MS2 前末 2018 (微積I)

2018年度試験答案用紙　番号　氏名

1. (1) [1] $t=\tan^{-1}2x$ とおけば $x=\frac{1}{2}\tan t$ で $t\to 0$

与式 $=\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{1}{2}\tan t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}\cdot 2\cos t=\boxed{2}$

[2] ($\frac{0}{0}$型) 与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x}{1-2\cos 2x}=\dfrac{1}{1-2}=\boxed{-1}$

[3] ($\frac{0}{0}$型) 与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2e^{x}}{1}=\boxed{2}$

[4] 与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-3/x^2+1/x^3}{-1-2/x+4/x^3}=\dfrac{3}{-1}=\boxed{-3}$

[5] ($\frac{0}{0}$型) 与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x+2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\cos x+1}{6x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{12x}=\boxed{\dfrac{1}{12}}$　(5段)

(2) [1] $y'=3x^2-12x=3x(x-4)=0$ ∴ $x=0,4$

x	…	0	…	4	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	a	↘	$a-32$	↗

$y|_{x=4}=4^3-6\cdot 4^2+a=a-32$

[2] [1]から $\boxed{a>32}$　(3段)

(3) $y'=\boxed{\sqrt{3}\cos x-\sin x}$ [1] より $y'=0$ を解くと $0\leqq x\leqq\pi$ で

$\tan x=\sqrt{3}$ より $x=\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$ [2]

増減表は

[3] +　[4] −

[5] ↗　[6] 2　[7] ↘

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π
y'		+	0	−	
y	1	↗	2	↘	−1

よって $x=\frac{\pi}{3}$ [8] で最大値 $\boxed{2}$ [9]

$x=\boxed{\pi}$ [10] で最小値 $\boxed{-1}$ [11] をとる.　(6段)

1(3)　[2] $\frac{\pi}{3}$　[3] +　[4] −　[5] ↗

[6] 2　[7] ↘　[8] $\frac{\pi}{3}$　[9] 2

[10] π　[11] −1

2 (1) [1] $\frac{x}{4}=\cos 2t$, $\frac{y}{3}=\sin 2t$ より $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

[2] $x'=-8\sin 2t$, $y'=6\cos 2t$ より

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=-\dfrac{6\cos 2t}{8\sin 2t}=-\dfrac{3}{4}\cot 2t$

[3] $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{4}\cot 2t\right)}{x'}$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\operatorname{cosec}^2 2t}{-8\sin 2t}=-\dfrac{3}{16}\operatorname{cosec}^3 2t$

[4] $t=\frac{\pi}{8}$ で $x=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$, $y=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4}\cot\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3}{4}$ より $y-\frac{3}{2}\sqrt{2}=-\frac{3}{4}(x-2\sqrt{2})$

$y=-\frac{3}{4}x+3\sqrt{2}$ ⟺ $3x+4y=12\sqrt{2}$ — 3点　(4段)

(2) [1] $x'=3t^2-12t+9$　[2] $x''=6t-12$

[3] $|x'|=|3t^2-12t+9|=|3(t-1)(t-3)|$　4 (各段)

[4] $t=1$ と 3

(3) [1] $y'=2\cos 2x-2\cos x+1$, $y''=-4\sin 2x+2\sin x$

$y''=2\sin x(1-4\cos x)$. $0<x<\pi$ より $y''=0$ ⟺ $x=\cos^{-1}\frac{1}{4}$

[2] $x=\cos^{-1}\frac{1}{4}$ より $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ がわかる. このとき

$y=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{4}=\cos^{-1}\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{15}}{8}$

∴ $\left(\cos^{-1}\frac{1}{4},\ \cos^{-1}\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$ — 3点　(2段)

$\cos^{-1}\frac{1}{4}=\alpha$ と表せば

x	0	…	α	…	π
y''		−	0	+	

つまり $0<x<\alpha$ で上に凸, $\alpha<x<\pi$ で下に凸

(4) [1] $y=(1+x)^{-1}$, $y'=(-1)(1+x)^{-2}$, $y''=(-1)(-2)(1+x)^{-3}$, …

∴ $y^{(n)}=(-1)^n n!(1+x)^{-n-1}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

[2] $y=e^{1-x}$, $y'=-e^{1-x}$, $y''=(-1)^2e^{1-x}$, …

∴ $y^{(n)}=(-1)^n e^{1-x}=\dfrac{(-1)^n}{e^{x-1}}$　(2段)

(5) $y^{(5)}=2^5x^2e^{2x}+5\cdot 2^4\cdot 2xe^{2x}+10\cdot 2^3\cdot 2e^{2x}$

$=32e^{2x}(x^2+5x+5)$

$=e^{2x}(32x^2+160x+160)$

3. $y'=\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}$ [1] より $(x+1)y'=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}=\boxed{\dfrac{1}{2}}y$ … ① [2]

①の両辺を n 回微分すると

$(x+1)y^{(n+1)}+{}_nC_1\,y^{(n)}=\frac{1}{2}y^{(n)}$　${}_nC_1=n$ [3]

∴ $2(x+1)y^{(n+1)}+(2n-1)y^{(n)}=0$ … ② [4]

$x=0$ を代入 $a_n=y^{(n)}(0)$ とおく $a_{n+1}=\dfrac{1-2n}{2}a_n$ [5]　$\left(\frac{1}{2}-n\right)$

$a_n=-\dfrac{2n-3}{2}a_{n-1}$ [6] $=\dfrac{(2n-3)(2n-5)}{2^2}a_{n-2}$ [7]

$\left(\frac{3}{2}-n\right)$　$\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)$

$=\cdots=(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{2^{n-1}}a_1$ [8] $=\dfrac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{2^n}(-1)^{n-1}$ [9]

∵ $a_1=\frac{1}{2}$

$=(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 2\cdot 1}{2^n\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!}=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$ [10] [11]　(8段)

4 (1) 定義域は $x\neq -2$ である. このとき

$y'=\dfrac{3x^2(x^2+4x+4)-x^3(2x+4)}{(x+2)^4}$

$=\dfrac{x^2(3x^2+12x+12-2x^2-4x)}{(x+2)^4}=\dfrac{x^2(x+2)(x+6)}{(x+2)^4}$

∴ $y'=\dfrac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}$ $(x\neq -2)$　(3行)

(2)

x	…	−6	…	−2	…	0	…
y'	+	0	−		+	0	+
y	↗	$-\frac{27}{2}$	↘		↗	0	↗

$y=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$ である

$y|_{x=-6}=\dfrac{-6^3}{4^2}=-\dfrac{27}{2}$

よって $x=-6$ で極大値 $-\dfrac{27}{2}$

(3) まず $\lim_{x\to -2\pm 0}y=-\infty$ より $x=-2$ は漸近線　(4行)

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2+4x+4}=1$ より 傾き $=1$

$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\dfrac{-4x^2-4x}{x^2+4x+4}=-4$　$x\to\pm\infty$ で ∴ $y=x-4$　(3行)

5 (1) ヒントのように $G(x)$, $F(x)$ を定義すれば Cauchy の平均値の定理より $G(0)=0$, $F(0)=0$ だから

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = \frac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)} = \frac{F'(\theta h)}{G'(\theta h)}$$

$$= \frac{f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h)}{2\theta h} \quad (1)$$

$(0<\theta<1)$ を満たす θ が存在する。従って証明すべき等式の左辺

$$\text{左辺} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+\theta h)-f'(a)-\{f'(a-\theta h)-f'(a)\}}{2\theta h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h} + \frac{f'(a-\theta h)-f'(a)}{-\theta h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(f''(a)+f''(a)) = f''(a) \qquad (8行)$$

(2) [1] $f(a+h) = h|h|$, $f(a)=0$, $f(a-h) = -h|-h| = -h|h|$

だから $f(a+h)-2f(a)+f(a-h) = 0$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0 \quad (3行)$$

(2) [2]

$x>a$ のとき $f(x) = (x-a)^2$ $\therefore f'(x) = 2(x-a)$

$x<a$ のとき $f(x) = -(x-a)^2$ $\therefore f'(x) = -2(x-a)$

また $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h|$

$= 0$ 以上より $f'(x) = 2|x-a|$ (4行)

(2) [3] $\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2|h|}{h}$

なので $h\to +0$ のとき 2, $h\to -0$ のとき -2 となるから

$f''(a)$ は存在しない。

(3行)

補足. 2(1) [3] x, y がともに (2回微分可能な) t の関数のとき, 即ち $x = x(t)$, $y = y(t)$ のとき y を x の式と考えて $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める式を導く. [2] から $\frac{dy}{dx}$ は t の式であることが分かるから, 合成関数 および 逆関数の微分法を用いて

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}\,\frac{1}{x'(t)}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

3. $2m-1$ から 1 までの奇数のみの積を $(2m-1)!!$ という記号で表すことがある.

例. $7!! = 7\cdot5\cdot3\cdot1 = 105$

同様に $2m$ から 2 までの偶数のみの積を $(2m)!!$ と表すこともある.

例. $8!! = 8\cdot6\cdot4\cdot2 = 384$

さてこれらを階乗を用いて表わしてみよう. まず $(2m)!!$ から上の例で考えるとその考えがわかる.

$$8!! = 8\cdot6\cdot4\cdot2 = (2\times4)\cdot(2\times3)\cdot(2\times2)\cdot(2\times1)$$
$$= 2^4\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 2^4\cdot4!$$

つまり $(2m)!! = 2^m\cdot m!$ となる. 実際

$$(2m)!! = 2m\cdot(2m-2)(2m-4)\cdots4\cdot2$$
$$= 2m\cdot2(m-1)\cdot2(m-2)\cdots(2\cdot2)\cdot2\cdot1$$
$$= 2^n\cdot m(m-1)(m-2)\cdots2\cdot1$$

では $(2m-1)!!$ はどう考えるのか. ~~これ~~ これも例で考えると

$$7!! = 7\cdot5\cdot3\cdot1 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2} = \frac{8!}{8!!}$$

$$= \frac{8!}{2^4\cdot4!}$$

なお, $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot2} = \frac{7!}{2^3\cdot3!}$ でもよい.

つまり

$$(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{(2m)!!} = \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}$$

$$= \frac{(2m-1)!}{2^{n-1}\cdot(m-1)!}$$

この変形は覚えておくとよい. (暗記ではなく)

5. (1) 理論的考察のときは一連の平均値の定理は a, b, c ではなく a, $a+h$, $a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ の表現を用いた方がよい. 後者は $h<0$ でも使える!

Lagrange $\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h)$

Cauchy $\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$

なお, この問題で大切なのは $x=a$ のみで 2回微分できることが仮定されており, a の近傍で 2回微分できるとは言ってない! だから 解答例の 4行目は (1) に Lagrange の平均値を使ってはだめ!

5(2) [2] 「絶対値のついた式は場合分け」が定石.

なお, $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ で $h>0$, $h<0$ の両方を考える必要があるので それぞれ $a+h>a$, $a+h<a$ となるから注意が必要