M2学末、2017

2016年度試験答案用紙

番号　　氏名

1、(1) $A^2=\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ab+bd\\0&d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \boxed{a=d=0}$

(2). [1] ${}^tA=\boxed{\begin{pmatrix}3&5&2\\-1&7&0\end{pmatrix}}$ [2] ${}^tB=\boxed{\begin{pmatrix}0&1\\2&4\end{pmatrix}}$

(3) $AB=\begin{pmatrix}4&-6\\4&12\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}6&-4\\3&10\end{pmatrix}$

[1] ${}^tA\,{}^tB={}^t(BA)=\boxed{\begin{pmatrix}6&3\\-4&10\end{pmatrix}}$ [2] ${}^tB\,{}^tA={}^t(AB)=\boxed{\begin{pmatrix}4&4\\-6&12\end{pmatrix}}$

(4) $\boxed{[1]\ 1\quad [2]\ 0\quad [3]\ -2\quad [4]\ 3}$

(5) [1] $\boxed{\begin{pmatrix}15&8\\-2&-9\\5&10\end{pmatrix}}$ [2] $\boxed{\begin{pmatrix}2&0&11\\8&-8&12\end{pmatrix}}$ [3] $\boxed{\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}}$

[4] $\boxed{\begin{pmatrix}0&7&2\end{pmatrix}}$

(解説) [1] $\begin{pmatrix}12&8\\4&0\\8&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&0\\6&9\\3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+3&8-0\\4-6&0-9\\8-3&4+6\end{pmatrix}$

[2] $\begin{pmatrix}1&2\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&3\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2&-2+2&3+8\\4\times2&-8+0&12+0\end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6&-2+2\\-3+3&6+1\end{pmatrix}$

[4] $\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2&1+6&0+2\end{pmatrix}$

(6.) [1] $AB=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0&1\\-2+3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$ より

$(AB)^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1&2-1\\2-1&1+1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5&1\\1&2\end{pmatrix}}$

[2] $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}4+3&2\\6+0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2\\6&3\end{pmatrix}$ $\therefore A^2B^2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\6&3\end{pmatrix}$

$A^2B^2=\begin{pmatrix}7+0&2+0\\-14+6&-4+3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7&2\\-8&-1\end{pmatrix}}$

(7) [1] $\boxed{5}$ [2] $\boxed{1}$

2 (1) $P_1A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-2&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&3\\1&3&1\\3&8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1+0&0+3+0&0+1+0\\2-2+0&5-6+0&3-2+0\\0-3+3&0-9+8&0-3+2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}}$

(2) 与式 $=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3-3+0&4\\0&0-1+0&1\\0&0+1-1&-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&4\\0&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}}$

(3) 与式 $=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4+0-4\\0&-1&0+1-1\\0&0&0+0-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}$

(4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

(5) (4)の結果から Aは正則で $A^{-1}=P_4P_3P_2P_1$ であるから

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-2&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-1/2\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5&0\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&-7&2\\-1/2&5/2&-1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}}$

(6) $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})=\boxed{\begin{pmatrix}1&-1/2&1/2\\-7&5/2&1/2\\2&-1/2&-1/2\end{pmatrix}}$

3. ${}^tA=\begin{pmatrix}5&7&8\\3&5&2\\1&3&6\end{pmatrix}$ より $\frac{1}{2}(A+{}^tA)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&10&9\\10&10&5\\9&5&12\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&5&9/2\\5&5&5/2\\9/2&5/2&6\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}(A-{}^tA)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-4&-7\\4&0&1\\7&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-7/2\\2&0&1/2\\7/2&-1/2&0\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}5&5&9/2\\5&5&5/2\\9/2&5/2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&-7/2\\2&0&1/2\\7/2&-1/2&0\end{pmatrix}$

4 (1) $A^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}}$

(2) $AX=C-B$ $\therefore X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-4\\4&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-22&22\\14&-13\end{pmatrix}}$

5. $AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$

$\therefore AB=BA \Leftrightarrow a+c=a,\ b+d=a+b,\ d=c+d$

$\Leftrightarrow \boxed{c=0,\ a=d}$

$\boxed{6}$ (1) ABの(i,j)成分 $=\sum_{p=1}^{l}a_{ip}b_{pj}$ $\therefore$ (AB)Cの(i,j)成分

$=\sum_{r=1}^{s}\left(\sum_{p=1}^{l}a_{ip}b_{pr}\right)c_{rj}=\sum_{p=1}^{l}a_{ip}\left(\sum_{r=1}^{s}b_{pr}c_{rj}\right)=A(BC)$の(i,j)成分

[1] l [2] $a_{ip}b_{pj}$ [3] s [4] $a_{ip}b_{pr}$ [5] a_{ip}

[6] $b_{pr}c_{rj}$

(2) BCは s次の正方行列 $\mathrm{tr}(BC)=\sum_{p=1}^{s}\left(\sum_{r=1}^{l}b_{pr}c_{rp}\right)$

$=\sum_{r=1}^{l}\left(\underbrace{\sum_{p=1}^{s}c_{rp}b_{pr}}_{CB\text{の}(r,r)\text{成分}}\right)=\mathrm{tr}(CB)$

[1] s [2] l [3] $b_{pr}c_{rp}$ [4] b_{pr} [5] r [6] CB

(3) ${}^tA$: $l\times m$ なので ${}^tAB$は l次の正方行列

${}^tAB$の(i,j)成分 $=\sum_{p=1}^{m}a_{pi}b_{pj}$ なので

$\mathrm{tr}({}^tAB)=\sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{q=1}^{m}a_{pr}b_{pr}\right)$

[1] l [2] m [3] $a_{pi}b_{pj}$ [4] l [5] $a_{pr}b_{pr}$

$\|A\|=\sqrt{A\cdot A}=\sqrt{4+0+4+0+25+16}=7$

$\|B\|=\sqrt{4+1+9+1+0+1}=4$

$A\cdot B=-4+0+6+0+0+4=6$

$(B-kC)\cdot C=B\cdot C-k=0$ $(\because \|C\|^2=1)$

$\therefore k=B\cdot C=\frac{1}{7}B\cdot A=\frac{1}{7}A\cdot B=\frac{6}{7}$

$\therefore D=B-\frac{6}{7}C$ より

$\|D\|=\sqrt{D\cdot D}=\sqrt{(B-\frac{6}{7}C)\cdot(B-\frac{6}{7}C)}$

$=\sqrt{B\cdot B-\boxed{\frac{12}{7}}B\cdot C+\boxed{\frac{36}{49}}}=\sqrt{16-\frac{12}{7}\times\frac{6}{7}+\frac{36}{49}}$

$=\frac{748}{49}=\frac{2}{7}\sqrt{\boxed{187}}$

[6] 7 [7] 4 [8] 6 [9] $\frac{6}{7}$ [10] $\frac{12}{7}$

[11] $\frac{36}{49}$ [12] 187

$c^2 \sum_{n=1}^{p} 1$

7. $a_{ij} = c$ から A^2の(i,j)成分$= \sum_{n=1}^{p} a_{in} a_{nj} = c^2 p$ (1)

A^3の(i,j)成分 $= \sum_{n=1}^{p} c^2 p \cdot c = c^3 p^2$ (2)

→ A^nの(i,j)成分は $c^n p^{n-1}$ と予想できる 以下証明. (3)

$n=1$のとき明らかに成り立つ. $n=l$のとき $a_{ij}^{(l)} = c^l p^{l-1}$ と (4)

仮定すれば $n=l+1$のとき $a_{ij}^{(l+1)} \overset{(5)}{=} \sum_{n=1}^{p} c^l p^{l-1} \cdot c$ (6)

$= c^{l+1} p^{l-1} \sum_{n=1}^{p} 1 = c^{l+1} p^{l}$ (7) $c^{l+1}p^{l-1}$ ($n=l+1$のとき成り立つ)

---

8. (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a+ac \\ b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} = 7A = \begin{pmatrix} 7 & 7a \\ 7b & 7c \end{pmatrix}$

より $ab = 6$ …①, $a(c-6) = 0$ …②, $b(c-6) = 0$ …③

$ab + c(c-7) = 0$ …④ ②, ③から $c = 6$ ($a>0, b>0$より)

これで④は①と同じになり $ab = 6$. a, b, cは互いに異なるので

$\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=6 \end{cases}$ または $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$ となる.

6行

(2) $A^3 = A^2 A = 7AA = 7A^2 = 7^2 A$, 同様に考えて $A^3 = 7^2 A$

従って $A^n = 7^{n-1} A$

---

9. (1) [1] $(E-A)(E + \sum_{n=1}^{p-1} A^n) = E^2 + \sum_{n=1}^{p-1} EA^n - A - \sum_{n=1}^{p-1} AA^n$

$= E + (A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) - A - (A^2 + A^3 + \cdots + A^{p-1} + A^p)$

$= E - A^p = E$ ∵ $A^p = O$

[2] [1]から $(E-A)^{-1} = E + \sum_{n=1}^{p-1} A^n = E + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O$ だから (1) [2] から

$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$