ME4 後中 2018（3章§2）

試験答案用紙

番号　　氏名

1. (1) $P(Z \geqq z_0) = 0.10$ より $P(Z \leqq z_0) = 0.90$ ∴ $z_0 = \boxed{1.2816}$

(2) $P(|T| \geqq t_0) = 2P(T \geqq t_0) = 0.05$ ∴ $P(T \geqq t_0) = 0.025$

∴ $t_0 = t_9(0.025) = 2.262$

(3) [1] 1.594　[2] 3.007

(4) $E[X_k] = \lambda_k,\ V[X_k] = \lambda_k \quad (k=1,2)$ より

[1] $E[X_1+X_2] = E[X_1] + E[X_2] = \lambda_1 + \lambda_2$

[2] 独立なので $V[X_1+X_2] = \lambda_1 + \lambda_2$

(5) [1] $E[X_k] = \frac{1}{13}(1+2+\cdots+13) = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14 = \boxed{7}$

[2] $V[X_k] = \frac{1}{13}(1^2+2^2+\cdots+13^2) - 7^2 = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{6}\cdot 13\cdot 14\cdot 27 - 7^2$

$= \boxed{14}$

[3] $E[\overline{X}] = E[X_k] = \boxed{7}$

[4] $V[\overline{X}] = \frac{14}{26} = \boxed{\frac{7}{13}}$

(6) X_1, X_2 は明らかに互いに独立で $P(X_k=1) = \frac{12}{25}$, $P(X_k=2) = \frac{4}{25}$ $(k=1,2)$ であるから $E[X_k] = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} = \frac{20}{25}$

[1] $E[X_1+X_2] = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \boxed{\frac{8}{5}}$

[2] $E[X_1 X_2] = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{16}{25}}$

(7) a：1回目の数字，b：2回目の数字 としたときの Y の値の表

a＼b	1	2	3
1	1	2	3
2	3	4	5
3	1	2	3

これより

[1] $\frac{2}{9}$　[2] $\frac{2}{9}$　[3] $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

[4] $\frac{1}{9}$　[5] $\frac{1}{9}$

(8) [1] 1.761　[2] 3.325

(9) $\overline{X}$ は $N\left(10, \frac{4}{100}\right)$ に従うから $Z = \dfrac{\overline{X}-10}{\frac{1}{5}}$ は $N(0,1)$ に従う。$P(\overline{X} \leqq 10.51) = P(Z \leqq 2.55) = 0.9946$

(10) $\frac{29U^2}{20}$ は $\chi^2(29)$ に従うので $P(0 \leqq U^2 \leqq k)$

$= P\left(0 \leqq \frac{29U^2}{20} \leqq \frac{29}{20}k\right) = 0.5$ ∴ $k = \frac{20}{29}\chi^2_{29}(0.5) = 19.542$

2. (1) $M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}\,dx$

$\lambda - t > 0$ だから

与式 $= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda-t}e^{-(\lambda-t)x}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-t}$　(3点)

(2) $M_X(t) = \dfrac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}$ で $|t|<\lambda$ より $\left|\frac{t}{\lambda}\right|<1$ より

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}t^n$　(2点)

(3) (2) から $E[X^n] = \boxed{\frac{n!}{\lambda^n}}$

3. (1) $x \geqq 0$ のとき $f_1(x) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-y}\,dy = e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}\,dy$

$= e^{-x}\cdot\left[-e^{-y}\right]_0^\infty = e^{-x}$，$x<0$ のとき $f_1(x)=0$

∴ $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$　(3点)

(2) 同様にして $f_2(y) = \begin{cases} e^{-y} & (y \geqq 0) \\ 0 & (y<0) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ なので 互いに独立

4. $k=0,1,2,\cdots$ に対し $P(X=k) = P(X_1+X_2=k) = \sum_{l=0}^{k}P(X_1=l, X_2=k-l)$

X_1, X_2 は互いに独立だから $P(X_1=l, X_2=k-l) = P(X_1=l)P(X_2=k-l)$

よって 与式 $= \sum_{l=0}^{k}\frac{\lambda_1^l}{l!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!}e^{-\lambda_2} = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda_1^l\lambda_2^{k-l}e^{-\lambda_1-\lambda_2}$

$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$ 従って $X = X_1+X_2$ は $P_0(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う　(4点)

5. 確率密度関数 $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $(a<x<b)$，$=0$ (それ以外) だから

$M_X(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a}e^{tx}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_a^b$

$= \dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$　(3点)