『第1回発展方程式 若手セミナー』 報告集

1979. 7.17 ～ 7.19

新潟県中頸城郡妙高高原町池の平温泉
妙高山荘

序

1979年7月17日から19日までの3日間、新潟県中頸城郡妙高高原町 池の平温泉、妙高山荘（新潟県市町村職員共済組合施設）において"第1回 発展方程式若手セミナー"が開かれました。この報告集は、セミナーで講演していただいた方々に、筆をお願いして書いていただいたものが中心になっています。したがって、なかには、講演当時の結果が改善され、講演内容と少し異なるものも含まれています。また、セミナー日程の都合上、講演時間の余裕がなかった幾人かの参加者の方々には、この報告集のために新たに書いていただきました。

"第1回 発展方程式若手セミナー"は「発展方程式論の将来の方向を探るためには、若手研究者間の交流を深め、情報交換と討論の場を持つことが必要である」という、若手研究者有志の企画に応えて開かれました。セミナーの準備に当っては、渡辺道昭氏（新潟大学）に、色々の助言をいただくなど、大変、お世話になりました。セミナーには全国から28名の若手研究者が集まり、小西芳雄氏（東京大学）の特別講演をはじめとして、8つの講演が行なわれました。講演内容も発展方程式論のみにとどまらないで、種々の関連分野に及び、活発な討議が行われるなどして盛況のうちに終えることができました。

我々企画者は、報告集の出版により、研究成果や話題がひろめられ、更に、新しい結果が産み出されることを期待します。また同時に、このセミナーが別の企画者の下で、話題をひろめて、より活発に開かれることを念願します。

最後に、"第1回発展方程式若手セミナー"の開催に際しては、作行会数学寄金の援助をいただき、この報告集の製作にあたっては、大阪大学の神崎房子氏に大変御世話になったことを記します。関係者の方々に深く感謝致します。

1980年1月　　世話人、八木厚志、山田義雄

参加者

小西芳雄	(東大・工)
乘松芳樹	(東大・理)
伊藤正幸	(東大・教養)
石井仁司	(中央大・理工)
古谷希世子	(お茶の水女大・理)
清水貢	(早大・理工)
大谷光春	(東海大・理)
小林良和	(新潟大・工)
新倉保夫	(名大・理)
塩田隆比呂	(名大・理)
丸尾健二	(阪大・理)
辻本順一	(阪大・理)
冨田義人	(神戸商船大)
青木邁	(山口大・理)
俣野博	(東大・理)
國宏枝	(東大・理)
高橋勝雄	(東大・教養)
丸山彰	(学習院大・理)
真玉橋朝美	(早大・理工)
赤松豊博	(東海大・理)
渡辺道昭	(新潟大・教養)
山田義雄	(名大・理)
橋本修二	(名大・理)
森本芳則	(名大・工)
八木厚志	(阪大・理)
山田直記	(神戸大・理)
永井敏隆	(広大・理)
四ッ谷晶二	(宮崎大・工)

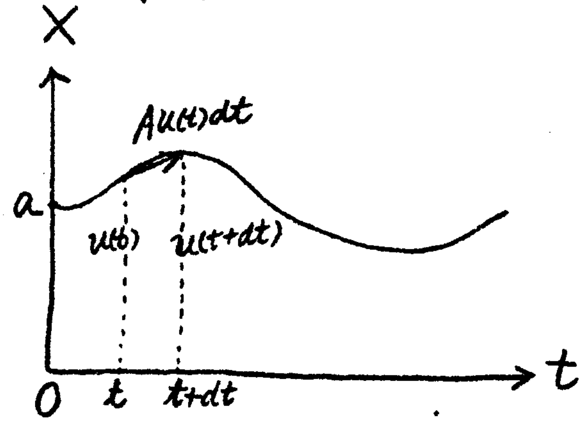
目　　次

非線型発展方程式

小西芳雄（東大・工）

発展方程式とは，放物型・双曲型などの偏微分方程式それ自体を指すこともあるが，その抽象化としての（無限次元空間における）常微分方程式を意味することが多い．その出発点となったのが，1948年に吉田とHilleによって独立に完成された線型作用素の半群の基本定理である．爾来30年，種々様々の形で研究が進み，理論の美しさと応用上の重要性から，近年ますます多くの関心を集めつつある．

§1. 数学史風に．



$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = a \end{cases}$$

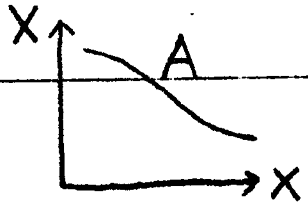
X：「Hilbert空間」＝ Pythagorasの定理が成り立つ普通の空間の直観を無限次元に活かしたもの．

ギリシア数学の幾何学的精神

$u = u(t) : [0, \infty) \longrightarrow X$ 「関数」　変化を記述し，運動を追う

微積分の発明によって本来の舞台を与えられた

現代数学の形成



$$A : D(A) \subset X \xrightarrow[\text{「写像」}]{} X$$

$$u(t+dt) = u(t) + Au(t)\,dt \quad (\text{Markov 性})$$

$$T_t : u(0) = a \longmapsto u(t) = T_t a \quad (\text{半群性})$$

1) 量子力学の数学的基礎

von Neumann (1903–1957)

$$A = -i\frac{H}{\hbar} \qquad H : \text{自己共役作用素(ハミルトニアン)}$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda$$

$$T_t = \underbrace{e^{-i\frac{H}{\hbar}t}}_{\text{ユニタリ群}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}\, dE_\lambda$$

$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$: 特殊関数論で判ることもある.

2) 確率過程論　A.N. Kolmogorov (1903–)

$$(T_t f)(x) = \int_{\underset{\text{状態空間}}{S}} f(y)\, \underset{\text{推移確率}}{P(t, x, dy)}$$

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ 時間的一様 Markov 過程

$$P(t, x, B) = P_x(X_t \in B)$$

例. N次元Brown運動

$$P(t,x,B)=\int_B \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} dy$$

P_x : xから出発するWiener測度 ∎

$$\boxed{(T_t f)(x) = E_x f(X_t)}$$

3) 関数解析学　吉田耕作 (1909－　)

非有界作用素 A の研究

$$A \overset{\text{全単射}}{\longleftrightarrow} \{T_t\}_{t\geq 0}$$

4) 非線型関数解析学　高村幸男 (1931－　)

非線型(多価)作用素 A

$$A \overset{\text{全単射}}{\longleftrightarrow} \{T_t\}_{t\geq 0}$$

凸解析 : $A=-\partial\varphi$　$\varphi : X \xrightarrow{\text{凸}} \mathbb{R}$

$\cup$

変分不等式 : $\varphi=\frac{1}{2}$Dirichlet積分

(片側制約条件)

計画数学への応用

例. 在庫管理論

§2. これから勉強される方へ.

1) 病理現象

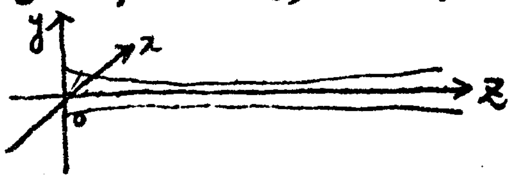
[爆発]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^{\alpha+1}$$

[波の自己集束]　<u>laser</u>

$$2ik\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Delta_{xy}\varphi + k^2(n^2-1)\varphi = 0$$

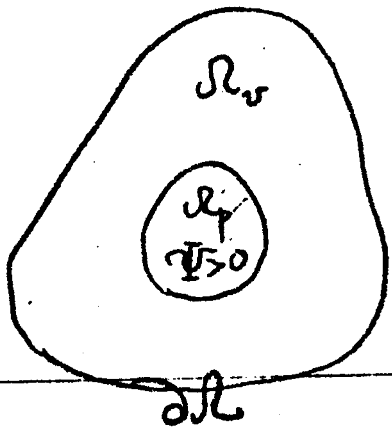
$\varphi = \varphi(x, y, z)$　　$\varphi(x, y, 0)$ 与



$\Box u = \phi(u)$　　Fritz John: Proc. Natl. Acad. Sci. USA 1979

[一意性の欠如]　<u>plasma</u>

$$\begin{cases} -\Delta \Psi = \lambda \Psi^{+} \\ \Psi\big|_{\partial\Omega} = \text{未知定数} \\ -\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial n}\, dS = I > 0 \end{cases}$$



2) 線型並みに旨くゆくもの

[非線型エルゴード理論]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T_s\,ds$$

[非線型補間理論]

$$D(A)\subset \mathcal{B}_{\alpha,p}(A)\subset \overline{D(A)}$$

$$\mathcal{B}_{\alpha,p}(A)=\left\{a\in\overline{D(A)}\ \middle|\ \frac{\|a-T_t a\|}{t^{\alpha}}\in L^p\left(0,1;\frac{dt}{t}\right)\right\}$$

[非線型Trotter積公式]

$$e^{t(A+B)}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{t}{n}A}\,e^{\frac{t}{n}B}\right)^n$$

[非線型分数巾]

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+Au=0 & (t>0)\\ u(0)=a\in D(A), & t=+\infty \text{ の近傍で有界}\end{cases}$$

$$a\xmapsto{T_{1/2,t}}u(t)$$

$$T_{1/2,t}=e^{-\overset{\exists}{t}(-A)^{1/2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(-A)^{\alpha}\\ \alpha=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots\end{array}}$$

以上 十西 79. 8. 1.

Stefan problems with the unilateral boundary condition on the fixed boundary

宮崎大・工　四ツ谷晶二

§0. Introduction.

固定端で unilateral boundary condition がみたされている次の1次元1相 Stefan 問題を考える。 未知関数は s, u である。

$$
(S)\quad
\begin{cases}
(1)\quad u_{xx}-u_t=0, & 0<x<s(t),\quad 0<t\le T,\\
(2)\quad u_x(0,t)\in\gamma(u(0,t)), & 0<t<T,\\
(3)\quad u(s(t),t)=0, & 0<t\le T,\\
(4)\quad u(x,0)=\varphi(x)\ge 0, & 0<x<l,\quad s(0)=l\ge 0,\\
(5)\quad \dot{s}(t)=-u_x(s(t),t), & 0<t\le T.
\end{cases}
$$

ここで $T>0$ は任意定数, $l\ge 0$ は与えられた定数. γ は maximal monotone graph in $\mathbb{R}^2$ s.t $\gamma(H)\ni 0$, $H\ge 0$.

(1) は unilateral boundary condition とよばれ, 非線形半群の理論の重要な応用例としてあらわれる。 (2) は Stefan 条件とよばれているものである。

上の問題は, 固体がとける現象をモデルとしている。関数 $u(x,t)$ は液体中の温度分布をあらわし, $x=s(t)$ は固体と液体の境をあらわしている。それは固体がとけるにしたがって変動していく。 unilateral b.c はいろんな物理的状態をモデルとしている。例えば, 境界上での温度制御の問題とか, 非線形放射条件もとでの熱伝導問題である。

ここでは, 問題(S) の大域的な古典解 (s,u) の存在と一意性についてのべる。

固定端での境界条件が 線形のときは、いままでに多くの人々によってしらべられているが、unilateral b.c. の場合はしらべられていない。 もし $s(t)$ が既知ならば、上の問題は unilateral problem とよばれ、近年、Hilbert 空間 L_2 においての非線形発展方程式論の立場からくわしく調べられているものとなる。これより2つの困難な点にぶつかる。#1に $s(t)$ は未知であること、#2に L^2-solution でなく古典解を求めること。

くわしい結果は§1でのべることとし、考え方を説明する。データ φ がよいときには差分法を用いて解を構成する、一般のデータはよいデータで近似して解の存在をいう。一意性はいろんな比較定理を組合せて示す。基本的には、差分法にいかに subdifferential の発展方程式の idea をいかしていくかである。

§1. 結果

データーに関する仮定

(A) $l>0$ のとき、$\varphi(x)$ は非負、有界、a.e $x\in[0,l]$ が連続点。

注意 $\varphi\geqq 0$ は1相であることを保証する。

注意 $l=0$ のときは φ はあらわれない。

記号 $D=\{(x,t);\ 0<x<s(t),\ 0<t\leqq T\}$,

$Z=\{x\in[0,l];\ x$ は φ の不連続点$\}\times\{0\}$.

定義 (s,u) が Stefan 問題(S)の解とは、

$\Leftrightarrow$ i) $s(0)=l$, $s(t)>0$ for $t>0$, $s\in C([0,T])\cap C^\infty((0,T])$

ii) u は $\bar{D}$ 上有界, $u\in C^\infty(D)\cap C(\bar{D}-Z)$, $\int_0^T\int_0^{s(t)} t\,u_{xx}^2\,dx\,dt<\infty$.

iii) (1), (3), (4), (5) が成立.

iv) a.e $t \in [0,T]$ に対し, $u_x(0,t)$ が存在して (2) をみたす。

<u>注意</u>　$l=0$ なら (4) はのぞく.

<u>定理 1</u>　$l>0$, φ は (A) をみたす $\Longmapsto \exists. 1\ (\mathrm{s.}\ u)$.
とくに, γ が一価ならば, すべての $t \in]0,T]$ に対して $u_x(0,t)$ が存在して

$$u_x(0,t) = \gamma(u(0,t)) \in C([0,T]).$$

<u>定理 2</u>　$l=0$, γ がさらに次の<u>仮定</u> (B) をみたす.

(B)　$D(\gamma) \supset [0,H]$,　$\gamma(0) \subset]-\infty,0[$

$\Longmapsto$　$\exists. 1\ (\mathrm{s.}\ u)$.

<u>注意</u>　仮定 (B) は固体がとけることを保証するもの. 例えば $\gamma \equiv 0$ ならば 固体はとけるはずがない。

<u>注意</u>　2相問題に対しても同様の結果をうる。

参考文献

[1] 山口, 野本 : Stefan 問題, 産業図書, 1977.

[2] ペトロフスキー : 偏微分方程式論, 東京図書, 1958

[3] H. Brézis : Problèmes unilatéraux, J. Math. Pure Appl. 51 (1972), 1-164

実バナッハ空間における非線型方程式に対する分岐の存在定理と偏微分方程式への応用

新倉保夫（名大）

§1 実バナッハ空間Xにおける方程式

(1) $$Lu + \lambda K u + M(u) = 0 \quad \text{in } X$$

に対して分岐問題を考える。ここでλは実パラメーター，Xにおける線型作用素L，Kおよび非線型作用素Mに対する仮定は次のとおりである：

Lは X における指数0のフレドホルム作用素で，$\dim N = d \neq 0$ である。ここで $N \equiv N(L)$ はLの零空間である。Lは半単純である，すなわち $N(L) = N(L^2) = N(L^3) = \cdots$。$D \equiv D(L)$ でLの定義域を表わす。KはXにおける線型作用素で $D(K) \supset D$ である，Dは作用素Lのグラフノルムをもつバナッハ空間とみなせる。すなわちDのノルムを $|||u||| = \|u\| + \|Lu\|$ により定義する。MはXにおける非線型作用素で $D(M) \supset D$ である。MをDからXへの作用素とみるとき C^1，すなわち連続的フレシェ微分可能である。ある $m > 1$ があって任意の $\alpha \geq 0$ に対して $M(\alpha u) = \alpha^m M(u)$ である。//

XからNの上への射影は $P = (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda - L)^{-1} d\lambda$，ここでCは0を中心とする小さい円，で与えられる。我々は，

次の非退化条件を仮定する：

(K) $K_N \equiv PK|_N : N \to N$ は正則，すなわち $K_N x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $x \in N$ である。

(M) $M_N \equiv PM|_N : N \to N$ は非退化，すなわち $M_N x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $x \in N$ である。//

S を N の単位球とする。次のように S から S への作用素 $\overline{K_N}$, $\overline{M_N}$ を定義する：

$$\overline{K_N} \ ; \ S \to S, \quad x \longmapsto K_N x / \|K_N x\| \ , \ x \in S$$

$$\overline{M_N} \ ; \ S \to S, \quad x \longmapsto M_N x / \|M_N x\| \ , \ x \in S \ 。$$

これは非退化条件によりうまく定義される。以上の条件のもとで定理Iがなりたつ。

<u>定理I</u> (1) $d = \dim N$ が奇数，または

(2) d が偶数かつ $\deg \overline{M_N} \neq 1$

ならば $(\lambda, u) = (0, 0)$ は分岐点である。ここで $\deg \overline{M_N}$ は $\overline{M_N}$ の写像度である。分岐解はパラメーター ε を用いて次のように表される：$0 \leqq \varepsilon \leqq {}^{\exists}\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ をみたす ε に対して，

$$u(\varepsilon) = \varepsilon x(\varepsilon) + \varepsilon^m y(\varepsilon), \quad \lambda(\varepsilon) = \varepsilon^m \kappa(\varepsilon),$$

ここで $x(\varepsilon) \in N$, $\|x(\varepsilon)\| = 1$, $y(\varepsilon) \in R \equiv R(L)$ かつ有界，

$\kappa(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $|\kappa(\varepsilon)|$ は上と下から有界である。//

<u>§2</u> 2つの実パラメーターをもつ方程式に変換群として $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}$ が可換に作用する場合の分岐問題を

考える。(ホップフ分岐はこれに含まれる。) すなわち方程式

(2) $$Lu + \lambda_1 K_1 u + \lambda_2 K_2 u + M(u) = 0 \quad \text{in } X$$

に対して等長表現 $T: z \longrightarrow T(z)$; $S^1 \longrightarrow B(X)$ が存在して $T(z) = I$ (恒等作用素) ならば $z = 1$ かつ $T(z)$ ($z \in S^1$) は L, K_1, K_2, M と可換であるとする。さらに次を仮定する:

N は $2d$ 次元である ($d \neq 0$)。(N が奇数次元のときは定理 I ですでに示された。) N は $T(z)$, $z \in S^1$ の不変部分空間である。任意の $x \in N \setminus \{0\}$ に対して $T(z)x = x$ ならば $z = 1$ である。このときある同型写像 (N と $\mathbb{C}^d$ を同一視する写像) i ; $N \to \mathbb{C}^d$ が存在して $i(T(z)x) = z\, i(x)$, $\forall z \in S^1$, $\forall x \in N$ となる。以後記号を省略するため $i(K_{1N})$, $i(K_{2N})$, $i(x)$ などを同じ記号 K_{1N}, K_{2N}, x などで表わす。任意の $x \neq 0$ に対して

$$(\lambda_1, \lambda_2) \longmapsto \lambda_1 (K_{1N} x, x) + \lambda_2 (K_{2N} x, x) \ ; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{は正則}$$

である。ここで $(\ ,\ )$ は $\mathbb{C}^d$ の内積である。//

非退化条件(K)の代わりに次の条件(K')を仮定する。

(K') 任意の $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ に対して $\lambda_1 K_{1N} + \lambda_2 K_{2N} : N \longrightarrow N$ は正則である。

このほかの L, K_1 と K_2, M に対する仮定は §1 の L, K, M に対する仮定と同様である。

$\overline{M}_N ; S^{2d-1} \longrightarrow S^{2d-1}$ (§1で定義した) が $\overline{M}_N(zx) = z\overline{M}_N(x)$ をみたすとき, $\hat{M}_N ; \mathbb{C}P^{d-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{d-1}$ を $[x] \longmapsto [M_N(x)]$

$(x \in S^{2d-1})$ により定義することができる。以上の条件のもとで定理IIがなりたつ。

<u>定理II</u>　$\dim N = 2d$ とする。

(1)　d が奇数，または

(2)　d が偶数かつ　$\deg \hat{M}_N \neq -1$

ならば　$(\lambda_1, \lambda_2, u) = (0,0,0)$ は分岐点である。このとき，分岐解は定理Iと同様なパラメーター表示ができる。//

さて定理Iと定理IIをくみあわせることにより我々は写像度に対する条件をとりのぞくことができる。すなわち次の定理をえる。

<u>定理III</u>　この§の条件のもとで，方程式(2)は $(\lambda_1, \lambda_2, u) = (0,0,0)$ を分岐点にもつ。//

証明の概略：定理Iと定理IIにより，$\deg \overline{M}_N \neq 1$ または $\deg \hat{M}_N \neq -1$ ならば定理IIIの主張がなりたつ。ところが，$\deg \overline{M}_N = 1$ ならば $\deg \hat{M}_N = 1$ を示すことができる。

<u>§3</u>　Xにおける発展方程式

$$(3) \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Lu(t) + \lambda K u(t) + M(u(t)) = 0 & \text{in } X \\ u(t) = u(t+T) \end{cases}$$

に対するホップフ分岐の問題を考える。ここで λ および T（周期）は実パラメーターである。ここでの目的は(3)の問題を§2の定理IIIへ帰着させることである。

線型作用素Lに対して次のことを仮定する：
$(L\pm i)$は $X_c\equiv X+iX$ における指数0のフレドホルム作用素で $\dim N=d\neq 0$ である。$(L\pm i)$は半単純である，すなわち，$N\equiv N(L\pm i)=N((L\pm i)^2)=N((L\pm i)^3)=\cdots$。$in$ $(n=0,\pm 2,\pm 3,\cdots)$ はLのスペクトルではない。//

さて変数変換

$$s=(1+\mu)t,\quad (1+\mu)T=2\pi,\quad u(t)=u(s/(1+\mu))=v(s)$$

を行なうことにより(3)は

$$(3')\quad \begin{cases} \dfrac{dv(s)}{ds}+Lv(s)+\mu\dfrac{dv(s)}{ds}+\lambda Kv(s)+M(v(s))=0 \quad \text{in } X \\ v(s)=v(s+2\pi) \end{cases}$$

となる。実軸上周期 2π の X－値関数のバナッハ空間 $\tilde{X}$ を適当にえらんで $(3')$ を $\tilde{X}$ における方程式とみなそう。すなわち $\tilde{X}$ における作用素 $\frac{\partial}{\partial s}$，$\tilde{L}$，$\tilde{K}$，$\tilde{M}$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}v\right)(s)\equiv\frac{dv(s)}{ds},\qquad (\tilde{L}v)(s)=Lv(s)$$

$$(\tilde{K}v)(s)\equiv Kv(s)\qquad (\tilde{M}v)(s)=Mv(s)$$

により定義することにより $(3')$は

$$(3'')\quad \left(\frac{\partial}{\partial s}+\tilde{L}\right)v+\mu\frac{\partial}{\partial s}v+\lambda\tilde{K}v+\tilde{M}(v)=0 \quad \text{in } \tilde{X}$$

と表わされる。我々は $\tilde{X}$ を適当にえらぶことにより，

(i) 値域 $R\left(\frac{\partial}{\partial s}+\tilde{L}\right)$ は $\tilde{X}$ で閉である。

(ii) $\tilde{M}: D\left(\frac{\partial}{\partial s}+\tilde{L}\right)\longrightarrow\tilde{X}$ は C^1 である。

をみたすようにとれると仮定する。

また $z=e^{i\theta}$, $0\leqq\theta<2\pi$ とおき、

$$T(z)u(s)\equiv u(s+\theta)$$

により等長作用素 $T(z)$ を定義すれば $T: S^1 \longrightarrow B(\tilde{X})$ は§2で述べた等長表現の仮定をすべて満たす。

L に対する仮定と(i)により作用素 $(\frac{\partial}{\partial s}+\hat{L})$ は指数0かつ半単純なフレドホルム作用素であることを示すことができる。($\dim N(\frac{\partial}{\partial s}+\hat{L})=2d$ となる。) したがって(3')は§2の方程式(2)と同等であり、定理IIIが適用できる。

とくに $-L$ が解析半群の生成作用素ならば $\tilde{X}=C_{2\pi}(X)$ ととれば(i)および(ii)はみたされることに注意する。また $K=I$ (恒等作用素) ならば組 $(\frac{\partial}{\partial s},\tilde{I})$ は §2の (K_1,K_2) に対する仮定をすべて満たすことに注意する。

具体的方程式に対する応用としては、ナビェーストークス方程式、非線型シュレディンガー方程式などがあげられるがここでは省略する。

半群の軌道と不動点について

丸山 彰

Introduction

今，$\{S(t); t \geq 0\}$ を，B-space X の閉集合 D 上の contraction semigroup とする。$\{S(t); t \geq 0\}$ の不動点とは，$S(t)x_0 = x_0$ for any $t \geq 0$，となる点 x_0 のことで，これは B-space における，初期値問題，

$$(\mathrm{IVP}) \quad \begin{cases} du/dt + Au \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

で，特に，定常問題 $Au \ni 0$ の解の存在との関連で，重要な意味をもつ。すなわち，(IVP) から生成された semigroup が不動点をもてば，これは，$Au \ni 0$ の解を与え，その逆もいえる。そこで，いかなるときに $S(t)$ が不動点をもつか，又，それをどうやって，見出すかが，一つの問題となってくる。一番よい条件は，$\lim_{t\to\infty} S(t)x = x_0$ が存在することである。しかし，linear の場合の回転を考えても，このことが成り立たなくても，

不動点は存在する。ついで、時間平均、
$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau$ の $t\to\infty$ の極限をとる。これは、
標語的にいうと、半群の軌道、微分
方程式のことばでいうと解曲線の重心
が、究極的にどこに達するか、ということだ
が、これについても、たとえば、$X=C[-\infty,+\infty]$
で、移動群、$(T_t f)(x)=f(x-t)$ を考える
と、f が概周期関数でないと存在しない
ことがわかっている。

逆に、不動点が存在するための必要条件
として、半群の軌道が有界ということ、
すなわち、$\limsup_{t\to\infty}\|S(t)x\|<+\infty$、$X$ が
H-space のとき、十分であることが Crandall
-Pazy によって示されている。又、X が
uniformly convex でも、OK であることが
知られている。しかるに、X が一般の B-space
のとき、このことが成立しないが、その反例を、
いくつか紹介しながら、さらに、おのおのの例
に付随してでてくる結果も、あわせて、ここに
披露したい。

反例1． $X = C_0[0,\infty) = \{f\ ;\ f$ は $[0,+\infty)$ で連続，かつ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$

$Y = C[0,\infty] = \{f\ ;\ f$ は $[0,+\infty)$ で連続かつ $\limsup_{x\to+\infty}|f(x)| < +\infty\}$

ここで，二つの半群 $S_1(t)$，$S_2(t)$ を次のように与える．

$$S_1(t)f(x) = \begin{cases} f(x-t) & x \geqq t \\ (x-t)\,\mathrm{sgn}(f(0)-1) + f(0) & t-|f(0)-1| \leqq x \leqq t \\ 1 & 0 \leqq x \leqq t-|f(0)-1| \end{cases}$$

又．

$$S_2(t)f(x) = \begin{cases} f(x-t) & x \geqq t \\ (f(0)-1)e^{-t+x}+1 & 0 \leqq x \leqq t \end{cases}$$

$S_1(t)$，$S_2(t)$ ともに，X 及び Y において，isometric semigroup となることが容易にわかる。そして，ともに，X においては不動点をもたないが Y において，$1(x) \equiv 1$ が不動点となることがわかる。X は，Y の閉線型部分空間だから，ノルムは同じ．よって，軌道はいずれの場合も有界。

$S_2(t)$ は affine semigroup で

$$T(t)f(x) = \begin{cases} f(x-t) & x \geqq t \\ f(0)e^{-t+x} & 0 \leqq x \leqq t \end{cases}$$

を、線型部分としてもつ。しかし、$S_1(t)$ は affine ではない。一般に、B-space X が strictly convex（単位球面が線分を含まない）のとき、isometric semigroup は affine semigroup になるが、一般の B-space ではダメ。$S_1(t)$ がその反例となっている。

反例2. 菊地 光嗣 の例。

$X = c_0$（0 に収束する数列の空間）

$Y = \ell^\infty$（有界数列の空間）とする。

$A(\xi_n) = (\eta_n)$ で、$\eta_n = \xi_n^{2n+1} - \frac{1}{n}$ とおく。

このとき A は、X 及び Y 上の、連続増大作用素となる。よって、$du/dt + Au = 0$, $u(0) = u_0$ という初期値問題を考える。このとき、$u(t) = (u_n(t))$ として、各成分の方程式を考えると

$$\begin{cases} du_n/dt + u_n^{2n+1} - \frac{1}{n} = 0 \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases}$$

で、これが $\mathbb{R}$ 上で解をもつことは、あきらか。$u_0 \in X$ (resp. Y) なら、$u(t) \in X$ (resp. Y) をすぐでてくる。不動点については、$A(\xi_n) = 0$ をとく $\xi(\xi_n) = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}\right)$ で $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = 1$

から，X に入らないで Y に入る．又，解曲線が有界なことは，

$$du_n/dt = -u_n^{2n+1} + \frac{1}{n} \text{ から，}$$

$u_{0n} > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ のとき，$du_n/dt|_{t=0} < 0$．

したがって $u_n(t) \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ のところで減小．

又，$u_{0n} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ のとき，増加．ゆえに，

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \lessgtr u_n(t) \lessgtr u_{0n} \quad \text{if } du_n/dt \lesseqgtr 0$$

よって $|u_n(t)| < \max\{u_{0n}, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}\}$

から，$\|u_n(t)\|_\infty < \max\{\|u_0\|_\infty, 1\}$ で有界．

ただし，この場合，反例1のように，解が具体的に書けないうらみがある．

反例3．　X, Y は反例2と同じ．

$A(\xi_n) = (\eta_n)$ で $\eta_n = -\frac{1}{n^{\xi_n}} + \frac{1}{n}$ とおく．

このとき $\eta_n = -e^{-\xi_n \log n} + \frac{1}{n}$ で，X, Y 上で増大作用素であることは明らか．ただし，反例2と異なり，A は連続でもないし，又，$D(A)$ は，X，Y のいずれでも，閉集合でない．A は弱連続でもない．つまり $x_n \to x$ のとき $Ax_n \to Ax$ はいえない．しかし，demicontinuous（$x_n \to x$ のとき，$Ax_n \rightharpoonup Ax$）はいえる．

Aの定義域はX, Yでことなり,

$D(A|_X) = \{(\xi_n);\ \lim_{n\to\infty} \xi_n \log \xi_n = 0\}$

$D(A|_Y) = \{(\xi_n);\ \varliminf_{n\to\infty} \xi_n \log \xi_n > -\infty\}$

となる。 $\overline{D(A|_X)} = c_0$ で $\overline{D(A|_Y)} = \{(\xi_n);\ \varliminf_{n\to\infty} \xi_n \geq 0\}$

となることはすぐわかる。 Aが不連続なことは

$D(A|_X)$がXで内点を含まないことをいえば十分である。よって、ℓ^p $(p \geq 1)$がXでdenseなることを利用して、$(\bigcup_{p\geq 1} \ell^p) \cap D(A|_X) = \phi$ をいう。

今、$(\xi_n) \in D(A|_X)$ のとき、$\lim_{n\to\infty} \xi_n \log \xi_n = +\infty$

よって、十分大な $n > N$ に対して、$\frac{1}{M} < \xi_n \log n$.

ゆえに、$\xi_n > \frac{1}{M \log n}$. 又、$\left(\frac{1}{\log n}\right) \notin \bigcup_{p\geq 1} \ell^p$

である。なぜなら $\frac{1}{(\log n)^p} > \frac{1}{n}$ (十分大な $n > N$)

ゆえに、$(\xi_n) \notin \bigcup_{p\geq 1} \ell^p$ から、このことはいえる。

よって、$\overset{\circ}{D(A|_X)} = \phi$. XとYのtopologyは同じで、$(\xi_n)$が$D(A|_X)$の内点でなければ、あきらかに、$D(A|_Y)$の内点でもなくなる。よって、少なくとも、$D(A|_X)$の点では、AはYの作用素としても、不連続になる。又、Aは、極大増大であることも明らか。解は、ここでは、具体的に、次のように与えられる。

$$\begin{cases} du/dt + Au = 0 \\ u(0) = u_{0n} \end{cases}$$ として、解をみつける。

各成分の解は、$dU_n/dt - e^{-U_n \log n} + \frac{1}{n} = 0$

$U_n(0) = U_{0n}$ の解で $U_n(t) = \frac{1}{\log n} \times \log n \{1 - (1 - e^{(U_{0n}-1)\log n}) e^{-\frac{\log n}{n} t}\}$

不動点は、$A(\xi_n) = 0$ から、$\frac{1}{n^{\xi_n}} = \frac{1}{n}$、つまり、$\xi_n \equiv 1$、よって $(1) \in Y/X$

解曲線の有界性は、上の解において、$t \to \infty$ を評価してもよいし、又、反例2、と同じ方法ででてくる。

注）反例1, 2, 3, ともに、X, Y において、不動点以外の点 x で $\lim_{t\to\infty} S(t)x$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau$ が存在しない。ただし、Y において、$w - \lim_{t\to\infty} S(t)x$, $w - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau$ が存在して、これが不動点になる。

水力学に現れるある自由境界問題の周期解について

中央大・理工　石井仁司

§1. 問題と結果.

自由境界問題

$$
(1)\quad
\begin{cases}
u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < s(t), \quad t \in \mathbb{R} \\
u_x(0,t) = -\ell(t), & t \in \mathbb{R} \\
u(s(t),t) = s(t), & t \in \mathbb{R} \\
u_x(s(t),t) = -s'(t), & t \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

（$\ell(t)$：既知関数，　$u(x,t)$，　$s(t)>0$ ：未知関数）

に対する周期解の存在と一意性，および初期値問題

$$
(2)\quad
\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\
u_x(0,t) = -\ell(t), & t > 0 \\
u(s(t),t) = s(t), & t > 0 \\
u_x(s(t),t) = -s'(t), & t > 0 \\
u(x,0) = g(x), & 0 < x < s(0) \\
s(0) = b
\end{cases}
$$

（$g(x)$，　$b>0$ ：既知）

に対する解の漸近的周期性について考える。(1)あるいは(2)は多孔質媒質で満たされた鉛直におかれたパイプ中の圧縮性流体の運動をモデル化したものである。$x=0$はパイプの底を，

$x=s(t)$ は時刻 t における流体面の高さを，$-u_x(x,t)$ は流体の速度を表わす。初期値問題(2) は Friedman - Jensen [1] で扱われ，解の存在，一意性，比較定理，漸近挙動等が研究された。

(1) に対する周期解の存在と一意性定理は次の様になる。

定理 1.1. $\ell \in C(\mathbb{R})$, $\ell(t) > -1$ $(t \in \mathbb{R})$ とし，$\omega > 0$ に対して

$$\int_0^\omega \ell(\tau)d\tau = 0, \qquad \ell(t+\omega) = \ell(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つとする。$r + \min_{0 \leqq t \leqq \omega} \int_0^t \ell(\tau)d\tau > 0$ となる任意の r に対して，周期 ω の (1) の周期解 (u,s) で $r = s(0) + \int_0^{s(0)} [u(x,0) - x]dx$ をみたすものが唯一つ存在する。

$t \to \infty$ のとき，$\ell(t)$ が定理 1.1 の仮定をみたす周期関数に収束するならば，(2) の解も周期解に近づく。すなわち，次の定理が成立する。

定理 1.2. $\ell \in C[0,\infty)$, $\inf_{t \geqq 0} \ell(t) > -1$ とする。ある $\omega > 0$ と $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$ に対して，$\ell(t) = \ell_1(t) + \ell_2(t)$ と書けて，

$$\int_0^\omega \ell_1(t)dt = 0, \qquad \ell_1(t+\omega) = \ell_1(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{t\to\infty} \ell_2(t) = 0, \qquad \alpha \equiv {}^{\exists}\lim_{t\to\infty} \int_0^t \ell_2(\tau)d\tau \in \mathbb{R}$$

が成り立つとする。

$$g(x) > x \quad (0 \leqq x < b), \qquad g(b) = b, \qquad g \in C^1[0,b]$$

であり，

$$b + \int_0^b [g(x) - x]dx + \inf_{t \geqq 0} \int_0^t \ell(\tau)d\tau > 0$$

ならば，(2) の解を (u, s) とし，$l = l_1$，$r = b + \int_0^b [g(x) - x]dx + \alpha$ に対応した (1) の周期解を (u^*, s^*) とするとき，

$$\lim_{t\to\infty} \max\{|u(x,t) - u^*(x,t)|\ ;\ 0 \leqq x \leqq \min(s(t), s^*(t))\} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} |s(t) - s^*(t)| = 0$$

となる。

注意　$l(t)$，$\int_0^t l(\tau)d\tau$ が概周期関数（あるいは漸近的概周期関数）の場合にも，定理 1.1（あるいは定理 1.2）と同様な定理が，周期解を概周期解に置き替えて，成立するが，ここでは簡単のために周期解に話を限った。

§2. 解の評価.

この節では問題 (2) を考え，常に次の (3), (4), (5) を仮定する。

(3)　$g(x) > x\ (0 \leqq x < b)$，　$g(b) = b$，　$g \in C^1[0, b]$.

(4)　$l \in C[0, \infty)$，　$l(t) > -1\ \ (t \geqq 0)$，

(5)　$b + \int_0^b [g(x) - x]dx + \int_0^t l(s)ds > 0 \quad (t \geqq 0)$。

このとき，(2) は解 (u, s) を唯一つ持ち，更に，

$u(x,t),\ u_x(x,t) \in C(\{(x,t)\ ;\ 0 \leqq x \leqq s(t),\ t \geqq 0\})$

$s \in C[0,\infty) \cap C^\infty(0,\infty)$,

$u \in C^\infty(\{(x,t)\ ;\ 0 < x \leqq s(t),\ t > 0\})$

がみたされる（Friedman - Jensen [1]）。

補題 2.1.　$0 < {}^\exists\varepsilon \leqq b + \int_0^b [g(x) - x]dx + \int_0^t l(s)ds \leqq {}^\exists M$，$|l(t)| \leqq M\ \ (t \geqq 0)$

ならば,

(6) $\quad 0 < {}^{\exists}\varepsilon' \leqq s(t) \leqq M \qquad (t \geqq 0)$。

ここで, ε' は ε, M, $\int_0^b (g(x)-x)^2 dx$ にのみ依存する定数。

補題 2.2. $|\ell(t)| \leqq M$, $|g'(x)| \leqq M$ ならば,

(7) $\quad |u_x(x,t)| \leqq M \quad (0 \leqq x \leqq s(t),\ t \geqq 0), \qquad |s'(t)| \leqq M \quad (t \geqq 0)$.

補題 2.3. データの組 $(b, g(x), \ell(t))$, $(\tilde{b}, \tilde{g}(x), \tilde{\ell}(t))$ に対応する解をそれぞれ (u, s), $(\tilde{u}, \tilde{s})$ とし,

$$f(t) = b + \int_0^b [g(x)-x]dx + \int_0^t \ell(s)ds, \quad \tilde{f}(t) = \tilde{b} + \int_0^{\tilde{b}} [\tilde{g}(x)-x]dx + \int_0^t \tilde{\ell}(s)ds$$

$$v(x,t) = s(t) + \int_x^{s(t)} [u(y,t)-y]dy, \qquad \tilde{v}(x,t) = \tilde{s}(t) + \int_x^{\tilde{s}(t)} [\tilde{u}(y,t)-y]dy$$

$$\hat{s}(t) = \min(s(t), \tilde{s}(t))$$

とおく。 (i) $t > \sigma$ のとき,

$$\max_{0 \leqq x \leqq \hat{s}(t)} |v(x,t) - \tilde{v}(x,t)| \leqq \max\left\{ \max_{\sigma \leqq \tau \leqq t} |f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|,\ \max_{0 \leqq x \leqq \hat{s}(\sigma)} |v(x,\sigma) - \tilde{v}(x,\sigma)| \right\},$$

(ii) $f(t) = \tilde{f}(t)$, $\max_{0 \leqq x \leqq \hat{s}(\sigma)} |v(x,\sigma) - \tilde{v}(x,\sigma)| \neq 0$ ならば,

$$\max_{0 \leqq x \leqq \hat{s}(t)} |v(x,t) - \tilde{v}(x,t)| < \max_{0 \leqq x \leqq \hat{s}(\sigma)} |v(x,\sigma) - \tilde{v}(x,\sigma)| \qquad (t > \sigma)$$

が成り立つ。

§ 3. 定理の証明の概略.

[定理 1.1 の証明の概略] 例えば, $b = -1 + \sqrt{1+2r}$, $g(x) = b$ とすれば, (3) と $b + \int_0^b [g(x)-x]dx = r$ がみたされる。定理 1.1 の仮定より, (4), (5) もみたされる。 (2) の一意解を (u, s) とし, $u^n(x,t) = u(x, t+n\omega)$, $s^n(t) = s(t+n\omega)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく。 $f(t) = b + \int_0^b [g(x)-x]dx + \int_0^t \ell(\tau)d\tau$ とおくとき,

$$s(t) + \int_0^{s(t)} [u(x,t) - x]\,dx = f(t) \qquad (t \geq 0)$$

は容易に確められる。また $f(t)$ は周期 ω の周期関数である。

したがって,

(8) $$s^n(t) + \int_0^{s^n(t)} [u^n(x,t) - x]\,dx = f(t) \qquad (t \geq -n\omega).$$

補題 2.1 と 2.2 を用いて, (u^n, s^n) のある部分列 $(u^{n'}, s^{n'})$ が (1) の解 (u^*, s^*) に広義一様収束することが確められる。

また, (8) より

(9) $$s^*(t) + \int_0^{s^*(t)} [u^*(x,t) - x]\,dx = f(t) = r + \int_0^t l(\tau)\,d\tau.$$

次に, この (u^*, s^*) が周期解であることをみる。

$$\tilde{u}^*(x,t) = u^*(x, t+\omega), \qquad \tilde{s}^*(t) = s^*(t+\omega),$$

$$v(x,t) = s^*(t) + \int_x^{s^*(t)} [u^*(y,t) - y]\,dy, \qquad \tilde{v}(x,t) = \tilde{s}^*(t) + \int_0^{\tilde{s}^*(t)} [\tilde{u}^*(y,t) - y]\,dy,$$

$$\hat{s}(t) = \min(s^*(t), \tilde{s}^*(t))$$

とおく。補題 2.3 の (i) より, $t \mapsto \max_{0 \leq x \leq \hat{s}(t)} |v(x,t) - \tilde{v}(x,t)|$ は単調減少で有界となり,

(10) $$\gamma = \lim_{t \to -\infty} \max_{0 \leq x \leq \hat{s}(t)} |v(x,t) - \tilde{v}(x,t)|$$

が存在する。$u^n(x,t) = u^*(x, t-n\omega)$, $s^n(t) = s^*(t - n\omega)$, $\tilde{u}^n(x,t) = \tilde{u}^*(x, t-n\omega)$, $\tilde{s}^n(t) = \tilde{s}^*(t-n\omega)$ とおくとき, ある部分列 $\{n'\} \subset \{n\}$ に対して, $(u^{n'}, s^{n'})$, $(\tilde{u}^{n'}, \tilde{s}^{n'})$ はそれぞれ (1) の解 (u_1, s_1), $(\tilde{u}_1, \tilde{s}_1)$ に広義一様収束する。$v_1(x,t) = s_1(t) + \int_x^{s_1(t)} [u_1(y,t) - y]\,dy$, $\tilde{v}_1(x,t) = \tilde{s}_1(t) + \int_x^{\tilde{s}_1(t)} [\tilde{u}_1(y,t) - y]\,dy$ とおけば, (10) より

$$\max_{0 \leq x \leq \hat{s}_1(t)} |v_1(x,t) - \tilde{v}_1(x,t)| = \gamma.$$

ただし，$\hat{s}_1(t) = \min(s_1(t), \tilde{s}_1(t))$。補題 2.3 の (ii) より，$\gamma = 0$.

$t \mapsto \max\limits_{0 \leqq x \leqq \hat{s}_1(t)} |v_1(x.t) - \tilde{v}_1(x.t)|$ の単調性より，

$$\max_{0 \leqq x \leqq \hat{s}_1(t)} |v_1(x.t) - \tilde{v}_1(x.t)| = 0 \qquad (t \in R).$$

これより，$(u^*, s^*) = (\tilde{u}^*, \tilde{s}^*)$ が判る。

一意性は補題 2.3 の (ii) より容易に判る。

[定理 1.2 の証明の概略] 定理の結論を否定すると，極限移行によって，$l = l_1$, $r = b + \int_0^b [g(x) - x]\,dx + \alpha$ に対応する (1) の周期解が2つ作られてしまい，定理 1.1 に矛盾する。

参考文献

[1] A. Friedman – R. Jensen, A parabolic quasi-variational inequality arising in hydraulics, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, 2 (4) (1975), 421 – 468.

[2] T. Yoshizawa, Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions, Springer-Verlag, New York, Heidelberg. Berlin 1975.

[3] C. M. Dafermos, Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolution equations, Dynamical Systems, Proc. of Univ. of Florida Inter. Symp. (ed. A.R. Bednarek, L. Cesari) 1977, 43 – 57.

以上は、このセミナーでの特別講演及び一般講演の記録です。以下、short communicationの記録及び幾人かの出席者から寄せられた原稿を掲載します。

半線型熱方程式の解の有限,無限伝播性

永井 敏隆 (広島大・理)

半線型熱方程式の初期値問題

$$P(\beta,a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\Delta u(t,x)+\beta(u(t,x))=0, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x)=a(x), & x\in\mathbb{R}^d \end{cases}$$

について考える。初期値 a と β は以下次をみたすとする。

(条件A) $a(x)$ は compact な support を持つ連続関数, $a(x)\geq 0$, $a(x)\not\equiv 0$

(条件B) $\beta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 連続,単調増大, $\beta(s)>0$ $(s>0)$, $\beta(0)=0$

この時, 問題 $P(\beta,a)$ は次なる積分方程式

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}H(t,x-y)a(y)dy-\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}H(t-s,x-y)\beta(u(s,y))dy$$

$$\left(H(t,x)=(4\pi t)^{-d/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \right)$$

をみたす非負な解 u を持つ。

β が線型ならば, $P(\beta,a)$ の解 u は無限伝播速度を持つ(即ち, $u(t,x)>0$, $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$) ことは周知の事実である。

β が非線型のときは, β の $s=0$ における立ち上がりにより, $P(\beta,a)$ の解 u は有限伝播速度を持つ(即ち, 各時刻 t における $x\to u(t,x)$ の support が $\mathbb{R}^d$ で compact) ことが Kalashnikov [4], Evans and Knerr [3] により知られている。[3], [4] の結果を述べる。

- (条件C) $\displaystyle\int_{0+}\frac{ds}{\beta(s)}<\infty$

  $\Longrightarrow$ $\exists T>0$ s.t. $u(t,x)=0$ for $\forall t\geq T$

- (条件D) $\displaystyle\int_{0+}\frac{ds}{\sqrt{s\beta(s)}}<\infty$

  $\Longrightarrow$ $u(t,x)$ は有限伝播速度を持つ。

条件Dより条件Cは導かれるので，条件Dの下で $\mathbb{P}(\beta,\alpha)$ の解 u は有限伝播速度を持ち，かつ $u(t,x)=0$ for $\forall t \geq T$ となる。
尚，[3]，[4] には熱伝導係数が熱分布に依存する場合についても述べられている。 β が $\mathbb{R}^1$ の極大単調作用素の特別な場合については [2]，[3] を参照。

このノートでは次の問題について考える： β に関するどのような条件の下で，問題 $\mathbb{P}(\beta,\alpha)$ の解は無限伝播速度を持つか。

常微分方程式の初期値問題

$$(\text{O.D})\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + \beta(v(t)) = 0 & \text{in } (0,\infty) \\ v(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

について考えてみる。 条件 $\int_{0+} ds/\beta(s) < \infty$ の下では，$v(t)>0$ in $[0,T)$，$v(t)=0$ for $\forall t \geq T$（Tはある正定数），条件 $\int_{0+} ds/\beta(s) = \infty$ の下では $v(t) > 0$ in $[0,\infty)$ となる。 このことより，問題 $\mathbb{P}(\beta,\alpha)$ の解が無限伝播速度を持つ為の一つの十分条件として，条件 $\int_{0+} ds/\beta(s) = \infty$ が考えられる。 残念ながら，条件 $\int_{0+} ds/\beta(s) = \infty$ の下では，未だ解決を得てない。 β に凹性に近い条件を付加すれば次の結果が得られる。

定理1. 初期値 α と β はそれぞれ条件A，条件Bをみたすとする。
更に，(i) β は $(0,\varepsilon]$ で可微分で（εはある正定数），かつ
$$\beta'(t) - \beta'(s) \leq B(t)\beta(t), \quad 0 < s \leq t \leq \varepsilon$$
但し，$B(t)$ は $[0,\varepsilon]$ 上の可積分な非負関数。
(ii) $$\int_{0+} \frac{ds}{\beta(s)} = \infty.$$

この時，問題 $\mathbb{P}(\beta,\alpha)$ の解 u は無限伝播速度を持つ。即ち，$u(t,x) > 0$ for $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$.

（注） β が凹ならば，$B \equiv 0$ として (i) が成立。

証明. 比較関数を構成し, 比較定理を用いることにより証明を与える.
問題 $\mathbb{P}(\beta,\alpha)$ に対する比較定理を用いることより $a(x)\leq \varepsilon$ としてよい.

各パラメーター $\alpha>0$ に対し $v(s,\alpha)$ を

$$\int_{v(s,\alpha)}^{\alpha} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} = s, \quad s>0$$

で定める. このとき, 仮定 (ii) より

(1) $0< v(s,\alpha) \leq \alpha \quad (s\geq 0), \quad v(s,\alpha)\searrow 0$ as $\alpha\uparrow\infty$

をみたす. 更に

(2) $\frac{\partial v}{\partial s}(s,\alpha) + \beta(v(s,\alpha)) = 0 \quad (s>0), \quad v(0,\alpha)=\alpha.$

(3) $$\frac{\partial v}{\partial \alpha}(s,\alpha) = \frac{\beta(v(s,\alpha))}{\beta(\alpha)} \quad (s>0)$$

(4) $$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}(s,\alpha) = \frac{\beta(v(s,\alpha))}{\beta(\alpha)^2}\left[\beta'(v(s,\alpha)) - \beta'(\alpha)\right]$$

次に, $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の関数 $\omega(t,x)$ を次で定める.

$$\omega(t,x) = F^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^d} H(t,x-y)F(a(y))dy\right)$$

但し, $\quad F(u) = \int_0^u \exp\left(-\int_0^s B(\tau)d\tau\right)ds \quad (u\geq 0).$

$\omega(t,x)$ は次をみたす.

(5) $$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x) - \Delta\omega(t,x) + B(\omega(t,x))\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}(t,x)\right)^2 = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ \omega(0,x) = a(x) & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(6) $0 \leq \omega(t,x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} H(t,x-y)a(y)dy, \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d.$

比較関数 $w(t,x)$ を

$$w(t,x) = v(t,\omega(t,x)), \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$$

で定める. (1) と (6) より

$$0 \leq w(t,x) \leq \omega(t,x) \text{ in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d.$$

次に、(2),(3),(4)式と仮定(i)を用いると

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) - \Delta w(t,x) + \beta(w(t,x))$$

$$\le \frac{\beta(w(t,x))}{\beta(\omega(t,x))}\left\{\frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x) - \Delta\omega(t,x) + B(\omega(t,x))\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{\partial \omega}{\partial x_i}(t,x)\right]^2\right\}. \tag{7}$$

したがって (5),(7) より

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) - \Delta w(t,x) + \beta(w(t,x)) \le 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ w(0,x) = a(x) & \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

よって、比較定理を用いることより

$$0 < w(t,x) \le u(t,x), \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d.$$

（証明終り）

β が凹関数のときは、微分可能の条件は不必要である。

定理2. 初期値 a と β はそれぞれ条件A, 条件Bをみたすとする。
更に、(i) β は $[0,\varepsilon]$ で凹関数（ε はある正定数）。

(ii) $\displaystyle\int_{0+}\frac{ds}{\beta(s)} = \infty.$

このとき、問題 $P(\beta,a)$ の解は無限伝播速度を持つ。
更に、$u(t,x) \ge v(t, H_t\tilde{a}(x)) > 0$ in $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$。ここで、$v(t,\alpha)$ は定理1で定められた関数。$H_t\tilde{a}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} H(t,x-y)\tilde{a}(y)dy$,
$\tilde{a}(y) = \min\{a(y), \varepsilon\}$.

証明. 定理1と異なる証明方法を与える。

$s<0$ に対し $\beta(s)=0$ と定め、β の Yosida 近似を β_λ とする。

$$\beta_\lambda(s) = \frac{s - J_\lambda(s)}{\lambda}, \quad J_\lambda(s) = (I+\lambda\beta)^{-1}(s) \quad (\lambda > 0)$$

β_λ, J_λ の性質については、Brézis [1] の教科書を参照。
β が $[0,\varepsilon]$ で凹関数より、J_λ は $[0,\varepsilon]$ で凸関数となる。

次なる初期値問題

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t,x) - \Delta u_\lambda(t,x) + \beta_\lambda(u_\lambda(t,x)) = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u_\lambda(0,x) = a(x) & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

の解を u_λ とし，常微分方程式の初期値問題

$$(9)\quad \frac{dv_\lambda}{dt}(t) + \beta_\lambda(v_\lambda(t)) = 0 \text{ in } (0,\infty),\quad v_\lambda(0) = \alpha > 0$$

の解を $v_\lambda(t,\alpha)$ とする。 $\lambda\downarrow 0$ とすると

$$u_\lambda(t,x)\downarrow u(t,x),\quad v_\lambda(t,\alpha)\downarrow v(t,\alpha)$$

となる。 したがって

$$(10)\quad u_\lambda(t,x) \geq v_\lambda(t, H_t\tilde{a}(x)) \text{ in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \quad (\lambda>0)$$

が示せればよい。

u_λ と v_λ はそれぞれ

$$u_\lambda(t,x) = e^{-\frac{t}{\lambda}}H_t a(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}ds\int_{\mathbb{R}^d} H(t-s,x-y)J_\lambda(u_\lambda(s,y))dy,$$

$$v_\lambda(t,\alpha) = e^{-\frac{t}{\lambda}}\alpha + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} J_\lambda(v_\lambda(s,\alpha))ds$$

をみたすので， u_λ の近似解 $\{u_\lambda^n\}$， v_λ の近似解 $\{v_\lambda^n\}$ を次で定める。

$$\begin{cases} u_\lambda^0(t,x) = e^{-\frac{t}{\lambda}}H_t a(x), \\ u_\lambda^n(t,x) = e^{-\frac{t}{\lambda}}H_t a(x) + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}ds\int_{\mathbb{R}^d} H(t-s,x-y)J_\lambda(u_\lambda^{n-1}(s,y))dy \quad (n\geq 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_\lambda^0(t,\alpha) = e^{-\frac{t}{\lambda}}\alpha, \\ v_\lambda^n(t,\alpha) = e^{-\frac{t}{\lambda}}\alpha + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}J_\lambda(v_\lambda^{n-1}(s,\alpha))ds \quad (n\geq 1). \end{cases}$$

このとき，

$$u_\lambda^n(t,x)\uparrow u_\lambda(t,x),\quad v_\lambda^n(t,\alpha)\uparrow v_\lambda(t,\alpha) \quad \text{as } n\uparrow\infty$$

なので，(10) を示すには

$$(11)\quad u_\lambda^n(t,x) \geq v_\lambda^n(t, H_t\tilde{a}(x)) \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \quad (n\geq 0)$$

が示せればよい。

(11) 式を示すには，n に関する帰納法を用いる。 まず，n に関する帰納法を用いると，J_λ が $[0,\varepsilon]$ で凸なことより， $\alpha\to v_\lambda^n(t,\alpha)$ は凸となることに注意する。

(11) 式は $n=0$ の時は明らかに成立する。 n まで成立すると仮定する。

$$(12)\quad u_\lambda^{n+1}(t,x) \geq e^{-\frac{t}{\lambda}} H_t\tilde{a}(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} ds \int_{\mathbb{R}^d} H(t-s, x-y) J_\lambda(v_\lambda^n(s, H_s\tilde{a}(y))) dy.$$

J_λ が $[0,\infty)$ で凸, $\alpha \to v_\lambda^n(s,\alpha)$ が凸なことより, Jensen の不等式を用いると

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(t-s, x-y) J_\lambda(v_\lambda^n(s, H_s\tilde{a}(y))) dy \geq J_\lambda(v_\lambda^n(s, H_t\tilde{a}(x)))$$

を得る。 したがって (12) 式より

$$u_\lambda^{n+1}(t,x) \geq e^{-\frac{t}{\lambda}} H_t\tilde{a}(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} J_\lambda(v_\lambda^n(s, H_t\tilde{a}(x))) ds$$

$$= v_\lambda^{n+1}(t, H_t\tilde{a}(x))$$

(証明終り).

問題 $P(\beta, a)$ に関する比較定理と, 定理1, 定理2 により 次を得る.

定理3. $\tilde{\beta}: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 連続, 単調増大, $\tilde{\beta}(s) > 0\ (s>0)$, $\tilde{\beta}(0) = 0$. 初期値 a は条件A をみたすとせよ. 更に, 条件B をみたす β が存在し, 次をみたすとする.

(i) β は 定理1 の条件(i) か 定理2 の条件(i) のいずれかをみたす.

(ii) $\displaystyle\int_{0+} \frac{ds}{\beta(s)} = \infty$.

(iii) $\displaystyle\limsup_{s \to 0+} \frac{\tilde{\beta}(s)}{\beta(s)} < \infty$.

このとき, 問題 $P(\tilde{\beta}, a)$ の解 は無限伝播速度を持つ.

例. $\tilde{\beta}$ は $s=0$ の近くで $\tilde{\beta}(s) = s^p |\log s|^q$ $(0<p<\infty,\ 0\leq q<\infty)$ とする. このとき, $P(\tilde{\beta}, a)$ の解 u は次をみたす.

(i) $0<p<1,\ q\geq 0$ 又は $p=1,\ q>2 \Rightarrow$ 有限伝播性, かつ $u(t,x)=0$ for $^\forall t \geq T > 0$

(ii) $p=1,\ 1<q\leq 2 \Rightarrow u(t,x)=0$ for $^\forall t \geq T > 0$

(iii) $p=1,\ 0\leq q\leq 1$ 又は $p>1,\ q\geq 0 \Rightarrow$ 無限伝播性.

参考文献

[1] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espace de Hilbert, North-Holland, Amsterdam (1973).

[2] H. Brézis and A. Friedman, Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities, Illinois J. Math. 20 (1976), 82-97.

[3] L.C. Evans and B.F. Knerr, Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities, Illinois J. Math. 23 (1979), 153-166.

[4] A.S. Kalashnikov, The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption. U.S.S.R. Comp. Math. and Math. Phys. 14 (1974), 70-85

半線型放物型方程式(空間1次元)の解の挙動について

保野 博(東大、理)

§1. 序

半線型放物型方程式

$$u_t = a(x)\,u_{xx} + b(x)\,u_x + f(u)$$

の解の挙動は、その方程式の非線型性にもかかわらず種々の「良い」特徴をもっている。　本稿では、非線型項 $f(u)$ には滑らかさのみを仮定し、その範囲で解に共通して見られる二、三の性質について論じてみる。

前半(§3)の内容は解の ω-極限集合に関するものであり任意の解は ω-極限点を高々1つしか持たないことが示される(定理1)。　これにより、解の漸近挙動は

(1) 有限時間で爆発 (blow up)

(2) $t\to\infty$ のとき解のノルムが発散 (grow up)

(3) $t\to\infty$ のときある定常解に収束

という3通りに限られることが明らかになる。　とくに、$t\to\infty$ のとき有界でありながら、いずれの定常解にも収束しないような解は存在しない。

後半(§4)は、各時刻における解 u の(x軸上の)グラフの形状の時間的推移に関する結果である(定理2)。　粗く言えば、解のグラフの起伏の数 —— 正確には後で定義する lap number —— が時間 t について単調非増大であることが示される。(注. グラフの起伏が時間とともに大きくなってゆくことは勿論あり得る。上に述べたのは、起伏の数そのものは増えないということである。)この事実から、例えば、任意の定常解の安定多様体は、その定常解

よりグラフの起伏の少ない関数を含まないことがわかる。

定理1、定理2の内容はかなり趣を異にしているが、証明の方法には共通点が多い。いずれも、最大値原理から導かれる後述のLemma 0がkey pointになっている。Lemma 0そのものは空間多次元の場合にも成立するが、定理をそのまま高次元へと一般化するには幾つかの難点があり、まだ成功していない。なお、空間多次元の場合でも定常解が高々可算個しかないケースでは解のω-極限集合が複数個の要素を含まないことが簡単に証明できるが、Saut-Temam [4]によれば楕円型境界値問題の解の個数はgenericには有限なのだから、定理1に述べたことは多次元の場合にも「一般には」正しいことになる。ただ、それが「常に」正しいかどうかということが、定理1で問題にされているわけである。

定理1も定理2も、単独方程式に固有の結果であり、システムでは(空間1次元であろうと)もはや成立しない。例えばlimit cycleの生じる状況では解のω-極限集合は非可算個の要素を含み得るし、また、単純な初期データから出発した解が、はるかに起伏の数の多い定常解に収束することもあり得る。後者は、reaction-diffusion方程式におけるpattern formationの問題に関連して、しばしば報告されている現象である。

ところで、京大の田端正久氏は差分法を用いて定理2と同様の結果を得ている[5]。その証明は本稿で与えたものに比べ簡潔さに欠けるが、定理2に述べた事柄が解の差分近似に対しても成り立つことを示した点で優れている。

§2. 準備

Notation　I：開区間 $(0,1)$.　$\bar{I}=[0,1]$

$$l_t=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\bar{I}\}$$

次に、$w=w(x,t)$を$\bar{I}\times[0,T]$の上で定義された実数値関数として

$$A^+(w)=\{(x,t)\in\bar{I}\times[0,T] \mid w(x,t)>0\}$$
$$A^-(w)=\{\quad〃\quad \mid w(x,t)<0\}$$

とおく。

[Lemma 0]

領域 $I\times(0,T)$ で $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ は有界、かつ $a(x,t)\geq {}^{\exists}\delta>0$ とする。更に w は

$$\begin{cases} w_t = a w_{xx} + b w_x + c w & \text{in } I\times(0,T) \\ w\cdot\frac{\partial w}{\partial n}\leq 0 & \text{on } \partial I\times(0,T) \end{cases}$$

を満たす関数とする。このとき、各 $t\in(0,T)$ に対し、$A^+(w)\cap(\bar{I}\times[t,T))$ の任意の連結成分 C は

$$C\cap l_t\neq\emptyset$$

を満足する。$A^-(w)\cap(\bar{I}\times[t,T))$ の連結成分についても同様である。▮

証明は通常の maximal principle による。

§3. 解の ω-極限集合

次の初期値境界値問題を考える。

$$(E_1)\quad\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + f(x,u) & \text{in } I\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{on } \bar{I} \\ \alpha(x)u + \{1-\alpha(x)\}\frac{\partial u}{\partial n} = \beta(x) & \text{on } \partial I\times(0,T) \end{cases}$$

ただし a, b, f は適当に滑らかで $a\geq{}^{\exists}\delta>\overbrace{0,}^{0\leq\alpha\leq1}$ とする。また、解は可能な限り延長されたものを考えるので、T の値は一般に初期データに依存する。すなわち、$\varphi\in C(\bar{I})$ に対し、

$$T(\varphi)=\sup\{T \mid u_0=\varphi \text{ を初期データとする}(E_1)\text{の解が存在}\}$$

と定める。$T(\varphi)$ は正又は $+\infty$ の値をとる。

<u>定義</u> $\varphi\in C(\bar{I})$ の <u>ω-極限集合</u>を次式で定める。

$$\omega(\varphi)=\bigcap_{T(\varphi)>t>0} \mathrm{closure}\{u(\cdot,\tau;\varphi)\mid \tau\geq t\}$$

ここで、$u(x,t;\varphi)$ は初期データ $u_0=\varphi$ に対する (E_1) の解であり、closure は $C^1(\bar{I})\cap C^2(I)$ の位相に関するものである。

[注意] • $T(\varphi) < +\infty$ なら $\omega(\varphi) = \emptyset$ となることが示せる。
• closure をもっと弱い位相、例えば $C(\bar{I})$ や $L^\infty(I)$-weak* の位相でとっても得られる集合は同一のものである([1; Th'm 2.8])。

[定理1]

$\forall \varphi \in C(\bar{I})$ に対し、$\omega(\varphi)$ は高々1つしか要素を含まない。 ■

[系]

$\forall \varphi \in C(\bar{I})$ に対し、$u_0 = \varphi$ を初期データとする(E_1)の解は、次の(1)～(3)のうちのいずれかを満たす。

(1) $T(\varphi) < +\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{t \to T(\varphi)} \| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(I)} = \infty$ (blow up)

(2) $T(\varphi) = +\infty$ かつ 〃 (grow up)

(3) $T(\varphi) = +\infty$ かつ、(E_1)の適当な定常解 v が存在して

$$\lim_{t \to +\infty} u(\cdot, t) = v \quad \text{in } C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$$ ■

定理1の証明は背理法による。仮に$\omega(\varphi)$が複数個の要素を含むとすると、それは無限個の要素を実は含んでいなければならないから、とくに異なる3要素 v_1, v_2, v_3 を選んでこれる。同様だから $v_1(0) < v_2(0) < v_3(0)$ としてよい。($\alpha(0)=1$ のときは $v_1'(0) < v_2'(0) < v_3'(0)$) そこで $w(x,t) = u(x,t;\varphi) - v_2(x)$ とおいて Lemma 0 を適用すると、適当な $t^* > 0$ に対し l_{t^*} 上で $w(x,t^*)$ が有限個の0点しか持たないという事実から、区間 $t^* \leq t < \infty$ 上で $w(0,t)$ が有限回しか符号を変えないことが導かれ、矛盾を得る。詳しくは[2]参照。([1]、[2]では方程式が形式的自己随伴の場合のみを扱っているが、今は空間次元が1次元であるから、変数変換により(E_1)はこのケースに帰着できる。 なお、定理1を空間多次元へと一般化しようとするなら、話を形式的自己随伴の場合に限っておくのがやはり望ましい。と言うのは、多次元領域内で拡散現象に「流れ」の効果が加わった状態だと、リミットサイクル状のω極限集合が出現し得るからである。)

§4. Lap number の減少

区間 $\bar{I} = [0,1]$ 上で定義された実数値関数 $w(x)$ に対し、

$\ell^+(w) =$ w がその上で単調増加($\neq$ const)となるような、$\bar{I}$ の極大部分区間の数

$\ell^-(w) =$ 〃 単調減少($\neq$ const) 〃

$\ell(w) = \ell^+(w) + \ell^-(w)$

とおく。$\ell(w)$ を w の lap number と呼ぶことにする。ℓ^+, ℓ^-, ℓ は非負の整数値または $+\infty$ の値をとるが、いずれか1つが有限なら他も有限であり、$|\ell^+(w) - \ell^-(w)| \leq 1$ が成立する。また、$\ell(w) < +\infty$ とは、w が区分的単調関数であることに他ならない。

この節では次の初期値境界値問題を考える。

$$
(E_2)\quad \begin{cases} u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + f(u,t) & \text{in } I\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{on } \bar{I} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial I \times (0,T) \end{cases}
$$

前節の(E_1)と異なり、a, b, f は t に依存しても良いが、f は x に依存しないことに注意しよう。ここでも再び、a, b, f の適当な滑らかさと $a \geq \delta > 0$ を仮定する。(E_1)、(E_2) いずれも、§1の冒頭に与えた形の方程式を特別の場合として含んでいる。

[定理 2]

$u = u(x,t)$ を(E_2)の解とすると、u の各時刻における lap number は、t について単調減少である。詳しくは、$0 \leq {}^\forall t_1 \leq {}^\forall t_2 < T$ に対し、

$$\ell^+(u(\cdot,t_1)) \geq \ell^+(u(\cdot,t_2))$$

$$\ell^-(u(\cdot,t_1)) \geq \ell^-(u(\cdot,t_2))$$

が成立する。■

[注意] 境界条件が Neumann でなくても同様の結果が得られるが、その際 $f(0,t) \equiv 0$ その他の付加的条件が必要になる([3], [5] 参照)。

［系］

a, b, f は t に無関係とし、v を (E_2) の任意の定常解とする。このとき、v の安定多様体の各要素 φ に対し、

$$\ell^+(\varphi) \geqq \ell^+(v)$$

$$\ell^-(\varphi) \geqq \ell^+(v)$$

が成立する。 ■

定理2は、$w(x,t) \equiv u_x(x,t)$ に Lemma 0 を適用して得られる。u_x は方程式

$$\begin{cases} w_t = a w_{xx} + (a_x + b) w_x + (b_x + f_u) p & \text{in } I \times (0,T) \\ w = 0 & \text{on } \partial I \times (0,T) \end{cases}$$

を満たすので、Lemma 0 が適用できるわけである。その際、Lemma 0 にある t, T として、上の t_1, t_2 をとればよい。

<u>参考文献</u>

[1] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. RIMS, vol 15, 1979.

[2] ———, Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ., vol 18, 1978.

[3] ———, Monotone decreasing property of the lap number of a solution for a one-dimensional parabolic equation, to appear.

[4] J.C. Saut and R. Temam, Generic properties of nonlinear boundary value problems, to appear in Communications in P.D.E.

[5] M. Tabata, A finite difference approach to the number of the peaks of solutions for one-dimensional parabolic problems, to appear.

On the remainder estimates of asymptotic formulas for eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms

Jun-ichi Tsujimoto

Let Ω be a bounded domain in R^n having the restricted cone property (p. 11 of [1]). Let B be a symmetric integro-differential sesquilinear form of order m with bounded coefficients

$$B[u, v] = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx$$

satisfying

$$B[u, u] \geqq \delta \|u\|_m^2 \qquad \text{for any} \quad u \quad V$$

where δ is some positive constant and V is some closed subspace of $H_m(\Omega)$ containing $\mathring{H}_m(\Omega)$. Let A be the operator associated with this sesquilinear form:an element u of V belongs to $D(A)$ and $Au = f \in L^2(\Omega)$ if $B[u, v] = (f, v)$ is vaid for any $v \in V$. It is well known that A is a positive definite self-adjoint operator in $L^2(\Omega)$. For $t > 0$ let $N(t)$ be the number of eigenvalues of A which do not exceed t.

Maruo & Tanabe [2] and Maruo [3] investigate the asymptotic distribution of eigenvalues of the operator A, and under various smoothness assumptions on the coefficients of B deduce formulas with remainder estimates. In particular, Maruo [3] proved that

$$N(t) = c_0 t^{n/2m} + O(t^{(n-\theta)/2m}) \quad \text{as} \quad t \to \infty \qquad (1)$$

for any $\theta < (h+1)/(h+3)$ if the coefficients $a_{\alpha\beta}$ $(|\alpha| = |\beta| = m)$ belong to the class C^{1+h} in some domain containing Ω. But it is impossible to prove (1) for $1/2 \leqq \theta < 1$ by the mathod used in [2], [3], even if the all coefficients $a_{\alpha\beta}$ belong to the class $C^{\infty}(R^n)$.

Let $\mathcal{B}^{\tau}(\Omega)$ $(0 < \tau < \infty)$ be the space of functions u in such that $\partial_x^{\alpha} u$ are bounded and continuous for $|\alpha| \leqq [\tau]$ and $|\partial_x^{\alpha} u(x) - \partial_x^{\alpha} u(y)| / |x-y|^{\dot{\tau}}$ $(|x-y| \leqq 1,\ x,y \in \Omega)$ bounded for $|\alpha| = [\tau]$, when $\dot{\tau} = \tau - [\tau] > 0$. The conclusion of this paper is that (1) holds for any $\theta < \tau/(\tau+2)$ if the coefficients of B satisfy the following assumptions. We state smoothness assumptions on the coefficient of B:

<u>Assumptions.</u> For $|\alpha| = |\beta| = m$ $a_{\alpha\beta}$ belongs to $\mathcal{B}^{\tau}(\Omega)$ and when $\tau > 2$, for $|\alpha| + |\beta| = 2m-1$ a belongs to $\mathcal{B}^{\tau'}(\Omega)$ where $\tau' = (\tau - 2)/2$.

<u>Theorem.</u> We assume that $2m > n$ as in [2], [3]. In the situation stated above the following asymptotic formuls for N(t) holds as $t \to \infty$:

$$N(t) = c_0 t^{n/2m} + O(t^{(n-\theta)/2m})$$

for any number θ satisfying $0 < \theta < \tau/(\tau+2)$ where

$$c_0 = \int_{\Omega} c(x)\, dx,$$

$$c(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} < 1} d\xi.$$

<u>Remark.</u> In the proof of our theorem, the results of Tsujimoto [4] play an important role.

Bibliography

[1] S. Agmon: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Mathematical Studied, Princeton, 1965.

[2] K. Maruo and H. Tanabe: On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms, Osaka J. Math. 8 (1971) 323-345.

[3] K. Maruo: Asymptotic distribution of eigenvalues of non-symmetric operators associated with strongly elliptic sesqui-linear forms, Osaka J. Math. 9 (1972) 547-560.

[4] J. Tsujimoto: On the asymptotic behavior of spectral function of elliptic operators, (in preparation).

EXISTENCE AND ASYMPTOTIC STABILITY OF STRONG SOLUTIONS OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS WITH A DIFFERENCE TERM OF SUBDIFFERENTIALS

By Mitsuharu ÔTANI

Department of Mathematics, Tokai University, Japan

§ 1. Introduction

Let H be a real Hilbert space with the inner product $(\cdot,\cdot)_H$ and the norm $|\cdot|_H$. Let $\Psi(H)$ be a family of all lower semi-continuous convex functions ψ from H into $(-\infty,+\infty]$ with $\psi \not\equiv +\infty$. For each $\psi \in \Psi(H)$, the effective domain $D(\psi)$ of ψ is defined by

$$D(\psi) = \{ u \in H \,;\ \psi(u) < +\infty \},$$

and the subdifferential operator $\partial\psi$ of ψ by

$$\partial\psi(u) = \{ f \in H \,;\ \psi(v) - \psi(u) \geq (f, v-u)_H \text{ for all } u \in H\}$$

with domain $D(\partial\psi) = \{ u \in H \,;\ \partial\psi(u) \neq \emptyset \}$.

Then it is well known that $\partial\psi$ is a (possibly nonlinear multi-valued) maximal monotone operator in H (see Brézis [1]).

In what follows, however, for all $\psi \in \Psi(H)$, $\partial\psi$ is assumed to be single-valued and $\psi(u) \geq 0$ for all $u \in H$, for the sake of simplicity. Let $\psi^1, \psi^2 \in \Psi(H)$, and consider the following abstract Cauchy problem (C.P.) in H :

$$\text{(C.P.)} \quad \begin{cases} (1) \quad du(t)/dt + \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) = 0, \ t > 0, \\ (2) \quad u(0) = a \,. \end{cases}$$

For example, let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n_x$ with smooth boundary Γ, and put

$$\psi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty & \text{if } u \in L^2(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

$$\psi^2(u) = \begin{cases} \frac{1}{2+\alpha}\int_\Omega |u(x)|^{2+\alpha}dx & \text{if } u \in L^{2+\alpha}(\Omega), \\ +\infty & \text{if } u \in L^2(\Omega) \setminus L^{2+\alpha}(\Omega). \end{cases}$$

Then $\psi^1, \psi^2 \in \Psi(L^2(\Omega))$, and the mixed problem

$$(\text{Pr.NH}) \begin{cases} (3) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^\alpha u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ (4) & u(x,t) = 0, & x \in \Gamma,\ t \geq 0, \\ (5) & u(x,0) = a(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

can be reduced to (C.P.) in $H = L^2(\Omega)$.

§ 2. Existence results

Definition 1. An H-valued continuous function $u(t)$ is said to be a strong solution of (C.P.) in $[0,S]$ if and only if $du(t)/dt$ and $\partial\psi^i(u(t))$ $(i=1,2)$ belong to $L^2(0,S;H)$, and $u(t)$ satisfies (1)-(2).

The local and global (in time t) existence of strong solutions of (C.P.) is already studied by Koi-Watanabe [5], Ishii [3] and the author [8,9]. We here mention results in [8,9].

Theorem I. (Local existence) Assume the following (A.1) and (A.2).

(A.1) For each $L \in (0, +\infty)$, the set $\{ u \in H ; \psi^1(u) + |u|_H \leq L\}$ is compact in H.

(A.2) $D(\partial\psi^1) \subset D(\partial\psi^2)$ and there exist a constant $k \in (0,1)$ and a monotone increasing function $M(\cdot)$ on $[0,+\infty)$ such that

(6) $\quad |\partial\psi^2(u)|_H \le k\,|\partial\psi^1(u)|_H + M(\psi^1(u) + |u|_H)$ for all $u \in D(\partial\psi^1)$.

Let $a \in D(\psi^1)$, then there exists a positive number T, which is a monotone increasing function of $|a|_H$ and $\psi^1(a)$, such that (C.P.) has a strong solution in $[0,T]$. (For a proof, see [9])

<u>Theorem II</u>. (<u>Global existence</u>) Let (A.1), (A.2) and the following (A.3) be satisfied.

(A.3) There exist constants $k \in [0,1)$ and $C > 0$ such that

(7) $\quad \psi^2(u) \le k\,\psi^1(u) + C$ for all $u \in D(\psi^1)$.

Then every local strong solution of (C.P.) can be continued globally to $[0,+\infty)$, in particular (C.P.) has a global solution for all $a \in D(\psi^1)$.

<u>Proof</u>. Let $u(t)$ be a strong solution of (C.P.) in $[0,T]$, then it follows from Lemma 3.3 of Brézis [1] that $\psi^i(u(t))$ are absolutely continuous on $[0,T]$ and satisfy $(\partial\psi^i(u(t)),\ du(t)/dt)_H = d\psi^i(u(t))/dt$ for a.e. $t \in [0,T]$. Hence, multiplying (1) by $du(t)/dt$, we have

(8) $\quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right|_H^2 + J(u(t)) = 0$ for a.e. $t \in [0,T]$,

where we put $J(u) = \psi^1(u) - \psi^2(u)$.

Then integration of (8) on $[0,t]$, $t \in (0,T]$, and (A.3) give

$$\psi^1(u) \le (\psi^1(a) + C)/(1-k) \qquad \text{for all } t \in [0,T].$$

Furthermore, by (8),

$$|u(t)|_H \le |a|_H + \int_0^t \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_H ds \le |a|_H + \sqrt{t}\left(\int_0^t \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_H^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leq |a|_H + (t \psi^1(a))^{1/2}$$

Thus, since the a priori bound for $\psi^1(u(t)) + |u(t)|_H$ is derived, Theorem I assures that $u(t)$ can be continued globally to any compact subset of $[0, +\infty)$. [Q.E.D.]

§ 3. Asymptotic stability

When condition (A.3) is absent, it has been shown by many authors so far that if initial data a satisfies certain conditions, then the corresponding (local) strong solution of (Pr.NH) (or (C.P.)) blows up in a finite time in various topologies (say in the maximum norm , L^2-norm ,etc.) . At the same time, if a is sufficiently small in some sense, then every strong solution can be continued globally. In particular, we refer to Kaplan [4], Fujita [2], Tsutsumi [10], Levine [6], Ishii [3] and Matano [7]. However, it seems that very little study has been devoted to the questions :—(1) whether blowing up phenomena in some different topologies are equivalent to each other ; (2) of determining all possible asymptotic behaviors of solutions. We here intend to study these problems for (C.P.) in a somewhat restrected situation, (which is similar to that of Ishii [3]). Throughout this section, we always assume (A.1), (A.2) and the following (A.4) and (A.5).

(A.4) ψ^i are homogeneous functions of degree $\alpha_i > 1$, $i=1,2$, i.e., $\psi^i(\lambda u) = \lambda^{\alpha_i} \psi^i(u)$ for all $\lambda > 0$ and $u \in D(\psi^i)$.

(A.5) There exist positive constants C_1 and C_2 such that

(9) $C_1 |u|_H \leq C_2 \{\psi^2(u)\}^{1/\alpha_2} \leq \{\psi^1(u)\}^{1/\alpha_1}$ for all $u \in D(\psi^1)$.

If $\psi \in \Psi(H)$ is a homogeneous function of degree $\alpha > 1$, then it is shown that $(\partial\psi(u), u)_H = \alpha\,\psi(u)$ for all $u \in D(\partial\psi)$. Then multiplying (1) by $u(t)$, a strong solution of (C.P.) in $[0,T]$, we have

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_H^2 = j(u(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in [0,T],$$

where we put $j(u) = \alpha_2\psi^2(u) - \alpha_1\psi^1(u)$.

We now introduce several types of blowing up and growing up of solutions of (C.P.), which are induced quite naturally by our abstract setting (see (8) and (10)).

Definition 2. A strong solution $u(t)$ of (C.P.) in $[0,T)$, $0 < T < +\infty$, (resp. in $(0, +\infty)$) is said to be

① ψ^1-B.U. (resp. ①′ ψ^1-G.U.), ② ψ^2-B.U. (resp. ②′ ψ^2-G.U.), ③ j-B.U. (resp. ③′ j-G.U.), ④ J-B.U. (resp. ④′ J-G.U.), ⑤ H-B.U. (resp. ⑤′ H-G.U.) if and only if $\psi^1(u(t)) \to +\infty$, $\psi^2(u(t)) \to +\infty$, $j(u(t)) \to +\infty$, $J(u(t)) \to -\infty$ and $|u(t)|_H \to +\infty$ as $t \uparrow T$ (resp. $t \to +\infty$) respectively.

Then for the case $\alpha_2 > \alpha_1$, we have :

Theorem III. Let $\alpha_2 > \alpha_1$ and $\alpha_2 > 2$. Then growing up phenomena ①′-⑤′ do not occur. Furthermore we have the relation :

① $\leftrightarrow$ ② $\leftrightarrow$ ③ $\leftarrow$ ⑤ $\rightarrow$ ④ $\rightarrow$ ①.

Proof. Step I. We first note by (A.5) that ⑤ $\rightarrow$ ② $\rightarrow$ ① and ⑤′ $\rightarrow$ ②′ $\rightarrow$ ①′. Since $J(u(t))$ is monotone decreasing by (8),

$$(11) \qquad \psi^2(u(t)) \geq \psi^1(u(t)) - J(a),$$

whence follows ① ↔ ② and ①′ ↔ ②′ . Suppose here that ①′ occurs , then from (10) , (11) and (A.5) , there exists a positive number T_0 such that

$$
(12) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_H^2 = (\alpha_2-\alpha_1)\,\psi^2(u(t)) - \alpha_1 J(a)
$$

$$
\geq (\alpha_2-\alpha_1)(C_1/C_2)^{\alpha_2}|u(t)|_H^{\alpha_2}/2 \quad \text{for all} \quad t \geq T_0,
$$

which implies ⑤ ,(so in particular ①). Thus we can find that ①′ , ②′ and ⑤′ do not occur.

Step II. Integration of (8) on $[0,t]$ gives

$$
(13) \quad -J(u(t)) + J(a) = \int_0^t \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_H^2 ds \geq \frac{1}{t}\left(\int_0^t \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_H ds\right)^2
$$

$$
\geq \frac{1}{t}\left(|u(t)|_H - |a|_H\right)^2 .
$$

Then ⑤ implies ④ . Furthermore, if ④′ occurs, then $J(u(t)) \leq 0$ for all sufficiently large t , so we again obtain (12) ,i.e., ⑤ . This is a contradiction.

Step III. It is easy to see that ③ or ④ implies ① and ② (see Fig. 1). To show that ② implies ③ , it suffices to recall $j(u(t)) \geq (\alpha_2-\alpha_1)\,\psi^2(u(t)) - \alpha_1 J(a)$ (see (12)). [Q.E.D.]

<u>Remark 3</u>. In Theorem III , instead of (A.2) , assume

(A.6) $D(\partial\psi^1) \subset D(\partial\psi^2)$ and there exist a constant $\gamma \in (0,1)$ and a monotone increasing function $M(\cdot)$ on $[0,+\infty)$ such that

$$
|\partial\psi^2(u)|_H \leq M(|u|_H)\left(|\partial\psi^1(u)|_H^{1-\gamma} + \{\psi^1(u)\}^{1-\gamma} + 1\right)
$$

$$
\text{for all} \quad u \in D(\partial\psi^1).
$$

Then , since ① implies ⑤ , we can deduce the complete equivalence : ① ↔ ② ↔ ③ ↔ ④ ↔ ⑤.

Let $u(t)$ be a strong solution in $[0,T]$ and consider the case that $\liminf_{t \to T-0} \psi^1(u(t)) < +\infty$ and $\limsup_{t \to T-0} \psi^1(u(t)) = +\infty$. We can exclude this case by Theorem I for the case $T < +\infty$ and the following Theorem IV for the case $T = +\infty$.

Theorem IV. Let $\alpha_2 > \alpha_1$ and $\alpha_2 > 2$. Let $u(t)$ be a (global) strong solution of (C.P.) in $[0, +\infty)$. Then $\psi^1(u(t))$ is bounded, i.e., $\sup \{ \psi^1(u(t)) \,;\, t \in [0, +\infty) \} < +\infty$. Therefore $\psi^2(u(t))$, $j(u(t))$, $J(u(t))$ and $|u(t)|_H$ are also bounded.

The proof of this theorem relies much on the following lemma.

Lemma 4. Let $u(t)$ be a (global) strong solution in $[0, +\infty)$. Suppose that there exists a sequence $\{t_n\}$ tending to $+\infty$ as $n \to +\infty$ such that $\psi^1(u(t_n))$ is bounded as $t_n \to +\infty$. Then $j(u(t_n)) \to 0$ as $t_n \to +\infty$, and there exists a sub-sequence $\{t_n'\}$ of $\{t_n\}$ such that $u(t_n')$ converges to a stationary solution $u_\infty \in \mathcal{S} = \{u \in D(\partial\psi^1) \,;\, \partial\psi^1(u) = \partial\psi^2(u)\}$. What is more, if $\alpha_1 = \alpha_2$, then $\psi^i(u(t_n)) \to K_i$ $(i=1,2)$ with $\alpha_1 K_1 = \alpha_2 K_2$.

Proof of Lemma 4. Since $\psi^1(u(t_n))$ is bounded, $\psi^2(u(t_n))$ is also bounded by (A.5). Hence $J(u(t))$ is bounded below and $J(u(t)) \downarrow C > -\infty$ as $t \to +\infty$. Then, setting $u_t(s) := \{u(t+s) \,;\, 0 \le s \le 1\} \in C([0,1];H)$, we find by (8) and (A.2) that $|du_{t_n}(s)/ds|_{L^2(0,1;H)} \to 0$ as $t_n \to +\infty$ and $\psi^i(u_{t_n}(s))$ are bounded in $L^2(0,1;H)$. Furthermore, since $\{u_{t_n}(s)\}_n$ is equi-continuous on $[0,1]$ and forms a compact set in H for each $s \in [0,1]$, by Ascoli's theorem, there exists a subsequence $\{t_n'\}$ of $\{t_n\}$ such that $u_{t_n'}(s) \to u(s) \equiv u_\infty \in \mathcal{S}$ in $C([0,1];H)$.

[Q.E.D.]

Note that in general the strong solution of (C.P.) is not unique (see [2]), so that the asymptotic behavior of the solution is not determined only by its initial data a. However, as in [10] and [3], if a belongs to certain subsets of $D(\psi^1)$, then the asymptotic behavior of the corresponding solutions is uniquely determined by a.

<u>Proposition 5</u>. Put

$$\mathcal{W} = \{ u \in D(\psi^1);\ J(u) \le d\ ,\ j(u) < 0\}\ ,$$

$$\mathcal{V} = \{ u \in D(\psi^1);\ J(u) \le d\ ,\ j(u) > 0\}\ ,$$

where $d = (C_2\alpha_2/\alpha_1)^{\alpha_1/(\alpha_2-\alpha_1)}(\alpha_2-\alpha_1)/\alpha_2$. Then we have :

(1) If $a \in \mathcal{W}$, then every (local) strong solution $u(t)$ of (C.P.) can be continued globally and $\psi^1(u(t))$, $\psi^2(u(t))$ and $|u(t)|_H$ tend to zero as $t \to +\infty$.

(2) If $a \in \mathcal{V}$, then every strong solution of (C.P.) blows up, i.e., properties 1 , 2 and 3 hold.

<u>Proof</u>. Put $W = \{(\psi^2(u), \psi^1(u))\ ;\ u \in \mathcal{W}\}$, $V = \{(\psi^2(u), \psi^1(u));\ u \in \mathcal{V}\}$ and $S = \{(\psi^2(u), \psi^1(u));\ \alpha_1\psi^1(u) = \alpha_2\psi^2(u)\}$. Then both W and V are connected subsets of the $(\psi^2(u),\psi^1(u))$-plane , and $W \cap S = \{0\}$ and $V \cap S = \phi$ by (A.5) ,(see Fig.1). Moreover, since $J(u(t))$ is monotone decreasing, it is clear that if $a \in \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{V}$), then $u(t)$ always stays in $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{V}$). Let $a \in \mathcal{W}$, then since W is bounded, it follows from Lemma 4 that $(\psi^2(u(t)),\psi^1(u(t)))$ converges to a point of $W \cap S = \{0\}$. As for the case $a \in \mathcal{V}$, since $V \cap S = \phi$, combining Lemma 4 with Theorem IV, we find that every strong solution can not be continued globally. Thus, by Theorem III, $u(t)$ blows up. [Q.E.D.]

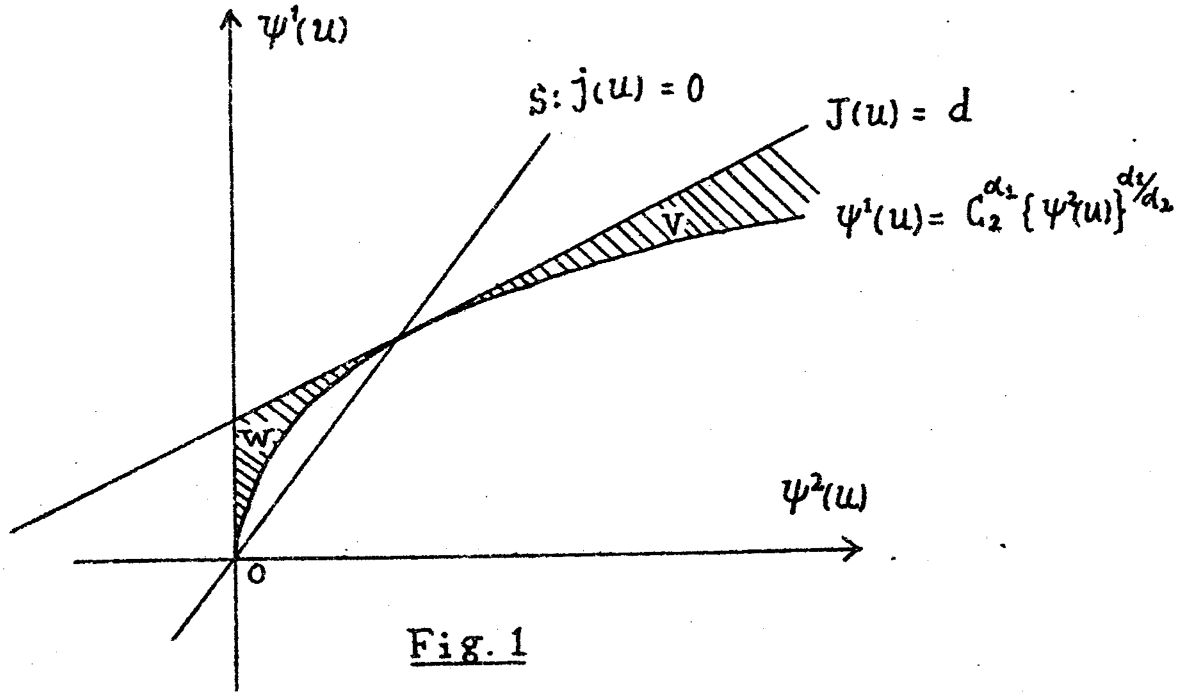


Fig. 1

Remark 6. In the case of $a \in \mathcal{W}$, we can give explicit rates of convergences of $\psi^1(u(t))$, $\psi^2(u(t))$ and $|u(t)|_H$ (see [3]).

Now we are ready to tell all the possible asymptotic behaviors of strong solutions of (C.P.).

The case $\alpha_2 > \alpha_1$ and $\alpha_2 > 2$: There are two possible types.

(T_1) $\psi^1(u(t))$, $\psi^2(u(t))$ and $|u(t)|_H$ are uniformly bounded for all $t \in [0, +\infty)$, and the ω-limiting set of $u(t)$ $\Omega(u(t)) := \bigcap_{t>0} \overline{\{u(s);\ s \geq t\}}^H$ is contained in $\mathcal{S}$. What is more, $J(u(t)) + K \geq 0$, $\psi^1(u(t)) \to \alpha_2 K/(\alpha_2-\alpha_1)$ and $\psi^2(u(t)) \to \alpha_1 K/(\alpha_2-\alpha_1)$ as $t \to +\infty$.

(T_2) $u(t)$ blows up in a finite time ,i.e., ψ^1-B.U. , ψ^2-B.U. and j-B.U. occur.

<u>Remark 7.</u> In case (T_2), even if $a \notin \mathcal{V}$, the corresponding strong solution $u(t)$ may blow up. However, if (A.6) is satisfied, then the trajectory $(\psi^2(u(t)), \psi^1(u(t)))$ goes into V in a finite time.

<u>The case $\alpha_1 > \alpha_2$:</u> It is easily follows from (A.5) and Theorem II that the trajectory $(\psi^2(u(t)), \psi^1(u(t)))$ is always bounded for any a. Hence, by Theorem IV, the possible type is only (T_1), (where constant K becomes non-positive).

<u>The case $\alpha_1 = \alpha_2$:</u> If $C_2 > 1$ (C_2 : the constant in (A.5)), then every strong solution $u(t)$ of (C.P.) can be continued globally, and $\psi^1(u(t)) \to 0$, $\psi^2(u(t)) \to 0$ and $|u(t)|_H \downarrow 0$ as $t \to +\infty$. As for the case $C_2 \leq 1$, the situation is rather delicate. However, under condition (A.6), we can show that the possible cases are the following two , and properties in each case are equivalent to each other.

(T_3) $J(u(t)) \downarrow 0$ as $t \to +\infty$ $\leftrightarrow$ $|u(t)|_H$ is bounded $\leftrightarrow$ $\psi^1(u(t))$ is bounded $\leftrightarrow$ $\psi^2(u(t))$ is bounded.
(In this case $\Omega(u(t)) \subset \mathcal{S}$ holds.)

(T_4) $J(u(t)) \downarrow K \in [-\infty, 0)$ as $t \to +\infty$ $\leftrightarrow$ ψ^1-G.U. $\leftrightarrow$ ψ^2-G.U. $\leftrightarrow$ H-G.U.

Reference

[1] Brézis, H., Opérateurs Maximaux Monotone et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland Math. Studies 5 , 1973.

[2] Fujita, H., On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations, Proc. Symp. in Pure Math. 18, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1970, 105-113.

[3] Ishii, H., Asymptotic stability and blowing up of solutions of some ninlinear equations, J. Differential Equations 26 (1977), 291-319.

[4] Kaplan, S., On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 305-330.

[5] Koi, Y. and J. Watanabe, On nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 413-416.

[6] Levine, H.A., Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$, Arch. Rational Mech. Anal. 51 (1973), 371-386.

[7] Matano, H., Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 221-227.

[8] Ôtani, M., On existence of strong solutions for $du(t)/dt + \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 24 (1977), 575-605.

[9] Ôtani, M., Non-monotone Perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, I, to appear.

[10] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8 (1972), 211-229.

Subdifferential 項を持つ時間に関して二階の微分作用素について

阪大理. 丸尾健二

§-0 序と定義

今まで非線型項を含む双曲型方程式は多くの人々により研究されてきている。この内で抽象論として議論する話は Lions, Strauss, Brezis 等により研究されているが ここでは Brezis [1] が次の型で Problem として提出している問題：すなわち $\partial\varphi$ を Hilbert 空間 H から $(-\infty, \infty]$ への下半連続な凸関数 φ の subdifferential operator とするとき

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \partial\varphi u \ni f(t) \\ u(0)=a, \quad u'(0)=b \end{cases} \qquad (0\text{-}0)$$

の方程式の解（解の意味も含めて）の存在 正則性 一意性の問題： の簡単な場合について考察する事を目的とする

今まででも (0-0) 型の問題は難しい問題とされている故 この論文がこれらの型の問題の解法に少しでも役立てば幸いと思っている

今まで Schatzman [2] が H が有限次元の時 解の定義づけ 解の存在 一意性等について議論している

ここでは H が可分な実 Hilbert 空間で K が H で内点を持つ閉凸集合として K の上の indicator function I_K の subdifferential operator を ∂I_K とし A は H から H への正定値自己共役作用素で位相的代数的に H に埋め込まれている空間 V から dual な空間 V^* への作用素として有界なものとしたとき $\partial\varphi = A + \partial I_K$ の case を考察してみよう.

<u>Definition 1.</u>

$[0, T]$ 上で定義された H に値をとる連続関数 $u(t)$ が

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + Au + \partial\varphi u \ni f \\ u(0) = a \in V \cap K, \quad u'(0) = b \in H \end{cases} \qquad (0-1)$$

の解であるとは次の条件を満足するものをいう事にする.

① $u(t) \in L^\infty([0,T]:V) \cap W^{1,\infty}([0,T]:H)$

② $u(t) \in K \cap V$ for any $t \in [0,T]$

③ Hの意味で弱 V^*の意味で強となる右微分 $\frac{du^+}{dt}(t)$, が $[0,T)$ で存在し同様の意味で左微分 $\frac{du^-}{dt}(t)$ が $(0,T]$ で存在する. その上に V^*の norm でそれぞれ対応する区間内で V^*の norm で右, 左微分の総変動量は有界である.

④ 次の不等式を満足する.

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{du^\pm}{dt}(t)\right\| + \langle Au(t), u(t)\rangle \leq \frac{1}{2}\|b\|^2 + \langle Aa, a\rangle + \int_0^t \left(\frac{du}{ds}(s), f(s)\right) ds$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は V と V^*の duality とする.

⑤ $u(t)$により一意的に決まる $C([0,T]:H)$上の連続汎関数 F が存在して次の式をみたす

$$F(\varphi - u) \leq 0 \qquad \text{for any } \varphi(t) \in C([0,T]:K)$$

かつ

$$F(\varphi) = \int_0^T \left(\frac{du}{dt}(t), \frac{d}{dt}\varphi(t)\right) dt - \left(\frac{du^-}{dt}(T), \varphi(T)\right) + (b, \varphi(0))$$
$$- \int_0^T \langle Au(t), \varphi(t)\rangle dt + \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt$$

for any $\varphi(t) \in W^{1,1}([0,T]:H) \cap L^\infty([0,T] \cap V)$.

⑥. $u(0) = a \qquad b - \frac{du^+}{dt}(0) \in \partial I_K a$.

さて. Schatzman が定義した解も書いておこう.

<u>Definition 2</u> $u(t) \in C([0,T]:H)$ が (0-1) の energy conserving solution とは次の条件を満足するものをいう.

Definition 1 の中で ①②⑤⑥は同じ条件. ③は次の様にする.
Hの強の意味で左右両微分がそれぞれ対応する区間で存在して, それぞれの区間上 総変動量有界. 次に④は, $Au(t)$ は $[0,T]$ 上 Lipschitz連続として不等号を等号に変えたものとする

次に記号として
Kの境界∂K上の法線のFréchet微分を定義しよう.
今 $\partial I_K x$ は単位法線vector i.e. $\eta(x) \in \partial I_K x$, $\|\eta(x)\| = 1$ かつ $\partial I_K x = \{\lambda \eta(x) / {}^\forall \lambda \geq 0\}$ を仮定する このとき $\eta(x)$ の∂K上のFréchet微分を次の様に定める ${}^\forall y \in \partial K$として yをfixしたとき

$$\eta(x) - \eta(y) = T_{1,y}(x-y) + \varepsilon^1_{x,y} \quad \text{for any } x \in \partial K.$$

ここで $T_{1,y}$は HからHへの有界線型作用素で $\|\varepsilon^1_{x,y}\| \leqq O(\|x-y\|^2)$.
とする. 次に j回Fréchet微分を次の様に定める
$T_{j,y}$ は j個のproduct space $H \times \cdots \times H$ からHへの j-multilinear operatorで 順次次の式を満たす様に定めてゆく.
${}^\forall (z_1, \cdots z_j) \in H \times \cdots \times H$ として

$$T_{j,x}(z_1, \cdots, z_j) - T_{j,y}(z_1, \cdots, z_j) = T_{j+1}(x-y, z_1, \cdots z_j) + \varepsilon^{j+1}_{x,y}(z_1, \cdots z_j)$$

ここで $\|\varepsilon^j_{x,y}\| \leq O(\|x-y\|^2 \cdot \|z_1\| \cdots \|z_j\|)$

§-1. 仮定と定理.

この章はどんな仮定の下どんな結果が出るか述べる事とする

Theorem 1

VがHにcompactに埋め込まれている時. (0-1)の解は$[0,T]$まで存在する.

注意. (0-1)の解は一意性は出ない. 現に云えばエネルギーを保存する必要がない故. 反射係数 e が∂Kに衝突するごとに $0 \leq e \leq 1$の間どんな値でもとれる事による

一意性、正則性 又は V が H に compact に埋め込まれていない case を考えたい故、∂K になめらかさの仮定を入れる

<u>仮定 A-1)</u>

$T_{1.x}$ は存在して次の不等式を満足するものとする

$$\|A^{j} T_{1.x} z\| \leq C_0 \Big\{ \sum_{k=0}^{j} \max_{\substack{r_1+r_2=j-k \\ r_i:\text{非負な整数}}} \|A^{r_1} z\| \, \|A^{r_2} \varphi(x)\| \, (2k)! \, C_0^{k} \Big\}$$

$$\|A^{j} \mathcal{E}^{1}_{x,y}\| \leq C_0 \Big\{ \sum_{k=0}^{j} \max_{\substack{r_1+r_2+r_3=j-k \\ r_i:\text{非負な整数}}} \|A^{r_1}(x-y)\| \, \|A^{r_2}(x-y)\| \, \big(\|A^{r_3}\varphi(x)\| + \|A^{r_3}\varphi(y)\| \big) \, (2k)! \, C_0^{k} \Big\}$$

for any $x, y \in \partial K$, $\forall z \in H$ かつ $j = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ とする.

ここで C_0 は $\|x\|$、$\|y\|$ にのみ関係する定数.

<u>仮定 A-2)</u>

$T_{l.x}$ は存在して次の不等式を満足しているものとする.

$$\|A^{j} T_{l,x}(z_1, \cdots, z_l)\| \leq C_0 \Big[\max_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_l+r_{l+1}=j-k \\ 0\leq k \leq j,\ r_i\text{は非負な整数}}} \|A^{r_1} z_1\| \, \|A^{r_2} z_2\| \cdots \|A^{r_l} z_l\| \, \|A^{r_{l+1}} \varphi(x)\| \cdot (2k)! \, C_0^{k+l} \, l! \Big]$$

$$\|A^{j} \mathcal{E}^{l}_{x,y}(z_1, \cdots, z_{l-1})\| \leq C_0 \Big[\max_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_{l+2}=j-k \\ r_i\text{は非負な整数},\ 0\leq k\leq j}} \|A^{r_1} z_1\| \cdots \|A^{r_{l-1}} z_{l-1}\| \big(\|A^{r_l}\varphi(x)\| + \|A^{r_l}\varphi(y)\| \big) \cdot \|A^{r_{l+1}}(x-y)\| \, \|A^{r_{l+2}}(x-y)\| \, (2k)! \, C_0^{k+l} \cdot l! \Big]$$

for any $x, y \in \partial K$, $\forall (z_1, \cdots, z_l) \in H \times \cdots \times H$, $l = 1, 2, 3, \cdots$ $j = 0, 1, 2, 3, \cdots$

C_0 は上記と同じ. かつ 仮定 A-1) は満足しているものとする

次に H^{∞}_{α} なる集合の class を定義する

$$H_\alpha^\infty = \{ x \in H / \ \| A^j x \| \leq \mathrm{Const} \{(2j)!\}^6 \cdot \alpha^j \quad \text{for any } j = 0, 1, 2, 3 \cdots \}.$$

Theorem 2

今 V が H に compact に埋めこまれていて，$a \in \partial K \cap H_\alpha^\infty$ で b，$\gamma(a) \in H_\alpha^\infty$ かつ $f(t)$，$\frac{d}{dt} f(t) \in H_\alpha^\infty$ for any $t \in [0, T]$ と仮定する かつ A-1) を仮定すれば，$u'(t), u(t) \in D(A^\infty)$ なる energy conserving solution が $[0, T]$ で存在する．かつ $(\tilde{\alpha}, T_1)$ が存在して $(\tilde{\alpha} \geq \alpha, 0 < T_1 \leq T)$ $[0, T_1]$ 上で $u'(t)$，$u(t) \in H_{\tilde{\alpha}}^\infty$ になっている．

Theorem 3

今 V が H に compact に埋めこまれているとはかぎらないとする。初期値は Theorem 2 と同一とする かつ $\| A^j \frac{d^\ell}{dt^\ell} f(t) \| \leq \mathrm{Const}\, (2j+\ell)!\, C^{2j+\ell}$ を満しているとしておく ここで仮定 A-2) が満足されているとしよう このとき $(\tilde{\alpha}, T_1)$ が存在して $(\tilde{\alpha} \geq \alpha, 0 < T_1 \leq T)$ $[0, T_1]$ 上．$u'(t)$，$u(t) \in H_{\tilde{\alpha}}^\infty$ となる energy conserving solution が存在する．

注意．$a \in \mathring{K}$ の case は locally solution はいつでもある事は自明であるが Theorem 2 における $[0, T]$ 上の解は $a_0 - a \in \partial I_K a_0$ となる $a_0 \in \partial K$ 上の点がきまり $\gamma(a_0) \in H_\alpha^\infty$ に入っている事がわかれば同一の結果を得る事ができる．

次に energy conserving solution についての一意性の話をしよう．これ以後は $[0, T]$ 上で energy conserving solution は存在しているものとして かつ $\gamma(x)$ は 2-回 Frechet 微分可能としておき A-1) は仮定しておく事とする．

Theorem 4

初期値は $a \in \partial K \cap V$，$\gamma(a) \in V$ とし 今 $(b, \gamma(a)) = 0$ かつ $(T_1 a\, b, b) + \langle f(0) - Aa, \gamma(a) \rangle \neq 0$ を満足しているとする．

このとき ある $0<T_a\le T$ なる $[0,T_a]$ 上で energy conserving solution は一意に存在する

<u>注意</u> 一意性は局所的な話である故 $a\in K$ ならば もちろん成り立つ 次に energy conserving solution $u(t)$ は $[0,T]$ 上

$$\frac{du^+}{dt}(t)=\frac{du^-}{dt}(t)-2\left(\frac{du^-}{dt}(t),\tilde{\gamma}(u(t))\right)\tilde{\gamma}(u(t))$$

を満足している事がわかるので これを使用すれば $(b,\gamma(a))\neq 0$ の時 ならば 局所的に一意性はでる事になる

次に $W=\bigcup_{\alpha>0}H_\alpha^\infty$ とおく このとき W_j は W を $\|A^j\cdot\|+\|\cdot\|$ の norm における closure とする.

<u>Theorem 5</u>

V は H に compact に埋め込まれているとし $A-1)$ を仮定する 今初期値 $a\in\partial K\cap W_j$, $b,\gamma(a)\in W_j$, $f(t),\frac{d}{dt}f(t)\in W_j$, $(j\ge 1)$ とする かつ $(T_1 a\, b, b)+(f(0)-Aa,\gamma(a))\neq 0$ ならば locally な energy conserving solution $u(t)$ が存在しかつ $u(t)\in W_j$ となっている.

以上であるが最後に注意と例を示しておこう.

<u>注意</u>

Theorem 1 に関しては Barbu[3] p.p 292 にある M という作用素に A をおきかえても同一の結果が得られる. $f(t)$ も $f(t,x)$ という形にある程度は拡張できる

Example について

$L_2(\Omega)=H$ Dirichlet 問題を考える $A=\Delta$ としておく

1). $K=\{x\in H/\ \|x\|=1\}$ なるとき $A-1)$, $A-2)$ は満足する

2). $f \in H_\alpha^\infty$ として $K = \{x \in H \,;\, (x, f) \geq 0\}$ ならば A-1), A-2) は共に満たす

3). $\{\varphi_j\}_{j=1}$ が O.N.S in H となり $\|A^\ell \varphi_j\| \leq \mathrm{Const}\,(2\ell)!\, C^\ell$ for any j, ℓ
かつ $(A^\ell \varphi_j, A^\ell \varphi_k) = 0$ for any $j \neq k$ をみたす座標がとれるとき

又 $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$ が A の固有 vector になっている場合 for any $j = 1, 2, 3 \cdots$

$$K = \left\{ x \in H \,/\, \sum_{j=1} (x, \varphi_j)^2 / a_j^2 \leq 1 ;\ M \geq a_j^2 \geq \sigma_0 > 0 \quad j = 1, 2, 3 \cdots \right\}$$

は仮定 A-1), A-2) を共にみたす.

Bibliography.

H. Brezis [1] : Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to nonlinear par. diff. equations : Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello (editor) Acad. Press (1971).

H. Schatzman [2]. a class of nonlinear differential equations of second order in time. : Nonlinear Analysis Theory, Method & Applications Vol 2. pp 355-373.

V. Barbu [3] Nonlinear semigroups and differential equations in Banach space. (1976). Noordhoff

準線型波動方程式と非線型発展方程式の関連

名大・理　　山田義雄

次の形の準線型波動方程式

(1) $u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathrm{grad}\,u)u_{ij}+Cu_t=f$,　$x\in R^n$, $t\geq 0$,

に対する初期値問題

(2) $u(x,0)=u_0(x)$,　　$u_t(x,0)=v_0(x)$,　$x\in R^n$

を考える。ここで扱う関数はすべて実とする。(1)において C は実定数，$a_{ij}(\eta)=a_{ji}(\eta)$　$i,j=1,\cdots\cdots n$, $\in C^{m+1}(R^n)$　$(m\geq[\frac{n}{2}]+1)$ は

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\eta)\xi_i\xi_j\geq a_0(\rho)|\xi|^2,\quad \forall\eta\in R^n,\ |\eta|\leq\rho,\ \xi\in R^n,$$

をみたすとする。但し，$a_0(\rho)$ は正の単調非減少関数とする。この仮定は　方程式(2)が　双曲型であることを 意味する。
(我々は，考察を(1)の形の方程式に制限するが，これは議論を簡単にするためであって もっと一般的な形であってもよい。)
(1)の形の典型的な問題としては，絃や膜の非線型振動を記述する方程式

(3) $u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_i}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,u|^2}}\right)=0$

がある。この方程式の場合

$$a_{ij}(\mathrm{grad}\,u)=(1+|\mathrm{grad}\,u|^2)^{-\frac{3}{2}}\{\delta_{ij}(1+|\mathrm{grad}\,u|^2)-u_iu_j\}$$

となり　$a_0(\rho)=(1+\rho^2)^{-\frac{3}{2}}$ とおいて仮定をみたす。

準線型波動方程式(1)の初期値問題に対する従来の研究について少し述べる。準線型双曲型方程式に対する研究は Leray, Gårding, Sobolev 等色々な人々によって行われている。特に (1), (2)に対する代表的な仕事としては Dionne, "J. Analyse Math. 10 (1962), 1-90" の労作がある。彼のアプローチの仕方は　標語的に述べれば

不動点定理 (iteration) ＋ エネルギー法

に基いている。即ち $v(x,t)\in$ " 適当な関数のクラス" として線型の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathrm{grad}\, v) u_{ij} + c u_t = f, & x \in R^n,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

の解 u を求める。対応 $v \longrightarrow u$ の不動点を見つければ(1), (2)の解が決まるというのがアイデアである。確かに自然な idea であるが 途中の論証は. かなり面倒である。(Dionne の論文においては. 69 – 82 で準線型の場合を扱っているが. それまで 60ページぐらいは 準備として必要である)

そこで. この話のねらいの一つは.

1. 初期値問題(1). (2)への より簡単な (follow していく上で) 別のアプローチを考えること。

である。もう一つのねらいは

2. 発展方程式の立場から. アプローチしていくこと。

2について 少し述べる。非線型発展方程式の理論は. 高村理論の完成により. 最近発展し. 非線型放物型, Hamilton-Jacobi などの方程式に対しては. かなり応用されている。しかし. (3)のような. 非線型双曲型に対しては. 殆ど手がつけられていない。(3)を含むような(1)のタイプの方程式に発展方程式の立場から アプローチを考えることは.意味があると思われる。

我々の idea を簡単に述べよう。標語的に言えば.

粘性法 + 発展方程式論 + エネルギー法

である。(1)の方程式に人工的に "粘性項" $-\lambda \Delta u_t$ ($\lambda > 0$) を付け加える:

$$(4) \qquad u_{tt} - \lambda \Delta u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathrm{grad}\, u) u_{ij} + c u_t = f, \quad x \in R^n,\ t \geq 0$$

同じ初期条件(2)の下で考える。$\lambda \downarrow 0$ とすることによって (1)の解を求めようというわけである。

$-\lambda \Delta u_t$ の項を粘性項と呼ぶ意味は 例えば Navier-Stokes の方程式

$$u_t - \underset{\sim\sim}{\nu \Delta u} + (u \cdot \nabla) u = f - \nabla p$$
$$\mathrm{div}\, u = 0$$

において 〰〰 を粘性項と呼ぶのに対応する。(u：流速)．$\nu \downarrow 0$ とすることにより Euler の方程式の解が得られている。

さて 方程式(4)は，一見 方程式(1)を一層複雑にしたように見えるが，実は，(1)の "parabolic regularization" となっていて 取り扱いはこの方が簡単である。

Sobolev 空間 H^m $(m \geq [\frac{n}{2}]+1)$ を導入する。H^m における自己共役作用素 A (<0) を

$$Au = (\Delta - 1)u \qquad \text{for} \quad u \in D(A) = H^{m+2}$$

によって定義する。(A^{-1} が H^m で存在する。) (2) (4) は形式的に H^m において．

$$\begin{cases} u_{tt} - \lambda A u_t - B(u) + (c-\lambda) u_t = f & (5) \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 & (6) \end{cases}$$

但し

$$B(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathrm{grad}\, u)\, u_{ij}$$

まず $u_0 = H^{m+2}$, $v_0 \in H^m$; $f \in C'([0,\infty]; H^m)$, と仮定しよう。(5)(6) の解を

$$(7) \quad u \in C([0\tau]: H^{m+2}) \cap C'([0\tau]: H^m) \cap C'((0,\tau]; H^{m+2}) \cap C^2((0,\tau]: H^m)$$

のクラスで解くことを目標とする。(5)を直積空間 $H^m \times H^m$ における system の方程式にあらためよう。未知関数 $U = {}^t(v, w)$ を

$$v = u_t \quad , \quad w = Au$$

によって定義する。(5);(6)を(7)のクラスで解くことは次の初期値問題

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathbb{A}U(t) + \mathbb{B}(U(t)) + \mathbb{F}(t) & (8) \\ U(0) = U_0 \equiv {}^t(v_0, Au_0) & (9) \end{cases}$$

但し

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B}(U) = \begin{pmatrix} B(A^{-1}w) + (\lambda - c)v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

を

(10) $U \in C([0,\tau]: H^m \times H^m) \cap C^1((0,\tau]; H^m \times H^m)$

のクラスで解くことと同値である。

方程式(8)に着目すると，都合のよいことに $\mathbb{A}$ は解析半群 $\{\mathbb{T}(t)\}_{t\geq 0}$

$$\mathbb{T}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t A} & 0 \\ (e^{\lambda t A}-1)/\lambda & I \end{pmatrix}$$

を生成し $U \to \mathbb{B}(U)$ は $H^m \times H^m$ において 局所Lipschitz 連続な非線型作用素となる。（$m \geq [\frac{n}{2}]+1$ をここで用いる。）従って 方程式(8)は半線型抽象放物型方程式とみることができる。更に，(8)・(9)を(10)のクラスで解くことは 積分方程式

(11) $U(t) = \mathbb{T}(t)U_0 + \int_0^t \mathbb{T}(t-s)(\mathbb{B}(U(s)) + \mathbb{F}(s))\,ds$

をクラス

(12) $U \in \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{C([0,\tau]: H^m \times H^m)}$

で解くこととも同値である。以上より (4)を解くことが 簡単な積分方程式(11)に帰着されたわけである。（(11)は通常のように iteration 或は不動点定理によって解くことが出来る。） もとの問題にたち帰って (7)をみたす，(5)・(6) の解の存在（局所解）が わかるわけであるが，この場合，解の存在区間 $[0,\tau]$ $(\tau>0)$ は一般に λ にも依存し $\tau = \tau(\lambda)$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき $\tau(\lambda) \to 0$ となるかもしれない。

極限操作 $\lambda \downarrow 0$ が意味あるようにするためには，(5)・(6) の解 u を λ に依存しないような区間 $[0, T_0]$ $(T_0 > 0)$ にまで 拡張しておかねばならない。今までは "双曲性" は何も用いな移ったわけだが，ここからは必要になってくる。エネルギー法によって，解のア・プリオリ評価をする。方程式(2)と $-\Delta u_t$, $-\Delta u$, u_t, u との H^m での内積をとることにより ア・プリオリ評価をしてゆく。

<u>定理 I</u> $0 < \lambda \leq 1$, $u_0 \in H^{m+2}$, $v_0 \in H^{m+1}$, $f \in C([0\ \infty): H^{m+1}) \cap C^1([0,\infty): H^m)$ とする。

(i) $^\exists T_0 > 0$ (indep. of λ) s.t. 初期値問題(2)・(4) は一意解

$$u^\lambda \in C([0,T_0]:H^{m+2}) \cap C^1([0,T_0]:H^{m+1}) \cap C^2([0,T_0]:H^{m+2}) \cap C^2([0,T_0]:H^m)$$

をもつ．更に

$$\sup_{\substack{0\le t\le T_0\\0<\lambda\le 1}} \| u^\lambda(t) \|_{m+2} < \infty \qquad \sup_{\substack{0\le t\le T_0\\0<\lambda\le 1}} \| u^\lambda_t(t) \|_{m+1} < \infty$$

(ii) $\lambda \downarrow 0$とすると

$$^\exists \lim_{\lambda\downarrow 0} u^\lambda(t) = u^0(t) \qquad s\text{-in } H^{m+1},\quad w\text{-in } H^{m+2}$$

$t\in[0,T_0]$について一様

$$^\exists \lim_{\lambda\downarrow 0} u^\lambda_t(t) = u^0_t(t) \qquad s\text{-in } H^{m},\quad w\text{-in } H^{m+1}$$

$t\in[0,T_0]$について一様

かつ　u^0は 初期値問題 (1)·(2)の一意解となり

$$u^0 \in C^i([0\,T_0]; H^{m+2-i}) \quad i=0,1,2$$

をみたす。

定理Iの主張するu^0は ある有限区間では存在することがわかるが大域的に存在するかどうかはわからない。大域解の存在について ある程度の結果は 導くことができる。

定理2. 定理1の仮定に加え　$c>0$を仮定する。

(i)　$^\exists\delta_0>0$ (dep. on. m. n. c. $D^\alpha a_{ij}$ ($|\alpha|\le m+1$), not on λ) s.t.

$$\max\left\{\|u_0\|_{m+2},\ \|v_0\|_{m+1},\ \int_0^\infty \|f(s)\|_{m+1}\,ds\right\} \le \delta_0$$

ならば 定理I(i)の結論が "$T_0 \longrightarrow \infty$" とおきかえて成立する。

(ii)　$\lambda \downarrow 0$ のとき 定理(ii)の結論が "$T_0 \longrightarrow \infty$", "一様 → 広義一様" と置き換えて成立する。更に

$$\sup_{t\ge 0}\|u^0(t)\|_{m+2} < \infty, \qquad \sup_{t\ge 0}\|u^0_t(t)\|_{m+1} < \infty,$$

定理2によりデータ(u_0, v_0. f)を絞れば．$c>0$ のときには．有界解が存在する。このような消散項 cu_t ($c>0$) は．解を安定させる作用があるが、更に damping effect をもつ。

定理3　$c>0$　$f\equiv 0$, u^0を定理2の大域解とする。このとき

$$\| \operatorname{grad} u^0(t) \|^2_{m+1}, \quad \| u^0_t(t) \|^2_{m+1} = O(t^{-1}).$$

$$\| \Delta u^0(t) \|^2_m, \quad \| \operatorname{grad} u^0_t(t) \|^2_m = O(t^{-2})$$

as $t \to \infty$ が成立する。

定理3により特に解u^0自身は supremum-norm で評価すれば0に減衰してゆくことがわかる。

Stefan問題の自由境界の一評価

神戸大理　山田直記

固定壁でDirichlet条件をみたす1次元1相Stefan問題を考える。

$$
(\mathrm{SP})\quad
\begin{cases}
u_{xx} - u_t = 0 & 0 < x < y(t),\ 0 < t \leq T, & (1)\\
u(0,t) = f(t) & 0 < t \leq T, & (2)\\
u(y(t),t) = 0 & 0 \leq t \leq T, & (3)\\
u(x,0) = u_0(x) & 0 < x < \ell, & (4)\\
\dot{y}(t) = -u_x(y(t),t) & 0 < t \leq T, & (5)\\
y(0) = \ell, & & (6)
\end{cases}
$$

ここで $T>0$, $\ell > 0$ は定数，$f(t) \geq 0$, $u_0(x) \geq 0$ は与えられた関数，$u(x,t)$, $y(t)$ が未知関数である。

もっと一般の境界条件をみたす場合に対しての解の存在，正則性について今回のSymposiumで報告があった[Yotsutani, 3]。

本稿では滑らかな解が存在すると仮定し，その上でdataの大きさによって自由境界 $x=y(t)$ の a priori な評価を求める。

$\{u, y\}$ を (SP) の滑らかな解とする。まず (SP) を変分不等式に書き直す。

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y(t),\ \ 0 \leqq t \leqq T\},$$

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) \ \text{if}\ (x,t) \in D, \qquad = 0 \ \ \text{if}\ (x,t) \notin D$$

とする。$L > y(T)$ として

$$Q =]0,L[\times]0,T[$$

とおく。Stefan問題を変分不等式で表すことは例えば Lions [2] に証明があるが，1次元の場合は次の様にも計算できる。

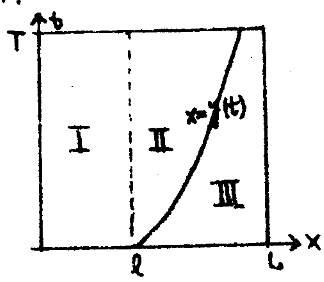
$$\theta(x,t) = \int_0^t \tilde{u}(x,s)\,ds \tag{7}$$

とおく。自由境界の単調性から Q は次の様に分割される。

$$\mathrm{I} = \{(x,t) \in Q \mid 0 < x \leqq l,\ 0 < t < T\},$$

$$\mathrm{II} = \{(x,t) \in Q \mid l < x < y(t),\ 0 < t < T\},$$

$$\mathrm{III} = \{(x,t) \in Q \mid y(t) \leqq x < L,\ 0 < t < T\}.$$



$(x,t) \in \mathrm{I}$ のときには

$$\theta_t - \theta_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t u(x,s)\,ds - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t u(x,s)\,ds$$

$$= u(x,t) - \int_0^t u_t(x,s)\,ds$$

$$= u(x,0) = u_0(x).$$

$(x,t) \in \mathrm{II}$ のときには

$$\theta_t - \theta_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{y^{-1}(x)}^t u(x,s)\,ds - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{y^{-1}(x)}^t u(x,s)\,ds$$

$$= u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{y^{-1}(x)}^t u(x,s)\,ds$$

右辺第2項を次の様に計算する。

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y^{-1}(x)}^{t} u(x,s)\,ds = \int_{y^{-1}(x)}^{t} u_x(x,s)\,ds - (\dot{y}^{-1})(x)\, u(x,y^{-1}(x))$$

$$= \int_{y^{-1}(x)}^{t} u_x(x,s)\,ds$$

ここでStefan条件(3)を用いた。更に、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{y^{-1}(x)}^{t} u(x,s)\,ds = \frac{\partial}{\partial x}\int_{y^{-1}(x)}^{t} u_x(x,s)\,ds$$

$$= \int_{y^{-1}(x)}^{t} u_{xx}(x,s)\,ds - (\dot{y}^{-1})(x)\, u_x(x,y^{-1}(x))$$

$$= \int_{y^{-1}(x)}^{t} u_{xx}(x,s)\,ds - (\dot{y}^{-1})(x)\, \dot{y}(y^{-1}(x))$$

$$= \int_{y^{-1}(x)}^{t} u_{xx}(x,s)\,ds + 1$$

ここで(5)と $x=y(y^{-1}(x))$ の両辺を x で微分した等式を用いた。

従って

$$\theta_t - \theta_{xx} = u(x,t) - \left(\int_{y^{-1}(x)}^{t} u_{xx}(x,s)\,ds + 1\right)$$

$$= u(x,t) - \int_{y^{-1}(x)}^{t} u_t(x,s)\,ds - 1$$

$$= -1.$$

$(x,t)\in$ Ⅲ のときには $\theta \equiv 0$ 故

$$\theta_t - \theta_{xx} = 0.$$

境界条件についても(7)で変換してまとめると，θ が次の変分不等式をみたすことが得られる。

$$
(\mathrm{VI}) \quad \begin{cases} \theta_t - \theta_{xx} - \theta_0(x) \geqq 0, & \theta \geqq 0 \\ \theta(\theta_t - \theta_{xx} - \theta_0(x)) = 0 & \text{in } Q, \\ \theta(x,0) = 0, \quad \theta(L,t) = 0, \\ \theta(0,t) = \int_0^t f(s)\,ds, \end{cases}
$$

ここで
$$
\theta_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & 0<x<l \\ -1 & l \leqq x \leqq L \end{cases}
$$

と定義した.

(VI)の解 θ の support を評価して, (SP)の自由境界の評価が得られる.

<u>Theorem.</u> 定数 $\mu, \nu > 0$ が存在して $f \leqq \mu$, $u_0 \leqq \nu$ とする. 領域

$$
S = \{(x,t) \in Q \mid x \geqq l + \sqrt{2t(\nu+1)},\ l^2 \geqq 2\mu t\}
$$

上では $\theta(x,t) = 0$ である. 即ち, 領域 S は氷の部分である.

<u>Proof.</u> S 上で $\theta = 0$ であることを示せばよい. $(x_0, t_0) \in S$ として

$$
w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2t_0}|x - x_0|^2 & 0<x<x_0,\ t<t_0 \\ 0 & x_0 \leqq x,\ t<t_0 \end{cases}
$$

と定義する. $]0,L[\times]0,t_0[$ 上で w と θ を比較する. 簡単な計算により,

$$
w_t - w_{xx} \geqq \theta_0(x), \quad w \geqq 0 \quad \text{in }]0,L[\times]0,t_0[
$$
$$
w(x,0) = 0, \quad w(L,t) = 0,
$$

$$w(0,t) \geqq \int_0^t f(s)ds$$

が得られる．比較定理によって

$$w(x,t) \geqq \theta(x,t) \qquad \text{in }]0,L[\times]0,t_0[$$

であるから，定理の結論が得られる．　(Q.E.D.)

References.

[1] J. L. Lions, Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal, Univ. Montréal, Montréal, 1976.

[2] N. Yamada, Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities in bounded cylindrical domains, to appear.

[3] S. Yotsutani, 固定端が non-linear boundary condition をみたす Stefan問題, 本報告集.

No. ....

Date ....

非線形半群の積公式について

小林良和 (新大.工)

§1 X を real Hilbert space, A, B を X の m-dissipative operator で, $\overline{A+B}$ も m-dissipative なものとする. $J_h^A = (I-hA)^{-1}$, $(h>0)$ を A の resolvent とし, $K_h^B : X \to X$ を

$$K_h^B : x - \frac{h}{2}y \longmapsto x + \frac{h}{2}y, \quad y \in Bx$$

で定義する. B が Hilbert 空間の m-dissipative operator であることから, K_h^B は single-valued で, X 上で contractive であることが分る. (文献[2]参照). $\overline{A+B}$ の生成する contractive semi-group を $S_{\overline{A+B}}(t)$ とするとき, 次の形の product formula が成立する.

Theorem A, B は以上の条件をみたすとする. このとき,

$$(1) \quad S_{\overline{A+B}}(t)x = \lim_{h\to 0+} (J_h^A K_h^B)^{[t/h]} x, \quad x \in \overline{D(A)\cap D(B)}$$

が有界な $t \in [0,\infty)$ について一様に成り立つ.

Hilbert space の場合,

$$S_{\overline{A+B}}(t)x = \lim_{h\to 0+} (S_A(h)S_B(h))^{[t/h]} x$$

の形の product formula は Brezis-Pazy [1], Kato-Masuda [3] で取り扱われている. また $S_A(h), S_B(h)$ の近似作用素として それらの resolvents J_h^A, J_h^B を用いた形の product formula もそれらで取り扱われている. ここでは $S_B(h)$ の近似作用素として, Crank-Nikolson scheme に対応する上記の近似作用素 K_h^B を用いても同様の product formula が成り立つことを主張している.

§.2 定理の証明　各 $x\in X$, $\lambda>0$ に対し

$$(I-\frac{\lambda}{h}(J_h^A K_h^B - I))^{-1}x \to (I-\lambda(\overline{A+B}))^{-1}x.\quad h\to 0+$$

が示せれば，半群の近似定理により，(1) の収束が従う（[7] 参照）以下，順を追ってこのことを調べる．$x\in X$, $\lambda>0$ を固定し

$$y_h = (I-\frac{\lambda}{h}(J_h^A K_h^B - I))^{-1}x$$

とかく．

次は容易に示せる：

Lemma.1　$h\to 0+$ のとき，$\|y_h\| = O(1)$, $\|K_h^B y_h\| = O(1)$, $\|J_h^A K_h^B y_h\| = O(1)$ である．

Lemma.2　$h\to 0+$ のとき，$\|J_h^A K_h^B y_h - y_h\| = O(1)$ である．

Proof.　y_h の定義により

$$J_h^A K_h^B y_h - y_h = \frac{h}{\lambda}(y_h - x)$$

で，$\|y_h\| = O(1)$ であるから．□

Lemma.3　$\|K_h^B y_h - y_h\| = O(\sqrt{h})$,　$h\to 0+$.

Proof.

$$h^{-1}(J_h^A K_h^B y_h - K_h^B y_h) + h^{-1}(K_h^B y_h - y_h) = \frac{1}{\lambda}(y_h - x)$$

において，左辺の第1項は $\in AJ_h^A K_h^B y_h$ で，$J_h^A K_h^B y_h = y_h + \frac{h}{\lambda}(y_h - x)$ だから，A の消散性により，$\forall y\in D(A)$ に対し

(2)　$0 \geqq \langle \lambda^{-1}(y_h - x) - h^{-1}(K_h^B y_h - y_h) - Ay,\ y_h + \frac{h}{\lambda}(y_h - x) - y\rangle$

が成り立つ．ただし，Ay は集合 Ay の任意の元の意味とする．（以下，同様に多価作用素を1価作用素のように略記する．）

$$h^{-1}(K_h^B y_h - y_h) \in BJ_{h/2}^B y_h,\quad J_{h/2}^B y_h = \frac{1}{2}(K_h^B y_h + y_h)$$

が成り立つから，B の消散性により

(3)　$0 \geqq \langle h^{-1}(K_h^B y_h - y_h) - By,\ \frac{1}{2}(K_h^B y_h + y_h) - y\rangle$

No.

Date

$$= \langle h^{-1}(K_h^B y_h - y_h) - By,\ \frac{1}{2}(K_h^B - I)y_h + y_h - y \rangle$$

が成り立つ. Lemma 1, 2 を用いると, (1), (2) よりそれぞれ

$$0 \geqq -C + \langle -h^{-1}(K_h^B y_h - y_h),\ y_h - y \rangle,$$

$$0 \geqq -C' + \frac{1}{2h}\| K_h y_h - y_h \|^2 + \langle h^{-1}(K_h^B y_h - y_h),\ y_h - y \rangle$$

が従う. ここで, $C, C' > 0$ は適当な定数である. この2式を加えて,

$$\frac{1}{2h}\| K_h y_h - y_h \|^2 \leqq C + C' = C''$$

となる. □

<u>Lemma 4</u> $y \in D(A) \cap D(B)$ に対し,

$$\| y_h - y \|^2 \leqq \langle x - (y - \lambda(A+B)y),\ y_h - y \rangle + \lambda \langle By,\ \frac{1}{2}(K_h y_h - y_h) \rangle + \lambda \langle Ay,\ J_h^A K_h^B y_h - y_h \rangle$$

が成り立つ.

<u>Proof</u> $y \in D(A) \cap D(B)$ とする. A, B が消散的であるから,

$$\begin{aligned} &\| J_h^A K_h^B y_h - y \|^2 \\ \leqq\ & \| K_h^B y_h - y \|^2 + 2h \langle Ay,\ J_h^A K_h^B y_h - y \rangle \\ \leqq\ & \| y_h - y \|^2 + 2h \langle By,\ \frac{1}{2}(K_h y_h + y_h) - y \rangle \\ & + 2h \langle Ay,\ J_h^A K_h^B y_h - y \rangle \end{aligned}$$

である. よって

$$2 \langle y_h - y,\ J_h^A K_h^B y_h - y_h \rangle \leqq \| J_h^A K_h^B y_h - y \|^2 - \| y_h - y \|^2$$

を用いて, 変形すれば

$$\begin{aligned} \langle y_h - y,\ y_h - x \rangle &= \frac{\lambda}{h} \langle y_h - y,\ J_h^A K_h^B y_h - y_h \rangle \\ &\leqq \langle \lambda By,\ \frac{1}{2}(K_h y_h + y_h) - y \rangle + \langle \lambda Ay,\ J_h^A K_h^B y_h - y \rangle \end{aligned}$$

となる.

No.

Date

故に
$$\|y_h-y\|^2 \leq \langle x-y,\ y_h-y\rangle + \langle \lambda By,\ \tfrac{1}{2}(K_h y_h + y_h)-y\rangle + \langle \lambda Ay,\ J_h^A K_h^B y_h - y\rangle$$
$$= \langle x-(y-\lambda(A+B)y),\ y_h-y\rangle + \langle \lambda By,\ \tfrac{1}{2}(K_h y_h - y_h)\rangle + \langle \lambda Ay,\ J_h^A K_h^B y_h - y_h\rangle$$
を得る. □

$y\in D(A)\cap D(B)$として, Lemma 4 の不等式で $h\to 0+$ とすると

$$(4)\quad \overline{\lim_{h\to 0+}}\|y_h-y\|^2 \leq \overline{\lim_{h\to 0+}}\langle x-(I-\lambda(A+B))y,\ y_h-y\rangle$$

を得る. $y\in D(\overline{A+B})$, $z\in(\overline{A+B})y$ に対し, $y_n\in D(A)\cap D(B)$ $z_n\in(A+B)y_n$ が存在して $y_n\to y$, $z_n\to z$ (強収束) となるから

$$\overline{\lim_{h\to 0+}}\|y_h-y\|^2 \leq \overline{\lim_{h\to 0+}}\langle x-(I-\lambda(\overline{A+B}))y,\ y_h-y\rangle$$

が $\forall y\in D(\overline{A+B})$ に対して成り立つ. ここで, $y=(I-\lambda(\overline{A+B}))^{-1}x$ とおけば,

$$\overline{\lim_{h\to 0+}}\|y_h-y\| = \overline{\lim_{h\to 0+}}\|y_h-(I-\lambda(\overline{A+B}))^{-1}x\| \leq 0$$

となる. 以上で定理が示された.

文献

[1] Brezis-Pazy: Semigroups of nonlinear contractions on convex sets. J. Funct. Anal., 6 (1970), 237-281

[2] 高村-小西: 非線形発展方程式, 岩波講座 基礎数学

[3] Kato-Masuda, Trotter's product formula for nonlinear semigroups generated by the subdifferentials of convex functionals, J. Math. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, 1978