第2回
発展方程式・若手セミナー報告集

第2回
発展方程式・若手セミナー報告集

1980 7.24 - 26

長野県 北佐久郡 望月町　望月荘

序

昭和55年7月24日から26日までの3日間，"第2回発展方程式若手セミナー"が八ヶ岳高原 国民宿舎 望月荘において開催されました。

「発展方程式論の将来の方向を探るために若手研究者間の討論と情報交換の場」として，昨年 八木厚志氏（阪大・理）と山田義雄氏（名大・理）の両世話人の多大な御苦労により開かれました本セミナーは，今回は昨年の倍近くの43名の若手研究者が全国から集まり，剣持信幸氏（千葉大・教育）の特別講演をはじめとして12の講演が行なわれました。講演内容も種々の関連分野にわたり，講演を中心として活発な討論が行なわれ盛況のうちに3日間の有意義なセミナーを終えることが出来ました。

この報告書は，セミナーで講演していただいた方々にお願いしまして，執筆していただいたものをまとめたものです。この報告書が発展方程式論の将来のために，ささやかながらも一助となりますことを念願します。

最後に，本セミナーの開催にあたりまして作行会数学基金の援助をいただきましたことを深く感謝致します。また，セミナーの開催の折には大春慎之助氏（早稲田大学）をはじめ多くの方々の御協力を得ました。この報告集の製作にあたりまして，大阪大学，広島大学の関係者の方々に大変御世話になりましたことを記します。関係者の方々の御協力に深く感謝致します。

昭和55年11月　世話人 伊藤正幸，永井敏隆

参 加 者

新井　勉（電機大・理工）	成川公昭（広島大・総）
石井仁司（中央大・理工）	新倉保夫（名大・理）
伊藤達夫（東大・教）	橋本一夫（早大・理工）
伊藤正幸（広島大・理）	羽田一郎（早大・理工）
宇田哲朗（東大・教）	福田　勇（国立館大・工）
大河内広子（早大・理工）	福田賢一（早大・理工）
大谷光春（東海大・理）	古谷希世子（都立大・理）
岡　宏枝（京大・理）	前田幹男（広島大・理）
岡本　久（東大・理）	保野　博（東大・理）
神田茂雄（早大・理工）	松井誉之祐（広島大・理）
菊池慶祐（東大・教）	丸尾健二（姫路工大）
剣持信幸（千葉大・教）	丸山　彰（学習院大・理）
佐々木　茂（阪大・理）	水町竜一（東大・教）
塩田隆比呂（名大・理）	宮原一成（早大・理工）
塩田倫也（阪大・理）	八木厚志（阪大・理）
清水　真（早大・理工）	山田直記（神戸大・理）
代田　淳（阪大・理）	山田義雄（名大・理）
高木　泉（都立航空高専）	四ッ谷晶二（宮崎大・工）
高橋勝雄（東大・教）	長井英生（都立大・理）
一ノ瀬　弥（阪大・理）	谷　昌孝（早大・理工）
辻本順一（阪大・理）	
鶴田邦夫（都立商科短大）	
永井敏隆（広島大・理）	

目　次

特別講演

一般講演

ショート・コミュニケーション

非線型発展方程式と自由境界問題への応用

千葉大 教育　剣持信幸

物理・工学における興味深い問題として自由境界問題がある。ここでは，非線型発展方程式の立場から，この種の問題への応用を試みる。

§1. 抽象非線型発展方程式

H を実ヒルベルト空間，$B: H = D(B) \longrightarrow H$ を（一価）作用素とする。$\{\varphi^t ; 0 \leqq t \leqq T\}$ ($0 < T < \infty$) を H 上の proper l.s.c. 凸関数の族とする。このとき，与えられた $f \in L^2(0,T;H)$ と $u_0 \in H$ に対し次のコーシー問題を考える：

$$CP(\varphi^t, B; f, u_0) \quad \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi^t(Bu(t)) \ni f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ここで，$\partial\varphi^t$ は φ^t の劣微分作用素である。$D(\varphi^t) = \{z \in H ; \varphi^t(z) < \infty\}$ とする。

__定義 1.1.__　$u : [0,T] \longrightarrow H$ が $CP(\varphi^t, B; f, u_0)$ の（強い意味の）解であるとは，次の3つの条件が満たされることをいう：

(1) $u \in C([0,T];H)$, $u(0) = u_0$, $u \in W^{1,2}(\delta, T; H)$, $\forall \delta > 0$,

(2) $t \longrightarrow \varphi^t(Bu(t))$ は $[0,T]$ 上で可積分である,

(3) $f(t) - u'(t) \in \partial\varphi^t(Bu(t))$ a.e. $t \in [0,T]$.

このコーシー問題の可解性を次の仮定(A1)～(A4)の下で論じよう：

(A1) 非負関数 $a \in W^{1,2}(0,T)$, $b \in W^{1,1}(0,T)$ で次の性質(*)をもつものが存在する：

$$
(*) \begin{cases} \forall s, t \in [0,T],\ s \leqq t,\ \forall z \in D(\varphi^s),\ \exists \tilde{z} \in D(\varphi^t)\ \text{s.t.} \\ |\tilde{z} - z|_H \leqq |a(t) - a(s)| \left(|\varphi^s(z)|^{1/2} + |z|_H + 1 \right), \\ \varphi^t(\tilde{z}) - \varphi^s(z) \leqq |b(t) - b(s)| \cdot \left(|\varphi^s(z)| + |z|_H + 1 \right). \end{cases}
$$

(fi2) $\forall t \in [0,T]$, $\forall r \geqq 0$, $\{z \in H ; |z|_H \leqq r,\ |\varphi^t(z)| \leqq r\}$ は H で相対コンパクトである.

(fi3) $B : H = D(B) \longrightarrow H$ は bi-Lipschitz 連続, monotone 作用素である, i.e.

$$
(Bz - Bz_1, z - z_1)_H \geqq c_1 |Bz - Bz_1|_H^2,
$$
$$
|Bz - Bz_1|_H \geqq c_2 |z - z_1|_H, \quad \forall z, z_1 \in H.
$$

さらに, B は ある H 上の有限, 連続 凸 関数 j の劣微分作用素である, i.e. $B = \partial j$.

(fi4) $H \hookrightarrow W$ なるようなバナッハ空間 W と, W 上の非負, 連続 凸 関数 $\sigma_0 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ で

$$
c_3 |z|_W \leqq \sigma_0(z) + \sigma_0(-z) \leqq c_4 |z|_W, \quad \forall z \in W, \quad (c_3, c_4 \text{は定数})
$$

を満たすものが存在し, $\partial\varphi^t \circ B$ は σ_0-monotone である, i.e.

$$
(z^* - z_1^*, w)_H \geqq 0 \quad \text{for some } w \in \partial\sigma_0(z - z_1)
$$
$$
\forall z^* \in \partial\varphi^t(Bz), \quad \forall z_1^* \in \partial\varphi^t(Bz_1).
$$

A) 解の存在と一意性

<u>定理 1.1.</u> (fi1), (fi2), (fi3) が満たされる. $Bu_0 \in D(\varphi^0) \Longrightarrow$ $CP(\varphi^t, B ; f, u_0)$ の解 u で

$$
u \in W^{1,2}(0,T;H),
$$
$$
t \to \varphi^t(Bu(t)) \text{ は } [0,T] \text{ 上で有界},
$$

となるものが存在する.

定理1.2. $(h4) \Rightarrow CP(\varphi^t, B; f, u_0)$ の解は一意である。

定理1.3. $(h1) \sim (h4)$, $Bu_0 \in \overline{D(\varphi^0)} \Rightarrow CP(\varphi^t, B; f, u_0)$ は一意的な解 u を有し, $\sqrt{t}\,u' \in L^2(0,T;H)$ かつ $t \to t\varphi^t(Bu(t))$ は $(0,T]$ 上で有界である。

B) 解の安定性

与えられた正数 M と H 上の proper l.s.c. 凸関数 φ に対して, 次のような族 $\{\varphi^t ; 0 \leq t \leq T\}$ のクラス $\mathcal{G}(\varphi, M)$ を考えよう:

$$\{\varphi^t\} \in \mathcal{G}(\varphi, M) \iff \begin{cases} \bullet\ \varphi^0 = \varphi ; \\ \bullet\ a(0) + |a'|_{L^2(0,T)} \leq M,\quad b(0) + |b'|_{L^1(0,T)} \leq M \\ \quad \text{なる非負関数 } a \in W^{1,2}(0,T),\ b \in W^{1,1}(0,T) \\ \quad \text{で } (h1) \text{ をみたすものが存在する;} \\ \bullet\ (h2),\ (h4) \text{ を満たす。} \end{cases}$$

また,

$$\mathcal{S}_{f,u_0} = \{CP(\varphi^t, B; f, u_0) \text{ の解} ;\ \{\varphi^t\} \in \mathcal{G}(\varphi, M)\}$$

とおく。

定理1.4. $(h3)$, $Bu_0 \in D(\varphi) \Rightarrow$ ある定数 $M_0 \geq 0$ が存在し

$$|u|_{W^{1,2}(0,T;H)} \leq M_0,\quad |\varphi^t(Bu(t))| \leq M_0,\quad \forall t \in [0,T],\quad \forall u \in \mathcal{S}_{f,u_0}.$$

この定理は解の構成法から直ちに得られる。

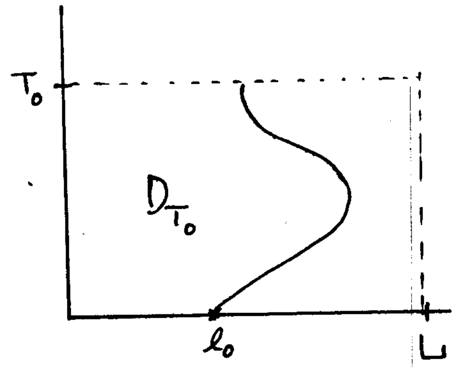
注意 1) 定理1.1 ~ 1.4 は例えば筆者[12]の方法で証明できる。

2) 特に, $B = I$ のとき, $CP(\varphi^t, B; f, u_0)$ は多くの研究者によって扱われた (cf. [1, 10, 11, 15, 16])。

3) 定理1.2 は本質的には Bénilan [2], Damlamian [5], Konishi [13] 等による。

§2. 1相ステファン問題

$\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を単調増加，bi-Lipschitz 連続で $\beta(0)=0$ を満たすものとする．与えられた，$0<l_0<L\ (<\infty)$，$u_0\in L^2(0,L)$，$g\in W^{1,1}(0,T)$ に対し，次の系 (2.1)，(2.2) を満たす曲線 $x=l(t)$ $(0\leq t\leq T_0\leq T)$ と関数 $u=u(t,x)$ $(0\leqq t\leqq T_0;\ 0\leqq x\leqq L)$ を見つける問題 (P1) を考える．



$$
(2.1)\quad \begin{cases} u_t-\beta(u)_{xx}=0 & (D_{T_0}\text{において}),\\ u(0,x)=u_0(x) & (0<x<l_0),\\ \beta(u)_x(t,0+)=g(t) & (0<t<T_0),\\ \beta(u)_x(t,l(t))=0 & (0<t<T_0), \end{cases}
$$

$$
(2.2)\quad \begin{cases} l'(t)=-\beta(u)_x(t,l(t)-) & (0<t<T_0),\\ l(0)=l_0. \end{cases}
$$

ここで，$D_{T_0}=\{(t,x)\ ;\ 0<t<T_0,\ 0<x<l(t)\}$ である．曲線 $x=l(t)$ は<u>自由境界</u>と呼ばれる．

A) 変分不等式への変換

簡単のため，$H=L^2(0,L)$ とおく。曲線 $x=l(t)$ $(0<l<L$ on $[0,T])$ が与えられたとして，H 上の proper l.s.c. 凸関数 $\varphi^t_{l,g}$ を次のように定義する：

$$
\varphi^t_{l,g}(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L|z_x|^2dx+g(t)z(0) & (z\in K_l(t)),\\ \infty & (\text{その他}). \end{cases}
$$

ただし，$K_l(t)=\{z\in W^{1,2}(0,L)\ ;\ z(x)=0,\ l(t)\leqq{}^\forall x\leqq L\}$．明らかに，$D(\varphi^t_{l,g})=K_l(t)$．また，$B:H=D(B)\longrightarrow H$ を

$$
[Bz](x)=\beta(z(x)),\quad {}^\forall z\in H,\ {}^\forall x\in[0,L]
$$

によって定義しよう。この B が条件 (生3) を満たすことは明らかであろう。

このとき，系 (2.1)，(2.2) に対応して，次のような quasi-variational problem (QV1) を考えよう。

<u>定義 2.1.</u> 与えられた $g\in W^{1,1}(0,T)$ と $u_0\in H$ に対し，次の性

質を満たす $\{\ell, u\}$（および正数 $T_0 \leqq T$）を見つける問題を（QV1）で表わす：

（i）$\ell \in W^{1,2}(0, T_0)$, $0 < \ell < L$ on $[0, T_0]$, $\ell(0) = \ell_0$;

（ii）$u : [0, T_0] \longrightarrow H$ は $CP(\varphi^t_{\ell,g}, B ; 0, u_0)$ の解であり,

$$\ell'(t) = -\beta(u)_x(t, \ell(t)-) \quad \text{a.e. } t \in [0, T_0]$$

が成立する.

注意. 実際, 容易にわかるように, $u : [0, T_0] \longrightarrow H$ が $CP(\varphi^t_{\ell,g}, B ; 0, u_0)$ の解であることは, 次の系で特徴づけられる：

$$\begin{cases} u \in C([0,T_0] ; H) \cap L^2(0, T_0 ; W^{1,2}(0,L)) \cap W^{1,2}(\delta, T_0 ; H), \ \forall \delta > 0, \\ u(0) = u_0 \\ u_t(t, \cdot) - \beta(u)_{xx}(t, \cdot) = 0 \quad \text{in } H, \quad \text{a.e. } t \in [0, T_0], \\ \beta(u)_x(t, \ell(t)-) = g(t) \quad \text{a.e. } t \in [0, T_0], \\ \beta(u)(t, x) = 0 \ (\ell(t) \leqq x \leqq L), \text{従って}, \beta(u)(t, \ell(t)) = 0, \text{a.e. } t \in [0, T_0]. \end{cases}$$

B）局所解の存在

あらかじめ, L を

$$L > \ell_0 + \int_0^{\ell_0} |u_0| dx + \int_0^T |g| dr$$

にとっておく。また, 初期値 u_0 は

$$u_0 \in W^{1,2}(0, L), \quad u_0 = 0 \quad \text{on } [\ell_0, L]$$

をみたすものとする。

正数 $R > 0$, $\delta_0 > 0$ （$\delta_0 < \ell_0$）に対し, 曲線の族

$$\mathcal{L}(\delta_0, R) = \left\{ \ell \in W^{1,2}(0,T) ; \begin{array}{l} \ell(0) = \ell_0, \ \delta_0 \leqq \ell \leqq L \text{ on } [0,T] \\ |\ell'|_{L^2(0,T)} \leqq R \end{array} \right\}$$

を考える. 明らかに $\mathcal{L}(\delta_0, R)$ は $C([0,T])$ の空でないコンパクト凸部分集合である. さらに, 族 $\{\varphi^t_{\ell,g} ; 0 \leqq t \leqq T\}$, $\ell \in \mathcal{L}(\delta_0, R)$, は条件（R2）を満たし, 次の性質（2.3）〜（2.5）をもつことがわかる.

$$(2.3) \quad \begin{cases} a(t) = \dfrac{\text{const.}}{\delta_0} \displaystyle\int_0^t |\ell'(r)| dr, \quad b(t) = \dfrac{\text{const.}}{\delta_0} \displaystyle\int_0^t \{|\ell'(r)| + |g'(r)|\} dr \\ \text{ととると, (R1) が満たされる.} \end{cases}$$

$$
(2.4)\begin{cases} W = L^1(0,L), \quad \sigma_0(z) = \int_0^L z^+ dx \text{ にとると, } \partial\varphi^t_{\ell,g}\circ\beta \\ (\forall t\in[0,T]) \text{ は } \sigma_0\text{-monotone である.} \end{cases}
$$

$$
(2.5)\begin{cases} \text{適当な正数 } M \text{ をとると,} \\ \quad \{\{\varphi^t_{\ell,g}\};\ \ell\in\mathcal{L}(\delta_0,R)\}\subset \mathcal{G}(\varphi,M). \\ \text{ただし,} \\ \quad \varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L |z_x|^2 dx + g(0)z(0) & (z\in W^{1,2}(0,L),\ z=0 \text{ on } [\ell_0,L]), \\ \infty & (\text{その他}). \end{cases} \end{cases}
$$

従って, コーシー問題 $CP(\varphi^t_{\ell,g}, \beta; 0, u_0)$ に対し, 定理 1.1 ~ 1.4 が適応できる.

<u>定理 2.1.</u> $0<\ell_0<L$, $u_0\in W^{1,2}(0,L)$, $u_0=0$ on $[\ell_0,L]$, $g\in W^{1,1}(0,T)$ $\Longrightarrow$ 正数 $T_0\ (\leqq T)$ が存在し, (QV1) は区間 $[0,T_0]$ 上で解をもつ.

証明) 上で見たように, 各 $\ell\in\mathcal{L}(\delta_0,R)$ に対し, $CP(\varphi^t_{\ell,g},\beta; 0,u_0)$ は一意解 u^ℓ を有し,

$$
(2.6)\qquad |u^\ell|_{W^{1,2}(0,T;H)} \leqq M_1, \quad |\beta u(t)|_{W^{1,2}(0,L)} \leqq M_1, \qquad \forall t\in[0,T], \quad \forall \ell\in\mathcal{L}(\delta_0,R)
$$

なる定数 M_1 が存在する (定理 1.4). そこで, 作用素 $Q_{T_0}: \mathcal{L}(\delta_0,R)\longrightarrow C([0,T])$ を

$$
[Q_{T_0}\ell](t) = \begin{cases} \ell_0 - \int_0^t \beta(u^\ell)_x(r,\ell(r)-)dr & (0\leqq t\leqq T_0) \\ [Q_{T_0}\ell](T_0) & (T_0<t\leqq T) \end{cases}
$$

によって定義しよう. このとき, (2.6) を用いると, 十分小さく $T_0>0$ をとれば, Q_{T_0} は $\mathcal{L}(\delta_0,R)$ をそれ自身に写すことがわかる. さらに, Q_{T_0} は $\mathcal{L}(\delta_0,R)$ において $C([0,T])$ の位相で連続となる. 従って, よく知られた不動点定理により, $Q_{T_0}\ell=\ell$ なる $\ell\in\mathcal{L}(\delta_0,R)$ が存在する. そこで, 組 $\{\ell,u^\ell\}$ を考えれば, これが区間 $[0,T_0]$

上で (QV1) の解を与えることは容易に示すことができる. (終)

ここで, 注意すべきは, 上定理において, データ u_0, g に対して定符号の条件 " $u_0 \geq 0$, $g \leq 0$ " を置かなかったため, 自由境界 $x=\ell(t)$ は t についての単調増加関数とはならない.

C) 解の一意性と大域的存在

データの定符号条件の下で (QV1) の解の一意性がわかる.

<u>定理 2.2.</u> $g \in W^{1,1}(0,T)$, $g \leq 0$ on $[0,T]$, $u_0 \in W^{1,2}(0,L)$, $u_0 \geq 0$ on $[0,\ell_0]$, $u_0 = 0$ on $[\ell_0, L]$ $\Longrightarrow$ 区間 $[0,T_0]$ $(0 < T_0 \leq T)$ 上の (QV1) の解は一意である. さらに, 解を $\{\ell, u\}$ とするとき, $x=\ell(t)$ は $[0,T_0]$ 上で単調増加であり, u は $[0,T_0]\times[0,L]$ 上で非負である.

証明) $\{\ell, u\}$ を $[0,T_0]$ 上での (QV1) の解とすると, 定義より $u:[0,T_0] \longrightarrow H$ は $CP(\varphi^t_{\ell,g}, B; 0, u_0)$ の解である. $\partial\varphi^t_{\ell,g}\circ B$ の σ_0-monotonicity から導かれる解の比較定理より

$$u \geq 0 \quad (\therefore \beta(u) \geq 0) \quad \text{on } [0,T_0]\times[0,L]$$

がわかる. 従って, $\beta(u)(t,x) = 0$ $(0 \leq t \leq T_0,\ \ell(t) \leq x \leq L)$ に注意すると,

$$\ell'(t) = -\beta(u)_x(t, \ell(t)-) \geq 0 \quad \text{a.e. } t \in [0,T_0],$$

すなわち, $x=\ell(t)$ は単調増加である. 次に一意性を示すために, 関数

$$v(t,x) = \int_0^t \beta(u)(r,x)\,dr \quad , 0 \leq t \leq T_0,\ 0 \leq x \leq L$$

を導入ある。このひは

$$\begin{aligned} I(t; v, z) \equiv &\int_0^L \beta^{-1}(v_t)(t,x)\,[v_t(t,x) - z(x)]\,dx + \int_0^L v_x(t,x)\,[v_{xt}(t,x) - z_x(x)]\,dx \\ &- \int_0^L u_0(x)[v_t(t,x) - z(x)]\,dx + \left(\int_0^t g(r)\,dr\right)(v_t(t,0) - z(0)) \\ &+ \int_{\ell_0}^L (v_t(t,x) - z(x))\,dx \leq 0 \end{aligned}$$

$$\forall z \in W^{1,2}(0,L),\ z \geq 0,\ z(L) = 0,\quad \forall t \in [0,T_0]$$

なる不等式を満たすことがわかる. そこで, 同じデータに対して, 他にもう一組の解 $\{\bar{\ell}, \bar{u}\}$ が存在したとしよう. $\bar{u}$ に対し, 同様な関数

$\bar{v}$ を考えると，

$$I(t;\bar{v},z)\leqq 0\ ,\ \forall z\in W^{1,2}(0,L),\ z\geqq 0,\ z(L)=0\ ,\ \forall t\in[0,T_0]$$

を得る．従って，

$$0\geqq I(t;v,\bar{v}(t,\cdot))+I(t;\bar{v},v(t,\cdot))$$
$$\geqq\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_x(t,\cdot)-\bar{v}_x(t,\cdot)|_H^2\ ,\quad a.e.\ t\in[0,T_0],$$

より

$$|v_x(t,\cdot)-\bar{v}_x(t,\cdot)|_H=0\ ,\ \forall t\in[0,T_0].$$

結局，$\beta(u)=\beta(\bar{u})$，$\ell=\bar{\ell}$ を得る．(終)

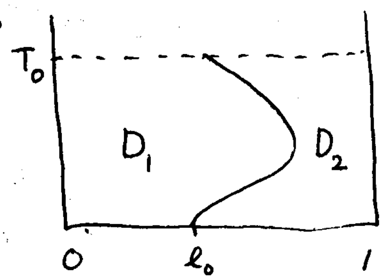
解の一意性 および 自由境界の単調性を用いて次の大域解の存在を示すことができる．

<u>定理 2.3.</u> $u_0\in W^{1,2}(0,\infty)$，$u_0\geqq 0$ on $[0,\ell_0]$，$u_0=0$ on (ℓ_0,∞)，$g\in W^{1,1}(0,T)$，$\forall T>0$，$g\leqq 0$ on $[0,\infty)$ $\Longrightarrow$ $\forall T>0$，十分大きく $L>0$ をとると，(QV1) は $[0,T]$ 上で解をもつ．

§3. 2相ステファン問題

$\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を前節と同じものとする．与えられた $0<\ell_0<1$，$u_0\in L^2(0,1)$，$g_1,g_2\in W^{1,1}(0,T)$ $(0<T<\infty)$ に対し，次の系 (3.1)，(3.2) を満たす曲線 $x=\ell(t)$ $(0\leqq t\leqq T_0\leqq T)$ と関数 $u=u(t,x)$ $(0\leqq t\leqq T_0,\ 0\leqq x\leqq 1)$ を見つける問題 (P2) を考えよう：

$$(3.1)\begin{cases} u_t-\beta(u)_{xx}=0 & (D_1 \text{ および } D_2 \text{ において}),\\ u(0,x)=u_0(x) & (0<x<1),\\ \beta(u)_x(t,0+)=g_1(t) & (0<t<T_0),\\ \beta(u)_x(t,1-)=-g_2(t) & (0<t<T_0),\\ \beta(u)(t,\ell(t))=0 & (0<t<T_0),\end{cases}$$



$$(3.2)\begin{cases} \ell'(t)=-\beta(u)_x(t,\ell(t)-)+\beta(u)_x(t,\ell(t)+) & (0<t<T_0),\\ \ell(0)=\ell_0.\end{cases}$$

ただし,

$$D_1=\{(t,x)\,;\ 0<t<T_0\ ,\ 0<x<\ell(t)\}$$
$$D_2=\{(t,x)\,;\ 0<t<T_0\ ,\ \ell(t)<x<1\}.$$

簡単のため, $H=L^2(0,1)$ とおく. 問題 (P2) に対応する変分不等式を導こう. 曲線 $x=\ell(t)$ $(0<\ell<1$ on $[0,T])$ が与えられたとして, H 上の proper l.s.c. 凸関数 φ^t_{ℓ,g_1,g_2} を

$$\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^1|z_x|^2dx+g_1(t)z(0)+g_2(t)z(1) & \\ \qquad\qquad (\forall z\in W^{1,2}(0,1),\ z(\ell(t))=0), & \\ \infty & (\text{その他})\end{cases}$$

によって定義する.

定義 3.1. 与えられた $0<\ell_0<1$, $g_1,g_2\in W^{1,1}(0,T)$, $u_0\in H$ に対し次の性質を満たす $\{\ell,u\}$ (および正数 $T_0\leqq T$) を見つけ出す問題を (QV2) で表わす:

(i) $\ell\in W^{1,2}(0,T_0)$, $0<\ell<1$ on $[0,T_0]$, $\ell(0)=\ell_0$;

(ii) $u:[0,T_0]\longrightarrow H$ は $CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2},\beta\,;0,u_0)$ (βは前節と同じもの) の解で,

$$\ell'(t)=-\beta(u)_x(t,\ell(t)-)+\beta(u)_x(t,\ell(t)+)\ ,\quad \text{a.e. } t\in[0,T_0]$$

が成立する.

問題 (QV2) に関して, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1. $0<\ell_0<1$, $g_1,g_2\in W^{1,1}(0,T)$, $u_0\in W^{1,2}(0,1)$, $u(\ell_0)=0$ $\Longrightarrow$ 正数 $T_0\ (\leqq T)$ が存在し, (QV2) は区間 $[0,T_0]$ 上で解を有する.

この定理は 1相ステファン問題の場合と同じ方法で示される.

定理 3.2. $0<\ell_0<1$, $g_1,g_2\in W^{1,1}(0,T)$, $g_1\leqq 0$ on $[0,T]$, $g_2\geqq 0$ on $[0,T]$, $u_0\in W^{1,2}(0,1)$, $u_0\geqq 0$ on $[0,\ell_0]$, $u_0\leqq 0$ on $[\ell_0,1]$ $\Longrightarrow$ (QV2) の解は一意的である. また, $\{\ell,u\}$を区間 $[0,T_0]$ $(0<T_0\leqq T)$ 上の (QV2) の解とするなら,

$$u\geqq 0\ \text{ on } \overline{D_1}\ ,\quad u\leqq 0\ \text{ on } \overline{D_2}$$

が成立する.

証明) $\{l, u\}$を区間$[0, T_0]$上で(QV 2)の解とする。

$$u \geqq 0 \text{ on } \overline{D_1}, \quad u \leqq 0 \text{ on } \overline{D_2}$$

であることは，比較定理より直ちにわかる。この事に注意して，

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x)+1 & (0 \leqq t \leqq T_0,\ 0 \leqq x \leqq l(t)), \\ u(t,x) & (0 \leqq t \leqq T_0,\ l(t) < x \leqq 1), \end{cases}$$

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x)+1 & (0 \leqq x \leqq l_0), \\ u_0(x) & (l_0 < x \leqq 1), \end{cases} \qquad \tilde{\beta}(r) = \begin{cases} \beta(r-1) & (r \geqq 1), \\ 0 & (0 \leqq r < 1), \\ \beta(r) & (r < 0), \end{cases}$$

とおくと，$\tilde{u}$は

$$(3.3) \quad \begin{cases} \tilde{\beta}(\tilde{u}) \in L^2(0, T_0; W^{1,2}(0,1)) \\ -\int_0^{T_0}\int_0^1 \tilde{u}\eta_t\,dxdt + \int_0^{T_0}\int_0^1 \tilde{\beta}(\tilde{u})_x \eta_x\,dxdt + \int_0^{T_0} g_1(t)\eta(t,0)\,dt \\ \quad + \int_0^{T_0} g_2(t)\eta(t,1)\,dt = \int_0^1 \tilde{u}_0 \eta(0,\cdot)\,dx \\ \qquad \forall \eta \in L^2(0,T_0; W^{1,2}(0,1)),\ \eta' \in L^2(0,T_0;H),\ \eta(T_0,\cdot)=0. \end{cases}$$

を満たすことがわかる。(3.3)をみたす$\tilde{u}$は一意的であることが知られている(Oleinick [14], Kamenomostskaja [9] または，Damlamian [5] を参照)。この事より(QV 2)の解の一意性が示される。(終)

注意. 1) 問題(3.3)も(P2)に対応する変分問題と考えられるが，自由境界$x = l(t)$が表面に出ないことが，いい点でもあり，欠点でもある。

2) この種の問題は$W^{1,2}(0,1)$の共役空間においても，$L^1(0,1)$空間においても取扱いが可能である(cf. Bénilan [2], Brézis [3], Crandall [4], Damlamian [5], Konishi [13])。

自由境界$x = l(t)$の挙動について次の定理を得る。

定理3.3. $0 < l_0 < 1$, $g_1 \in W^{1,1}(0,T)$, $g_1 \leqq 0$ on $[0,T]$, $g_2 \in W^{1,1}(0,T)$, $g_2 \geqq 0$ on $[0,T]$, $u_0 \in W^{1,2}(0,1)$, $u_0 \geqq 0$ on $[0, l_0]$, $u_0 \leqq 0$ on $[l_0, 1]$ $\Longrightarrow$ $T^* \equiv \sup\{T_0 (\leqq T)\,;\ [0, T_0]$上で(QV 2)が解を有する$\}$とおけば，

$$\lim_{t \uparrow T^*} l(t)$$

は常に存在する．このとき，$T^* < T$ ならば

$$\lim_{t \uparrow T^*} \ell(t) = 0 \text{ または } 1$$

である．ただし，$\{\ell, u\}$ は (QV2) の解である．

§4. ポーラス質の中の2つの混ざり合わない流体の問題

α_1, α_2 を2つの正数とし，$\alpha_1 \neq \alpha_2$ とする．与えられた，$0 < \ell_0 < 1$，$g_1, g_2 \in W^{1,1}(0, T)$ $(0 < T < \infty)$，$u_0 \in L^2(0,1)$ に対し，次の条 (4.1), (4.2) をみたす曲線 $x = \ell(t)$ $(0 \leqq t \leqq T_0 \leqq T)$ と関数 $u = u(t, x)$ $(0 \leqq t \leqq T_0,\ 0 \leqq x \leqq 1)$ を見つける問題 (P3) を考えよう：

$$(4.1)\quad \begin{cases} u_t - \alpha_1 u_{xx} = 0 & (0 < t < T_0,\ 0 < x < \ell(t)) \\ u_t - \alpha_2 u_{xx} = 0 & (0 < t < T_0,\ \ell(t) < x < 1) \\ u(0, x) = u_0(x) & (0 < x < 1) \\ \alpha_1 u_x(t, \ell(t)-) = \alpha_2 u_x(t, \ell(t)+) & (0 < t < T_0) \\ u(t, \ell(t)-) = u(t, \ell(t)+) & (0 < t < T_0) \\ \alpha_1 u_x(t, 0+) = g_1(t) & (0 < t < T_0) \\ \alpha_2 u_x(t, 1-) = -g_2(t) & (0 < t < T_0) \end{cases}$$

$$(4.2)\quad \begin{cases} \ell'(t) = -\alpha_1 u_x(t, \ell(t)-) & (0 < t < T_0), \\ \ell(0) = \ell_0. \end{cases}$$

さて，$H = L^2(0,1)$ とおき，曲線 $x = \ell(t)$，$0 < \ell < 1$ on $[0, T]$ が与えられたとして，

$$\varphi_\ell^t(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{2}\displaystyle\int_0^{\ell(t)} |z_x|^2 dx + \dfrac{\alpha_2}{2}\int_{\ell(t)}^1 |z_x|^2 dx + g_1(t) z(0) \\ \qquad + g_2(t) z(1) \quad (\forall z \in W^{1,2}(0,1)), \\ \infty \qquad (\text{その他}), \end{cases}$$

とおけば，明らかに，φ_ℓ^t は H 上の proper l.s.c. 凸関数であり，$D(\varphi_\ell^t) = W^{1,2}(0,1)$ である．この族 $\{\varphi_\ell^t ; 0 \leqq t \leqq T\}$ を用いて，次の様に，(P3) に対応する変分問題を定義することができる．

定義 4.1. 与えられた $0 < l_0 < 1$, $g_1, g_2 \in W^{1,1}(0,T)$, $u_0 \in H$ に対し，次の性質を満たす $\{l, u\}$（および正数 $T_0 \leqq T$）を見つける問題を (QV3) で表わす：

(i) $l \in W^{1,2}(0,T_0)$, $0 < l < 1$ on $[0,T_0]$, $l(0) = l_0$;

(ii) $u : [0,T_0] \longrightarrow H$ は $CP(\varphi^t_l, I; 0, u_0)$ の解であり，

$$l'(t) = -\alpha_1 u_x(t, l(t)-) \quad a.e.\ t \in [0,T_0]$$

が成立する.

問題 (QV3) に対しても，1相ステファン問題の場合の方法が有効で，次の定理を得る.

定理 4.1. $0 < l_0 < 1$, $g_1, g_2 \in W^{1,1}(0,T)$, $u_0 \in W^{1,2}(0,1)$
$\Longrightarrow$ ある正数 T_0 ($\leqq T$) が存在し，(QV3) は $[0,T_0]$ 上で解を有する.

この種の自由境界問題は Evans [6, 7], Evans-Friedman [8] によっても扱われている.

引用文献

1. H. Attouch, Ph. Bénilan, A. Damlamian and C. Picard, Equations d'évolution avec condition unilatérale, C. R. Acad. Sci. Paris, 279 (1974), 607-609.
2. Ph. Bénilan, Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, Publications Mathématiques d'Orsay, 25. Univ. Paris-Sud, 1972.
3. H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Contributions to nonlinear functional analysis, E. Zarantonello ed., Academic press, New-York · London, 1971.
4. M. G. Crandall, Semi-groups of non-linear transformations in Banach spaces, Contributions to non-linear functional analysis, E. Zarantonello ed., Academic press, New-York · London, 1971.
5. A. Damlamian, Some results on the multi-phase Stefan problem, Comm. Partial Diff. Eq., 2 (1977), 1017-1044.

/

6. L. C. Evans, A free boundary problem: The flow of two immiscible fluids in a one-dimensional porous medium, I, Indiana Univ. Math. J., 26 (1977), 915–932.
7. L. C. Evans, A free boundary problem: The flow of two immiscible fluids in a one-dimensional porous medium, II, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 93–111.
8. L. C. Evans and A. Friedman, Regularity and asymptotic behavior of two immiscible fluids in a one-dimensional medium, J. Diff. Eq., 31 (1979), 366–391.
9. S. L. Kamenomostskaja, On Stefan's problem, Mat. Sb., 53 (1965), 485–514.
10. N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic variational inequalities, Israel J. Math., 22 (1975), 304–331.
11. N. Kenmochi, Nonlinear evolution equations with variable domains in Hilbert spaces, Proc. Japan Acad., 53 (1977), 163–166.
12. N. Kenmochi, On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles, to appear in Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.
13. Y. Konishi, Some examples of nonlinear semi-groups in Banach lattices, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 18 (1972), 537–543.
14. O. A. Oleinik, On a method of solving of the general Stefan problem, Soviet Math. Dokl., 1 (1960), 1350–1354.
15. Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 23 (1976), 491–515.
16. S. Yotsutani, Evolution equations associated with the subdifferentials, J. Math. Soc. Japan, 31 (1978), 623–646.

生物学にあらわれる時間の遅れをもつ非線型拡散方程式について。

松井養之祐（広大・理）

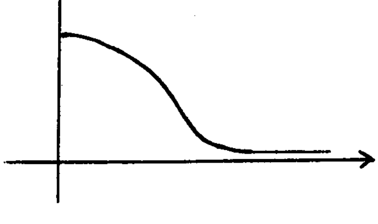
ここでの目的は，J. D. Murray (Math. Biosci. 31 (1976), 73−85) によって提出された "えじきと捕食者の関係を説明するあるモデル" について，周期解の存在を数学的にきちんと証明することにある。

まず，そのモデルについて説明する。
$V(x,t)$ をある一定の地域に住む prey（えじき）の時刻 t，位置 x における population density とする。（具体的には，農園とか，牧場とかにおける野ネズミの数。）
もし，predators（捕食者。例えば たか，ふくろう，からす，いたち，えぞいたち，きつね etc …）が存在しなければ，

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = h(V(x,t-T)) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t)$$

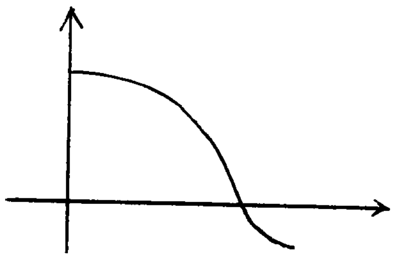
とする。
ただし，空間次元は1次元で T は prey の lifetime，D は拡散係数とする。
h は $\mathbb{R}^+$ を定義域とし (a,∞) $(a \geqq 0)$ で単調減少。h のグラフとして，つぎのようなものが考えられる。

(A)



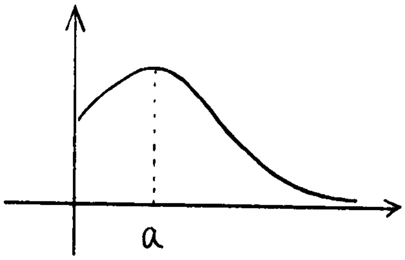
（数がふえれば増加率は小さくなる。）

(B)



(ある値をこえれば負の増加率。)

(C)



(はじめのうちは協同してえさを見つける。)

(ただし、かっこ内の説明は空間に関して一様な場合。)

(1) は時刻 t における prey の増加率が一世代前の数に依存することを示している。増殖効果によってあるところから h は減少。

次に predators(捕食者)と共存する場合を考える。$P(x,t)$ を adult predators (えじきを捕える能力のある predators) の density とする。predators による prey の減少率が predators' capacity b にのみよるものとすれば、

(2) $$\frac{\partial V}{\partial t} = h(V(x,t-T)) - bP(x,t) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t)$$

となる。

えじきを捕える能力のある predators の数は一世代の間に成長する子の predators の数は供給される食物(prey)の量による。こうしてある函数 m が存在して

$$bP(x,t) = m(V(x,t-S))$$

とする。

ここに、m は $\mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}^+$ への単調増加函数で S は predators の lifetime.

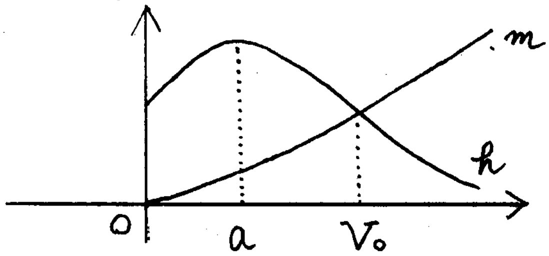
このとき (2) は

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = h(V(x,t-T)) - m(V(x,t-S)) + D\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

となる。

ここで次の仮定をおく。

$$\left(\begin{array}{l} S = T \\ \text{ある } V_0 \,(V_0 > a \geqq 0) \text{ が存在して } h(V_0) - m(V_0) = 0. \end{array}\right.$$



こうすれば，$V = V_0$ は (3) の定常解。

$g = h - m$ とおくと，h と m に関する仮定から，

$$g'(V_0) < 0$$

$u = V - V_0$ とおけば，(3) は

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(V_0 + u(x, t-T)) \\ g(V_0) = 0, \quad g'(V_0) < 0 \end{cases}$$

となって，さらに

$$t_1 = \frac{t}{T}$$

$$x_1 = \frac{x}{(DT)^{1/2}}$$

$$u_1(x_1, t_1) = u((DT)^{1/2} x_1, Tt_1) = u(x,t)$$

なる変数変換を行なえば，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Tg(V_0 + u(x, t-1)).$$

これを書きかえて，

$$(5)\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \alpha u(x,t-1) + f(u(x,t-1)). \\ \alpha < 0, \quad f(u) = O(|u|^2) \end{cases}$$

(5) の traveling wave solution :

$$u(x,t) = v(x+ct) = v(z), \quad c>0$$

を考える。 こうして得られる方程式は

$$(6) \qquad v''(z) - cv'(z) + \alpha v(z-c) + f(v(z-c)) = 0 \text{ 。}$$

[注] Murray は $f(v(z-c)) = \varepsilon v^3(z-c)$ ($\varepsilon>0$, 十分小) のときを考えている。

我々は, Hopf の bifurcation theorem を使って (6) の周期解の存在を示す。

(6) の線型化方程式

$$v''(z) - cv'(z) + \alpha v(z-c) = 0$$

の特性方程式

$$\lambda^2 - c\lambda + \alpha e^{-c\lambda} = 0$$

に対して次の事が分かる。

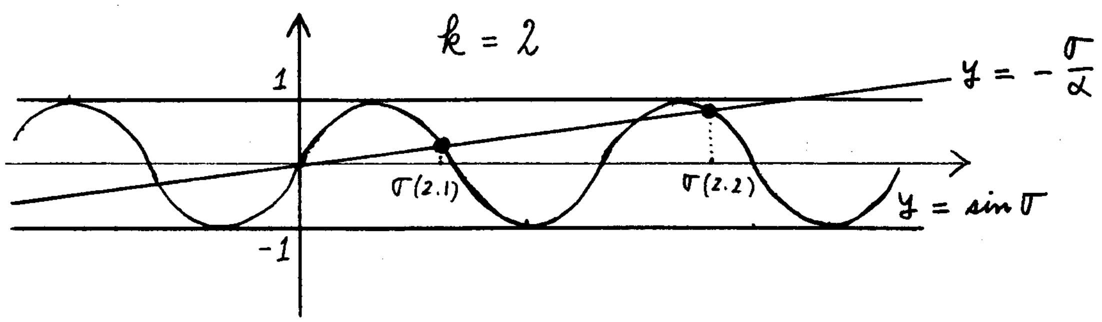
$-c\lambda = \mu + i\sigma$ とおいて上の方程式を実部と虚部に分け $\mu = 0$ とおくと,

$$\begin{cases} -\sigma^2 + \alpha c^2 \cos\sigma = 0 & \cdots (A) \\ \sigma + \alpha \sin\sigma = 0 & \cdots (B) \end{cases}$$

(この方程式の解が純虚数の解に対応する。)

$\alpha = \alpha_0 < -\dfrac{\pi}{2}$ に対して, $k \in \mathbb{Z}^+$ が存在して,

$$-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \leqq \alpha_0 < -\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi$$



各区間，$\left((2l-\frac{3}{2})\pi,\ (2l-1)\pi\right)$，$l=1,2,\cdots,k$ における $\sigma+\alpha_0\sin\sigma$ の unique solution を $\sigma(k,l)$ とする。 (A) により

$$C(k,l) = \sigma(k,l)\left(\alpha_0^2-\sigma^2(k,l)\right)^{-\frac{1}{4}}$$

とおく。

$\alpha=\alpha_0$ ，$C=C(k,l)$ に対して (9) は次の形の simple eigenvalue をもつことが分かる。

$$\begin{cases} -C(k,l)\lambda(\alpha) = \mu(\alpha)\pm i\sigma(\alpha), & \alpha\in(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta) \\ \mu(\alpha_0)=0,\ \mu'(\alpha_0)<0, & \sigma(\alpha_0)=\sigma(k,l)>0 \\ \text{他の解の real part} \neq 0 \end{cases}$$

Hopf の bifurcation theorem (J.K. Hale : Theory of Functional Differential Equations, Springer (1977)) より (7) の周期解の family v_ε $(0<\varepsilon<\exists\varepsilon_0)$ が存在して，

$\tau(\varepsilon)$ を周期，$r(\varepsilon)$ を振幅，

とするとき，

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon) = \dfrac{2\pi}{C(k,l)\sigma(k,l)} + O(\varepsilon) \\ r(\varepsilon) = O(\varepsilon) \\ \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + O(\varepsilon) \end{cases}$$

がなりたつ。 (以 上)

非線形発展方程式の周期解の分岐と安定性

東大 教養　　伊藤達夫

§1. 序

実 Banach 空間 X の中の n 次元パラメーター λ を含む非線形発展方程式

$$(1.1)\qquad \frac{du}{dt} = Lu + N(u,\lambda), \quad t>0$$

$$(1.2)\qquad u(0) = x_0$$

を考える。ここで L は正則半群の生成作用素で代数的単純固有値 $\pm i$ を持ち，他の L のスペクトラムは左半(複素)平面 $\{\mu ;\ \mathrm{Re}\,\mu < -c_0\}$ $(c_0>0)$ に含まれているとする。非線形作用素 $N(x,\lambda)$ は C^3 で $N(0,\lambda)=0$，$D_x N(0,0)=0$ ($D_x N(0,0)$ は $N(x,\lambda)$ の $(x,\lambda)=(0,0)$ での x に関する Fréchet 微分) とする。

対 (x,λ) が $Lx + N(x,\lambda) = 0$ を満たすとき，(x,λ) を (1.1) の定常解と呼ぶことにすると $(0,\lambda)$ は (1.1) の定常解である。十分小さな $(0,0)$ の近傍に含まれる定常解 $(0,\lambda)$ の安定性は N に関する適当な仮定のもとで，線形化された固有値問題

$$[L + D_x N(0,\lambda)]\, y = k\, y$$

の i に近い固有値 $k(\lambda)$ の実部の正負によって決定される。即ち定常解 $(0,\lambda)$ は $\mathrm{Re}\, k(\lambda) < 0$ ならば(リャプノフの

意味で）安定であり，Re $k(\lambda) > 0$ ならば（リャプノフの意味で）不安定である。

H. Weinberger [6] は $\lambda \in \mathbb{R}^1$ として Re $k(\lambda)$ が $\lambda = 0$ で符号を変えるならば $(x, \lambda) = (0, 0)$ から non-trivial な周期解が分岐するということを示した。Re $k(\lambda)$ が $\lambda = 0$ で符号を変えるという条件は定常解 $(0, \lambda)$ が $\lambda = 0$ で（リャプノフの意味の）安定性を交代するための一つの十分条件になっている。ここでは，次の分岐定理を与える。

<u>分岐定理</u>　$\lambda \in \mathbb{R}^1$ として定常解 $(0, \lambda)$ が $\lambda = 0$ で（リャプノフの意味の）安定性を交代すれば $(x, \lambda) = (0, 0)$ から (1.1) の non-trivial な周期解が分岐する。

次に簡単な例を与える。$\lambda \in \mathbb{R}^1$ として 2 次元の常微分方程式

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^2)(\lambda - x^2 - y^2) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x + y(x^2 + y^2)(\lambda - x^2 - y^2) \end{cases}$$

を考える。$x = y = 0$ は定常解だが線形化した固有値問題は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり λ に依らずに固有値 $\pm i$ を持つ。一方 (1.3) は $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ と変数変換すると

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r^3(\lambda - r^2) \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases}$$

となり trivial 解は $\lambda=0$ で安定性を交代していることが分かる。そして $\lambda>0$ のときには

$$x(t) = \sqrt{\lambda}\cos(-t), \quad y(t) = \sqrt{\lambda}\sin(-t)$$

なる周期解が存在する。

§2. 準備

まず仮定を述べる。

仮定 1.

(i) L は X の中で正則半群 $\{e^{tL}\}_{t\geq 0}$ を生成する。

(ii) $\pm i$ は L の固有値で、その代数的重複度は 1 である。

(iii) 正定数 c_0 が存在して

$$\sup_{\mu\in\sigma(L)\setminus\{i,-i\}} \mathrm{Re}\,\mu < -c_0$$

が成立する。ここで $\sigma(L)$ は L のスペクトラム。

仮定 2. X_0 を分数巾 $(-L+I)^{\alpha}$ $(0\leq\alpha<1)$ の定義域にグラフノルム $(\|\ \|_{X_0})$ を入れた Banach 空間とすると、非線形作用素 $N(x,\lambda)$ は $X_0\times R^n$ での $(0,0)$ の近傍から X への C^3-写像で

$$N(0,\lambda)=0, \qquad D_x N(0,0)=0$$

を満たす。

X_c を X の complexfication とすると、仮定 1 (ii) より $\psi\in X_c$, $\psi^*\in X_c^*$ が存在して以下が成立する。

$$\mathrm{Ker}(L-i) = \mathrm{span}\{\psi\}, \quad \langle \psi, \psi^* \rangle \neq 0$$

$$\langle x, \psi^* \rangle = 0 \qquad (\forall x \in R(L-i))$$

実 Banach 空間 X で考えたいから

$$\psi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \varphi_j \in X \qquad (j=1,2)$$

$$\psi^*|_X = \varphi_1^* - i\varphi_2^*, \quad \varphi_j^* \in X^* \qquad (j=1,2)$$

とおくと 上の関係式は 適当に 規格化して

$$L\varphi_1 = -\varphi_2, \quad L\varphi_2 = \varphi_1$$

$$\langle Lx, \varphi_j^* \rangle = (-1)^{j+1} \langle x, \varphi_{j+1}^* \rangle \quad (j=1,2, \text{ 但 } \varphi_3^* = \varphi_1^*)$$

$$\langle \varphi_j, \varphi_k^* \rangle = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2)$$

となる。

次に X_0 を

$$X_0 = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\} \oplus Z_0$$

$$Z_0 = \{ x \in X_0 ; \langle x, \varphi_j^* \rangle = 0, \ j=1,2 \}$$

と直和分解し, X_0 から $\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$, Z_0 への projection を, 各

$$Px \equiv \langle x, \varphi_1^* \rangle \varphi_1 + \langle x, \varphi_2^* \rangle \varphi_2$$

$$Qx \equiv x - Px$$

で定義する。 また ノルム $\| \ \|_{X_0}$ の代りに同値なノルム

$$\|x\| = \max\left\{ \sqrt{\langle x, \varphi_1^* \rangle^2 + \langle x, \varphi_2^* \rangle^2}, \ \|Qx\|_{X_0} \right\}$$

で 以下 考える。

一般に Banach 空間 Y の 0 を中心とする半径 δ の開球を $B_Y(\delta)$ で表わすことにする。

次にいくつかの既知の結果をまとめておく。

λ を固定し T を正の数とする。

<u>定義 2.1.</u> 関数 $u(t)$ が $[0,T)$ で (1.1)-(1.2) の解であるとは次の (i)-(iv) を満たすことである。

(i) $u(t) \in C([0,T), X_0)$

(ii) $\dfrac{du(t)}{dt} \in C((0,T), X)$

(iii) $u(t)$ は $0<t<T$ で L と N の定義域に入る。

(iv) $u(t)$ は $0<t<T$ で (1.1) を満たし, $u(0)=x_0$。

(1.1)-(1.2) の解 $u(t)$ を $u(t,x_0)$ 又は $u(t,x_0,\lambda)$ と書くことにする。解の存在に関しては次の定理が成立する。

<u>定理 2.2.</u> 仮定 1, 2 が成立するとする。任意の $T>0$ に対して, $X_0 \times R^n$ での 0 の近傍 V が存在して次が成立する。各 $(x_0,\lambda) \in V$ に対して (1.1)-(1.2) は $[0,T)$ で解 $u(t,x_0,\lambda)$ を一意にもつ。

証明は Krasnoselskii et al [3] 又 M. Crandall-P. Rabinowitz [1] を参照.

次に Center manifold 定理を述べる。

<u>定理 2.3. (Center manifold 定理)</u> 仮定 1, 2 の下で, 正の数 δ と $\{(a_1,a_2,\lambda)\,;\,(a_1,a_2) \in B_{R^2}(\delta),\ \lambda \in B_{R^n}(\delta)\}$ から $B_{Z_0}(\delta)$ への C^2-写像 z が存在して以下が成立する。

(i) $z(0,0,\lambda)=0 \quad (\lambda \in B_{R^n}(\delta)), \quad D_{a_j} z(0,0,0)=0 \quad (j=1,2)$

(ii) (local invariance) 各 $\lambda \in B_{R^n}(\delta)$ を固定して

$$\mathcal{C}_\lambda \equiv \{ a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \mathbf{z}(a_1, a_2, \lambda) \ ; \ (a_1, a_2) \in B_{R^2}(\delta) \}$$

とおく。 もし

$$x_0 \in \mathcal{C}_\lambda \ , \qquad u(t', x_0, \lambda) \in B_{x_0}(\delta) \qquad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

ならば

$$u(t', x_0, \lambda) \in \mathcal{C}_\lambda \qquad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

(iii) (local attractivity) もし、

$$u(t', x_0, \lambda) \in B_{x_0}(\delta) \qquad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

ならば

(2.1) $$\| \mathbf{z}(a_1(t'), a_2(t'), \lambda) - Q\, u(t', x_0, \lambda) \| \leq K e^{-c_0 t'} \| \mathbf{z}(a_1(0), a_2(0), \lambda) - Q x_0 \| \qquad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

ここで $a_j(t') \equiv \langle u(t', x_0, \lambda), \varphi_j^* \rangle \quad (j=1,2)$ で K は t, λ に依らぬ定数，c_0 は仮定 1 (iii) 中の定数。

(iv) $N \in C^p \quad (p \geq 2)$ ならば $\mathbf{z} \in C^{p-1}$.

証明は K. Masuda・T. Itoh [5] を参照。

§3. 2次元の常微分方程式への帰着.

初期値 x_0 が $\mathcal{C}_\lambda$ 上にあるとき (1.1)-(1.2) は次の2次元の常微分方程式と同値になることを示そう。

(3.1) $$\frac{da_j}{dt} = (-1)^{j+1} a_{j+1} + f_j(a_1, a_2, \lambda) \qquad (j=1,2)$$

(3.2) $$a_j(0) = a_{j,0} \qquad (j=1,2)$$

ここで f_j は

(3.3) $$f_j(a_1, a_2, \lambda) \equiv \langle N(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \mathbf{z}(a_1, a_2, \lambda), \lambda), \varphi_j^* \rangle \qquad (j=1,2).$$

命題 3.1.　仮定 1,2 の下で以下が成立する。

$x_0 \in \mathcal{C}_\lambda$ とする。もし (1.1)-(1.2) の解 $u(t,x_0)$ が $u(t,x_0) \in B_{X_0}(\delta)$ を満たすならば，$a_j(t) = \langle u(t,x_0), \varphi_j^* \rangle$ $(j=1,2)$ は $a_{j,0} = \langle x_0, \varphi_j^* \rangle$ $(j=1,2)$ としたときの (3.1)-(3.2) の解である。

逆に (a_1, a_2) が (3.1)-(3.2) の解で $(a_1,a_2) \in B_{R^2}(\delta)$ ならば $u(t) = a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ は $x_0 = a_{1,0}\varphi_1 + a_{2,0}\varphi_2 + z(a_{1,0}, a_{2,0}, \lambda)$ としたときの (1.1)-(1.2) の解である。

証明　$\mathcal{C}_\lambda$ の local invariance と (3.1)-(3.2) の解の一意性より従う。

命題 3.2.　仮定 1,2 が成立するとする。もし $w(t)$ が $w(t) \in B_{X_0}(\delta)$ なる (1.1) の周期解ならば $w(t) \in \mathcal{C}_\lambda$ で $a_j(t) = \langle w(t), \varphi_j^* \rangle$ $(j=1,2)$ は (3.1)の周期解である。逆に (a_1,a_2) が $(a_1,a_2) \in B_{R^2}(\delta)$ なる (3.1) の周期解ならば $w(t) = a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ は (1.1) の周期解である。

証明　$w(t) \in B_{X_0}(\delta)$ で w が周期関数であることから $\mathcal{C}_\lambda$ の local attractivity により $w(t) \in \mathcal{C}_\lambda$ が従う。他は命題3.1.より従う。

この節の残りで (3.1) の周期解の安定性を特徴づける条件を求める。(Marsden - McCracken [4 ; section 3] を参照)

(3.1) は，極座標 $a_1 = r\cos\theta$, $a_2 = r\sin\theta$ を使って変換すると

$$(3.4)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = R(r,\theta,\lambda) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -1 + \Theta(r,\theta,\lambda) \end{cases}$$

となる。ここで

$$R(r,\theta,\lambda) \equiv f_1(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\cos\theta + f_2(r\cos\theta, r\sin\theta,\lambda)\sin\theta$$

$$\Theta(r,\theta,\lambda) \begin{cases} \equiv \dfrac{1}{r}\{-f_1(r\cos\theta, r\sin\theta,\lambda)\sin\theta + f_2(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\cos\theta\} & (r \neq 0) \\ \equiv -\dfrac{\partial f_1}{\partial a_1}(0,0,\lambda)\cos\theta\sin\theta - \dfrac{\partial f_1}{\partial a_2}(0,0,\lambda)\sin^2\theta \\ \quad + \dfrac{\partial f_2}{\partial a_1}(0,0,\lambda)\cos^2\theta + \dfrac{\partial f_2}{\partial a_2}(0,0,\lambda)\sin\theta\cos\theta & (r=0) \end{cases}$$

で, $R \in C^2$, $\Theta \in C^1$, $R(0,\theta,\lambda)=0$, $\Theta(0,\theta,0)=0$ である。

(3.4) の解で $r(0)=r_0$, $\theta(0)=0$ なる解を $r(t,r_0,\lambda)$, $\theta(t,r_0,\lambda)$ と書くことにする。

<u>補題 3.3.</u> 正の定数 $\delta_1 (<\delta)$ と C^1-写像 $\tau : B_{R^1}(\delta_1)\times B_{R^m}(\delta_1)\to R^1$ が存在して

$$\theta(\tau(r_0,\lambda), r_0,\lambda) = -2\pi, \quad \tau(0,0)=2\pi .$$

"Poincaré 写像" を

(3.5) $$p(r,\lambda) \equiv r(\tau(r,\lambda), r, \lambda)$$

で定義すると, 補題 3.3 より $p \in C^1$ である。(3.1) の周期解の存在とその安定性は次の2つの補題によって, 1次元の写像 $p(\cdot,\lambda)$ の不動点の存在とその安定性によって決まる。

<u>補題 3.4</u> r が $p(\cdot,\lambda)$ の不動点ならば,

(3.6) $$a_1(t) \equiv r(t,r,\lambda)\cos\theta(t,r,\lambda), \quad a_2(t) \equiv r(t,r,\lambda)\sin\theta(t,r,\lambda)$$

は (3.1) の周期解である。逆に $(a_1(t), a_2(t))$ が $|a_1(0)| < \delta_1$, $a_2(0)=0$ なる (3.1) の周期解ならば, $a_1(0)$ は $p(\cdot,\lambda)$ の不動点である。

<u>補題 3.5.</u> $p(\cdot,\lambda)$ の不動点 r の安定性と (3.6) で与えられる (3.1) の周期解の軌道安定性は同じである。

$p(\cdot,\lambda)$ の不動点 r の安定性を特徴づける条件を求める。

<u>補題 3.6</u> (Marsden - McCracken [4; Lemma 3.7])

$$\frac{\partial p}{\partial r}(0,0) .$$

より, 必要ならば δ_1 を小にとって $\frac{\partial p}{\partial r}(r,\lambda)>0$ ($(r,\lambda)\in B_{R^1}(\delta_1)\times B_{R^m}(\delta_1)$) となるようにすると不動点 r の安定性は $p(\cdot,\lambda)$ の r の近傍の値によって完全に特徴づけられる。$p(\cdot,\lambda)$ の r の近傍の値の全ての可能な場合は,

I(+) r の近くの $r'>r$ に対して $p(r',\lambda)<r'$

II(+) 数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $r_k \downarrow r$ で $p(r_k,\lambda)=r_k$

III(+)　r の近くの $r'>r$ に対して　$P(r',\lambda) > r'$

I(−)　r の近くの $r'<r$ に対して　$P(r',\lambda) > r'$

II(−)　数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $r_k \uparrow r$ で $P(r_k,\lambda) = r_k$

III(−)　r の近くの $r'<r$ に対して　$P(r',\lambda) < r'$.

である。

補題 3.7.　$P(\cdot,\lambda)$ の不動点 r の安定性は

(3.7)

	I(+)	II(+)	III(+)
I(−)	漸近安定	安定	不安定
II(−)	安定	安定	不安定
III(−)	不安定	不安定	不安定

．この表の読み方は，例えば I(+) と I(−) が成立するならば不動点 r は漸近安定である，というふうに読む。

§4.　主要結果

補題 3.5 と補題 3.7 より r に対応する (3.1) の周期解 $(a_1(t), a_2(t))$ の軌道安定性は (3.7) で与えられるが，実は $(a_1(t), a_2(t))$ に対応する (1.1) の周期解 $w(t,r,\lambda) \equiv a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ ($w(0,r,\lambda) = r\varphi_1 + z(r,0,\lambda)$) の軌道安定性も表(3.7) で与えられる。

安定性定理　仮定 1, 2 が成立するとする。(1.1) の周期解 $w(t,r,\lambda)$ ($w(0,r,\lambda) = r\varphi_1 + z(r,0,\lambda)$) の軌道安定性は，表 (3.7) で与えられる。

(証明略)

この定理の簡単な系として

分岐定理　仮定 1, 2 が成立するとする。λ をスカラーとする。このとき (1.1) の定常解 $(0,\lambda)$ が $\lambda=0$ で安定性を交代すれば $(x,\lambda)=(0,0)$ から non-trivial な周期解が分岐する。

注意 4.1　$w(t,r,\lambda) \equiv 0$ のときは I(+) (各 II(+), III(+)) が成立するならば I(−) (各 II(−), III(−)) が成立する。

注意 4.2　定常解 $(0,\lambda)$ の安定性は $\mathrm{Re}\,k(\lambda)=0$ のときでも表(3.7)によって与えられる。

周期解 $w(t,r,\lambda)$ の Poincaré 写像の固有値と $p(\cdot,\lambda)$ との関係は伊藤〔2〕を参照。

お詫びと訂正　数理研講究録中の仮定2で $D_x N(0,\lambda)=0$ と書きましたが、$D_x N(0,0)=0$ の誤りです。お詫びして訂正致します。

参考文献

〔1〕 Crandall, M.G., P.H. Rabinowitz, The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions, Arch. Rational. mech. Anal., 67 (1977), 53-72.

〔2〕 伊藤達夫，非線形発展方程式の周期解の分岐と安定性，数理解析研究所講究録 386.

〔3〕 Krasnoselskii et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff International Publishing (1976).

〔4〕 Marsden, J.E., M. McCracken, The Hopf Bifurcation and its Applications. Applied mathematical Sciences 19, Springer-Verlarg, (1976).

〔5〕 Masuda, K., T. Itoh, On the center manifold theorem, to appear.

〔6〕 Weinberger, H., On the stability of bifurcating solutions, Nonlinear Analysis, Academic Press, New York (1978), 219-233.

Asymptotic behavior of the solutions of a Stefan problem

宮崎大・工　四ッ谷晶二

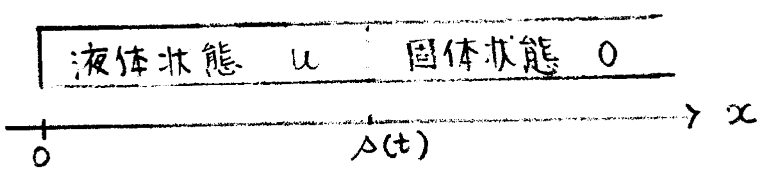
§0. Introduction.

固定端でユニラテラルな境界条件がみたされている次の1次元1相 Stefan 問題の漸近挙動を調べる。データは $\{\ell, \varphi\}$ であり求めるものは $(s(t), u(x,t))$ である。

$$
(S)\begin{cases}
(1) \quad u_{xx} - u_t = 0 & (0 < x < s(t),\ t > 0), \\
(2) \quad u_x(0,t) \in \gamma(u(0,t)) & (t > 0), \\
(3) \quad u(s(t),t) = 0 & (t > 0), \\
(4) \quad u(x,0) = \varphi(x) \geq 0 & (0 < x < \ell), \\
(5) \quad \dot{s}(t) = -u_x(s(t),t) \quad (t > 0) & s(0) = \ell \geq 0
\end{cases}
$$

ここで γ は maximal monotone (極大単調) in $\mathbb{R}$ with $\gamma^{-1}(0) \cap [0,\infty[\neq \phi$.
(定義，記号は §1 をみよ.)

関数 $u = u(x,t)$ は、ある物質の液体状態の温度分布をあらわし、$s(t)$ は固体状態と液体状態の境の位置をあらわす. 固体状態のところ ($x \geq s(t)$) では、一様に融解温度に達していると仮定している。その温度を 0 と規格化する。(2) はユニラテラル境界条件とよばれ、境界上での温度制御の問題とか、輻射による non-linear heating 等をも含む極めて一般的な境界条件である。(5) は Stefan 条件とよばれ物質が融解することを式にあらわしている。



従来の研究との関連を述べる。(2) が $u_x(0,t) = h(t) \leqq 0$ given (Neumann 条件)，$u(0,t) = g(t) \geqq 0$ given (Dirichlet 条件) のときには，Rubinstein, Friedmann, Cannon, ⋯, Nogi, ⋯ により解の存在、一意性、漸近挙動がくわしく調べられている。しかし (S) の様に (2) がユニラテラルな境界条件の場合は全く調べられていないと思う。前回のセミナー [9] では，(S) の解の存在と一意性について報告したが、今回は漸近挙動について述べたい。同時に存在と一意性に関して $l=0$ のときの結果を改良したので、あわせて紹介する。詳細は [6,7,8] にある。

§1. 準備

maximal monotone の定義と必要な性質をのべておく。詳しくは Brézis [1]，高村－小西 [4] を見よ。

γ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への多価写像 ($\mathbb{R}$ の点を $\mathbb{R}$ の部分集合へうつす写像) とする。

記号　$D(\gamma) = \{ u \in \mathbb{R} \ ; \ \gamma(u) \neq \phi \}$　　γ の定義域

$$\gamma^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & 2^{\mathbb{R}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & & \gamma^{-1}(f) = \{ u \in \mathbb{R} \ ; \ \gamma(u) \ni f \} \end{array}$$　　逆写像

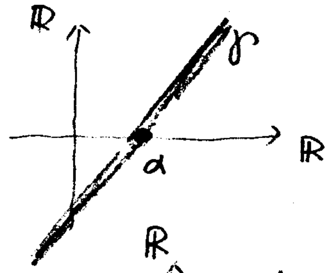
Def.　γ が monotone (単調) in $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$　$(f_1 - f_2)(u_1 - u_2) \geqq 0, \quad {}^\forall u_1, u_2 \in D(\gamma), {}^\forall f_1 \in \gamma(u_1), {}^\forall f_2 \in \gamma(u_2).$

Def.　γ が maximal monotone (極大単調) in $\mathbb{R}$

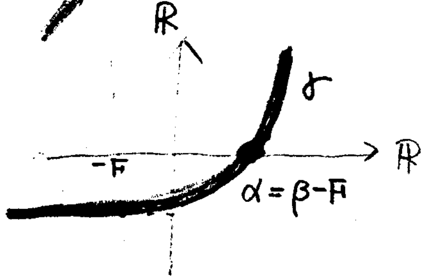
$\Longleftrightarrow$ γ は monotone であり，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の中のグラフと同一視したとき，monotone graph として真の拡張をもたない。

Example 1. $\gamma(u) = u - \alpha$



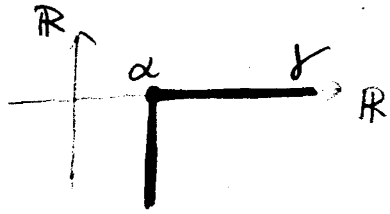
(2) $u_x(0,t) = u(0,t) - \alpha$ （第三種）

Example 2. $\gamma(u) = \begin{cases} (u+F)^4 - \beta^4 & (u > -F) \\ -\beta^4 & (u \leqq -F) \end{cases}$



（輻射, Stefan–Boltzmann の法則）

Example 3. $\gamma(u) = \begin{cases} = 0 & (u > \alpha) \\ \leqq 0 & (u = \alpha) \end{cases}$



(2) $u \geqq \alpha$, $u_x \leqq 0$, $(u-\alpha)\cdot u_x = 0$ （温度制御. Signorini 条件）

Remark 「γ : m.m $\Rightarrow$ $\gamma^{-1}(0)$ は閉凸集合 in $\mathbb{R}$」に注意すると (仮) γ : m.m, $\gamma^{-1}(0) \cap [0,\infty[\neq \phi$, より

$$\alpha = \min\{u \,;\, u \geqq 0,\ u \in \gamma^{-1}(0)\}$$

は well-defined かつ $\alpha \geqq 0$.

§2. 解の存在と一意性

データーに対する仮定 （$l > 0$ のとき）

(A) $\varphi(x) \geqq 0$, 有界, a.e. $x \in [0, l]$ が連続点

Remark $\varphi \geqq 0$ は1相を保証する(比較定理より).

記号　$D = \{(x,t)\ ;\ 0 < x \leq s(t),\quad t > 0\}$

$\Sigma = \{x \in [0,\ell]\ ;\ x$ は φの不連続点$\} \times \{0\}$.

Def.　(s, u) が sol. of (S).

$\Longleftrightarrow$ i) $s(0) = \ell$,　$s(t) > 0$, $s \in C([0,\infty[) \cap C^\infty(]0,\infty[)$,

ii) u は $\overline{D}$ 上有界，$u \in C^\infty(D) \cap C(\overline{D} - \Sigma)$

$$\int_\tau^T \int_0^{s(t)} u_{xx}^2\, dx\, dt = C_{T,\tau} < \infty \quad (0 < {}^\forall\tau < {}^\forall T < \infty)$$

iii) (1), (3), (4), (5) 成立.

iv) a.e. $t \in]0,T[$ に対して. $u_x(0,t)$ が存在して (2)をみたす.

Remark.　$\ell = 0$ のとき (4) は省く.

Theorem 1　$[\ell > 0$, φ は (A) をみたす$]$ or $[\ell = 0,\ \alpha > 0]$

$\Longrightarrow$ $\exists.1$ sol. (s,u) of (S)
とくに，γ が一価ならば，$u_x \in C(\overline{D} - \{t=0\})$

Remark　前回のセミナーでは，$\ell=0$ のとき "$D(\gamma) \supset [0,H]$, $\gamma(0) <]-\infty,0[$" という仮定をつけていたが，今回の "$\alpha>0$" は " — " より弱く．$0 \in D(\gamma)$ さえも仮定しなくてよいので改良になっている。Th.1 が $\exists.1$ に関する最終的結果である。(例えば '$\ell=0,\ \alpha>0$' となる問題は sol. をもたないことを証明できる)

<u>Remark</u>. $[\ell=0,\ \alpha>0]$ の仮定のもとで、解の存在を示すには、データ $\{\varepsilon,\ \varphi\equiv 0\}$ に対する解 $(s^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ を使って、$\varepsilon \to 0$ のとき $s^{\varepsilon} \longrightarrow \exists s$, $u^{\varepsilon} \longrightarrow \exists u$ を示し、(s, u) が解であることを確かめる。しかし"—"の様な、都合のよい仮定がないので計算はかなりめんどうになる。一意性は前回のをそのまま使えることがわかる。

<u>Remark</u>. "——" は満たされないが $[\alpha>0]$ なら満たす γ の例は、たくさんあるが、典型的なものとして §1 の Ex.3 がある。他には $u=0$ で pole をもつ $u_x(0,t) = 1 - 1/u(0,t)$ といった境界条件もある。

§3. 漸近挙動

$t \longrightarrow \infty$ のとき (S) の解の挙動をしらべる。

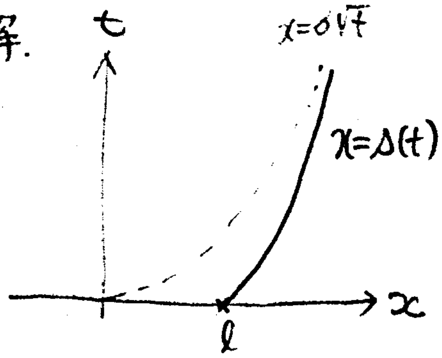
<u>Theorem 2.</u> $\alpha > 0$, $\ell \geqq 0$

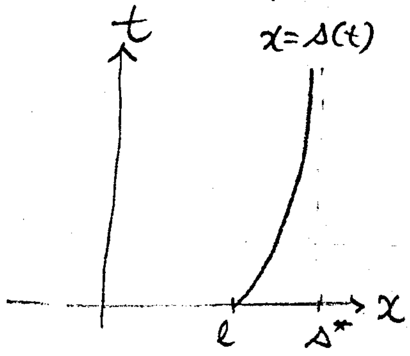
$\Longrightarrow$ (i) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \alpha$ 広義一様 in $x \in [0,\infty[$,

(ii) $$\lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{\sqrt{t}} = \sigma$$

ただし σ は次の方程式の一意的な解。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}\sigma^{2n} = \alpha$$





Theorem 3. $\mu = 0, \quad l > 0$

$\Longrightarrow$ (i) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ 一様収束

(ii) $\lim_{t\to\infty} s(t) = s^*$,

ただし. $l \leqq s^* \leqq l + \int_0^l \varphi(x)\,dx$

従来の結果と Th. 2, Th. 3 との関連について述べる. Cannon 等 [2, 3] により、(2) の代りに $u(0,t) = f(t) \geqq 0$ given (Dirichlet 条件), $u_x(0,t) = h(t) \leqq 0$ given (Neumann 条件) を与えた問題は詳しく調べられている. (山口一野木 [5], P43 — P49 参照). Th. 2 を証明する為の key になるものとして次の lemma がある.

Lemma (Cannon - Hill [2])

(1), (2)′: $u(0,t) = f(t) \geqq 0$, (3), (4), (5) なる Stefan prob. の解を $(\hat{s}(t), \tilde{u}(x,t))$ とおく.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \alpha > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{s}(t)}{\sqrt{t}} = \sigma,$$

where σ : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}\sigma^{2n} = \alpha$ ┘

従って Th. 2 を証明する為には $\lim_{t\to\infty} u(0,t) = \alpha$ を知ることがポイントとなる。物理的直観からなりそうな気はするが. 実際に証明するのはかなりの議論を必要とする。

Th. 2 の証明の方針

Lemma 1. $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = \infty$

Lemma 2. $\varliminf\limits_{t\to\infty} u(x,t) \geqq \alpha \quad (\forall x \geqq 0)$

Lemma 3. $\exists t_0 > 0,\ \forall t \geqq t_0,\quad u(x,t) \leqq \alpha \quad (\forall x \geqq 0)$

Lemma 4. $\{u(x,t)\}_{t\geqq 0} \subset C([0,\infty[)$ 一様有界, 同程度連続.

Remark. $u(x,t)$ は $x \geqq s(t)$ では zero で拡張しておく。

Proof of Theorem 2. Lemma 2, Lemma 3 により

$$(*) \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = \alpha \qquad (\forall x \geqq 0)$$

ところが, Lemma 4 と Ascoli-Arzelà の Th. により, 上の収束は $x \in [0,\infty[$ に関して広義一様.

(*) と Lemma により $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)/\sqrt{t} = \sigma$ q.e.d.

Remark. Lemma 1 ~ 4 の関連は下図の様になっている。

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Lemma 1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \text{Lemma 4} \\
\text{Lemma 2} & & \text{Lemma 3} &
\end{tikzcd}$$

Th. 3 の証明の方針

適当な比較関数(ある Stefan prob の解)をみつけて評価する。

参考文献

[1] H. Brézis, Operateurs maximaux monotone et semigroups de contractions dans les espase de Hilbert, North-Holland (1973).

[2] J. R. Cannon and C. D. Hill, Remarks on a Stefan problem, Journal of Math. and Mech. 17 (1967), 433-442.

[3] J. R. Cannon and M. Primicerio, Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with the flux prescribed on the boundary, J. Math. Anal. Appl., 35(1971), 361-373

[4] 高村-小西, 非線型発展方程式 (岩波講座 基礎数学 解析学(II)vii) 岩波書店 (1977).

[5] 山口-野木, ステファン問題, 産業図書 (1977).

[6] S. Yotsutani, Stefan problems with the unilateral boundary condition on the fixed boundary I, to appear. (1相問題)

[7] ———, ——— II, to apper (2相問題)

[8] ———, ——— III, to appear ([6]の改良と漸近挙動)

[9] ———, 第1回発展方程式セミナー「報告集」, (1979), 6-8.

"双曲型" 発展方程式に関する加藤の定理の精密化

代田淳

標題の定理は，最も基本的な定理のひとつであり，歴史的に見ても発展方程式研究の先駆となったものであるから，読者諸兄も精通しておられることだろう．老婆心ながら，初学者，あるいはずっと以前に学ばれて記憶の風化に嘆いておられる方のために，詳しく書かれた参考書をあげておこう．田辺 [10]，増田 [11] である．その応用として「対称双曲系の初期値問題」（田辺 [10]，増田 [11] の他に，溝畑 [12] も参照）について御存知ならば ここでは十分である．以下，記号，名称などは田辺 [10] に従い，特別に導入するもの以外は特に断わらないことにしよう．

舞台は，Banach 空間 X と，それに稠密に埋め込まれ，それより強い位相を持つ Y である．$A(t)$ は時間 t に依存して変わる，X における C_0 半群の生成素値関数，$Y \subset D(A(t))$，であり，これが主役である．"双曲型" 発展方程式 $\frac{\partial}{\partial t}u(t) = A(t)u(t) + f(t)$，$u(0) = u_0 \in Y$，が f に適当な条件を課すことによって解けるのを示すには，族 $\{A(t)\}$ が生成する基本解 $U(t,s)$ を構成すればよかった．これは，$\Delta = \{(t,s) : t \geq s\}$ とする時，$U : \Delta \to B(X) \cap B(Y)$ 強連続（すなわち，各 $(t,s) \in \Delta$ に対して $U(t,s) \in B(X)$ であり，これを Y に制限して考えると $B(Y)$ にも属し，さらに双方の位相で $(t,s) \in \Delta$ に関し強連続）であり，$U(s,s) = 1$，$U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$，任意の $u \in Y$ に対して積分方程式

$$U(t,s)u - u = \int_s^t A(\xi)U(\xi,s)u\,d\xi = \int_s^t U(t,\xi)A(\xi)u\,d\xi$$

を満たすものとして定義される．

では，$\{A(t)\}$ の基本解 $U(t,s)$ を構成するにはどうするか．加藤は摂動論を用いた．すなわち，$A(t)$ を，容易にその生成する基本解が構成できるような族 $A_n(t)$ で近似し，その生成する基本解 $U_n(t,s)$ が $n \to \infty$ のとき X，Y 双方において強収束極限を持つことを示したのである（[1] = [10]，[11] に紹介されているもの）．ところが，X における収束

は加藤の仮定からは容易に従う．A(t)のB(Y,X)ノルム連続性を仮定するからである．この時の近似 $A_n(t)$ は，A(t)の階段関数近似を採用する．加藤の，この論文における苦心は，$U(t,s)$ の微分可能性，すなわち，$U_n(t,s)$ がYに於ても強収束することを示す仕事であったろう．$S(t)A(t)S(t)^{-1} = A(t)+B(t)$ を満す $S(t)$ が活躍する．その方法は完璧である．が，残念なことにその手順は複雑である．従って，私の知る限りに於ても，二つの単純化が現れている（Dorroh [3]，石井 [4]）．

石井 [4] の方法について若干触れておこう．彼は，A(t)の吉田近似の基本解 $\tilde{U}_n(t,s)$ を用いて加藤の結果の証明を単純化した．それは，Kisyński [9] の思想の流れをくむものと思われる．なぜ吉田近似を用いると単純化するのだろう．加藤と石井の方法を比較分析してみると次のことが見えて来る．

	Xにおける収束（これを用いて）	Yにおける収束を示す
$U_n(t,s)$	trivial	複雑
$\tilde{U}_n(t,s)$	直接証明はできない．階段関数近似を補助的に用いる．	単純

こうなる理由については，後で多少触れる機会があろう．この思想は八木 [7] に受け継がれて，A(t)のB(Y,X)ノルム連続仮定を強連続性まで弱めることに成功した小林 [6] の結果は，その証明に於てかなり見安くなった．

なぜ，小林の中で，理論はそういう方向に傾斜して行ったのだろうか．おそらく，彼は，加藤理論に於て $U_n(t,s)$ がXの中で強収束する構造があまりにtrivialだと感じたに相違ない．そこは他の部分に比べて安っぽく見える造りだ．もろん，他がりっぱなせいもあるのだろう．しかし調和は必要だ．

その頃，小林におくれることなく石井も同じ方向へと歩んでいた（[5]）．

むろん道は異なってはいたが．石井は，$S(t)$にもっと重い任務を負わせて，難関の突破をはかったのである．つまり，$S(t)$に，十分小さな$\alpha>0$と任意のtに対しては$(1+\alpha S(t))^{-1}$が$B(X)$の中に存在して一様有界という付加条件を設けて，しかし，$A(t)$については"可測"というところまで条件を弱めてしまった．私の知る限り，応用例に現われる$S(t)$は石井に背かない．

加藤が$A(t)$に課した$B(Y,X)$ノルム連続条件を，定理を応用する見地から見ても多少の不満が生じて来る．対称双曲系の初期値問題

$$\partial u/\partial t + \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\,\partial u/\partial x_j + b(t,x) = f(t,x), \quad x \in R^n,$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

を考える時，$A(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} - b(t,x)$であるが，この時，加藤のノルム連続仮定を満すためには，$a_j(t,x)$，$b(t,x)$はxに関して一様にtについて連続である必要がある．しかし，本当にそれは必要だろうか．実は，tについては連続というだけで十分である．八木[8]は興味ある方法でこれを示している．むろん，小林[6]あるいは石井[5]の結果を適用すれば，それに頼る必要はもはやないけれど．又，藤原[13]は，ポテンシャルが時間依存して変わるSchrödinger方程式の解をFeynman path integralを用いて構成して見せたが，これを発展方程式的に取り扱おうとすると，加藤のノルム連続仮定は極めて不自然な要求を我々につきつける．なお，藤原は，ポテンシャル$R \times R^n \ni (t,x) \mapsto V(t,x) \in R$は$t$に関しては可測とだけしたために，この理論を扱うには小林[6]でも不十分である．そこに，石井[5]，あるいは後で述べる私の結果が活躍する余地が残っている．

応用範囲からすると，石井の結果がわずかではあるが，一番広い感がある．ただ，理論的に見るならば，$S(t)$に条件を付け加えたために，それは，小林のように，加藤の結果の完全な拡張にはなっていない．いずれにせよ，ある近似基本解$U_n(t,s)$をXで強収束させる方法という見方をすれば，どれもそれなりに興味深く，賢者をたのしませること

だろう（正確には，小林[6]は $U_n(t,s)$ の X における強収束性を示していない．それは八木[7]を待ってなされた）．

私はここに，もう一つの結果を報告する．とりあえず，回帰的空間の理論と考えていただければいい．結果から言えば，その場合，$S(t)$ に条件を加えることなく，$A(t)$ については"可測"というところまで条件を弱めることができるのである．私が特筆したいのは，その結果のみではなく，その方法である．それは全く新しいものである．標語的に言うならば，『近似基本解 $U_n(t,s)$ の収束性に関する問題を，考えている空間より1次元高い空間を導入することによって，半群の収束性の問題に置き換え，Trotter－加藤の定理（[14]参照）を考慮し，その生成素の resolvent 収束という問題にまで帰着させて，それを解く』ということになろう．それは問題の単純化である．

もう少し詳しい説明をしよう．

以後，$A_n(t)$ は $A(t)$ の吉田近似を表わすものとする．$U_n(t,s)$ はその基本解である．

$\mathfrak{X} = L^p(R:X)$，$\mathfrak{Y} = L^p(R:Y)$ とおく．ここで $p>1$ としておく．こうすれば，X が回帰的な時，$\mathfrak{X}$ もそうである．この時，$\mathfrak{Y}$ は $\mathfrak{X}$ に稠密に埋め込まれ，$\mathfrak{Y}$ の位相は $\mathfrak{X}$ のそれより強い．

そこで，$(e^{\sigma K_n}f)(t) = U_n(t,t-\sigma)f(t-\sigma)$ で $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ に半群を生成する．この時，$U_n(t,s)$ が Δ 全体で定義されていなければ，$A(t)$, $S(t)$ などを条件をそこなわぬよう周期的に R 全体に拡張することによって，$U_n(t,s)$ を Δ で考えることにする．この K_n は，実は $-\frac{\partial}{\partial t}+A_n$ に等しい．ここで $\frac{\partial}{\partial t}$ とは，平行移動 $f \mapsto f(\cdot+\sigma)$ なる半群の生成素である微分であり，A_n は，$(A_nf)(t) = A_n(t)f(t)$ で定義される $\mathfrak{X}$ における半群の生成素である．これは次のような形式的計算を行なえば容易に理解されよう．

$$
\begin{aligned}
(Kf)(t) &= \left[\frac{\partial}{\partial\sigma} e^{\sigma K} f(t)\right]_{\sigma=0} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial\sigma} U(t,t-\sigma) f(t-\sigma)\right]_{\sigma=0}
\end{aligned}
$$

$$= \left[-U(t,t-\sigma)\frac{\partial}{\partial(t-\sigma)} f(t-\sigma) + U(t,t-\sigma)A(t-\sigma)f(t-\sigma) \right]_{\sigma=0}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} f(t) + A(t) f(t)$$

上の計算で添字 n は意識的に落とした．それにより，上のことと合わせて次を主張したいのである．もし $A(t)$ の基本解 $U(t,s)$ があれば，それが $\mathfrak{X}$ 上に生成する半群の生成素を K とする時，この K は $-\frac{\partial}{\partial t}+A$ の拡張となる．ただ K_n の場合と違って，A は A_n のように有界ではないから，$-\frac{\partial}{\partial t}+A$ 自身が半群の生成素 K に等しくなることは望めない．結論から言うと，K は $(-\frac{\partial}{\partial t}+A)\upharpoonright D(\frac{\partial}{\partial t})\cap \mathfrak{Y}$ になる．

私の主張はこうである．すなわち，$A_n(t)$ の基本解 $U_n(t,s)$ が，$n\to\infty$ の時，X，Y に於て強収束して，それが $A(t)$ の基本解となることと，ある $K \in G(\mathfrak{X})\cap G(\mathfrak{Y})$，$K \supset -\frac{\partial}{\partial t}+A$ が存在し，$K_n \xrightarrow[R]{} K$ in $\mathfrak{X}$ & $\mathfrak{Y}$（$\xrightarrow[R]{}$ は resolvent 収束を示す）を成立せしめることとは同等である．

上の段落で，上から下への流れは淀みない．しかし，下から上へと逆登ろうとする時，一つの滝を越えねばならない．つまり，$K_n \xrightarrow[R]{} K$ から $U_n(t,s)$ の強収束性が導かれることは trivial ではないのである．これは L^p 空間の完備性の証明を応用することによって解決される．その場合，Fubini の定理も大いに貢献する．しかし，その詳細について，ここで触れる余裕はない．

では，$A(t)$ の $B(Y,X)$ ノルム連続条件を除く加藤の仮定を，上の空間の言葉に翻訳してみよう．

$$(*)\quad \begin{cases} \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}\ , \quad S : \mathfrak{Y} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X} \ \text{（同型写像）}, \\ \mathfrak{Y} \subset D(A)\ , \quad S A S^{-1} = A + B\ , \\ S\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)S^{-1} = -\frac{\partial}{\partial t} + \dot{S} S^{-1} \ \text{（ここで，}\dot{S}(t) = \frac{d}{dt}S(t)\text{）}, \end{cases}$$

である．もちろん，$B,\ \dot{S}S^{-1} \in B(\mathfrak{X})$ である．

次の点に注意を払っていただきたい．まず，こうすると，$S(t)$ が微分可能という仮定の必要性がよく見えて来る．扱わねばならない作用素は $K_n = -\frac{\partial}{\partial t}+A_n$ なのだから，S は A のきげんだけをとっていたのでは仲介役はつとまらない．S は $-\frac{\partial}{\partial t}$ にも馴染みでなければならない．次に，上の翻訳に於て，$B(t)$，$\dot{S}(t)$ は t に関して強連続である

必要は全くない．強可測ならばいい．L^p空間を導入しているからである．ここにも，この方法の利点がある．加藤[2]は，$B(t)$，$\dot{S}(t)$に課した条件をここまで緩めるのに，我々にかなりの肉体労働を強いるけれど，もう汗はかくまい．

ここまでは問題の変形であった．これから，それを解いてゆこう．以後，よく登場して来る脇役達に新しい名を与えておく．$\mathfrak{Z} = D(\frac{\partial}{\partial t}) \cap \mathfrak{Y}$，$K_0 = (-\frac{\partial}{\partial t} + A) \upharpoonright \mathfrak{Z}$，$C = \dot{S}S^{-1}$，$B_n = (A+B)_n - A_n$（ここで，$(A+B)_n$は$A+B$の吉田近似を意味している）．それから，一つ，重要なことを補っておく．$\sup_n \|(K_n-\lambda)^{-1}\|_{\mathfrak{X}} < \infty$である．これは(*)に取り上げねばならぬものであった．$U_n(t,s)$がnに関して一様に$\|U_n(t,s)\| \leq M e^{\beta(t-s)}$という評価を持つこと，すなわち，$A(t)$の安定性仮定に起因する事実である．

簡単な計算より，$SA_nS^{-1} = A_n + B_n$，$B_n \to B$（$\to$は強収束を表わす）が知れる．蛇足かもしれないが一言付け加えておこう．こううまく行くのは，A_nがAの吉田近似だからである．$A_n(t)$が$A(t)$の階段関数近似だったらこうはならない．この辺の事情が，石井[4]において$U_n(t,s)$のYでの収束性の証明が簡単になったことに関連している．

さて，$u \in \mathfrak{Z}$の時明らかに$K_n u \to K_0 u$であり，又(*)より，

$$\begin{cases} SK_nS^{-1} = K_n + B_n + C, \\ SK_0S^{-1}u = (K_0 + B + C)u, \quad u \in \mathfrak{Z}, \end{cases}$$

である．従って，K_nあるいは$K_n + B_n + C$の resolvent set の共通部分に入るような，十分大きなλに対して$\mathrm{Range}(K_0-\lambda)$が稠密となることを言えば，全ては解決するのである．

それを示そう．実際，$\mathrm{Range}(K_0-\lambda)$の稠密性を仮定すれば，$u \in \mathfrak{Z}$に対して$(K_n-\lambda)^{-1}(K_0-\lambda)u = (K_n-\lambda)^{-1}(K_0-K_n)u + u \longrightarrow u$だから$R_\lambda = \lim_{n\to\infty}(K_n-\lambda)^{-1}$は存在するが，これは明らかに擬 resolvent（[10]，2章§3.2参照）となる．又，$R_\lambda(K_0-\lambda) = 1_{\mathfrak{Z}}$であるから，$u \in \mathfrak{Z}$に対しては，$\lambda \to \infty$の時$(1+\lambda R_\lambda)u = R_\lambda K_0 u \longrightarrow 0$，すなわ

ち，$\lim_{\lambda\to\infty}(-\lambda R_\lambda)=1$ である．従って，稠密に定義された閉作用素 K が存在して $(K-\lambda)^{-1}=R_\lambda$ である（∵［10］）．この時，$(K-\lambda)^{-1}(K_0-\lambda)=1_{\mathcal{G}}$ より，$K\supset K_0$ だから $K\supset\overline{K_0}$ であるが，Range $(K_0-\lambda)$ が稠密ということより，$K=\overline{K_0}$ も知れる．従って $SKS^{-1}=K+B+C$ が導かれる（∵ $K\in G(\mathfrak{X})$ で，K の核 $\mathcal{G}$ の元についてこの式が成立しているから）

そこで，K_n, K を $\mathcal{Y}$ の中で考えると，

$$(K_n-\lambda)^{-1}=S^{-1}(K_n+B_n+C-\lambda)^{-1}S,$$

$$(K-\lambda)^{-1}=S^{-1}(K+B+C-\lambda)^{-1}S,$$

であるから，$K_n \xrightarrow[R]{} K$，$B_n\to B$ より，$K_n \xrightarrow[R]{} K$ in $\mathcal{Y}$ も従う．

結局，残りは，Range $(K_0-\lambda)$ が稠密，を示すことである．

そこで初めて，$\mathfrak{X}$ が回帰的という仮定を設けよう．背理法を用いる．以前のように λ は十分大きな範囲で考える．Range $(K_0-\lambda)$ が稠密でないと仮定すると，$0\neq f^*\in\mathfrak{X}^*$ が存在して，任意の $g\in\mathcal{G}$ に対しては $((K_0-\lambda)g, f^*)=0$ が成立する．この f^* に対して，$\frac{1}{2}\|f^*\|_*\leq|(f,f^*)|$ となる $f\in\mathcal{Y}$ を取って来よう．そして $f_n=(K_n-\lambda)^{-1}f$ とおく．$f_n=S^{-1}(K_n+B_n+C-\lambda)^{-1}Sf\in\mathcal{G}$ であり，$\sup_n\|f_n\|_{\mathcal{Y}}<C_0<\infty$ である．故に，

$$\begin{aligned}(f,f^*)&=\lim_{n\to\infty}((K_n-\lambda)f_n,f^*)\\&=\lim_{n\to\infty}((K_0-\lambda)f_n,f^*)+\lim_{n\to\infty}((A_n-A)f_n,f^*)\\&=\lim_{n\to\infty}(Af_n,A^*(n-A^*)^{-1}f^*)\quad(\because A_n\text{ は }A\text{ の吉田近似})\\&=0\quad(\because \|Af_n\|_{\mathfrak{X}}\leq\|A\|_{\mathcal{Y},\mathfrak{X}}\|f_n\|_{\mathcal{Y}}\leq C_0\|A\|_{\mathcal{Y},\mathfrak{X}};\end{aligned}$$

$\mathfrak{X}$ の回帰性より $D(A^*)$ は稠密だから，$A^*(n-A^*)^{-1}\longrightarrow 0$ ）

従って $f^*=0$．これは矛盾である．

なお，実は，加藤［1］，［2］の仮定や石井［5］の仮定から，それを $\mathfrak{X}$ の言葉に翻訳することによって，上同様く Range $(K_0-\lambda)$ の稠密性を示すこともできる．その証明は簡潔であり，代数的な調和と無機性を帯びていて面白いのだけれど，手を抜いてここでは実行してみせない．たいした手間ではないのだが，それはおそらく，石井［5］と，加藤

理論の別証を行なった石井[4]を，1次元高い所から見た情景の描写になるだろうから，それと本質的な差はあまりないだろう．それでも，高い所からの眺望は実にいい．

残念なことに，小林[6]＝八木[7]の結果は，まだ私の理論の範疇にはおさまらない．やがては，過去の賢人が言うように，「自然は単純を好む」だろうか．

終り．

参考文献

[1] T. Kato, Linear evolution equations of "hyperbolic" type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 17 (1970), 241-258

[2] T. Kato, Linear evolution equations of "hyperbolic" type, II, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 648-666

[3] J.R. Dorroh, A simplified proof of a theorem of Kato on linear evolution equations, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 474-478

[4] S. Ishii, An approach to linear hyperbolic evolution equations by the Yosida approximation method, Proc. Japan Acad. 64, Ser A (1978) 17-20

[5] S. Ishii, Linear evolution equations $du/dt + A(t)u = 0$: a case where $A(t)$ is strongly measurable, to appear

[6] K. Kobayasi, On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 647-654

[7] A. Yagi, Remarks on proof of a theorem of Kato and Kobayasi on linear evolution equations, Osaka J. Math. 17 (1980), 233-244

[8] A. Yagi, On a class of linear evolution equations of "hyperbolic" type in reflexive Banach spaces, Osaka J. Math. 16 (1979), 301-315

[9] J. Kisyński, Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits, Studia Math., 23 (1963/4), 285-328

[10] 田辺広城, 発展方程式, 岩波, 1975

[11] 増田久弥, 発展方程式, 紀伊国屋, 1975

[12] 溝畑 茂, 偏微分方程式, 岩波, 1966

[13] D. Fujiwara, A constraction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, to appear in J. d'Analyse Mathématique.

[14] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966

半線型発展方程式に応ずる非線型半群について

福田賢一

1. 序.　Banach 空間 X において，次の半線型発展方程式の Cauchy 問題

$$(CP:x)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t:x) = [A+F]\,u(t:x) \\ u(t:x) = x\ , \end{cases}$$

を考える。ここで A は C_0-半群 $\{T(t)\}$ の infinitesimal generator とする。F は local Lipshitz，すなわち

$$(F)\quad \begin{cases} {}^{\forall}C>0\quad {}^{\exists}f(C)>0\ \text{s.t.} \\ \|Fx-Fy\| \leq f(C)\|x-y\| \quad (\|x\|,\|y\|\leqq C) \end{cases}$$

とする。

本文の目的は $A+F$ より $(CP:x)$ に応ずる非線型半群 $S(t)$ を構成しその性質を調べる事である。

しかし．F は local Lipshitz でしかないから，どの様に $\omega>0$ を取っても $A+F-\omega$ は dissipative とはならない。

また $(CP:x)$ の mild solution，すなわち積分方程式

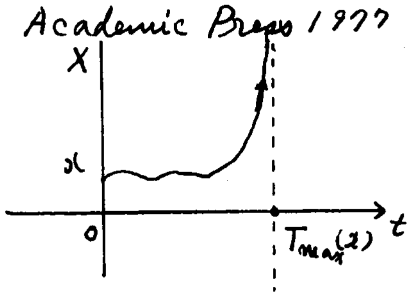
$$(IE:x)\quad u(t:x) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\,F\,u(\xi:x)\,d\xi$$

の解は global に存在するとは限らず，有限な t で blow-up しているかもしれない。この事について

は Segal の結果 (Ann. Math. 78 (1963))

『各 $x \in X$ について積分方程式 $(IE:x)$ の解 $u(t)x$ が存在する最大区間 $[0, T_{max}(x))$ が定まり，もし $T_{max}(x) < \infty$ ならば $u(t:x) \to \infty \ (t \nearrow T_{max}(x))$.』

が知られている。またこの様な現象の起る具体例としては Ball の論文 (Nonlinear Evolution Eq. Academic Press 1977 p180～p205) などを参照。



以上の事情から今までに知られている結果は応用できない。

さて Cauchy 問題 $(CP:x)$ の discrete version として次の差分系

$$(DS:x)_\lambda \quad \begin{cases} [u_\lambda^n - u_\lambda^{n-1}]/\lambda = [A+F]u_\lambda^n \\ u_\lambda^0 = x, \quad 0 < \lambda \end{cases}$$

を考える。これは次の同値な

$$(DI:x)_\lambda \qquad u_\lambda^n = (I-\lambda A)^{-n}x + \lambda \sum_{i=1}^{n} (I-\lambda A)^{-n+i-1} F u_\lambda^i$$

に変形できる。これにより $(DS:x)_\lambda$ ($(IE:x)_\lambda$) は積分方程式 $(IE:x)$ の disrete version とも見なせる。

本文では，積分方程式 $(IE:x)$ の解 $u(t:x)$ が差分系 $(DS:x)_\lambda$ の解 u_λ^n で近似される事を示し，最終的に $S(t)$ がよく知られた Exponential Formula で表現される事を示す。また応用として，F が連続的 Fréchet 微分可能であるならば $S(t)$ もそうであり，$S(t)x$ $(x \in D(A))$ が

$(CP:x)$ の C^1-solution を与える事などを示す。

A, F が time に depend する場合 すなわち

$$(CP:s,x)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t:s,x) = [A(t)+F(t)]u(t;s,x) \\ u(s;s,x) = x \end{cases}$$

の場合についても考る。ここで $A(t), F(t)$ は

$$(A)\quad \begin{cases} A(t) \text{ は linear evolution op } U(t,s) \text{ の } t \text{ における i.g. で } U(t,s) \text{ は } A(t) \text{ で} \\ U(t,s) = \lim_{\lambda\to 0+} \prod_{i=1}^{[(t-s)/\lambda]} [I-\lambda A(s+i\lambda)]^{-1}x \quad (\text{一様}) \end{cases}$$

$$(F)\quad \begin{cases} \text{各 } x \text{ について } t \mapsto F(t)x \text{ は連続, } F(t): X \to X \text{ は} \\ t \text{ について一様な local Lipshitzian, すなわち.} \\ \forall C>0 \quad \forall T>0 \quad \exists f(C,T)>0 \text{ s.t} \\ \|F(t)x - F(t)y\| \leqq f(C,T)\|x-y\| \quad \left(\begin{matrix} \|x\|, \|y\| \leqq C \\ t \in [0,T] \end{matrix}\right) \end{cases}$$

この場合 $(CP:s.x)$ の mild solution は

$$(IE:s,x)\quad u(t:s,x) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,\xi)F(\xi)u(\xi:s,x)d\xi$$

の解として与えられ 差分としては

$$(DS:s,x)_\lambda \quad \begin{cases} [u_\lambda^m - u_\lambda^{m-1}]/\lambda = [A(s+m\lambda)+F(s+m\lambda)]u_\lambda^m \\ u_\lambda^0 = x \end{cases}$$

$$(IE:s,x)_\lambda \quad u_\lambda^m = \prod_{i=1}^{m}(I-\lambda A(s+i\lambda))^{-1} + \lambda\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\geq i}^{m}[I-\lambda A(s+j\lambda)]^{-1}F(s+i\lambda)\,u_\lambda^i$$

を考える。この場合 $t \mapsto [A(t)+F(t)]x$ には Lipschitz 連続性は仮定していない。

2. 近似. 議論はほぼ parallel に進むので time に depend しない場合, つまり $(CP.x)$ についてのみ述べる。

まず, 半群 $\{T(t)\}$ の type を $\omega \geq 0$ とする。すなわち

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$$

とする。また差分系 $(DS:x)_\lambda$ の解 u_λ^m を step function と見て

$$u_\lambda(t:x) = u_\lambda^{[t/\lambda]}$$

と書き換える。最初に $(DS:x)_\lambda$ が local に解け, しかも x, λ について一様性の有る事を示。

Lemma 1. 任意の $r>0$ に定し定数 $\delta(r)>0$ が取れ $(DS:x)_\lambda$ ($\|x\|\leq r$, $0<\lambda<1/\omega$) は $[0, \delta(r)]$ 上で一様有界な解の族 $\{u_\lambda(\cdot:x) \mid \|x\|\leq r, 0<r<1/\omega\}$ を持つ。

(Proof) $T>0$ を一つ取り, $E = exp(2\omega T)$, $c = 2Er$ とし $G = \|F0\|$ とおき,

$$\delta(r) = \min\{[2Ef(c)]^{-1}, [E^{-1}c - r][G+f(c)c]^{-1}, T\}$$

とおく。Step function $u_{\lambda,m}(t)$ ($t\in[0,\delta(r)]$) を inductive に $u_{\lambda,0}(t) \equiv x$ ($\|x\|\leq r$)

$$u_{\lambda,m}(t) \equiv (I-\lambda A)^{-[t/\lambda]}x + \lambda\sum_{i=1}^{[t/\lambda]}(I-\lambda A)^{-[t/\lambda]+i-1}\cdot F \cdot u_{\lambda,m}(i\lambda)$$

と定める。$\|u_{\lambda,m-1}(t)\| \leq c$ ($t\in[0,\delta(r)]$) とすると

$$\|u_{\lambda,m}(t)\| \leqq Er + \delta(r)E[f(C)C+G] \leqq C \quad (t \in [0,\delta(r)])$$

$\|x\| \leqq r \leqq C$ よりすべての m について $\|u_{\lambda,m}(t)\| \leqq C$ となり

$$\|u_{\lambda,m}(t) - u_{\lambda,m-1}(t)\| \leqq \delta(r)Ef(C)\|u_{\lambda,m-1}(t) - u_{\lambda,m-2}(t)\|$$

となる。$\delta(r)Ef(C) \leqq 1/2$ ゆえ $u_{\lambda,m}(t)$ は $[0,\delta(r)]$ 上で一様収束し，$(DS:x)_\lambda$ の解 $u_\lambda(t;x)$ を定める。また

族 $\{u_\lambda(\cdot:x) \mid \|x\| \leqq r,\ 0<\lambda<1/\omega\}$ が $[0,\delta(r)]$ 上で一様有界となる。　　Q.E.D

Lemma 1. より各 x について，次の様な $\Delta(x)>0$ が定まる。

$$\Delta(x) = \sup\left\{ \delta \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{十分小さい } \lambda_0>0 \text{ に対し,} \\ (DS:x)_\lambda\ (0<\lambda<\lambda_0) \text{ が } [0,\delta] \text{ 上で一様} \\ \text{有界な解の族 } \{u_\lambda(\cdot:x) \mid 0<\lambda<\lambda_0\} \text{ を持つ。} \end{array} \right\}$$

<u>Lemma 2.</u>　$[0,\Delta(x)) \cap [0,T_{max}(x))$ の compact subinterval 上で差分系 $(DS:x)_\lambda$ の解 $u_\lambda(\cdot:x)$ は積分方程式 $(IE:x)$ の解 $u(t;x)$ に一様収束する。$(\lambda \downarrow 0)$.

(Proof)　$s < \min\{\Delta(x), T_{max}(x)\}$ とすると $[0,\delta]$ 上で一様有界な族 $\{u_\lambda(\cdot:x) \mid 0<\lambda<\lambda_0\}$ と $(IE:x)$ の解 $u(\cdot:x)$ がある。まず $u_\lambda(t:x)$ は

$$u_\lambda(t;x) = (I-\lambda A)^{-[t/\lambda]}x + \int_\lambda^{[t/\lambda]\lambda+\lambda} (I-\lambda A)^{-[t/\lambda]\lambda-[\xi/\lambda]+1} F\, u_\lambda(\xi:x)\, d\xi$$

と表わせる。これより積分不等式

$$\|u(t:x) - u_\lambda(t,x)\| \leqq K_\lambda + L\int_0^t \|u(\xi:x) - u_\lambda(\xi:x)\|\, d\xi$$

を導く。ただし K_λ, L は定数, $K_\lambda \to 0$ $(\lambda \to 0+)$。ここで Gronwall 式の評価を行い, 一様収束を示す。詳細は省略 (Q.E.D)

<u>Theorem 3.</u> 積分方程式 $(IE:x)$ $((IE:s,x))$ の解は, その存在する最大区間 $[0, T_{max}(x))$ $([0, T_{max}(s,x)))$ の compact subinterval 上で差分系 $(DS:x)_\lambda$ $((DS:s,x)_\lambda)$ の解で一様に近似される。

(proof) time に depend しない場合についてのみ示す。Lemma 2. より $\Delta(x) \geqq T_{max}(x)$ が示されればよい。$\Delta(x) < T_{max}(x)$ として矛盾を導く。$C = 2\sup\{\|u(t,x)\| \mid t \in [0, \Delta(x)]\}$ とおき, $s_\lambda = [(\Delta(x) - \frac{1}{2}\delta(C))/\lambda]\lambda + \lambda$,

$$x_\lambda = u_\lambda(s_\lambda ; x)$$

とおく。このとき十分小さい λ について $\|x_\lambda\| \leqq$ となる よって差分系 $(DS:x_\lambda)_\lambda$ を考えると $[0, \delta(C)]$ 上で一様有界な解の族 $\{u_\lambda(\cdot : x_\lambda) \mid 0 < \lambda < \lambda_0\}$ が有る。ここで

$$\hat{u}_\lambda(t:x) = \begin{cases} u_\lambda(t, x) & , \\ u_\lambda(t - s_\lambda : x) & s_\lambda \leqq t \leqq s_\lambda + \delta(C) \end{cases}$$

とおくと, $s_\lambda + \delta(C) \geqq \Delta(x) + \frac{1}{2}\delta(C)$ となっているから $\{\hat{u}_\lambda(\cdot : x)\}$ は $[0, \Delta(x) + \frac{1}{2}\delta(C)]$ 上の一様有界な $(DS:x)_\lambda$ 解の族。これは $\Delta(x)$ の定義に矛盾 (Q.E.D.)

実際には $\Delta(x) = T_{max}(x)$ が示される。

$S(t)$ の exponential formula について考える。いま

$T < T_{max}(x)\ (= \Delta(x))$ とすると十分小さい λ_0 で $(DS: x)_\lambda$ の解 u_λ^n は $\|u_\lambda^n\| \leqq C\ (n\lambda \in [0, T],\ 0<\lambda<\lambda_0)$ となる。

F の $\{x \mid \|x\| \leqq C\}$ への制限を F_C とすれば $(DS: x)_\lambda$ は

$$(I - \lambda A - \lambda F_C) u_\lambda^n = u_\lambda^{n-1},\quad u_\lambda^0 = x$$

となり $\lambda_0 < (\omega + f(c))^{-1}$ とすれば

$$u_\lambda^n = (I - \lambda A - \lambda F_C)^{-n} x$$

となり，収束は Theorem 3 で保証されているから

$$(EF) \qquad S(t)x = \lim_{n\to\infty} (I - \lambda A - \lambda F_C)^{-1} x \qquad (t \in [0, T_{max}(x)])$$

と表わせる。また同様に time depend の場合，すなわち $(CP: s, x)$ に応ずる解作用素 $V(t,s)$ (nonli. evolution op)

$$V(t,s)x = \lim_{\lambda\to 0+} \prod_{i=1}^{[(t-s)/\lambda]} (I - \lambda A(s+i\lambda) - \lambda F(s+i\lambda))^{-1} x$$

と表わせる。この場合，$t \longmapsto [A(t)+F(t)]x$ は Lipshitz 連続性は仮定していない。

$S(t)$ の性質について考える。まず domain $D(S(t))$ は X 全体とはならず t に依存する。また $D(S(t))$ は X の open set である事が示される。次に，$t \longmapsto S(t)x$ は連続であり，各 t について $S(t)$ は local Lipshitzian，すなわち

"$\forall C > 0\ \forall T > 0\ \exists \omega(C,T) > 0$ s.t.

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leqq e^{\omega(C,T)t} \|x - y\|$$

$$(t \in [0,T];\ \|x\|, \|y\| \leqq C)$$

となる。

3. 応用 、 前章のTheorem 3 及び $S(t)$ が (EF) で表現される事の応用として

<u>Theorem</u> $F: X \to X$ が連続的Fréchet微分可能とすると $S(t)$ もそうなり、また $S(t)x$ $(x \in D(A))$ は Cauchy 問題 $(CP:x)$ の C^1-solution を与える。

を示す。(一般には、F がLipshitzであっても、$S(t)x$ の t についての微分可能性は保証されない。)

F の x における (F)-derivative を $dF(x)$ と表わす，すなわち

$$F(x+w) - Fx = dF(x)w + o(\|w\|)。$$

また $J_\lambda = (I - \lambda A - \lambda F_c)^{-1}$ と表わす。

<u>Lemma 3.1.</u> $x \longmapsto (I - \lambda A - \lambda F_c)^{-m} x$ は連続的Fréchet微分可能

(Proof) $x = [I - \lambda A - \lambda F_c) J_\lambda x$ より

$$w = (I - \lambda A - \lambda F_c) J_\lambda (x+w) - (I - \lambda A - \lambda F_c) J_\lambda x$$
$$= (I - \lambda A - \lambda\, dF(J_\lambda x))(J_\lambda(x+w) - J_\lambda x)$$
$$+ \lambda o(\|J_\lambda(x+w) - J_\lambda x\|)$$

よって $J_\lambda(x+w) - J_\lambda x = [I - \lambda A - \lambda dF(J_\lambda x)]^{-1} w$
$$+ \lambda [\ \cdot\ \cdot\ ]^{-1} o(\|J_\lambda(x+w) - J_\lambda x\|)$$

ただし $\lambda < [\omega + f(c)]^{-1}$. これより J_λ は (F)-微分可能

また $\|[I - \lambda A - \lambda dF(J_\lambda x)]^{-1} - [I - \lambda A - \lambda dF(J_\lambda y)]^{-1}\|$
$$\leq (1 - \lambda \omega_c)^{-2} \| dF(J_\lambda x) - dF(J_\lambda y)\|$$

よって $dJ_\lambda(x) = [I - \lambda A - \lambda dF(J_\lambda x)]^{-1}$ は連続，よって

$J_\lambda = [I-\lambda A-\lambda F_c]^{-1}$ の積は連続的Fréchet微分可能

(Q.E.D.)

上のLemmaより $J_\lambda^m = (I-\lambda A-\lambda F_c)^{-1}$ の(F)微分は

$$J_\lambda^m(x+w) - J_\lambda^m x = \prod_{i=1}^{m}(I-\lambda A-\lambda dF(J_\lambda^i x))^{-1} w + o_\lambda^m(\|w\|)$$

で与えられる。$n=[t/\lambda]$ として $\lambda\to 0+$ とすれば上式の左辺は $S(t)(x+w) - S(t)x$ に収束する。また $o_\lambda^m(\|w\|)$ は $\sup_{\lambda,t} o_\lambda^{[t/\lambda]}(\|w\|) = o(\|w\|)$ を示す事ができる。(詳細略)。よって $\lim_{\lambda\to 0+}\prod_{i=1}^{[t/\lambda]}(I-\lambda A-\lambda dF(J_\lambda^i x))^{-1}x$ が存在し, bounded linear op. を定める事を示せばよい。

簡単な計算により

$$\left\|\prod_{i=1}^{m}(I-\lambda A-\lambda dF(J_\lambda^i x))^{-1} - \prod_{i=1}^{m}(I-\lambda A-\lambda dF(S(i\lambda)x))^{-1}\right\|$$

$$\leqq (1-\lambda\omega_c)^{-2m}\lambda\sum_{i=1}^{m}\|dF(J_\lambda^i x) - dF(S(i\lambda)x)\|$$

$$\longrightarrow 0 \quad (m\lambda\in[0,T],\ \lambda\to 0+)$$ が示される。

よって $w_\lambda^m = \prod_{i=1}^{m}[I-\lambda A-\lambda dF(S(i\lambda))]^{-1}w$ について考えればよい。w_λ^m は差分系

$$(W)_\lambda \quad \begin{cases} [w_\lambda^m - w_\lambda^{m-1}]/\lambda = [A+dF(S(i\lambda))]w_\lambda^m \\ w_\lambda = w \end{cases}$$

を満す。さらにこれはCauchy問題

$$(CPW) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}w(t) = (A+dF(S(t)))w(t) \\ w(0) = w \end{cases}$$

の discrete version として見なせる。よって前章の Theorem 3 を用いれば, w_λ^m の収束が言え,

$$d\mathcal{S}(t)(x)w = \lim_{\lambda\to 0}\prod_{i=1}^{[t/\lambda]}(I-\lambda A-\lambda dF(J_\lambda^i x))^{-1}x$$

で与えられる。

写像 $(t, x, w)\longmapsto d\mathcal{S}(t)(x)$ の連続である事が示される。(詳細は略) 次に $\mathcal{S}(t)x$ $(x\in D(A))$ を考える。

$$[\mathcal{S}(t+h)x-\mathcal{S}(t)x]/h = d\mathcal{S}(t)(x)[\mathcal{S}(h)x-x]/h + o(\|\mathcal{S}(h)x-x\|)/h,\quad h>0$$

さて
$$[\mathcal{S}(h)x-x]h^{-1} = [T(h)x-x]h^{-1} + h^{-1}\int_0^h T(h-\xi)F\, u(\xi;x)d\xi$$

右辺第1項は Ax, 第2項は Fx に行く.

よって $\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)x = d\mathcal{S}(t)(x)(A+F)x$

これは $\mathcal{S}(t)x$ $(x\in D(A))$ が C^1-級である事を示している。

また

$$[\mathcal{S}(t+h)x-\mathcal{S}(t)x]/h = h^{-1}[T(h)-I]\mathcal{S}(t)x + h^{-1}\int_t^{t+h}T_{t+h-\xi}F\mathcal{S}(\xi)x\,d\xi$$

$h\to 0+$ とすれば左辺は $\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)x$ となっており また右辺第2項は常に $F\mathcal{S}(t)x$ に収束する。よって右辺第一項は $A\mathcal{S}(t)x$ に行く事となる。

以上より $x\in D(A)$ のとき

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)x = d\mathcal{S}(t)(x)(A+F)x = (A+F)x.$$

(終)

Volterra型 半線型 拡散方程式について

山田義雄　名大・理

1 序

Volterra [7] は、数種の生物間の生存競争を数学的モデルとした著書の中で、特に、prey と predator の間の相互作用を記述する方程式として

$$\begin{cases} \dfrac{u_t}{u} = a - bv \\ \dfrac{v_t}{v} = -p + \int_0^t g(t-s)u(s)ds \end{cases}$$

の形の微積分方程式系を提起した。但し、u, v はそれぞれ、prey, predator の個体密度を表す。通常よく知られているモデルは $\int_0^t g(t-s)u(s)ds$ を gu の形で置き換えたものであるが、Volterra は u をえさとして、v の新個体が生れるまでの期間 (e.g. 妊娠期間) があることを考慮したわけである。vの変化に対しては過去の履歴が "遅れ" をもって影響するわけであるが、u は v に食べられると同時に個体消滅してしまうから過去の履歴は影響しない。

Volterra 以来、この方面での研究は、Cushing [1] らによって精力的にされてきた。しかし、拡散効果を考慮に入れた、偏微分方程式の研究は殆ど、なされていない。今、上の系に拡散効果を加え、拡散方程式の系として扱うこともできるが、自明に近いようなことしかわからない。とりわけ、積分項が "hereditary term" として如何なる影響を及ぼすのか、なかなか把握しにくい。

そこで、問題を単純にして、系ではなく、単独の形で扱ってみよう。Ω を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ R^n の有界領域とする。ある単一種の生物が Ω の中で生息し、次の方程式に従っているものとする：$u = u(x, t)$ を個体密度とするとき、u は

$$
(\mathrm{P})\begin{cases} u_t = \Delta u + u\left(a - bu - \int_0^t f(t-s)u(s)ds\right), & x\in\Omega,\ t\geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geqq 0\ (\not\equiv 0). & x\in\Omega \end{cases}
$$

をみたすとする. ここで, $a, b \geq 0$ 定数, $f(t)\geq 0$, 滑らかな関数. $u_0 \geq 0$ も $\bar{\Omega}$ 上の滑らかな関数で $\frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす. 方程式は いわゆる 成長方程式 の logistic term を non-delay term bu と delay term $\int_0^t f(t-s)u(s)ds \equiv f*u(t)$ に分けて 考えたものである. この問題 (P) に対し, 最近, Schiaffino [6] が 扱い,

$$
\begin{pmatrix} \min\{u_0(x);\ x\in\bar{\Omega}\} > 0, & f(t) \searrow 0 \ \text{decreasing} \\ \alpha \equiv \int_0^\infty f(t)dt < b & \end{pmatrix}
$$

の条件下で. (P) の 解 u は

$$
\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a}{b+\alpha} \quad \text{uniformly for } x\in\bar{\Omega}
$$

となることを示した.

彼の結果は, 粗く言えば, delay term の 影響が "大きくない" 時には, 通常の 成長方程式に 類似の 結果が 得られるということで, 生態学的に眺めた 結果としては そんなに 面白くないし, delay term 自身が どのような 効果を 持つかは 明確にしていない.

我々は, 問題 (P) を考えるに当り, 次の 2点を 主要目標とする.

1° (P) の 解 u の $t\to\infty$ での 挙動を 調べること. (Schiaffino の 結果を 拡張する.)

2° delay term は 如何なる 影響を 及ぼすか?

この 2点 を 念頭に入れておくが, 以下の 議論の 詳細は, 論文 [8] を 参照してほしい.

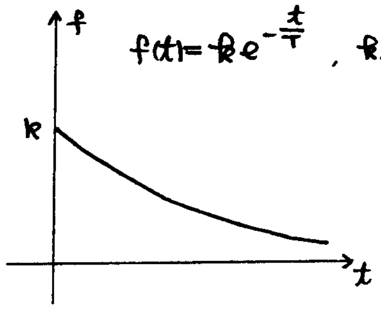
2. Kernel について.

(P) における f については 次のような 仮定を おく.

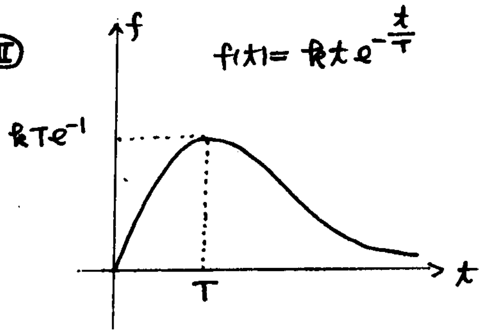
(仮定)　$f \geqq 0$ $(\not\equiv 0)$, smooth, $f \in L^1(0,\infty)$, $tf \in L^1(0,\infty)$.

以下では, $a \equiv \int_0^\infty f(t)\,dt$ とおく. kernel function f の例としては次のような２つのタイプが代表的である.

① $f(t) = k e^{-\frac{t}{T}}$, $k, T > 0$.



② $f(t) = k t e^{-\frac{t}{T}}$



Cushing は ① のタイプの kernel を "weak" delay kernel, ② のタイプの kernel を "strong" delay kernel と呼んでいる. 明確な用語を定義しよう.
$f \in L^1(0,\infty)$ の Laplace 変換を次で定義する.

$$f^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt. \qquad \mathrm{Re}\, p \geqq 0.$$

<u>定義</u>　$f \in L^1(0,\infty)$ が $\mathrm{Re}\, f^*(i\eta) \geqq 0$ for $\forall \eta \in R$ をみたすとき f は positive kernel という. 更に, ある $\gamma > 0$ が存在して, $\mathrm{Re}\, f^*(i\eta) \geqq \frac{\gamma}{1+\eta^2}$ for $\forall \eta \in R$ が成立すれば, f は strongly positive kernel という.

例えば ① のタイプ

$$f(t) = k e^{-\frac{t}{T}} \quad \Rightarrow \mathrm{Re}\, f^*(i\eta) = \frac{kT}{1+\eta^2 T^2}$$

であり, strongly positive kernel である. 一方 ② のタイプ

$$f(t) = k t e^{-\frac{t}{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\, f^*(i\eta) = \frac{kT^2(1-\eta^2 T^2)}{(1+\eta^2 T^2)^2} \geqq -\frac{kT^2}{8}$$

であり これは positive kernel ではない. 一般に $f \in C^2[0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$ が

$$(-1)^k f^{(k)}(t) \geqq 0, \qquad k = 0, 1, 2.$$

(non-negative, non-increasing, convex) であるとき, f は strongly positive kernel であることが知られている (cf. Nohel-Shea [4]).
positive kernel の概念の導入によって, どのような利益があるかは, 次の

補題より、明らかとなる。

補題2.1. $f \in L^1(0,\infty)$, $u \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ とする。$^\forall T>0$ に対して

$$\int_0^T (f*u(t), u(t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\, f^*(i\eta)\, \|\hat{u}_T(\eta)\|^2 d\eta$$

が成立する。但し、$(\cdot,\cdot) = L^2(\Omega)$-内積、$\|\cdot\| = L^2(\Omega)$-ノルム。

$$u_T(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{if } t \in [0,T] \\ 0 & \text{if } t \in (-\infty,\infty) \setminus [0,T] \end{cases}$$

$$\hat{u}_T(x,\eta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t} u_T(x,t)\, dt.$$

3. 漸近挙動、 $b>0$ の場合。

$b>0$ の場合、(P)を考える。半線型放物型方程式に対する初期値・境界値問題であるから、局所解の存在、一意性については問題ない。大域解が存在するか、又、存在するとすれば、$t \to \infty$ までこめて有界となるかが問題となる。しかし、初期データが非負であるから、比較定理より次の結果が成立する。

定理3.1. (P)は次をみたす(一意的)大域解 u をもつ。

$$0 \leq u(x,t) \leq m \equiv \max\{\|u_0\|_\infty, \frac{a}{c}\}, \qquad x \in \bar{\Omega},\ t \geq 0.$$

$$|\mathrm{grad}\, u(x,t)| \leq M, \qquad x \in \bar{\Omega},\ t \geq 0.$$

但し、$\|\cdot\|_\infty =$ sup. norm、M はある正定数。

更に、 $u(x,t) > 0$ if $x \in \bar{\Omega}$, $t>0$.

定理3.1により、有界な大域解が存在するから、$t \to \infty$ での挙動を考えよう。

<u>定理 3.2.</u> $\beta = \mathrm{Inf}\,\{\mathrm{Re}\, f^*(i\eta)\ ;\ \eta \in \mathbb{R}\}$ とおく. $b+\beta>0$ ならば

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a}{b+\alpha} \qquad \text{uniformly for } x\in\overline{\Omega}$$

が成立する.

<u>証明の概略</u> $a=0$ の場合は自明であるから. $a>0$ の場合を考える. $u^* \equiv \frac{a}{b+\alpha}$ とおき, 非負汎関数

$$E_0(u) \equiv \int_\Omega \{u(x) - u^* - u^* \log \frac{u(x)}{u^*}\}\,dx$$

を定義する. 方程式は u^* を用いて

$$u_t = \Delta u + u\{-b(u-u^*) - f*(u-u^*) + \int_t^\infty f(s)ds\cdot u^*\}$$

と書改められるから. $E_0(u(t))$ を t について微分すれば,

$$\frac{d}{dt}E_0(u(t)) = \int_\Omega u_t\,(1-\frac{u^*}{u})\,dx$$

$$= -\int_\Omega u^*\cdot \frac{|\mathrm{grad}\, u|^2}{u^2}dx - b\,\|u(t)-u^*\|^2 - (f*(u-u^*)(t), u(t)-u^*)$$

$$+ \int_t^\infty f(s)ds\,(u^*, u(t)-u^*)$$

となる. これを t について積分すれば, $b+\beta>0$ であることと補題2.1を用いて

$$\|u(t)-u^*\|^2,\quad \|\mathrm{grad}\, u(t)\|^2 \in L^1(0,\infty)$$

となることがわかる. 後は, 例えば, Mimura-Nishida [3] の論法を用いて, $\|u(t)-u^*\|$, $\|\mathrm{grad}\, u(t)\|$ が t について $[0,\infty)$ 上一様連続であることがわかる. よって,

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)-u^*\| = \lim_{t\to\infty}\|\mathrm{grad}\, u(t)\| = 0.$$

定理3.1の結果と, $L^p(\Omega)$・ノルム $\|\cdot\|_p$ に関する関係式 $\|\cdot\|_p \le \|\cdot\|_\infty^{\frac{p-2}{p}}\,\|\cdot\|_2^{\frac{2}{p}}$ を組合せて, 次を得る.

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)-u^*\|_p = \lim_{t\to\infty}\|\mathrm{grad}\, u(t)\|_p = 0.$$

Sobolev の埋蔵定理を使えば, 定理の結論はすぐにでる.

注意　Schiaffino は kernel の大きさに制限を置いたわけであるが，定理3.2より，Ⓘ のタイプのような positive kernel に対しては，kernel の大きさに無関係に $u=u^*$ が漸近安定となることがわかる．

一方，Ⓘⓘ のタイプ $f(t)=kte^{-\frac{t}{T}}$ に対しては，$b>\frac{kT^2}{8}$ の時，$u=u^*$ が漸近安定となる．（この条件は，kernel の大きさ（k），あるいは，time delay (T) が小さいという意味で，delay term は深刻に影響しないと解釈できる．）

定理3.2 の条件 $b+\beta>0$ は $u=u^*$ の漸近安定性のための best possible な条件であることを 5. で説明する．

4. 漸近挙動，$b=0$ の場合．

f が positive kernel である場合には，delay term $f*u$ は重大な影響を及ぼさないことを 3 で示したが，実際には，non-delay logistic term と同様の効果をもつことを示そう．(P) において方程式を

$$u_t=\Delta u+u(a-f*u),\qquad x\in\Omega,\quad t\geq 0$$

で置き換える（i.e. $b=0$）．このとき，比較定理が使えないから，有界な大域解が存在するかどうか一般にはわからないが，次の結果は成立する．

定理4.1.　f を positive kernel とする．$u^*=\frac{a}{\alpha}$ に対して，$E_0(u_0)$，$\|\mathrm{grad}\, u_0\|$，$\int_0^\infty tf(t)\,dt$ が十分小さいならば，(P) は有界な大域解 u をもつ．

特に，f が strongly positive kernel ならば，この解 u は

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=u^*\qquad \text{uniformly for } x\in\overline{\Omega}$$

をみたす．

$(-1)^k f^{(k)}(t)\geq 0$ $(k=0,1,2)$ をみたす f のように，f が strongly positive kernel である場合は，delay term $f*u$ は深刻な影響を delay によって与えない．

反して，Ⓘⓘ ような "strong" delay kernel は，以下に示すように，

Hopf bifurcation をひきおこす.

5. Hopf bifurcation

一般の f に対する Hopf bifurcation を論ずることもできるが, ここでは特に $f(t)=kte^{-\frac{t}{T}}$ の場合に限って議論を進めよう. 初期値境界値問題 (P) について今までの議論より, $8b > kT^2$ ならば $u=a/b+kT^2$ が漸近安定となることがわかっている. では, $8b \leqq kT^2$ の場合はどうなるであろうか?

我々は $t \to \infty$ での行動を知りたいわけであるから (P) の代わりに

$$(P)' \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u\{a - bu - \int_{-\infty}^{t} f(t-s)u(s)ds\}, & x\in\Omega,\ t\in R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x\in\partial\Omega,\ t\in R \end{cases}$$

について考えよう. (P)′ を $u=u^*=\frac{a}{b+kT^2}$ の近傍で線型化しよう.

$$(P)'' \quad \begin{cases} v_t = \Delta v - u^*(bv + \int_{-\infty}^{t} f(t-s)v(s)ds), & x\in\Omega,\ t\in R \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0. & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

の安定性の研究が大切である. (P)″ の解を変数分離の形

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\phi_n(x)$$

で求めよう. 但し, $-\Delta$ に対する 0-Neumann 条件下での固有値問題の固有値を $0=\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \cdots$, 対応する固有関数を ϕ_n とおく.

簡単な計算から, T_n は,

$$\dot{T}_n + (\lambda_n + bu^*)T_n + u^*\int_{-\infty}^{t} f(t-s)T_n(s)ds = 0, \qquad \cdot = \frac{d}{dt},$$

をみたさなければならない. これに対して, Miller の結果 [2] がある.

$$T_n = 0 \text{ が漸近安定}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$p + (\lambda_n + bu^*) + u^* f^*(p) \neq 0 \qquad \text{for} \quad \mathrm{Re}\, p \geqq 0.$$

$f^*(p)=\frac{kT^2}{(1+pT)^2}$ に注意して, p に関する3次式に改め, Hurwitz の判定条件を用いる. 上の条件は

$$\{(bu^*+\lambda_n)T+2\}\{2(bu^*+\lambda_n)T+1\} - (a+\lambda_n)T > 0$$

と同値になり、確かめやすくなる。この条件は、$8b > kT^2$ の時は任意の m に対して成立するが、$8b \leq kT^2$ の場合には、$m \geq 1$ に対して kT^2-8b が小さいときに成立しても、$m=0$ に対しては、$kT^2=8b$, $aT=9$ の時には成立しない。

以後は、k をパラメーターとみて、$aT=9$ の場合を考えてみる。新しく、パラメーター μ を $\mu \equiv \frac{9b}{b+kT^2}$ によって導入する。($k=8b/T^2$ は $\mu=1$ に対応) このとき

$$p + bu^* + u^* f^*(p) = 0$$

は

$$D(p) \equiv p^3 + \frac{2+\mu}{T}p^2 + \frac{1+2\mu}{T^2}p + \frac{9}{T^3} = 0$$

となり、$D(p)=0$ は $\mu=1$ のとき三根 $\{-\frac{3}{T}, \pm\frac{\sqrt{3}}{T}i\}$ をもつ。これは、特に、$(P)''$ が

$$\{e^{\pm\frac{i\sqrt{3}}{T}t}\varphi_0(x)\}$$

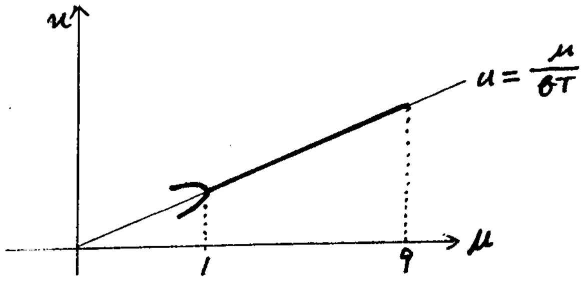
の形の周期解をもつことを意味する。さらに、$D(p)=0$ の根で $\mu=1$ のとき $\frac{\sqrt{3}}{T}i$ となるものを $p(\mu)$ で表せば、$\mathrm{Re}\,p'(\mu)<0$ である。よって、Hopf の分岐理論を適用できる状況となる。(cf. Poore [5])。

結果をまとめると、ある $\varepsilon_1>0$ が存在して、$(P)'$ は、$(aT=9)$

$$u = u(t,\varepsilon) = \frac{\mu}{bT} + \varepsilon v\left(\frac{t}{1+\varepsilon\eta(\varepsilon)}, \varepsilon\right)$$

$$\mu \equiv \frac{9b}{b+kT^2} = 1 - \varepsilon\delta(\varepsilon)$$

の形の周期解をもつ。但し、δ, η は smooth で $\delta(0)=\eta(0)=0$, $\delta'(0)>0$, $\eta'(0)>0$ をみたし、$v(t,\varepsilon)$ は周期 $\frac{2\pi T}{\sqrt{3}}$ の関数である。



しかも、上の周期解は漸近的に軌道安定となる。

参考文献

[1] J. M. Cushing; Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dyanamics, Lecture Notes in Biomathematics 20, Springer, 1977.

[2] R. K. Miller; Asymptotic stability properties of linear Volterra integrodifferential equations, J. Diff. Eqs. 10 (1971), 485-506.

[3] M. Mimura and T. Nishida; On a certain semilinear parabolic system related to the Lotka-Volterra ecological model, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 (1978), 269-282.

[4] J. A. Nohel and D. F. Shea; Frequency domain methods for Volterra equations, Advances in Math. 22 (1976), 278-304.

[5] A. B. Poore; On the theory and application of the Hopf-Friedrichs bifurcation theory, Arch. Rat. Mech. Anal. 60 (1976), 371-393.

[6] A. Schiaffino; On a diffusion Volterra equation, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 3 (1979), 595-600.

[7] V. Volterra; Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[8] Y. Yamada; On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations (preprint).

半群のリプシッツ型と指数型について

丸山 彰

バナッハ空間 X における作用素係数 A の初期値問題
$$\begin{cases} du/dt + Au = 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$
について

1) 存在性, 2) 片側大域性, 3) 連続性, 4) 適切性

が成立つとき, $S(t) : x \longmapsto u(t)$ という $D(A)$ 上の作用素を考えると $\{S(t) ; t \geqq 0\}$ は半群をなすことは周知のとおりである。ただし, 上記の条件中, 4) については これまで強い制約を受けていて 縮小性(非拡大性) i.e. $\|S(t)x - S(t)y\| \leqq \|x - y\|$ を仮定する事が多かった。

近年,「半群と発展方程式」論は, 生成条件を一般化する事がほぼしあげられた事で, むしろ解の挙動を探究する事が主要なテーマになってきており, その場合, 上記の非拡大性が これまでの結果では 有効に使われている事が多かった。解の挙動, すなわち, $t \to \infty$ のときの $S(t)x$ の状況をしらべるのが 漸近的挙動で, $t \to +0$ のときが 局所的挙動で, 前者は 主として 不動点の存在との関連, 後者は D. Brézis のもたらした近似法との関連で, 一躍脚光をあびるようになった。又, 具体的な偏微分方程式への応用でも, 関数空間及びノルムを固定し, 他の種類のものにおきかえると 素朴ないみの解が あっても 発展方程式論にスンなりとのせられない事が多かった。特に, 非線型発展方程式においては 非拡大性は かなり本質的な条件となる。本論では この非拡大性の条件を, より一般的な

ものにおきかえた場合、どのような現象がもたらされるか、について、例をあげながら検証していく。

§1. 半群のリプシッツ型

$\{S(t);\ t \geq 0\}$ は、$D(\subset X)$ 上の非線型作用素の半群とする。次の上限が存在するとき、$S(t)$ のリプシッツ型という

$$L_S(t) = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in D}} \frac{\|S(t)x - S(t)y\|}{\|x - y\|} \qquad t > 0$$

このとき、$L_S(t)$ は、劣乗法的関数 i.e. $\forall t, s \geq 0$, $L_S(t+s) \leq L_S(t) L_S(s)$ 又、$L_S(0) = 1$ となる事は明らか。劣乗法的関数については、P. R. Chernoff Product Formulas, Nonlinear Semigroups, and Addition of Unbounded Operators. (Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island ('74) に、色々な性質が紹介されている。

例1. (C_0) − 半群 (線型)

$(T_t)_{t \geq 0}$ は、X 上の (C_0) − 半群とするとき、

$L(t) = \|T_t\|$ に他ならない。特に

a) ヒルベルト空間における有界作用素を生成素とするもの、

A を生成素として、$T_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$

A が エルミート作用素 $\Rightarrow \|e^{tA}\| = e^{t\|A\|}$

A が 交代作用素 $\Rightarrow \|e^{tA}\| = 1$

b) $X = C[0, 1]$

$(T_t f)(x) = e^{-t a(x)} f(x)$ $(\min a(x) > 0)$

このとき $\|T_t\| = e^{-t\min a(i)}$

非線型の場合は、$L(t)$ が explicit に表わしがたいものが多い。

例2. $X = \mathbb{R}^2$, ノルムを $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ とする。

$$S(t)(a, b) = \begin{cases} (a - t\,\mathrm{sgn}\,a,\ b) & |a| \geqq t \\ (0,\ b - (t - |a|)\lambda\,\mathrm{sgn}\,b) & |a| + \frac{|b|}{\lambda} \geqq t \geqq |a| \\ (0,\ 0) & |a| + \frac{|b|}{\lambda} \leqq t \end{cases}$$

で与えられる半群を考える。ただし、$0 < \lambda < 1$.

$p = 1$ のとき. $L(t) \equiv 1$

$p > 1$ のとき. $L(t) > 1$

$\because$) $b > 0$, $c + \frac{d}{\lambda} \geqq t \geqq c > 0$, $d > 0$.

$S(t)(t, b) = (0, b)$
$S(t)(c, d) = (0, d - (t - c)\lambda)$

$$\frac{\|S(t)(t, b) - S(t)(c, d)\|_p^p}{\|(t, b) - (c, d)\|_p^p} = \frac{|b - d + \lambda(t - c)|^p}{|t - c|^p + |b - d|^p}$$

ここで $x = \frac{|t - c|}{|b - d|}$ とおくと、$\frac{(x + \lambda)^p}{x^p + 1} = f(x)$ とする.

$f(0) = \lambda^p$, で. $f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

かつ $f'(0) = p\lambda^{p-1} > 0$ から. 最大値が存在し、> 1. よって. $L(t) > 1$ を得る。

例3. $X = C[0,+\infty]$ (有界な連続関数の空間)

ノルムは $\|f\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$

$$S(t)f(x) = \begin{cases} f(x-t) & x \geq t \\ 1 + u(t-x) & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

ただし. u は. $\mathbb{R}$ 上の初期値問題.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\xi} \in -\beta(u) \\ u(0) = f(0) - 1 \end{cases}$$

β は $\mathbb{R}$ の maximal monotone operator.

このとき. $S(t)$ は. X 上の. 等距離半群となり. $L(t) \equiv 1$.

ここで. 上の X のかわりに. $X_{\infty,p} = C[0,+\infty] \cap L^p$ をとる. ノルムは. たとえば $\|f\|_{\infty,p} = \left(\|f\|_\infty^p + \|f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$, ただし. $\|f\|_p$ は L^p の p 乗可積分のノルムをいみする。このとき

$$\|S(t)f - S(t)g\|_{\infty,p}^p = \|f-g\|_\infty^p + \|f-g\|_p^p + \left(\int_0^t |u(\xi) - v(\xi)|^p d\xi\right)$$

ただし. v は. $\begin{cases} \dfrac{dv}{d\xi} \in -\beta(v) \\ v(0) = g(0) - 2 \end{cases}$ の解.

よって

$$\frac{\|S(t)f - S(t)g\|_{\infty,p}^p}{\|f-g\|_{\infty,p}^p} = 1 + \frac{2}{\|f-g\|_\infty^p}\int_0^t |u-v|^p d\xi$$

$$\leq 1 + t$$

から. $L(t) \leq (1+t)^{\frac{1}{p}}$ という評価を得る。

特に、 $\beta = I$ のとき、$u(\xi) = (f(0) - 1)e^{-t}$
により、

$$L(t) = \left(1 + \frac{1 - e^{-pt}}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得るが、これは、 $\lim_{t \to \infty} L(t) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$
で有界。したがって、$S(t)$ は、一様リプシッツ半群となる。

例4. $L(t)$ が存在しないもの。

$X = \mathbb{R}$ で、
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u \log u & u > 0 \\ \qquad = 0 & u = 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$
という初期値問題を考える。解は、一意的に定まり、これによって生成される半群は、

$$S(t)x = \begin{cases} e^{e^t \log x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

となる。$S(t)$ は、x の関数として、$[0, +\infty)$ で連続、しかし、リプシッツ型は存在しない。

∵)
$$\frac{|S(t)x - S(t)y|}{|x - y|} = \frac{|e^{e^t \log x} - e^{e^t \log y}|}{|x - y|}$$

$$= \int_y^x \frac{e^{e^t \log \xi} \cdot e^t}{\xi} d\xi \quad \text{で} \quad x, y \to 0$$
で右辺は発散することによる。

§2. 半群の指数型

$L(t)$ を半群のリプシッツ型とするとき、その生成作用素を特徴づけるため、次の、半群の指数型なるものを導入する。

すなわち，$L(t)$ が $t=0$ で微分可能で $L'(0)=\omega$ のとき，これを $S(t)$ の指数型という．
次の等式が成立つ。

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\log L(t)=\sup_{t>0}\frac{1}{t}\log L(t)=L'(0)=\omega$$

このとき，$L(t)\leqq e^{\omega t}$ がなりたち，$L(t)$ を diminate する．最小の指数関数ということができる。

Prop. 1. $S(t)$ のリプシッツ型 $L(t)$，かつ $L'(0)=\omega$ で，生成作用素が存在するとき，これは ω-dissipative．

∵） $\tau\left(x-y,\ \dfrac{x-S(h)x}{h}-\dfrac{y-S(h)y}{h}\right)$

$$=\frac{1}{h}\{\|x-y\|-\tau(x-y,\ -S(h)x+S(h)y)\}$$

$$\geqq\frac{1}{h}\{\|x-y\|-\|S(h)x-S(h)y\|\}$$

$$=\frac{1}{h}(1-L(h))\|x-y\|$$ で $h\to+0$ とする．

注．指数型が存在するためには $L(t)$ の $t=0$ の微分可能性が必要で，もし，そうでないときは，ノルムによる，生成作用素の特徴づけは不可能．（例4．は $L(t)$ すらも存在しない）

$S(t)$ が Crandall−Liggett の意味での生成作用素をもつとき，その特徴づけをするために，次に，増大型，という概念を導入する．

今，A を X における多価作用素で，$R(I+A)=X$ とする．このとき，

$$-\inf_{\substack{x_1,x_2\in D(A)\\ y_1\in Ax_1\\ y_2\in Ax_2}}\frac{\tau(x_1-x_2,\ y_1-y_2)}{\|x_1-x_2\|}=\omega_1$$

が存在するとき、これをAの増大型という。
（$\omega_1 = 0$のとき、Aは、増大作用素（accretive operator）という。

Th. I. Aは多価作用素で、$R(I+A)=X$なる、増大型ω_1のとき、

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} (I+\frac{t}{n}A)^{-n}x$$

で定義される、半群$S(t)$の指数型ω_0として、
$$\omega_0 \leqq \omega_1$$
が成立つ

Th. II. X^*が一様凸のとき、$\omega_0 = \omega_1$

Th. I は、Crandall–Liggettの定理そのままであり、Th. II は、次のlemmaと、Baillonの結果を使う。

Lemma. 1. $J_\lambda x = \lim_{h\to +0} (I+\lambda\frac{I-S(h)}{h})^{-1}x$
が存在するとき、$\omega_1 = \omega_0$

注. Aが(C_0)ー半群の生成素のとき、$\omega_0 = \omega_1$、とくに、Aが有界作用素なら
$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\|I+tA\|-1)$ にひとしい。

さて、リプシッツ型が存在しても、指数型が存在するとは、限らない。それを、[J]、の例2、例3をとりあげる事によって、しらべてみる。

例2. $S(t)$は$\mathbb{R}^2$上の半群、で、Lemma2.によって、J_λがとれるので、存在したとすると$\omega_1 = \omega_0$
しかるに、$\underbrace{\omega_1 = +\infty}_{p>1\text{のとき}}$が、次のようにしていえる。

点列 $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda}+2\right)\right)$ をとる。$S(t)$の
$b_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

生成作用素 $A_0(a, b) = \begin{cases} (\mathrm{sgn}\, a, 0) & a \neq 0 \\ (0, \mathrm{sgn}\, b) & a = 0, b \neq 0 \\ (0, 0) & a = b = 0 \end{cases}$

にあてはめたとき. $A_0 a_n = (1, 0)$. $A_0 b_n = (0, 1)$
よって

$$\frac{\tau(a_n - b_n, A_0 a_n - A_0 b_n)}{\|a_n - b_n\|_p} = \frac{(1/n)^{p-1} - (1/n)^{p-1}(\frac{1}{\lambda}+1)^{p-1}}{(1/n)^p + (1/n)^p(\frac{1}{\lambda}+1)^p}$$

$$\longrightarrow -\infty \quad (as\ n \to \infty)$$

例3.1) $X_{\infty, p} = C[0, +\infty] \cap L^p$ で ノルムを

$\|f\|_{\infty,p} = (\|f\|_\infty^p + \|f\|_p^p)^{1/p}$ とするとき

$L_p(t) \leq (1+t)^{\frac{1}{p}} \leq e^{\frac{t}{p}}$

によって. $\frac{\log L_p(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{p}$ で存在する.

2) 上記の空間で ノルムを.

$|\|f\||_{\infty,p,q} = (\|f\|_\infty^q + \|f\|_p^q)^{1/q}$ とするとき

$L_q(t)$は 存在する。 しかし. 指数型はない

事がある。 $\beta = I$ として. $1 < q < p$ とすると,

$$|\|S(t)f - S(t)g\||_{\infty,p,q}^q = \|f-g\|_\infty^q + (\|f-g\|_p^p + \int_0^t |f(0) - g(0)|^p e^{-p(t-x)} dx)^{\frac{q}{p}}$$ から

$L(t) = \left(1 + \left(\frac{1-e^{-pt}}{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$. これは. $t = 0$で

微係数が存在しないので $\omega_0 = +\infty$

多重固有値からの分岐の群論的考察

高橋勝雄(東大教養)

§1 序

化学や生物学などで，空間的(時間的)なパターンを示す現象を記述しようという反応拡散方程式がいくつかある。特に，パラメータの変化によりパターンが生成消滅するのを，自明解からの他の解(パターンを表わすと考えられる解)の分岐として説明しようとされている。その際，先ずやるべきことは，"パラメータの値の変化につれて，自明解の近傍でどのような解が，どのように現われるか"という分岐のダイアグラムを決定することである。

分岐が起こるのは，線形化した問題が固有値0をもつようなパラメータの値に対してであり，その値の付近で分岐ダイアグラムを決定することは，ある有限次元の方程式(分岐方程式という)の，原点のまわりの解集合を決定することと同値である。固有関数系が良くわかる場合，固有値0の多重度mが1なら分岐ダイアグラムは決定できる。しかし，$m \geqq 2$となると困難が生じる(§2)。このような とき，問題の対称性に基づ

いた群論的な考察が役立つことがある(§3)。一般に反応拡散系に限らず，この種の問題を考えるときは，パターンや領域の対称性が重要であり，それが反映して固有空間にある群が働くだろう。その働き方がわかれば，たとえ固有関数系の様子が良くわからなくても，従がって，§2(注2)のように具体的に計算ができなくても，分岐方程式の型について多くの情報が得られるというのがこの方法の重要な点である。

§2

自明解のまわりで問題を書き直した次の定常問題を考える。

$$
(1)\quad \begin{cases} G = D\Delta_\omega U + AU + N[U] = 0 & \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}
$$

ここで $U = {}^t(u, v)$，$D = \begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix} > 0$，$\Delta_\omega = \partial_x^2 + \omega\partial_y^2$

$A = (a_{ij})$，N は解析的で $N[U] = \sum_{j\geq 2}^{\infty} N^{(j)}[U]$，

ω は長方形での問題を変数変換して正方形に直したことによるゆがみである。(1)の自明解 $U=0$ からの分岐をパラメータを D として扱う。$H = L^2 \times L^2$，$H_0 = \overline{\{\cos\pi kx \cos\pi ly\}_{k,l}}^{H_2} \times \overline{\{\cos\pi kx \cos\pi ly\}_{k,l}}^{H_2}$ とし，$G(D, U)$ を $R_+^2 \times H_0 \to H$ で考える。

prop.1
[仮定 A]　$\det A>0,\ \mathrm{tr} A<0,\ a_{11}>0$,

ならば $G_U(D,0)=L(D)=D\Delta_w+A$ について, $L(D)$が

0を固有値にもつのは, Dが

(2) $$\det\left(-D\pi^2(k^2+w\ell^2)+A\right)=0$$

をみたすときである。固有値 0 は semisimple で, その

多重度は (2) を満たす pair (k,ℓ) の数に等しい。

又, すべての $(k,\ell)\in N^2$ に対して $\det(-D\pi^2(k^2+w\ell^2)+A)>0$

であるような D に対し, 自明解は漸近安定である。

(注意 1)　(2)をみたす $D=\begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2\end{pmatrix}$ は d_1,d_2 平面の双曲線。

以下, $D=D^c$ は次を満たすとする.

[仮定 D^c]　$L(D^c)$ は 0を多重度 m の固有値にもち,

$$\det(-D^c\ell_{p_jq_j}+A)=0,\ (j=1,\cdots,m),\ \ell_{p_jq_j}=\pi^2(p_j^2+wq_j^2).$$

このD^cのまわりの $D=D^c+\begin{pmatrix}\sigma_1 & \\ & \sigma_2\end{pmatrix}$ で, (1) の自明解の

近傍の解集合を決定するという分岐問題は, 次の

Ljapunov-Schmidt の方法で有限次元の問題に帰

着される。

$$(-D^c\ell_{p_jq_j}+A)c_j=(-D^c\ell_{p_jq_j}+A)^*c_j^*=0\quad (j=1,\cdots,m),$$

$$\varphi_{p_jq_j}=C_{p_jq_j}\cos\pi p_jx\cos\pi q_jy\quad (C_{p_jq_j}\text{ は正規化定数}),$$

とおく。 $c_j\cdot c_k^*=\delta_{jk}$ としておく。 $\cdot$ は R^2の内積。

prop.2 (i) $L(D^c)$ は index 0 の Fredholm 型で、

$\mathrm{Ker}\, L(D^c) = \mathrm{Span}\{v_1, \cdots, v_m\}$, $\mathrm{Ker}\, L(D^c)^* = \mathrm{Span}\{v_1^*, \cdots, v_m^*\}$

である。ただし $v_j = \Phi_j \varphi_{p_j q_j}$, $v_j^* = \Phi_j^* \varphi_{p_j q_j}$。

(ii) $\pi v = \sum_{j=1}^{m} \langle v, v_j^* \rangle v_j$, ただし, $\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$\langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2}$, とすると, ある $R_+^2 \times \mathrm{Ker}\, L(D^c)$ の

0 の nbd. $S \times \mathcal{U}$ と $V: S \times \mathcal{U} \longrightarrow (I - \pi) H_0$ (解析的) が存在して, $(D^c, 0)$ のまわりで $G = 0$ は

(3) $F(\sigma, v) = \pi G\left(D^c + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ & \sigma_2 \end{pmatrix}, v + V(\sigma, v)\right) = 0$,

$(\sigma, v) \in S \times \mathcal{U}$ と同値である。ここで,

$V = o(|\sigma| + \|v\|)$ である。

従がって $\mathrm{Ker}\, L(D^c) \ni v = \sum_{j=1}^{m} \xi_j v_j$, $F = \sum_{j=1}^{m} f^{(j)} v_j$

とすれば, 次の連立方程式系(分岐方程式)

(4) $f^{(j)}(\sigma, \xi_1, \cdots, \xi_m) = 0$ $(j = 1, \cdots, m)$

の原点のまわりの解を調べればよい。この解に対して, 才一近似を $\left(D^c + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ & \sigma_2 \end{pmatrix}, \sum \xi_j v_j\right)$ とする (1) の解が得られる。

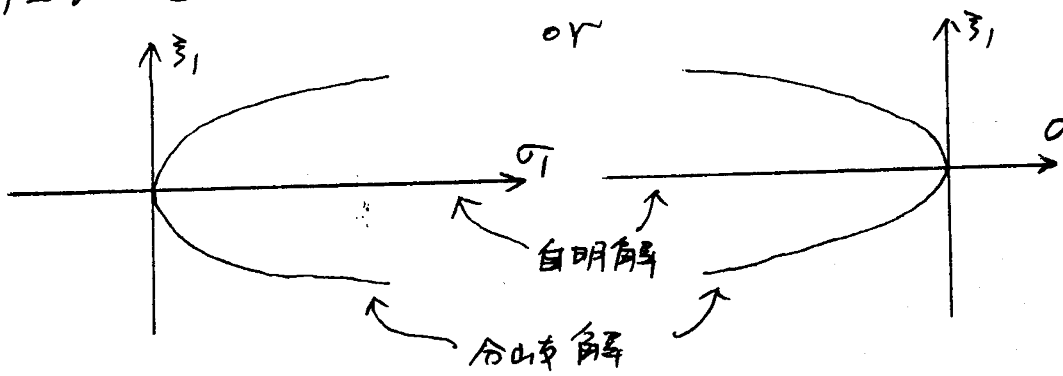
(注意.2) $f^{(j)}$ は, 陰関数定理により構成する V を使って定義されるので, (4) を解くには, 先ず, $f^{(j)}$ の巾級数展開の低次の項を計算し, それをもとに $f^{(j)} = 0$ の解を考察するのが普通である。今の場合, 固有関数系は,

完全に良くわかっているので、原理的には、いくらでも高次の項まで計算できる。

(注意3) 上の方法は $m=1$ に対しては直ちにうまくいく。$\langle \varphi_{p_1q_1}^{2}, \varphi_{p_1q_1} \rangle = 0$, $\langle \varphi_{p_1q_1}^{3}, \varphi_{p_1q_1} \rangle \neq 0$ なので、

$$f^{(1)} = a_1'\sigma\xi_1 + a_3\xi^3 + \text{higher order terms}$$

が $f^{(1)}$ の generic な型である。$a_1'\sigma\xi_1 + a_3\xi^3 = 0$ の解をもとに $f^{(1)}=0$ の解が陰関数定理で得られる。これを v_1 モードの primary branch という。分岐ダイアグラムは例えば $\sigma_2 = 0$ に対して



となる

さて $m=2$ ならどうだろうか。上の考察から、v_1, v_2 をそれぞれモードとする primary branch が得られるだろう。今 (p_j, q_j) $j=1,2$ が $(p_1, q_1) = (2p_2, 2q_2)$ としよう。このとき分岐方程式は

$$(5)\quad \begin{cases} f^{(1)} = a_1\cdot\sigma\xi_1 + Q\xi_2^2 + R\xi_1^3 + S\xi_1\xi_2^2 + \text{h.o.t.} = 0, \\ f^{(2)} = \tilde{a}_1\cdot\sigma\xi_2 + \tilde{Q}\xi_1\xi_2 + \tilde{S}\xi_1^2\xi_2 + \tilde{R}\xi_2^3 + \text{h.o.t.} = 0, \end{cases}$$

となり $Q\hat{Q}\neq 0$ である。 $a, Q, \cdots \hat{Q}$ は定数.

$$\begin{cases} a\cdot\sigma\,\xi_1 + Q\xi_2^2 = 0 \\ \hat{a}\cdot\sigma\,\xi_2 + \hat{Q}\xi_1\xi_2 = 0 \end{cases}$$

(reduced eq. という。)

を解いて、ν_1 モードの primary branch に対応すると考えられる $\{\xi_2=0,\ \hat{a}\cdot\sigma=0\}$ と、ν_2 モードの primary branch と、ν_1 モードの primary branch からの第2次分岐の枝 (secondary branch) とに対応すると考えられる $\{a\cdot\sigma+Q\xi_1=0,\ Q\hat{Q}\xi_2^2-(a\cdot\sigma)(\hat{a}\cdot\sigma)=0\}$ とが得られる。ところが、前者に対しては $f^{(1)}, f^{(2)}$ の Jacobian が退化してしまって、$f^{(1)}=f^{(2)}=0$ の解を陰関数定理でつくることはできない。$f^{(2)}$ の別の低次の項を使って、別の reduced eq. を考えても、やはり困難である。これは低次の項の情報だけを使うことにより生ずるものと考えられる。すべての次数にわたっての情報が一斉に得られないだろうか。例えば、$f^{(2)}=\xi_2\tilde{f}^{(2)}(\sigma,\xi_1,\xi_2)$ と書けたとすると、$\xi_2=0$ を $f^{(1)}$ に代入して、直ちに ν_1 モードの primary branch が得られる。このようなことは、次の群論的考察によって可能である。

§3

問題(1)に対して、これを拡張した問題$(\hat{1})$を考える。

$$(\tilde{\mathrm{I}})\quad \begin{cases} G=0 & \text{in } \tilde{\Omega}=(-1,1)\times(-1,1) \\ \text{periodic boundary condition} \end{cases}$$

これを，H, H_0 を複素化した $\tilde{H}, \tilde{H}_0$ で考える。

<u>prop.3</u>　$(\tilde{\mathrm{I}})$ の実数解で $U(-x,y)=U(x,-y)=U(x,y)$ を満たすものは (1) の解。逆も成り立つ。

問題を拡張したので；$\ker L(D^c)=\mathrm{Span}\{V_1,\cdots,V_{2m}, V_{2m+1},\cdots,V_{4m}\}$，$V_k=c_k\tilde{c}_{p_kq_k}e^{-\pi i(p_kx+q_ky)}$ $(1\leq k\leq m)$，

$V_{m+k}=c_k\tilde{c}_{p_kq_k}e^{-\pi i(-p_kx+q_ky)}$ $(1\leq k\leq m)$，

$V_{2m+k}=\overline{V_k}$，　$V_{3m+k}=\overline{V_{m+k}}$　$(1\leq k\leq m)$ となる。

$\tilde{c}_{p_kq_k}$ は正規化定数。ただし $p_k=0$ なら V_{m+k}, V_{3m+k} は考えず，$q_k=0$ なら V_{2m+k}, V_{3m+k} は考えない。

$(\tilde{\mathrm{I}})$ に対してもLjapunov-Schmidtの方法が適用できる。(1) の $\pi, V(\sigma, U), F, f^{(j)}, \xi_j$ に対応するものをそれぞれ $\tilde{\pi}, \tilde{V}, \tilde{F}, \tilde{f}^{(j)}, z_j$ と書こう。

<u>prop.4</u>　$(\tilde{\mathrm{I}})$ に対する分岐方程式

$$(6)\qquad \tilde{f}^{(k+cm)}(\sigma, z_1,\cdots,z_{4m})=0 \qquad (1\leq k\leq m,\ 0\leq c\leq 3)$$

の解で　$z_{k+cm}=\xi_k\in\mathbb{R}$　$(1\leq k\leq m,\ 0\leq c\leq 3)$ を満たすものは (4) の解である。

さて，次により生成されるトーラス $\tilde{\Omega}$ 上の変換群 $\mathcal{G}$ を考える。　$g_{\alpha,\beta}:(x,y)\longmapsto(x+\alpha, y+\beta)$　$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$g_{s_1}: (x,y) \longmapsto (x,-y)$, $g_{s_2}: (x,y) \longmapsto (-x,y)$, そして

$\tilde{H}_0$, $\tilde{H}$ 上の変換 T_g; $(T_g U)(x,y) = U(g^{-1}(x,y))$ $g \in \mathfrak{g}$

を考える。Tは $\mathfrak{g}$ の $\tilde{H}_0$, $\tilde{H}$ における表現である。

prop.5 (i) $\tilde{G}$ はこの表現について covariant. i.e.,

$$T_g \tilde{G}(D,U) = \tilde{G}(D, T_g U) \quad \text{for } \forall D, \forall U, \forall g .$$

(ii) $\tilde{F}$も, T_g を $\mathrm{Ker}\, L(D^c)$ に制限したものについて covariant.

(注意4) 問題(1)のままでは有限群しか考えられないが、(7)では連続群が考えられるようになった。

これより，次がわかる。

prop.6 (i) $f^{(k)}(\xi_1 \cdots \xi_m) = 0 \quad 1 \le k \le m, \quad \longleftrightarrow$

$$\tilde{f}^{(k)}(\xi_1 \cdots \xi_m, \xi_1 \cdots \xi_m, \xi_1 \cdots \xi_m, \xi_1 \cdots \xi_m) = 0 \quad 1 \le k \le m .$$

(ii)

$$(7) \quad \tilde{f}^{(k)}(z_1 \cdots z_{4m}) = e^{\pi i (p_k \alpha + q_k \beta)} \tilde{f}^{(k)}(e^{-\pi i (p_1 \alpha + q_1 \beta)} z_1, \cdots, e^{-\pi i (-p_1 \alpha + q_1 \beta)} z_{m+1}, \cdots, e^{-\pi i (-p_1 \alpha - q_1 \beta)} z_{2m+1}, \cdots, e^{-\pi i (p_1 \alpha - q_1 \beta)} z_{3m+1}, \cdots)$$

for $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le m$.

prop.7 $f^{(k)} = \sum_{t_1 \cdots t_m} a^{(k)}_{t_1 \cdots t_m} \xi_1^{t_1} \cdots \xi_m^{t_m}$ $1 \le k \le m$ としたとき,

$a^{(k)}_{t_1 \cdots t_m}(\sigma) \neq 0$ なら，次を満たす $r_j, s_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(1 \le j \le m)$ が存在する： $0 \le r_j, s_j \le t_j$,

$$(8) \quad \begin{aligned} & p_k(t_k - 2r_k - 1) + \sum_{j \neq k} p_j (t_j - 2r_j) = 0 , \\ & q_k(t_k - 2s_k - 1) + \sum_{j \neq k} q_j (t_j - 2s_j) = 0 . \end{aligned}$$

これから，$m=2$ の場合には次を得る。

Cor. 8 (i) (p_j, q_j) が (イ) $p_1 q_1 \neq 0$，$(p_1, q_1) = (\kappa p_2, \lambda q_2)$ $\kappa \equiv \lambda \pmod 2$，あるいは (ロ) $p_1 = p_2 = 0$，$q_1 = \lambda q_2$，又は，(ハ) $q_1 = q_2 = 0$，$p_1 = \lambda p_2$ ならば，$f^{(j)}$ は次の形に書ける：

$$\begin{cases} f^{(1)} = \xi_1 \varphi^{(1)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) + \xi_2^{\tau} \psi^{(1)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) \\ f^{(2)} = \xi_2 \varphi^{(2)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) + \xi_1 \xi_2^{\tau-1} \psi^{(2)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) \end{cases},$$

$\tau = \max(\kappa, \lambda)$，$\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}$ は analytic.

(ii). (i) で index 1, 2 を入れかえたものが成立.

(iii). (p_j, q_j) がその他の場合には，$f^{(j)}$ は次の形に書ける。

$$\begin{cases} f^{(1)} = \xi_1 \varphi^{(1)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) + \xi_1^{\mu+1} \xi_2^{\nu+2} \psi^{(1)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) \\ f^{(2)} = \xi_2 \varphi^{(2)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2) + \xi_1^{\mu+2} \xi_2^{\nu+1} \psi^{(2)}(\sigma, \xi_1^2, \xi_2^2). \end{cases}$$

(注意 5) これより Weierstrass の準備定理を使って，$m=2$ の場合の分岐ダイアグラムは次の代数方程式で記述される：(i) なら，

$$\begin{cases} a^{(1)}_{3,0}(0)\xi_1^3 + \{a^{(1)}_{1,0}(\sigma) + a^{(1)}_{1,2}(0)\xi_2^2\}\xi_1 + a^{(1)}_{0,\tau}(0)\xi_2^{\tau} = 0, \\ \begin{cases} \xi_2 \cdot \{a^{(2)}_{0,1}(\sigma) + a^{(2)}_{1,1}(0)\xi_1\} = 0 & \text{for } \tau = 2, \\ \xi_2 \cdot \{a^{(2)}_{0,1}(\sigma) + a^{(2)}_{2,1}(0)\xi_1^2 + a^{(2)}_{1,2}(0)\xi_1\xi_2 + a^{(2)}_{0,3}(0)\xi_2^2\} = 0 & \text{for } \tau = 3, \\ \xi_2 \cdot \{a^{(2)}_{0,1}(\sigma) + a^{(2)}_{2,1}(0)\xi_1^2 + a^{(2)}_{0,3}(0)\xi_2^2\} = 0 & \text{for } \tau \geqq 4, \end{cases} \end{cases}$$

(ii) は (i) で index 1.2 を入れかえたもの。(iii) は，

$$\begin{cases} \xi_1 \cdot \{ a^{(1)}_{1.0}(\sigma) + a^{(1)}_{3.0}(0)\,\xi_1^2 + a^{(1)}_{1.2}(0)\,\xi_2^2 \} = 0 , \\ \xi_2 \cdot \{ a^{(2)}_{0.1}(\sigma) + a^{(2)}_{2.1}(0)\,\xi_1^2 + a^{(2)}_{0.3}(0)\,\xi_2^2 \} = 0 . \end{cases}$$

（注意6）　§2 の例は，(i)の $\tau=2$ の場合である。このとき $\xi_2=0$ とすると $f^{(2)}=0$ となるので，直ちに，σ_1，σ_2 モードの primary branch が分岐していることがわかる。$m \geqq 3$ の場合は，状況は大変複雑になっているが，$m=2$ の場合に帰着させることによってある程度調べられる。さて，領域として別なもの，たとえば円板，円環などを考えると，固有関数は Sturm-Liouville 問題の解を使って書かれるので注意2のような計算は困難になる。しかし，この場合にも群論的考察は有用である。prop.7 に相当する情報としては，$f^{(k)}$ の満たすべき，ある種の微分方程式が得られる。

References

- D. H. Sattinger, Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lect. Note in Math., Univ. Chicago. (1978).
- J. P. Keener, Secondary bifurcation and multiple eigenvalues, SIAM J. Math. 37 (1979)

Hilbert空間における双曲型線型発展方程式について

広島大.理　前田幹男

本稿では、Hilbert空間における双曲型線型発展方程式

$$\circledast \qquad du/dt = A(t)u + f(t), \quad 0 \leqq t \leqq T$$

の一般論とその応用について研究する。

次の(C.1)〜(C.4)が⊛に課す私たちの条件である。

(C.1) X, Yをともに(複素)Hilbert空間とし、YはX内に稠密かつ、連続的に埋め込まれているとする。

Xにおいて⊛を考える。またYは⊛の"初期値の空間"である。以下においては、Xのノルム, 内積をそれぞれ$\| \ \|$, $(\ , \ )$と表わし、Yのそれらをそれぞれ$\| \ \|_Y$, $(\ , \ )_Y$と表わすことにする。

(C.2) 各$t \in [0, T]$について、$A(t)$はXにおける閉作用素であり、ある$M \geqq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$をとると、

$$\|(\lambda - A(t_1))(\lambda - A(t_2)) \cdots (\lambda - A(t_k))u\| \geqq (1/M)(\lambda - \beta)^k \|u\|$$

が、すべての$0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_k \leqq T$, $k = 1, 2, \cdots$, $\lambda > \beta$, $u \in D((\lambda - A(t_1))(\lambda - A(t_2)) \cdots (\lambda - A(t_k)))$に対して成立する。

(C.3) 各$t \in [0, T]$について、$Y \subseteq D(A(t))$, $A(t) \in B(Y, X)$であり、$A : [0, T] \longrightarrow B(Y, X)$は強連続である。ここに、$B(Y, X)$はYからXへの有界線型写像全体のなすBanach空間である。

(C. 4) X における半正定値自己共役作用素の族 $\{N(t)\}_{0\leqq t\leqq T}$ で次の (i)〜(iii) を満たすものが存在する。

(i) 各 $t\in[0,T]$ について $D(N(t)^{1/2})=Y$ が成り立つ。

(ii) ある定数 $a\geqq 0$ をとると,

$$\|N(t)^{1/2}u\|\leqq e^{a(t-s)}\|N(s)^{1/2}u\|$$

がすべての $0\leqq s\leqq t\leqq T$, $u\in Y$ に対して成り立つ。

(iii) ある定数 $c\in\mathbb{R}$ をとると,

$$\mathrm{Re}\,(A(t)u,\ N(t)u)\leqq c\,(u,\ N(t)u)$$

がすべての $t\in[0,T]$, $u\in D(N(t))$ に対して成り立つ。

条件 (C. 4) は、W. G. Faris and R. B. Lavine [1] によって証明された、ある交換子定理をもとにして作られた。

私たちの定理は次の様に述べられる。

<u>定理 1</u> 条件 (C. 1)〜(C. 4) が成り立っているとする。すると、

$$\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\,z>\beta\}\subseteq\rho(A(t)),\quad 0\leqq t\leqq T$$

であり、$\Delta=\{(t,s)\ ;\ 0\leqq s\leqq t\leqq T\}$ とおく時、X における有界線型作用素の族 $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ で次の (I)〜(IV) を満たすものが存在して唯一つである。

(I) すべての (t,r), $(r,s)\in\Delta$ に対して次の等式が成り立つ。

$$U(t,t)=I,\quad U(t,r)U(r,s)=U(t,s)$$

(II) $U:\Delta\longrightarrow B(X)$ は強連続 かつ $\|U(t,s)\|_{X\to X}\leqq Me^{\beta(t-s)}$, $(t,s)\in\Delta$ が成り立つ。ここに、$B(X)=B(X,X)$ とおいた。

(Ⅲ) すべての $(t,s)\in\Delta$ に対して、$U(t,s)Y\subseteqq Y$, $U(t,s)\in B(Y)$ かつ $U:\Delta\longrightarrow B(Y)$ は強連続である。
さらに、ある定数 $\tilde{M}\geqq 1$ をとると、$\|U(t,s)\|_{Y\to Y}\leqq \tilde{M}e^{(\beta+c)(t-s)}$, $(t,s)\in\Delta$ が成り立つ。

(Ⅳ) すべての $(t,s)\in\Delta$, $u\in Y$ に対して次の2式が成立する。

$$\partial/\partial s[U(t,s)u] = -U(t,s)A(s)u$$
$$\partial/\partial t[U(t,s)u] = A(t)U(t,s)u$$

ここに、$\partial/\partial s$, $\partial/\partial t$ は X における強微分を表わす。□

条件 (c.1) 〜 (c.4) を検討しよう。

(c.2) は、通常使われる次の (c.2)′ よりも勿論弱い。

(c.2)′ $\{A(t)\}$ は安定常数 M, β をもって安定 (*stable*) である。即ち、(c.2) および "$\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\,z>\beta\}\subseteqq\rho(A(t))$, $0\leqq t\leqq T$" が成り立つ。

(c.1) と次に述べる (c.2)″ が成り立てば、(c.2) が $\{A(t)\}$, $\{-A(t)\}$ に対して成り立つ。これについては、[2] の中の *Proposition* 3.4 の証明を参照されたい。

(c.2)″ 次の ①〜③ を満たす $\{L(t)\}_{0\leqq t\leqq T}$, $\{P(t)\}_{0\leqq t\leqq T}$ が存在する。

① 各 $t\in[0,T]$ について、$L(t)$ は X における閉作用素であり、その定義域は稠密、かつ $D(L(t))\subseteqq D(L(t)^*)$ を満たす。
さらに、ある定数 $\beta\geqq 0$ をとると

$$\|(L(t)+L(t)^*)u\|\leqq 2\beta\|u\|$$

が、すべての $t\in[0,T]$, $u\in D(L(t))$ について成立する。

② 各 $t\in[0,T]$ について、$P(t)$, $P(t)^{-1}\in B(X)$ であり、ある定数 $c_1\geqq 0$ をとると、すべての $0\leqq s\leqq t\leqq T$ に対して、

$$\|P(t)P(s)^{-1}\|_{X\to X}\leqq e^{c_1(t-s)}$$

が成り立つ。

③ 各 $t\in[0,T]$ について $P(t)A(t)=L(t)P(t)$ が成り立つ。

加藤教授は [2] の中の Theorem 6.1 で次の (c.4)′ を考察された。

(c.4)′ Y から X への同型写像の族 $\{S(t)\}_{0\leqq t\leqq T}$ があって、
$S:[0,T]\longrightarrow B(Y,X)$ は強連続微分可能であり、
各 $t\in[0,T]$ について、$S(t)A(t)S(t)^{-1}=A(t)+B(t)$, $B(t)\in B(X)$
が成り立つ。ここに、$B:[0,T]\longrightarrow B(X)$ は強連続である。

さて、(c.1), (c.4)′ および、$P(t)=I$, $0\leqq t\leqq T$ として (c.2)″ が成り立っているとしよう。$N(t)=S(t)^*\cdot S(t)$, $0\leqq t\leqq T$ とおく。ここに、$S(t)^*$ は、X における閉作用素としての $S(t)$ の共役作用素である。
すると、この $\{N(t)\}$ を用いることにより、(c.4) が $\{A(t)\}$ と $\{-A(t)\}$ に対して成り立つことがわかる。

(証) 各 $t\in[0,T]$ について $S(t)$ が X における閉作用素であることは Y の完備性からわかる。従って、von Neumann の定理によって、各 $t\in[0,T]$ について $N(t)$ は半正定値自己共役作用素であり、かつ $D(N(t)^{1/2})=D(S(t))=Y$ が成り立つ。

(ii) を示そう。各 $s,t\in[0,T]$, $u\in Y$ に対して

$$(S(t)-S(s))u=\int_s^t S'(r)u\,dr$$

であり、かつ $\sup_{0\leqq t\leqq T}\|S'(t)\|_{Y\to X}<\infty$ であることから、$S(t)$ は $B(Y,X)$

のノルムに関して Lipschitz 連続である。

特に、$a = \sup_{0 \le t \le T} \| S'(t) S(t)^{-1} \|_{X \to X}$ とおくと $a < \infty$ が成り立つ。

今、$t \in [0,T]$, $u \in Y$ を任意にとってくれば、

$$\left| d/dt \, \| N(t)^{1/2} u \|^2 \right| = 2 \left| Re(S'(t)u, S(t)u) \right| \le 2a \| N(t)^{1/2} u \|^2$$

となるから、すべての $s, t \in [0,T]$, $u \in Y$ に対して、

$$\| N(t)^{1/2} u \| \le e^{a|t-s|} \| N(s)^{1/2} u \|$$

が成り立つ。

(iii)を示そう。各 $t \in [0,T]$ に対して $D(S(t)^*) \subseteq D(S(t)) = Y$ となることに注意する。各 $t \in [0,T]$, $u \in D(N(t))$ に対して $v = S(t)u$ とおこう。すると、$v \in Y$ より、

$$\begin{aligned}
|Re(A(t)u, N(t)u)| &= |Re(A(t)S(t)^{-1}v, S(t)^* v)| \\
&= |Re(S(t)^{-1}\{A(t)+B(t)\}v, S(t)^* v)| \\
&\quad |Re(A(t)v, v)| + |(B(t)v, v)| \\
&\le (\beta + \sup_{0 \le t \le T} \|B(t)\|_{X \to X}) \|v\|^2
\end{aligned}$$

ここで、$\|v\|^2 = (u, N(t)u)$ だから (iii)も成り立つ。(証終)

定理1の応用例を述べる。

<u>例1</u> 対称双曲系の初期値問題に定理1を適用すると、従来の結果より係数の滑かさを少し落すことが出来る。また、その場合、特異積分作用素等についての考察を必要とはせず、条件(c.1)〜(c.4)の簡単な検証だけで済む。

これらのことについて確めよう。

$$X = [L^2(\mathbb{R}^n)]^N, \quad Y = [H^k(\mathbb{R}^n)]^N \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$A_0(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\,\partial/\partial x_j + b(x,t)$$

$$D(A_0(t)) = [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^N, \quad 0 \leq t \leq T$$

$A(t)$ を $A_0(t)$ の X における最小の閉拡張とする。

ここに、$[\cdot]^N$ は縦ベクトル空間を表わし、各 a_j, b は $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ 上で定義された $N \times N$ 行列値関数である。また、各 $1 \leq j \leq n$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ に対して、$a_j(x,t)$ は Hermite 行列とする。

係数の滑らかさについては、各 a_j, b の任意の成分 $\varphi(x,t)$ に対して、次の (i), (ii) が成り立つと仮定しよう。(c.f. [2])

(i) $\varphi \in C^0([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^n))$

(ii) 各 $|\alpha| \leq k$, $t \in [0,T]$ に対して、$\partial_x^\alpha \varphi$ は x について $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属し、かつ $\sup_{0 \leq t \leq T} \|(\partial_x^\alpha \varphi)(\cdot,t)\|_{L^\infty} < \infty$ が成り立つ。

この時、$\{A(t)\}$, $\{-A(t)\}$ に対して (C.1) ～ (C.4) が成り立つ。

(証) (C.1) は明らかである。(C.3) についても、上記の (i) より成り立つ。

また、各 a_j がつねに Hermite 行列になることから、$A(t) = L(t)$, $0 \leq t \leq T$ として (C.2)$''$ が成り立つ。従って、(C.2) が $\{A(t)\}$, $\{-A(t)\}$ に対して成り立つこともわかる。

(C.4) を示そう。$N(t) \equiv N$, $0 \leq t \leq T$ とおく。ここに、N は

$$\begin{pmatrix} (-1)^k \sum_{j=1}^{n} \partial_j^{2k} & & O \\ & \ddots & \\ O & & (-1)^k \sum_{j=1}^{n} \partial_j^{2k} \end{pmatrix}$$

の X における最小作用素である。但し、$\partial_j = \partial/\partial x_j$ とおいた。

すると、N は半正定値自己共役作用素であり、

$D(N^{1/2}) = [H^k(\mathbb{R}^n)]^N = Y$ となることも容易にわかる。

各 $0 \leqq t \leqq T$, $u \in D(N) = [H^{2k}(\mathbb{R}^n)]^N$ に対して、

$$Re(\pm A(t)u, Nu) \leqq \sum_{j,\ell=1}^{n} |Re(a_\ell \partial_\ell u, \partial_j^{2k} u)|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |Re(bu, \partial_j^{2k} u)|$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^{n} |Re(\partial_j^{k}(a_\ell \partial_\ell u), \partial_j^{k} u)|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |Re(\partial_j^{k}(bu), \partial_j^{k} u)|$$

ここで、各 $1 \leqq j, \ell \leqq n$ に対して $v = \partial_j^k u$ とおくと、

$$|Re(a_\ell \partial_\ell \partial_j^k u, \partial_j^k u)| = (1/2)|(a_\ell \partial_\ell v, v) + (v, a_\ell \partial_\ell v)|$$

$$= (1/2)|(v, \partial_\ell a \cdot v)|$$

となるから、(C.4) の (iii) が、$\{A(t)\}$, $\{-A(t)\}$ に対して成り立つこともわかる。（証終）

例2　時間的な Schrödinger 型擬微分作用素系の基本解の存在を定理1を用いて証明しよう。

$$X = [L^2(\mathbb{R}^n)]^N, \quad Y = [Y_k]^N \quad (k = 2, 3, \cdots)$$

$$A_0(t) = i P(x, D_x, t)$$

$$D(A_0(t)) = [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^N, \quad 0 \leqq t \leqq T$$

$A(t)$ を $A_0(t)$ の X における最小の閉拡張とする。

ここに、$Y_k = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) ; \|u\|_k < \infty\}$

$$\|u\|_k = \Big[\sum_{|\alpha| + \ell \leqq k} \|(1+|x|^2)^{\ell/2} \partial_x^\alpha u\|_{L^2} \Big]^{1/2}$$

$$P(x, D_x, t) = \left(P_{\ell m}(x, D_x, t) ; \begin{array}{l} \ell \downarrow 1, \cdots, N \\ m \to 1, \cdots, N \end{array} \right)$$

$$P_{\ell m}(x, D_x, t) u = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i x \cdot \xi} P_{\ell m}(x, \xi, t) \hat{u}(\xi) d\xi$$

とする。Y_k はノルム $\|\cdot\|_k$ によって Hilbert 空間になり、

$C_0^\infty(R^n)$がY_kの中で稠密であることもわかる。

記号Y_k, $\| \ \|_k$については北田均氏の[4]によった。

$P(x, D_x, t)$に対して、次の条件(A.1)〜(A.3)を課そう。

(A.1)（表象が*Schrödinger*型であること）

各$1 \leqq l, m \leqq n$, $t \in [0, T]$に対して、$P_{lm}(x, \xi, t)$は(x, ξ)について$R^n \times R^n$上C^∞級であり、

$|\alpha| + |\beta| \geqq 2$なる任意の$\alpha, \beta$に対して、

$$\sup\{ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_{lm}(x, \xi, t)| ; (x, \xi, t) \in R^n \times R^n \times [0, T] \} < \infty$$

が成り立つ。

(A.2)（tに関する連続性）

各$1 \leqq l, m \leqq n$について、

$|\alpha| + |\beta| \geqq k$であれば、$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_{lm}(x, \xi, t)$は$0 \leqq t \leqq T$から$L^\infty(R_x^n \times R_\xi^n)$への連続写像を与える。

$|\alpha| + |\beta| < k$であれば、$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_{lm}(0, 0, t)$は$0 \leqq t \leqq T$上で連続な関数である。

(A.3)（対称性）

各$t \in [0, T]$, $u \in [C_0^\infty(R^n)]^N$に対して、

$$(P(x, D_x, t)u, u) = (u, P(x, D_x, t)u)$$

が成り立つ。ここに、$(\ ,\ )$はXの内積を表わす。

(A.1)〜(A.3)の下で、定理1の条件(C.1)〜(C.3)が成り立つ。これを確かめるために、*Schrödinger*型擬微分作用素についてのある有界性定理を引用する。次の定理Aは*Calderón*-*Vaillancourt*の定理から簡単に導かれるだろう。

定理 A　$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi$

として、表象 $p(x,\xi)$ に対して次の条件 $(S)_\ell$ を考える。

$(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$

$(S)_\ell$ $\begin{cases} p(x,\xi) \text{ は } C^\infty(R^n_x \times R^n_\xi) \text{ に属し、} |\alpha|+|\beta| \geq \ell \text{ の時、} \\ \qquad \sup\{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \,;\, (x,\xi) \in R^n \times R^n\} < \infty \\ \text{が成り立つ。} \end{cases}$

いま、$(S)_\ell$ を満たす $p(x,\xi)$ に対して、

$$K_\ell(P) = \sup\{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(0,0)| \,;\, |\alpha|+|\beta| < \ell\}$$
$$+ \sup\{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \,;\, (x,\xi) \in R^n \times R^n,\ \ell \leq |\alpha|+|\beta| \leq M\}$$

とおこう。ここに、$M = 2\ell + 2[n/2] + 2$ である。

この時、次の (i) および (ii) が成り立つ。

(i) ある $\ell = 0, 1, 2, \cdots$ に対して表象 $p(x,\xi)$ が $(S)_\ell$ を満たすとすると、ある定数 $C = C(n,\ell) \geq 0$ があって、

$$\| Pu \|_{L^2} \leq C \cdot K_\ell(P) \cdot \| u \|_\ell, \quad u \in \mathcal{S}(R^n)$$

が成り立つ。

(ii) ある $\ell = 0, 1, 2, \cdots$ に対して表象 $p(x,\xi)$ が $(S)_{2\ell}$ を満たすとすると、ある定数 $C = C(n,\ell) \geq 0$ があって、

$$|(u, Pu)_{L^2}| \leq C \cdot K_{2\ell}(P) \cdot \| u \|_\ell^2, \quad u \in \mathcal{S}(R^n)$$

が成り立つ。□

この定理Aを用いて、(C.1)〜(C.4)の成り立つことを証明しよう。

(証) (C.1), (C.2) は明らかに成り立つ。

(C.3)を示そう。 $P_t = P(x, D_x, t)$, $P_{\ell m}(t) = P_{\ell m}(x, D_x, t)$ とおくと、定理Aの(i)から 各 $t \in [0, T]$ について

$$\| A(t)u \|_X \leq C \cdot \mathbb{K}(P_t) \cdot \|u\|_Y, \quad u \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^N$$

が成り立つ。ここに、C は n, N のみによって定まる正数を表わし、$\mathbb{K}(P_t) = \max\{ K_k(P_{\ell m}(t)) ; 1 \leq \ell, m \leq N \}$ とおいた。

従って、$A(t)$ が閉作用素であることと、$[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^N$ が Y で稠密であることに注意すれば、$Y \subseteq D(A(t))$, $0 \leq t \leq T$ がわかる。

また、各 $s, t \in [0, T]$, $u \in Y$ に対して

$$\| (A(t) - A(s))u \|_X \leq C \cdot \mathbb{K}(P_t - P_s) \|u\|_Y$$

であることと、$P(x, D_x, t)$ についての条件 (A.2) に注意すれば、$A : [0, T] \longrightarrow B(Y, X)$ が ノルム連続 となることもわかる。

(C.4)を示そう。$N(t) = N$, $0 \leq t \leq T$ とおく。ここに、N は

$$\begin{pmatrix} (-\Delta + |x|^2)^k & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & (-\Delta + |x|^2)^k \end{pmatrix} (= Q_k \text{ とおく。})$$

の定める、X における最小作用素とする。

N が半正定値自己共役作用素であって、(C.4)の(i), (ii)を満たすことは容易にわかる。

(C.4)の(iii)を示す。簡単な計算により、交換子

$$[P(x, D_x, t), Q_k]$$

の任意の成分を $r(t) = r(x, D_x, t)$ とおくと、各 $t \in [0, T]$

に対して $r(t)$ は条件 $(P)_{2k}$ を満たし、かつ

$$\sup\{K_{2k}(r(t))\,;\,0 \leqq t \leqq T\} < \infty$$

が成り立つ。ゆえに、定理 A の (ii) を用いれば、

各 $t \in [0,T]$, $u \in [C_0^\infty(R^n)]^N$ に対して、

$$|\mathrm{Re}\,(A(t)u, Nu)| = (1/2)|(u, [P(x,D_x,t), Q_k]u)|$$
$$\leqq C_1 \|u\|_Y^2 \leqq C_2\,(u, Nu)$$

が成り立つ。ここに、C_1, C_2 は t や u によらない定数である。

ところで、$[C_0^\infty(R^n)]^N$ は、Hilbert 空間 $D(N)$ で稠密だから、

(c.4) の (iii) も成り立つことがわかった。(証終)

同様にして、$\{-A(t)\}$ に対しても (c.1)〜(c.4) が成り立つことがわかる。

こうして、次の定理が得られた。

<u>定理 2</u>　$P(x,D_x,t)$ が条件 (A.1)〜(A.3) を満たすとすると、各 $t \in [0,T]$ について、$P(x,D_x,t)$ は $[L^2(R^n)]^N$ における作用素として、$[C_0^\infty(R^n)]^N$ 上本質的自己共役である。また、その自己共役拡張を $H(t)$ とおいた時、$[L^2(R^n)]^N$ 上の unitary 作用素の族 $\{U(t,s)\,;\,0 \leqq s,t \leqq T\}$ で次の (I)〜(IV) を満たすものが存在し、唯一つである。

(I) すべての $0 \leqq r, s, t \leqq T$ に対して、次の等式が成り立つ。

$$U(t,t) = I, \quad U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$$

(II) $U : [0,T] \times [0,T] \longrightarrow B([L^2(R^n)]^N, [L^2(R^n)]^N)$ は強連続である。

(III) すべての $0 \leqq s, t \leqq T$ に対して、$U(t,s)[Y_k]^N \subseteqq [Y_k]^N$, また $U(t,s)$ は $[Y_k]^N$ 上の有界作用素であり、

$U : [0,T] \times [0,T] \longrightarrow B([Y_k]^N, [Y_k]^N)$ は強連続である。

(IV) すべての $0 \leqq s, t \leqq T$, $u \in [Y_k]^N$ に対して次式が成り立つ。

$$\partial/\partial s[U(t,s)u] = -i\,U(t,s)H(s)u$$
$$\partial/\partial t[U(t,s)u] = i\,H(t)U(t,s)u$$

ここに、$\partial/\partial s$, $\partial/\partial t$ は $[L^2(R^n)]^N$ での強微分を表わす。□

こうして、基本解の存在に関する限り、北田氏の[4]にある結果を擬微分作用素系に迄拡張できる。(c.f. [5])

注意　例2に、[2]の中の Theorem 6.1 を適用しようとすると、$S(t)$ のとり方と、$S(t)A(t)S(t)^{-1} = A(t) + B(t)$ を証明することが困難になる様に(筆者には)思えます。他の方法があるのかも知れませんが…。

参考文献

[1] W. G. Faris and R. B. Lavine, Comm. Math. Phys. 35 (1974), 39-48.

[2] T. Kato, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 17 (1970), 241-258.

[3] K. Kobayasi, J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 647-654.

[4] H. Kitada, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 27 (1980), 193-226.

[5] H. Kumano-go, Comm. in Partial Differential Equations, 4 (1979), 959-1015.

[6] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.

[7] 田辺広城, 発展方程式, 岩波書店, 1975.

$\frac{1}{2}$ 分数巾が時間パラメータについて微分可能となる楕円型偏微分作用素の例

八木厚志

§1. 半空間での分数巾の表現について

$A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 実正定値対称行列，$A^{-1}=(\bar{a}_{ij})$ とする．

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1\,n-1} \\ & & \\ \bar{a}_{n-1\,1} & \cdots & \bar{a}_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{a}_{1n} \\ \\ \bar{a}_{n-1\,n} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & 2c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 2c_{n-1} \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と T を決めると，T は以下の性質をもっていることが確かめられる．

i) $T(R^n_{\pm}) = R^n_{\mp}$ （複号同順）

ii) $T\xi' = \xi'$ $\quad \forall \xi' \in R^{n-1} = \{\xi = (\xi', \xi_n);\ \xi_n = 0\}$

iii) $T^2 = I$

iv) $A(T^t\xi) = A(\xi)$ ，ここで $A(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$.

この T を用いて，$L_2(R^n_+)$ の関数を $L_2(R^n)$ の関数に拡張する作用素 e を次の様に定義する．

$$e : L_2(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longmapsto (ef)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ f(Tx), & x \in \mathbb{R}^n_- \end{cases}.$$

次に，$L_2(\mathbb{R}^n_+)$ の作用素 $\mathcal{A}$ を

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ u \in H_2(\mathbb{R}^n_+) ;\ \mathbb{R}^{n-1} \text{ 上で } \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \} \\ \mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + k u, \qquad k > 0 \end{cases}$$

と定義する。$\mathcal{A}$ は正定値自己共役作用素となる．実数 α について $\mathcal{A}$ の分数巾 $\mathcal{A}^\alpha$ は次で定義される作用素 $\mathcal{A}_\alpha$ と一致していることが示される。

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \{ u \in L_2(\mathbb{R}^n_+) ;\ eu \in H_{2\alpha}(\mathbb{R}^n) \} \\ \mathcal{A}_\alpha u = r\, \bar{\mathcal{F}}[(A(\xi) + k)^\alpha \mathcal{F}[eu]] \end{cases}$$

ただし

$$r : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n_+), \quad f \longmapsto rf = f|_{\mathbb{R}^n_+}$$

である．

§2. 微分可能な例について

$n = 2$ として

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & a(t) \\ a(t) & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

を考える．

$$|a(t)| \leqslant 1, \qquad a \in \mathcal{E}^1([0,T];\mathbb{R})$$

を仮定しておく．

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2a(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり

$$\{e(t)f\}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , y>0 \\ f(x-2a(t)y, -y) & , y<0 \end{cases}$$

となる．従って，$A(t)$ から決まる作用素 $\mathcal{A}(t)$ の分数巾は

$$\mathcal{A}(t)^{\frac{1}{2}} u = r \bar{\mathcal{F}} [\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}\ \mathcal{F}[e(t)u]]$$

と表わされる．t について微分すると

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(t)^{\frac{1}{2}} u = r \bar{\mathcal{F}} [\frac{a'(t)\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}} \mathcal{F}[e(t)u]]$$

$$+ r \bar{\mathcal{F}} [\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}\ \mathcal{F}[\frac{d}{dt} e(t)u]]$$

となる．

$$\| \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t)^{\frac{1}{2}} u \|_{L_2(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C \| u \|_{H_1(\mathbb{R}^2_+)}$$

と評価されることを示すことが問題である．

前の項の評価は容易である．後の項の評価のために

$$Y(x,y) = \begin{cases} 1 & , y>0 \\ 0 & , y \leqslant 0 \end{cases}$$

を用いる．実際，

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} | r \bar{\mathcal{F}} [\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}\ \mathcal{F}[\frac{d}{dt} e(t)u]]|^2 dxdy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} | Y(x,y) \bar{\mathcal{F}} [\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}\ \mathcal{F}[\frac{d}{dt} e(t)u]]|^2 dxdy$$

$$Y(x,y) = \bar{\mathcal{F}} [(2\pi\delta_\xi) \times (\pi\delta_\eta + \frac{1}{i}\, \mathrm{v.p.} \frac{1}{\eta})]$$

として計算すると

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{(2a(t)\xi + \eta + \eta')\, \mathcal{F}[\frac{d}{dt} e(t)u](\xi,\eta')}{\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta' + \eta'^2 + k} + \sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}}\, d\eta' \Big|^2 d\xi\, d\eta$$

$$v(x,y) = \begin{cases} 0 & , y > 0 \\ u(x - 2a(t)y, -y) & , y < 0 \end{cases}$$

とおくと $\frac{d}{dt} e(t)u = -2a'(t)\, y \frac{\partial v}{\partial x}$ となっているから

$$\mathcal{F}[\frac{d}{dt} e(t)u] = 2a'(t)\, \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{F}[v]$$

となる．これを代入し，さらに計算すると

$$= \frac{|a'(t)|^2}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Big| \int_{\mathbb{R}} k(t;\xi,\eta,\eta')\, \mathcal{F}[v](\xi,\eta')\, d\eta' \Big|^2 d\xi\, d\eta$$

となる．ここで

$$k(t;\xi,\eta,\eta') = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta' + \eta'^2 + k} + \sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k}}$$

$$- \frac{\xi(a(t)\xi + \eta')(2a(t)\xi + \eta + \eta')}{(\sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta' + \eta'^2 + k} + \sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta + \eta^2 + k})^2 \sqrt{\xi^2 + 2a(t)\xi\eta' + \eta'^2 + k}}$$

次に

$$(|\xi| + |\eta|)\, \mathcal{F}[v] = -i\{\operatorname{sign}\xi\, \mathcal{F}[\frac{\partial v}{\partial x}] + \operatorname{sign}\eta\, \mathcal{F}[\frac{\partial v}{\partial y}]\} + i \operatorname{sign}\eta\, \mathcal{F}[v(0)]$$

となることに注意すると

$$\leq C \iint_{\mathbb{R}^2} \Big\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{|k(t;\xi,\eta,\eta')|}{|\xi| + |\eta'| + 1} (|\mathcal{F}[\frac{\partial v}{\partial x}]| + |\mathcal{F}[\frac{\partial v}{\partial y}]| + |\mathcal{F}[v]|)\, d\eta' \Big\}^2 d\xi\, d\eta$$

$$+ C \iint_{\mathbb{R}^2} \Big\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{|k(t;\xi,\eta,\eta')|}{|\xi| + |\eta'| + 1}\, d\eta' \Big\}^2 |\mathcal{F}[v(\cdot,0)](\xi)|^2\, d\xi\, d\eta$$

$$|k(t;\xi,\eta,\eta')| \leq \frac{C|\xi|}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \eta'^2 + 1}}$$

であるから，第1項は

$$C\{ \|\frac{\partial v}{\partial x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \}$$

$$\leq C \|u\|^2_{H_1(\mathbb{R}^2_+)}$$

と評価される．また第2項は

$$c\int_{\mathbb{R}}\sqrt{\xi^2+1}\,|\mathcal{F}[u(\cdot,0)](\xi)|^2\,d\xi$$

$$\leqq C\|u(\cdot\,,0)\|^2_{H_{1/2}(\mathbb{R})}$$

$$\leqq C\|u\|^2_{H_1(\mathbb{R}^2_+)}$$

と評価される．以上により目的の評価式

$$\left\|\frac{d}{dt}A(t)^{\frac{1}{2}}u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}\leqq C\|u\|_{H_1(\mathbb{R}^n_+)}$$

が成立することが示された。

（大阪大学理学部）

Gierer-Meinhardt 系の定常解に対するアプリオリ評価

高木 泉

（東京都立航空工業高等専門学校）

1. 序論

本稿では Gierer と Meinhardt [2] によって生物の形態形成のモデルとして提唱された次の放物型方程式系の定常解に対するアプリオリ評価と解の一意性について論じる：

$$
\text{(G-M)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \dfrac{u}{m} + \dfrac{u^2}{v} + \rho \\[2mm]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u^2
\end{cases}
\quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\Omega,
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{on} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega .
$$

但し D, m は正の定数，ρ は非負定数であり，領域 Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界集合でその境界 $\partial\Omega$ は $C^{2+\alpha}$ 級 $(0<\alpha<1)$ とする.

生物の形態形成において，最初は殆ど一様であった細胞や組織が空間的な非一様性，紋様を獲得する過程を説明することがひとつの基本的な問題である．系 (G-M) は定数解 $u=\bar{u}$, $v=\bar{v}$ （但し $\bar{u}=m(1+\rho)$, $\bar{v}=\bar{u}^2$ ）をもつ．パラメータ m, ρ を適当にとれば，定数解は十分大きな D に対し安定な定常解である．しかし D を十分小さくすると，この定数定常解の安定性が失われ，空間的に非一様な解が

現われる（Takagi [5] では分岐理論によってこのような非定数定常解の存在と安定性について論じている）．数値解法によると非定数解は空間的に規則正しい波状の紋様をしており，Dが0に近づくとその振幅は限りなく大きくなり，かつ有限個の点のまわりに集中した非常に鋭いトゲ状の形になる．u, v ともに同じような紋様であるが，uの方がより変化の激しい形をする．u, v の値はそれぞれ活性因子，抑性因子とよばれる物質の濃度を表し，uの値がピークとなる場所から細胞分裂や分化が始まると考えられる．

最近，(G−M)に対するアプリオリ評価が増田先生と三村先生によって得られ，時間的に大域的な解が存在することが示された．我々は定常解の解集合の構造を調べる第一歩として，定常解に対するアプリオリ評価を D, m, p によって陽に与え（定理1，2），Dが十分大きいとき定常解は定数解に限ることを示す（定理3）．また空間次元が1の場合分岐解の枝の大域的な挙動について論じる（定理4）．

2. アプリオリ評価と一意性

定常解のみたす方程式系は

$$\left.\begin{aligned} &(2.1a) \quad D\Delta u - \frac{u}{m} + \frac{u^2}{v} + \rho = 0 \\ &(2.1b) \quad \Delta v - v + u^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.2) \quad \partial u/\partial \nu = \partial v/\partial \nu = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

以下では解 (u, v) は $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ に属すると仮定する。

まず境界値問題

$$\begin{cases} (1 - \alpha\Delta) w = f & \text{in } \Omega \qquad (\alpha > 0) \\ \partial w/\partial\nu = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の Green 作用素を G_α と表すと、G_α は正の積分核をもつ積分作用素で、$G_\alpha[1] = 1$ である。従って (2.1)–(2.2) は次の方程式系と同値である：

$$\left.\begin{aligned} &(2.3a) \quad u = m\,G_{mD}[u^2/v] + m\rho \\ &(2.3b) \quad v = G_1[u^2] \end{aligned}\right\}$$

さて

$$U^* = \operatorname{Sup} u, \qquad U_* = \operatorname{Inf} u$$
$$V^* = \operatorname{Sup} v, \qquad V_* = \operatorname{Inf} v$$

とおくと、(2.3) より次の命題が従う：

命題 2.1. (u, v) を (2.1)-(2.2) の解とすると，u と v は共に境界までこめて正であり，4つの量 U_*, U^*, V_*, V^* に関して次のような関係式がなりたつ：

(2.4a) $\qquad V^* \leq U^{*2}$,

(2.4b) $\qquad V_* \geqq U_*^2$,

(2.5a) $\qquad U^* \leq m U^{*2}/V_* + mp$,

(2.5b) $\qquad U_* \geqq m U_*^2/V^* + mp$.

式 (2.3a) をみれば，U^* の評価には u^2/v を評価すればよいことがわかる．実は次の補題を証明することができる：

補題 2.2. (u, v) を (2.1)-(2.2) の解とするとすべての自然数 k に対し

$$\int_\Omega \left(\frac{u^2}{v}\right)^k dx \leq \omega M^{k-1},$$

但し ω は Ω の体積であり，

$$M = [1 + (1 + V_* D(D + 2/m))^{1/2}]^2/(V_* D^2).$$

従って特に

$$\sup \frac{u^2}{v} \leq M.$$

この補題と命題 2.1 を組合せると，次の定理 1 が得られる

<u>定理 1</u>. (u, v) を (2.1)−(2.2) の解とすると

$$U^* < \bar{u} + mA(D, m, V_*),$$

$$V^* < [\bar{u} + mA(D, m, V_*)]^2,$$

$$\sup|\Delta u| < [1 + A(D, m, V_*)]/D,$$

$$\sup|\Delta v| < [\bar{u} + mA(D, m, V_*)]^2,$$

但し

$$A(D, m, t) = 2D^{-1}[m^{-1} + t^{-\frac{1}{2}} + (Dt^{\frac{1}{2}})^{-1}(t^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{Max}\{m^{-1}, t^{-\frac{1}{2}}\})].$$

特に $\rho > 0$ のとき,

$$A(D, m, V_*) < A(D, m, (m\rho)^2).$$

この定理によって $\rho > 0$ のときには U^*, V^*, $\sup|\Delta u|$, $\sup|\Delta v|$ のアプリオリ評価が陽に与えられる. 空間次元が 1 の場合, $\rho > 0$ という仮定はおとすことができる. 即ち G_α の陽な表現を用いて次の定理2が得られる:

<u>定理 2</u>. $n = 1$, $\Omega = (0, L)$ とする. (u, v) を (2.1)−(2.2) の解とすると,

$$m[L^{-1}\tanh L\, f(L/\sqrt{mD}) + \rho] \leq u(x) \leq \bar{u} + L\sqrt{m/D},$$

$$m^2[L^{-1}\tanh L\, f(L/\sqrt{mD}) + \rho]^2 \leq v(x) \leq [\bar{u} + L\sqrt{m/D}]^2.$$

但し

$$f(t) = t\,\mathrm{cosech}\, t.$$

注意 2.3. $f(L/\sqrt{mD})$ は D の単調増加函数で，$D \uparrow +\infty$ のとき $f(L/\sqrt{mD}) \uparrow 1$，$D \downarrow 0$ のとき $f(L/\sqrt{mD}) \downarrow 0$ である．

さて，D が十分大きいときの解の一意性について述べよう．そのため，2.3 の準備をする．l_1 を $-\Delta$ の斉次 Neumann 境界条件の下の正の最小固有値とする．$s, t > 0$ に対し函数 $F(s, t)$ を

$$F(s, t) = s\,[\,2/(m^2(1+l_1)) + 1/t^2\,] + 1/m$$

と定義し，

$$\Phi(D) = \begin{cases} F(\bar{u} + mA(m, D, m^2\rho^2),\ m\rho) & \text{if } \rho > 0 \\ F(\bar{u} + L\sqrt{m/D},\ mL^{-1}\tanh L\, f(L/\sqrt{mD}) + m\rho) & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

とおく．$A(m, D, m^2\rho^2)$ と $\sqrt{m/D}$ は共に D の単調減少函数であり，また $f(L/\sqrt{mD})$ は D の単調増加函数であるから，$\Phi(D)$ は D の単調減少函数である．従って方程式

$$(2.6) \qquad l_1 D = \Phi(D), \qquad D > 0$$

はただひとつの根 $D = D^*$ をもつことがわかる．このとき

定理 3. $\rho > 0$ または $n = 1$ と仮定する．D^* を (2.6) の根とする．そうすると $D > D^*$ に対し定数解 $(\bar{u}, \bar{v})$ が (2.1)

–(2.2)のただひとつの解である.

3. 分岐解の枝の大域的挙動

本節では $n=1$, $\Omega=(0, L)$ の場合に, (2.1)–(2.2) の解集合の構造について考察する. まず未知函数を縦ベクトルの形で書き, 次の函数空間を導入する:

$$E=\{U={}^t(u,v) \mid u, v\in C^2[0,L],\ u'=v'=0 \ \text{ at } x=0, L\}.$$

また, $\mathbb{R}_+$ を正の実数全体のなす集合とし,

$$\mathcal{E}=\mathbb{R}_+\times E$$

とおく. $(D_0, U_0)\in\mathcal{E}$ が (2.1)–(2.2) の解であるとは U_0 が $D=D_0$ に対し (2.1) をみたすことをいう. 特にすべての $D\in\mathbb{R}_+$ に対し $(D, \bar{U})$ は (2.1)–(2.2) の解である. 但し $\bar{U}$ は定数解 ${}^t(\bar{u},\bar{v})$ である. $\{(D,\bar{U}) \mid D\in\mathbb{R}_+\}$ を自明な枝という. 自明な枝の近傍における解集合の構造は分岐理論, 特に Crandall – Rabinowitz の単純固有値からの分岐定理を用いて調べることができる. (分岐理論に関しては Nirenberg [3] をみよ.) その結果は次のようにまとめることができる: まず $p\geqq 1$ ならば分岐は起こらず, 自明な枝の近くには他に解は存在しない. そこで, 以下では

(3.1) $$0 \leq \rho < 1$$

を仮定する。関数 $g(l)$ を

$$g(l) = \frac{\mu l - 1}{m l (1+l)} , \qquad l > 0$$

と定義する。但し

$$\mu = (1-\rho)/(1+\rho).$$

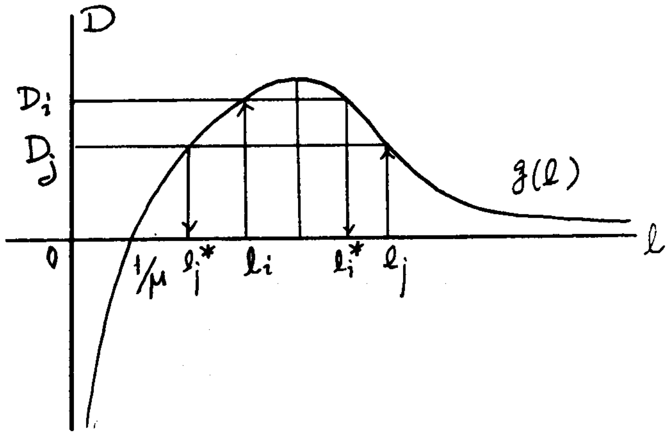
数列 $\{D_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ を

$$D_j = g(l_j) , \qquad l_j = (\pi j / L)^2$$

によって定義する。

方程式 $g(l) = D_j$ の根は 2つあって $l = l_j$ と $l = l_j^*$ である。ここで

$$l_j^* = (1+l_j)/(\mu l_j - 1) .$$



もしすべての $k \neq j$ に対し $l_k \neq l_j^*$ ならば、D_j は単純であるとよばれる。（単純でないものは二重であるという。）

単純でない D_j は存在しても高々有限個しかない。

命題 3.1. (3.1) を仮定する。D_j は単純であるとする。そうすると $(D_j, \bar{U}) \in \mathcal{E}$ は分岐点である。即ち $(D_j, \bar{U})$ を通る非定数定常解の 1 径数族 $(D_j(\varepsilon), U_j(\varepsilon))$ が存在する：

$$D_j(\varepsilon) = D_j + \tau(\varepsilon), \qquad \tau(0) = 0,$$
$$u_j(\varepsilon) = \bar{u} + \varepsilon \cdot a \cos(\pi j x/L) + O(\varepsilon^2),$$
$$v_j(\varepsilon) = \bar{v} + \varepsilon \cdot b \cos(\pi j x/L) + O(\varepsilon^2)$$

但し a, b は共に正の定数である.

更に $(D_j, \bar{U})$ の近傍では (2.1)-(2.2) の解集合は 2つの曲線 $(D, \bar{U})$ と $(D_j(\varepsilon), U_j(\varepsilon))$ から成る.

$(D_j(\varepsilon), U_j(\varepsilon))$ は局所的に存在が保証されたが, これを ε に関して接続していくとどのような挙動をするかという問題は興味ぶかい. 特に D をいくらでも小さくできるかどうかが, 数値解で D を 0 に近づけたときに得られる特徴的な解を調べる上でも, 基本的な問題となるであろう.

系 (2.1)-(2.2) の非定数解の集合の E における閉包の連結成分で $(D_j(\varepsilon), U_j(\varepsilon))$ を含むものを $\mathcal{C}^{(j)}$ とかくことにする. 更に

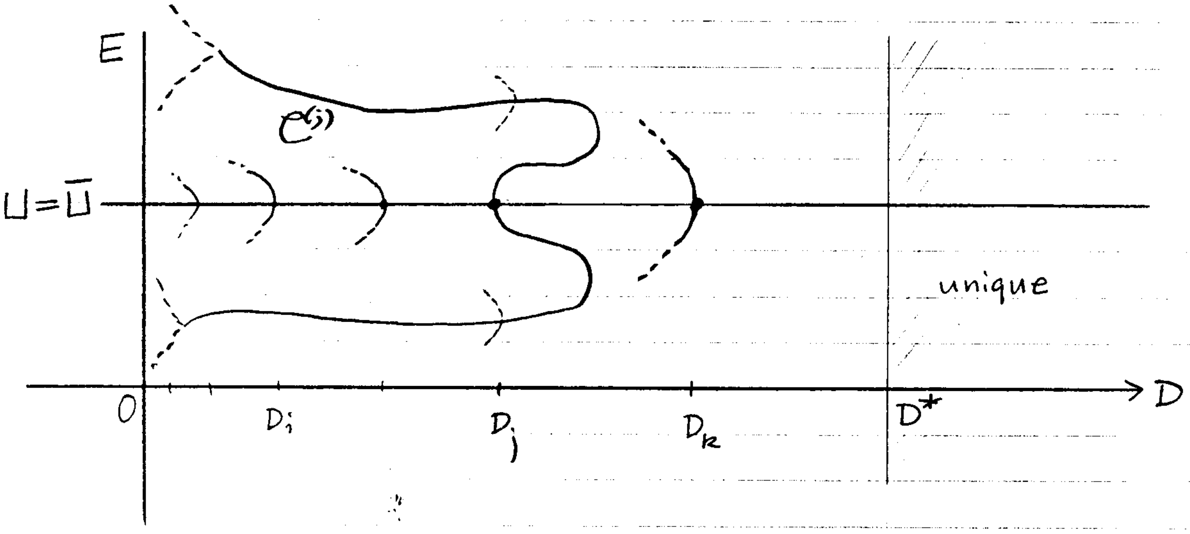
$$\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}_+} \mathcal{C}^{(j)} = \{ D \in \mathbb{R}_+ \mid (D, U) \in \mathcal{C}^{(j)} \},$$
$$\mathrm{Proj}_E \mathcal{C}^{(j)} = \{ U \in E \mid (D, U) \in \mathcal{C}^{(j)} \}$$

とする. このとき

<u>定理 4.</u> $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}_+} \mathcal{C}^{(j)} \supset (0, D_j]$.

定理4は $\mathcal{C}^{(j)}$ が $\mathcal{E}$ の コンパクト集合ではないことと，アプリオリ評価と一意性の定理を用いて示される．$\mathcal{E}^{(j)}$ が $\mathcal{E}$ で コンパクトではないことは Nishiura [4] による．

$\mathrm{Proj}_E\, \mathcal{C}^{(j)}$ が E で 非有界であることが 数値的には予想されるが，残された問題である．



文献

[1] Fujii, H., Mimura, M., and Nishiura, Y., A picture of global bifurcation diagram in ecological interacting and diffusing systems. (Preprint '79).

[2] Gierer, A., and Meinhardt, H., Kybernetik, 12 (1972), 30-39.

[3] Nirenberg, L., Topics in Nonlinear Functional Analysis

[4] Nishiura, Y., Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems. (Preprint '79)

[5] Takagi, I, Tôhoku Mathematical Journal, 31 (1979), 221-246.