv \left\{ v : [0, S) \to X \;\middle|\; \begin{array}{l} v(0) = A_0^\alpha u_0 \\ \|v(t_1) - v(t_2)\| \leqq L |t_1 - t_2|^\zeta \quad t_1, t_2 \in [0, S) \\ \|v(t) - (A_0^\alpha u_0 + t a)\| \leqq M t (1-\varepsilon) \quad t \in [0, S) \end{array} \right\}$$ とする.

- S : 十分小であれば $F(S) \ni \forall v$ につき $v(t) \in N$ for $\forall t \in [0, S)$ となる.

従って $A_v(t) \equiv A(t, A_0^{-\alpha} v(t))$, $f_v(t) \equiv f(t, A_0^{-\alpha} v(t))$ が定義される.

- $w_{v,\alpha}(t) \equiv A_0^{-\alpha} w_v(t)$ と置く.

ここで w_v : unique solution of $\begin{cases} dw_v/dt + A_v(t) w_v = f_v(t) & t \in [0, S) \\ w_v(0) = u_0 \end{cases}$

さらに S：十分小であれば $w_{v,\alpha}\in F(S)$ となる。

◦ $T: F(S)\to F(S)$ を $Tv = w_{v,\alpha}$ によって定める。$Y\equiv C([0,S);X)$ からの induce topology につき, T は連続写像である。A-2) より $TF(S)$ は Y の compact subset であるから Schauder の不動点定理により $\exists v\in F(S)$ s.th. $Tv=v$.

このvにつき $u = A_0^{-\alpha}v$ とすれば このuが求めるものである。

<u>Th. 2 の pr.</u> A-4) より $\exists C_5>0$, $\exists \phi_1>0$, $\exists T_1>0$ s.th. $\rho(e^{i\theta}A(t, A_0^{-\alpha}w))\supset$ left half-plane for $t\in\Sigma(\phi_1;T_1)$, $w\in N$, $|\theta|<\phi_1$, $\|(\lambda-e^{i\theta}A(t,A_0^{-\alpha}w))^{-1}\|\leq C_5(1+|\lambda|)^{-1}$ for $\mathrm{Re}\,\lambda\leq 0$。 $\phi=\min(\phi_0,\phi_1)$ とし

$$E(S)\equiv\left\{\hat{v}:\Sigma(\phi;S)\to X\;\middle|\;\begin{array}{l}\hat{v}:\Sigma(\phi;S)\setminus\{0\}\to X\text{ : analytic},\quad \hat{v}(0)=A_0^{\alpha}u_0\\ \|\hat{v}(t)-\hat{v}(0)\|\leq L|t|^{\beta}\text{ for } t\in\Sigma(\phi;S)\\ \|\hat{v}(t_1)-\hat{v}(t_2)\|\leq L|t_1-t_2|^{\beta}\text{ for } t_1,t_2\in[0,S)\\ \|\hat{v}(t)-(A_0^{\alpha}u_0+ta)\|\leq Mt(1-\varepsilon)\text{ for } t\in\Sigma(\phi;S)\end{array}\right\}$$ とする。

◦ S：十分小ならば $E(S)\ni{}^{\forall}\hat{v}$ につき, $\hat{w}_{\hat{v},\alpha}\in E(S)$ となる。

ここで, $\hat{w}_{\hat{v},\alpha}(t) = A_0^{\alpha}\hat{w}_{\hat{v}}(t)$,

$\hat{w}_{\hat{v}}$: unique solution of $\begin{cases} d\hat{w}_{\hat{v}}/dt + A_{\hat{v}}(t)\hat{w}_{\hat{v}} = f_{\hat{v}}(t) & t\in\Sigma(\phi;S)\\ \hat{w}_{\hat{v}}(0)=u_0\end{cases}$

• $F_0(S)\equiv\{v:[0,S)\to X \mid v(t)=\hat{v}(t)\text{ for }{}^{\forall}t\in[0,S),\ \hat{v}\in E(S)\}$ と置く。

$\hat{T}: E(S)\to E(S)$ を $\hat{T}\hat{v}=\hat{w}_{\hat{v},\alpha}$ により定め, $T_0: F_0(S)\to F_0(S)$ を $(T_0v)(t)=(\hat{T}\hat{v})(t)$ for ${}^{\forall}t\in[0,S)$ により定めれば $\exists v\in F_0(S)$, $\exists\hat{v}\in E(S)$ s.th. $T_0v=v$, $\hat{v}(t)=v(t)$ for ${}^{\forall}t\in[0,S)$。 $\hat{v}$: analytic より 実は $\hat{T}\hat{v}=\hat{v}$ となる。この $\hat{v}$ につき $u=A_0^{-\alpha}\hat{v}$ とすればよい。

参考文献

[1] K. Furuya ; Japan Acad., 56, Ser. A, 256-258 (1980)

[2] ———— ; Osaka J. Math. (to appear)

[3] ———— ; pre print.

[4] T. Kato ; Nagoya Math. J. 5, 93-125 (1961)

[5] F. J. Massey III ; J. Diff. Eqs., 22, 416-427 (1976)

[6] П. Е. Соболевский : Труды Моск. матем. о-ва 10, 297-350 (1961)

[7] ———— ; ДАН СССР 138, 59-62 (1961)

Decayを持つ発展方程式の非線型摂動について

筑波大学 数学系 谷川政雄

Xを局所凸な線型位相空間とし. 正実数 tに依存するX上の連続線型作用素 $A(t)$に対して. 発展方程式(1)

$$(1)\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - A(t)v = 0 & 0<t<+\infty \\ v(0) = a \end{cases}$$

が. 解 $v(t)$ を持ち. Xの適当なノルムに対して $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$のオーダーでdecayしているとする。

0の近傍$U\subset X$で定義されたXへのC^2級の非線型写像Fに対して 非線型発展方程式(2)を解きたい。

$$(2)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - A(t)u - F(u) = f(t) & 0<t<+\infty \\ u(0) = a \end{cases}$$

Fについて 0階と1階の項は$A(t)$に繰り込んでしまって. $F(0)=0$, $dF(0)=0$ としてよい。(dFはFのFréchet微分で$dF(0)$はXからXへの連続線型写像。) (2)の方程式は. $f(t)\equiv 0$, $a=0$ の時 $u(t)\equiv 0$ という自明な解を持つから. $f(t)$とaが適当なノルムで充分小さい時に. 摂動法を用いて解を構成する。

以下の方法はKlainermanが非線型波動方程式の大域解の存在をNash-Moser型陰関数定理の証明法にならって示した手法を抽象化したものである。

cf. S. Klainerman ; Global Existence for Nonlinear Wave Equations. C.P.A.M. 33-1 (1980)

I. 局所凸線型位相空間 X についての条件

Xの位相は3つのノルムの族 $|\ |_N$, $\|\ \|_N$, $|||\ |||_N$ $(N=0,1,2,\cdots)$
により決定され．各ノルムの族は次の性質を持つ。

i) 単調増大性

すべての $x\in X$ に対して

$$(3)\quad \begin{cases} |x|_0 \leqq |x|_1 \leqq |x|_2 \leqq \cdots \\ \|x\|_0 \leqq \|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq \cdots \\ |||x|||_0 \leqq |||x|||_1 \leqq |||x|||_2 \leqq \cdots \end{cases}$$

ii) 次の補間不等式が $L=(1-\alpha)K+\alpha N$, $(0\leqq\alpha\leqq 1,\ 0\leqq K\leqq N)$を満たす L に対して成立する。

$$(4)\quad \begin{cases} |x|_L \leqq C_N |x|_K^{1-\alpha} |x|_N^{\alpha} \\ \|x\|_L \leqq C_N \|x\|_K^{1-\alpha} \|x\|_N^{\alpha} \\ |||x|||_L \leqq C_N |||x|||_K^{1-\alpha} |||x|||_N^{\alpha} \end{cases}$$

ここで C_N は Nのみに依存する正定数。

iii) 正定数 d_0 が存在して，$|\ |_N$ と$\|\ \|_N$ の間に次の埋蔵の関係がある。
(Sobolev の埋蔵定理に相当)

$$(5)\quad |x|_N \leqq C_N \|x\|_{N+d_0}$$

iv) X上の連続線型作用素の族 $\{S(\theta);\ 1\leqq\theta<+\infty\}$ で次の性質を持っているものが存在する。(軟化作用素と呼ぶ。)

$$(6)\quad \begin{cases} |S(\theta)x|_N \leqq C_N\theta^{N-M}|x|_M, & |(1-S(\theta))x|_M \leqq C_N\theta^{-N+M}|x|_N \\ \|S(\theta)x\|_N \leqq C_N\theta^{N-M}\|x\|_M, & \|(1-S(\theta))x\|_M \leqq C_N\theta^{-N+M}\|x\|_M \\ |||S(\theta)x|||_N \leqq C_N\theta^{N-M}|||x|||_M, & |||(1-S(\theta))x|||_M \leqq C_N\theta^{-N+M}|||x|||_M \end{cases}$$

ここで C_N はNのみに依存する正定数，$0\leqq M\leqq N$ とする。

注意) $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して．$|f|_N = \sup\limits_{\substack{|\alpha|\leqq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |D^\alpha f(x)|$，$\|f\|_N = \max\limits_{|\alpha|\leqq N}\|D^\alpha f\|_{L^2}$，
$|||f|||_N = \max\limits_{|\alpha|\leqq N}\|D^\alpha f\|_{L^1}$ とした時．Xを $|\ |_N$, $\|\ \|_N$, $|||\ |||_N$ で $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$を完備化した空間とすれば、i) ~ iv) はすべて満足する。

II. 非線型写像 Fについての条件

0の近傍 $U = \{ x \in X;\ |x|_\ell < 1,\ \|x\|_\ell < 1 \}$ ($\ell \geq 0$ はある定数) で定義された X への連続写像で Fréchet の意味で C^2 級とする。

(7) $F(0) = 0$

(8) $dF(0) = 0$

(9) $\| d^2F(u; v, w) \|_L \leqq C_L \left[|v|_{L+d_1} \|w\|_\ell + |v|_\ell \|w\|_{L+d_1} + |u|_{L+d_1} |v|_\ell \|w\|_\ell \right]$

(10) $||| d^2F(u; v, w) |||_L \leqq C_L \left[\|v\|_{L+d_1} \|w\|_\ell + \|v\|_\ell \|w\|_{L+d_1} + |u|_{L+d_1} \|v\|_\ell \|w\|_\ell \right]$

ここで $d_1 \geqq 0$ は正定数, $L = 0, 1, 2, \cdots$ とし C_L は L のみに依存する正定数。

III. 線型発展方程式についての条件

(11) $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - A(t)v = 0 & 0 < t < +\infty \\ v(0) = a & \end{cases}$

(11) は一意解 $v(t)$ を持ち, 次の評価が成立する。

ここで $k > 0$ は ある正定数, $N = 0, 1, 2, \cdots$ とし, C_N は N のみに依存する正定数

(11) $| v(t) |_N \leqq C_N (1+t)^{-k} ||| a |||_{N+d_2}$

(12) $| v(t) |_N \leqq C_N \| a \|_{N+d_2}$

(13) $\| v(t) \|_N \leqq C_N \| a \|_{N+d_2}$

$u(t) \in C_0([0, \infty); X)$ に対して次のノルムを導入する。

$$\| u \|_{kN} = \sup_{t \geq 0} (1+t)^k \| u(t) \|_N$$

$$| u |_{kN} = \sup_{t \geq 0} (1+t)^k | u(t) |_N$$

IV 線型化方程式についての条件

方程式 (2) の Fréchet 微分をとって線型化してみよう。

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - A(t)v - dF(u(t);v) = g(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad v(0) = b \end{cases}$$

$u(t) \in C([0,\infty);U)$ に対して (14) が 解 $v(t)$ を持つ事が望ましいが、さらに強く $u(t) \in C_0^1([0,\infty);U)$, $g(t) \in C_0^0([0,\infty);U)$, $b=0$ の時にのみ. (14) が一意的な解 $v(t)$ を持つと仮定する。そしてその時次の評価を仮定する。ここで d_3, ε は正定数とし. $N=0,1,2,\cdots$, C_N は Nのみによる正定数。

$$(15)\quad \|v\|_{0\,N} \leqq C_N\left[\|g\|_{1+\varepsilon\ N+d_3} + |u|_{1+\varepsilon\ N+d_3}\|g\|_{1+\varepsilon\ e}\right]$$

定理

条件 I 〜 IV をすべて仮定する。$\hat{\ell} > 2$ の時. 任意の L_0 に対して. ある $\tilde{L} > L_0$ と $\delta > 0$ が存在して

$$\|f\|_{\hat{\ell}\,\tilde{L}} + |||f|||_{\hat{\ell}\,\tilde{L}} < \delta$$

$$\|a\|_{\tilde{L}} + |||a|||_{\tilde{L}} < \delta$$

ならば.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - A(t)u - F(u) = f(t) & 0 < t < +\infty \\ \qquad\qquad u(0) = a \end{cases}$$

(2) の解 $u(t) \in C^1([0,\infty);X^{L_0})$ が存在する。
ここで X^{L_0} は X の $|\ |_{L_0}$, $\|\ \|_{L_0}$ により完備化された Banach 空間である。

Example 1　Non-linear Wave Equation (Klainerman C.P.A.M 1980)

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\Delta u}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,u|^2}} & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = a_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = a_1(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ただし $\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

(16) をさらに一般化して. $\tilde{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{ij} \quad (i+j>0, i,j=0,1,2,\cdots n))$ の C^∞ 関数 $F = F(\tilde{\lambda})$ で, $|F(\tilde{\lambda})| \leq C|\tilde{\lambda}|^2$ なるものに対して.

$$(17)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(u_t, u_1, \cdots u_n, u_{ij}) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = a_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0,x) = a_1(x) & \end{cases}$$

ただし $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $x_0 = t$ とみなす。

定理 (Klainerman)

空間次元 $n \geq 6$ の時. (11) の $\hat{k} = \frac{n-1}{2} > 2$ となり.

$\|Da_0\|_{L^2, \tilde{N}} + \|Da_0\|_{L^1, \tilde{N}} < \delta$

$\|a_1\|_{L^2 \tilde{N}} + \|a_1\|_{L^1, \tilde{N}} < \delta$

ならば. (17) は $u(t) \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ なる解 $u(t)$ を持つ。

Example 2 Non-linear Heat Equation.

F は Example 1 と同じ. ただし $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \cdots \lambda_n, \lambda_{ij}, (i,j=1,2,\cdots n))$ とする.

$$(18)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u_1, \cdots, u_n, u_{ij}) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = a(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ただし $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $i,j = 1,2,\cdots,n$

定理

空間次元 $n \geq 5$ の時 $\hat{k} = \frac{n}{2} > 2$ となり. 十分小なる $a(x)$ に対して (18) は大域解 $u(t) \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ を持つ。

Example 3. Non-linear Wave Equation of Exterior Domain.

$K \subset \mathbb{R}^n$ を compact strictly convex set で ∂K は C^∞級とする。
$\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ として. $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ で (17) を考えよう。

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(u_t, u_1, \cdots, u_n, u_{ij}) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0,x) = a_0(x) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = a_1(x) & x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

定理

空間次元 $n \geq 6$ の時 $\hat{k} = \frac{n-1}{2} > 2$ となり.
a_0, a_1 が充分小であれば. (15) は大域解
$u(t) \in C^\infty((0,\infty) \times \bar{\Omega})$ を持つ。

Example 4 Non-linear Hyperbolic Systems

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}(D_x)\Lambda u + \mathcal{B}(\mathcal{C}(D_x)\Lambda u, \mathcal{D}(D_x)u) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

ただし $u(t,x) = {}^t(u_1(t,x), \cdots, u_m(t,x))$ (m ベクトル)

$$\Lambda u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ix\cdot\xi} |\xi| \hat{u}(\xi) d\xi$$, $\hat{u}$ は u の Fourier 像.

$\mathcal{A}(\xi) = (a_{ij}(\xi)\,;\, i,j = 1,\cdots,m)$ $m \times m$ 行列
$\mathcal{C}(\xi) = (c_{ij}(\xi)\,;\, i = 1,2,\cdots,\ell,\ j = 1,2,\cdots,m)$ $\ell \times m$ 行列
$\mathcal{D}(\xi) = (d_{ij}(\xi)\,;\, i = 1,2,\cdots,\ell',\ j = 1,2,\cdots,m)$ $\ell' \times m$ 行列

$a_{ij}(\xi)$, $c_{ij}(\xi)$, $d_{ij}(\xi)$ は $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の 0次の正斉次関数,
$\mathcal{A}(D_x)$, $\mathcal{C}(D_x)$, $\mathcal{D}(D_x)$ はそれらをシンボルとする特異積分作用素。

$\mathcal{B} = {}^t(B_1(\lambda), \cdots, B_m(\lambda))$ は $\lambda = (\lambda_1, \cdots \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}, \cdots \lambda_{\ell+\ell})$ の m ベクトル値 C^∞ 級関数で $|B(\lambda)| \leqq C\lambda^2$ をみたす。

$\det(\lambda E - \mathcal{A}(\xi)) = 0$ の根 $\lambda_1(\xi), \cdots, \lambda_m(\xi)$ について、次を仮定する。

(21) $\lambda_j(\xi)$; $j = 1, 2, \cdots, m$ はすべて実数値。

(22) ある正定数 c があって $\inf_{\substack{|\xi|=1 \\ j \neq k}} |\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi)| \geq c$

(23) ある正定数 c' があって $c'^{-1} \leqq |\lambda_j(\xi)| \leqq c'$ $\forall \xi, |\xi| = 1, \forall j = 1, 2 \cdots, m$

$\Sigma_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n ; |\xi||\lambda_j(\xi)| = 1\}$ とおくとき、(21) ~ (23) により、Σ_j は $n-1$ 次元 C^∞-級多様体で S^{n-1} と同相となる事がわかる。

さらに次を仮定する。

(24) Σ_j の Gauss 曲率は Σ_j 上 0 にならない。

<u>定理</u> (20) において初期値 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が十分小さければ、$u(t) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ なる (20) の解が存在する。

Example 1 ~ 4 における証明は、関数空間 X のノルムの組 $|\ |_N, \|\ \|_N, |\!|\!|\ |\!|\!|_N$ を適当にとり、軟化作用素 $S(\theta)$ と条件 I ~ IV を調べる。さらに方程式に対しては、解の正則性が個別にわかる時には、regularity を上げる事ができる。基本定理の証明は、Nash-Moser 型陰関数定理の証明にならって、逐次近似を実行する。途中の逐次近似の方法は Klainerman の手法とほとんど同じである。