2015年度学習到達度試験 (数学)
正答率が低い問題について

今回の学習到達度 (数学) 試験の結果，沼津が受験した各学習領域で正答率が最も低かった問題を取り上げてみました。あわせてどのような誤答が最も多かったかも調べ，可能ならいかなる間違い，勘違いをして誤った結論を得たのか考えてみました。

○ 関数とグラフ

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，$y=f(x)$ のグラフは $y=cos\,2x$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ だけ平行移動したものである。$\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを次の①～⑨のうちから一つ選び，その番号をそれぞれの解答欄にマークせよ。

① $-\dfrac{\pi}{4}$　② $-\dfrac{\pi}{3}$　③ $-\dfrac{\pi}{6}$　④ $\dfrac{\pi}{4}$　⑤ $\dfrac{\pi}{3}$

⑥ $\dfrac{\pi}{6}$　⑦ π　⑧ 2π　⑨ π

[解説]

$\boxed{\text{イ}}$ の正答率がこの領域で一番低く 27.2% です。正答は⑥の $\dfrac{\pi}{6}$ です。

上位20名の正答率は 71.4% です。

誤答で最も多かったのは⑤の $\dfrac{\pi}{3}$ で 59.5% でした。毎年同じ誤りを犯しています。

上位20名の誤答は全員⑤を選んだものでした。

解法： $cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=cos\,2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　$\therefore\ g(x)=cos\,2x$ と置けば，

$f(x)=cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=g\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　よって，$y=f(x)$ のグラフは $y=g(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

○ 場合の数と数列

$\boxed{3}$ (3) $r\neq 0,\ 1$ とするとき，等比数列の和

$$r^3+r^4+r^5+\cdots+r^{10}$$

として正しいものを次の①～⑥うちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\dfrac{r^3}{1-r}$　② $\dfrac{r^3\left(1-r^7\right)}{1-r}$　③ $\dfrac{r^3\left(1-r^8\right)}{1-r}$

④ $\dfrac{r^3\left(1-r^9\right)}{1-r}$　⑤ $\dfrac{r^3\left(1-r^{10}\right)}{1-r}$　⑥ $\dfrac{1-r^{11}}{1-r}$

[解説] この問題の正答率がこの領域で一番低く 21.6% です。正答は③の $\dfrac{r^3\left(1-r^8\right)}{1-r}$ です。

上位20名の正答率は 52.4% です。

誤答で最も多かったのは⑤の $\dfrac{r^3\left(1-r^{10}\right)}{1-r}$ で 32.6% でした。

上位20名の誤答で最も多かったのが②の $\dfrac{r^3\left(1-r^{7}\right)}{1-r}$ でした。

⑤を選らんだものは等比数列の和の公式の各パラメータの意味が分かっていないと思われます。また②を選んだものは項数を 10−3 としたためだと思われます。

解法： 初項 r^3，公比 r $(\neq 0, 1)$，項数 8 の等比数列の和であるから，$\dfrac{r^3\left(1-r^{8}\right)}{1-r}$ となる。

○ 平面ベクトルの性質

$\boxed{4}$ ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が，$\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ を満たすとき，次の各問いに答えよ。

(2) $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$ の値を次の①～⑧のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① 37　② 13　③ 7　④ 1

⑤ $\sqrt{37}$　⑥ $\sqrt{13}$　⑦ $\sqrt{7}$　⑧ 0

[解説] この問題の正答率がこの領域で一番低く 17.8% です。正答は⑤の $\sqrt{37}$ です。

上位20名の正答率は 61.9% です。

誤答で最も多かったのは④の 1 で 44.2% でした。

上位20名の誤答も④が最も多かったです。

なぜ④を選んだのか一つ考えられるのは $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2\left|\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|=1$ と計算したのでしょうか。

上位20名のものも，こう考えたとしたら寒いです。

解法： $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-4\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+4\left|\vec{b}\right|^2=37$ $\therefore$ $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{37}$

○ 微分・積分の計算

$\boxed{4}$ 定積分 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$ について，$x=\tan\theta$ として置換すると $I=\displaystyle\int_0^{\boxed{ア}} \boxed{イ}\, d\theta$ となる。次の各問いに答えよ。

(2) $\boxed{イ}$ に当てはまるものを次の①～⑧のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ。

① $\sin^2\theta$　② $\cos^2\theta$　③ $\sin^4\theta$　④ $\cos^4\theta$

⑤ $\dfrac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$　⑥ $\dfrac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}$　⑦ $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　⑧ $\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

[解説] この問題の正答率がこの領域で一番低く 23.9% です。正答は②の $\cos^2\theta$ です。

上位20名の正答率は 57.1% です。

誤答で最も多かったのは⑦の $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ で 25.8% でした。

上位20名の誤答で最も多かったのが④の $\cos^4\theta$ でした。

⑦を選んだ理由は定かではありませんが，④を選んだのは $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ を $x=\tan\theta$ で変換しただけで，$dx=\sec^2\theta\,d\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ を忘れたのでしょう。

解法： $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\left(1+\tan^2\theta\right)^2}\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta$

○ 微分・積分の応用

$\boxed{3}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ を和の極限で表すと，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\boxed{ア}\right)\boxed{イ}$ である。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまるものを次の①～⑨のうちから一つずつ選び，その番号をそれぞれ解答欄にマークせよ。

① k　② n　③ $\dfrac{1}{k}$　④ $\dfrac{1}{n}$　⑤ $\dfrac{k}{n}$

⑥ $\dfrac{\pi}{n}$　⑦ $\dfrac{1}{n\pi}$　⑧ $\dfrac{k\pi}{n}$　⑨ $\dfrac{k}{n\pi}$

[解説] $\boxed{イ}$ の正答率がこの領域で一番低く 14.1% です。正答は⑥の $\dfrac{\pi}{n}$ です。

上位 20 名の正答率は 38.1% で，上位のもので正答率が最も低かったのはこの問題です。

誤答で最も多かったのは④の $\dfrac{1}{n}$ で 37.0% でした。

上位 20 名の誤答で最も多かったのも同じく④でした。

この種の問題は毎年正答率が低く，とくに今年度は積分範囲が 0 から π であったため（例年 0 から 1 の場合が多い）山があたった学生も $\dfrac{1}{n}$ を選んでしまったのでしょう。

解法： 被積分関数は $[0,\pi]$ で連続だから，そこで定積分可能である。従ってこの区間を等分割し，各小区間から選ぶ点も各区間の右端でよい。小区間の幅はいずれも $\dfrac{\pi}{n}$ で，各小区間の右端は $\dfrac{k\pi}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ だから $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$

○ 空間ベクトル，行列の計算

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(2)　4 点 $(0,0,0)$，$(1,0,1)$，$(0,1,1)$，$(3,4,a)$ が同一平面上にあるとき，

$a=\boxed{}$ である。$\boxed{}$ に当てはまる数字を解答欄にマークせよ。

[解説] この問題の正答率がこの領域で一番低く 14.1% です。

先の「微分・積分の応用」$\boxed{3}$ $\boxed{イ}$ と同じ正答率で，全領域でも最も正答率が低い問題です。

正答は 7 です。
上位20名の正答率は 42.9% です。
誤答で最も多かったのは 5 で 18.1% でした。
上位20名の誤答も 5 が最も多かったです。
なぜ 5 と解答したのか分かりません。3，4 ときたから 5 ？
解法： 4点のうち１つが原点なので，残りの点の位置ベクトルが線形従属になればよい。明らかに (1，0，1)，(0，1，1) は線形独立だから，(3，4，a) が (1，0，1)，(0，1，1) の線形結合で表される。従って (3，4，a)＝k(1，0，1)＋l(0，1，1)　∴ $k=3$，$l=4$　∴ $a=k+l=7$

○ 行列の固有値と行列式

$\boxed{4}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$ について，$|A|=8$ である。このとき，$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす

y の値は $y=\boxed{}$ である。$\boxed{}$ に当てはまる数字を解答欄にマークせよ。

[解説] この問題の正答率がこの領域で一番低く 23.5% です。正答は 3 です。
上位20名の正答率は 76.2% です。
誤答で最も多かったのは 4 で 16.4% でした。
上位20名の誤答で最も多かったのは 5 でした。
ちなみに a の値は 4 になります。誤答の 4 や 5 がどのような経緯ででてきたのか分かりません。
解法：(具体的な計算であまり使いたくありませんが) クラーメルの公式を用いると a の値を求めなくてよい。

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix}=\frac{14+10}{8}=3$$

補足：わたしの持論ですが，連立１次方程式を具体的に解く場合クラーメルの公式は極力使わないよう学生に説いています。まず，連立１次方程式の係数行列が正則でなければこの公式は使えないこと，未知数の数が増えると計算量が増え間違いを犯しやすいことなどを理由としています。例えば未知数が３個なら，４個の３次行列式を計算しなければならず，未知数が４個なら，５個の４次行列式を計算しなければなりません。クラーメルの公式は解が係数を用いて表されることに価値があり，論理的な議論を進めるときに有効であると考えています。論理にも実際の計算にも威力を発する消去法を薦めています。

○ ２変数関数の微分・積分

$\boxed{3}$ 累次積分 $I=\int_0^2\left\{\int_0^{\sqrt{x}} xy\,dy\right\}dx$ について，次の各問いに答えよ。

(2) 累次積分 I の積分順序を変更すると $I=\int_0^{\boxed{ア}}\left\{\int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ウ}} xy\,dx\right\}dy$ となる。$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ に

当てはまるものを次の①～⑥のうちから一つずつ選び，その番号をそれぞれ解答欄にマークせよ。

① 0　② 1　③ 2　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{y}$　⑥ y^2

[解説] この問題の正答率がこの領域で一番低く 22.5% です。

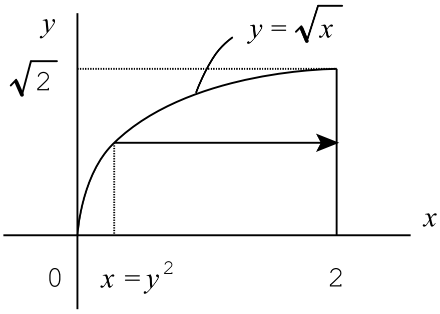
正答はアイウの順に④ $\sqrt{2}$，⑥ y^2，③ 2 です。

上位20名の正答率は 85.7% です。

誤答で最も多かったのは順に④①⑥で 24.3% でした。

上位20名のうち間違ったものは3名で，それは⑤⑥③，③①⑥，④①⑥それぞれ1名ずつでした。

誤答の④①⑥と解答したものは問題の累次積分から結論した積分領域が間違っていたからだと思われます。つまり直線 $x=0$，$y=\sqrt{2}$ および曲線 $y=\sqrt{x}$ で囲まれた領域と思ったのでしょう。



解法： 積分順序の変更は積分領域を描いて考える。積分領域を D と表せば，問題の累次積分から

$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{x}\right\}$ となるから，これは

$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq y\leqq\sqrt{2},\ y^2\leqq x\leqq 2\right\}$ となるので

$I=\int_0^{\sqrt{2}}\left\{\int_{y^2}^{2} xy\,dx\right\}dy$ となる。

○ 総括 (私見です)

正答率が低いものは毎年同じ傾向の問題が多いです。「関数とグラフ」のグラフの平行移動，「場合の数と数列」の初項が1でない，または途中の項からの等比数列の和，「微分・積分の応用」の定積分を用いた級数の和など。出題者もそれを意識して作問していると思われます。授業はこれらのことを踏まえて行っているのですが定期試験では分かっていてもしばらくすると忘れてしまうか，到達度試験前に公式などをただ暗記しているので毎年出題者の思うつぼになっていると思われます。かといって試験前に特別な補講をすることはこれを実施する本来の目的から逸脱しているとわたしは思います。何かの話しのつながりで出て来るたびに授業で強調していくしかないと思います。それとは別に，

授業をして感じることですが，ここ3，4年数学の能力の低い学生が多くなりました。数学では1，2年生に対して夏季および冬季休業明けに基礎学力試験を実施しておりますが，基本的な問題さえも答えられない学生が多くなりました。定期試験でもその傾向があります。なぜ数学の能力が低い中学生が入学してきているのか。多々原因が考えられ，わたしなりの考えもありますがここでは展開することを控えます。

(終わり)