M2 後中 2017

2016年度試験答案用紙　　番号　　氏名

1. (1) 方向ベクトルが垂直になればよいから

$(2,-1,3)\cdot(-2,4,h) = -4-4+3h = -8+3h = 0$ ∴ $h = \boxed{\frac{8}{3}}$

(2) 法線ベクトルが同じだから $2(x+1)-(y-2)+3(z+1)=0$

∴ $2x-y+3z+7=0$

(3) $\overrightarrow{AB} = (1,2,1)$[1], $\overrightarrow{AC} = (-5,2,7)$[2] ∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m} = x+2y+z$[3],

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m} = -5x+2y+7z$[4]　$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -5x+2y+7z=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ∴ $y=-z$, $x=z$

∴ $\vec{m} = (1,-1,1)$[5]　$x-1-(y+1)+z+6=0$ ∴ $x-y+z+4=0$[6]

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (12,-12,12)$[7] ∴ $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 12\sqrt{3}$

∴ $\frac{1}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$[8]

従ってどの方法でも同じ結果を得る。

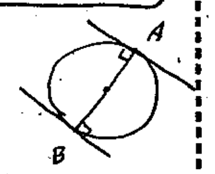
(4) $\cos\theta = \frac{1+2+0}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $\theta = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

(5) 中心が $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (0,2,2)$ で半径 r^2 が

[1] $r^2 = (0+2)^2+(2+1)^2+(2-1)^2 = 14$ だから $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 14$

[2] 法線ベクトルの1つ $(-2,-3,-1) \to (2,3,1)$ だから

$2(x+2)+3(y+1)+z-1=0$ ∴ $2x+3y+z+6=0$



[3] 法線ベクトルの1つ $(2,3,1)$ (同じ)

$2(x-2)+3(y-5)+z-3=0$ ∴ $2x+3y+z-22=0$

(6) 条件から $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2-9=0$ だから

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+6z+1+1+9-9=0$ ∴ $a=\boxed{6}$[1] $b=\boxed{2}$[2]

(7) [1] $\overrightarrow{CQ} = t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}) = t\left(\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OC}\right)$

$= \frac{t}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC})$ -①

[2] $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

[3] $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は線形独立だから $m=n=\frac{t}{6}$, $-\frac{2}{3}t=-1$

∴ $t = \boxed{\frac{3}{2}}$[1], $m=n=\boxed{\frac{1}{4}}$[2]

2 (1) [1] Aと x,z 座標が同じ、y 座標の符号が逆なので $P(1,-2,3)$

[2] A, Q の中点が原点だから $Q(-1,-2,-3)$

(2) $\sqrt{(-6+3)^2+(5+1)^2+(3-6)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

(3) $(-1-1)^2+(0+2)^2+(z+3)^2=16$ より $z=-3\pm2\sqrt{2}$

(4) [1] $|\vec{a}-\vec{b}| = |(-3,2,-1)| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

[2] $|2\vec{a}+3\vec{b}| = |(-4,2,0)+(3,-3,3)| = |(-1,-1,3)|$

$= \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

(5) [1] $P\left(\frac{3-8}{5}, \frac{-12+12}{5}, \frac{-9+4}{5}\right) = P(-1,0,-1)$

[2] $Q\left(\frac{-3-8}{-1}, \frac{12+12}{-1}, \frac{9+4}{-1}\right) = Q(11,-24,-13)$

(6) [1] $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2-2-3 = \boxed{-3}$　[2] $\vec{a}\cdot\vec{b} = -4+6 = \boxed{2}$

(7) [1] $\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-5,5,-5)$　$(5,-5,5)$ も正解

[2] $\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-5,-10,-5)$　$(5,10,5)$ も正解

(8) [1] $\cos\theta = \frac{-2-1}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $\theta = \boxed{\frac{3}{4}}\pi$

[2] $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2-12+10=0$ ∴ $\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

(9) $\overrightarrow{OG} = \boxed{\frac{1}{3}}$[1] $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$[2]

$= \frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c})$

$= \frac{1}{3}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c})$　(∵ $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=L^2$) ここで

$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} = L^2\cos\boxed{\frac{\pi}{3}}$[3] $= \boxed{\frac{1}{2}}$[4] L^2 だから $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(10) [1] 方向ベクトルの1つが $(-2-1, 1+2, 3+1) = (-3,3,4)$ だから

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$ または $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{4}$

[2] $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$

3 (1) 方向ベクトルの1つが $(3,4,0)$ だから $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4}$, $z=5$

または $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{4}$, $z=5$

(2) 同様に考えて $x=1$, $\frac{y+2}{5} = \frac{z-5}{-1}$, または $x=1$, $\frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-1}$

4. $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = \vec{0}$ とおく。成分表示から　1段

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ とする。$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって $z=k$ とすれば $y=-k$,

$x=y-z=-2k$

となり $x=y=z=0$ 以外の解もあるので線形従属である　⑥

5. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$[1], $|\cos\theta| \leqq \boxed{1}$[2] だから

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ 等号成立 ⟺ $\theta=0$, $\boxed{\pi}$[3]

つまり $\vec{b} = k\vec{a}$[4] (k: 実数)

$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2 - |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})-|\vec{b}|^2$

$= 2(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b}) \geqq 0$[5]　3段

6. (1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

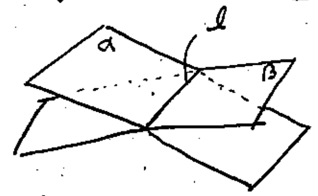
∴ $y=z$, $x=-2y+z+4=-y+4$　従って $z=t$ とおけ

$x=-t+4$, $y=t$, $z=t$　または $-(x-4)=y=z$　④

(2) l: $x=-t+4$[1], $y=t$[2], $z=t$ は

α: $a(x-2)+b(y-3)+c(z-4)=0$

を満たすから



$a(-t+2)+b(t-3)+c(t-4)=0$

$(b+c-a)$[3] $t+2a-3b-4c=0$

$\begin{cases} -a+b+c=0 \\ 2a-3b-4c=0 \end{cases}$ → $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

∴ $b=-2c$, $a=b+c=-2c+c=-c$

$c=-1$ として $a=1$, $b=2$

∴ $x-2+2(y-3)-(z-4)=0$

∴ $x+\boxed{2}$[4] $y+(-1)$[5] $z=\boxed{4}$[6]　3段

[1]

7 (1) xy平面 $\Leftrightarrow$ $z=0$ $\therefore$ $\dfrac{|c|}{\sqrt{0+0+1}}=\boxed{|c|}$

以下同様

[2] $\boxed{|a|}$ [3] $\boxed{|b|}$

(2) $\alpha(x-1)+\beta y+\gamma z=0$ となるから B, Cの座標を代入して

$-\alpha+\beta=0$, $-\alpha+\gamma=0$ $\therefore$ $\alpha=\beta=\gamma$ より

$\boxed{x+y+z=1}$

(3) $\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\boxed{\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}}$

(4) 球の中心を $P(a,b,c)$ とする. Pと四面体の各平面との距離が半径rだから (1), (3)から $a=b=c=\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}=r$

なお, 明らかに a, b, c は正である. 従って $a=\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{3}}$

整理して $6a^2-6a+1=0$ $\therefore$ $a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

OPと σ は垂直だから OPの長さは原点とσとの距離より小さい

$\therefore$ $\sqrt{3}a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $a<\dfrac{1}{3}$ 従って $r=a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

以上より球の体積 $V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{27}\pi$ ⑦

---

8 (1) αの法線ベクトルの1つを $\vec{n}=(a,b,c)$ とし α: $ax+by+cz=d$ …①

とする. l_1 は $x=2t+5$, $y=-5t-1$, $z=4t+3$ だから ①に代入して

$(2a-5b+4c)t+5a-b+3c=d$.

$\therefore$ $\begin{cases} 2a-5b+4c=0 & \cdots② \\ 5a-b+3c=d & \cdots③ \end{cases}$ $\vec{n}$ と l_2 の方向ベクトル $(8,1,-5)$ が垂直だから

$8a+b-5c=0$ …④ ②〜④を解いて

$a=\dfrac{d}{9}$, $c=\dfrac{2}{9}d$, $b=\dfrac{2}{9}d$. $d=9$ として

αの方程式は $x+2y+2z=9$ ⑧

(2) l_2 上の点からαに下した垂線の長さと一致するから

l_2: $x=8s+3$, $y=s-7$, $z=-5s-2$ より

$\dfrac{|3-14-4-9|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{24}{3}=\boxed{8}$

☆ 7 (4) $r=a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ は $6a^2-6a+1=0$ の解だから $6a^2=6a-1$

$\therefore$ $6a^3=6a^2-a=6a-1-a=5a-1=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{6}$ $\therefore$ $a^3=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{36}$

と求めることもできる.

→ 消去法で解いてもよい

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 21 & -21 & 0 \\ 0 & 23 & -14 & 2d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2d \end{array}\right)$$

$\therefore$ $c=\dfrac{2}{9}d$, $b=c=\dfrac{2}{9}d$, $2a=5b-4c=\dfrac{2}{9}d$

$\therefore$ $a=\dfrac{1}{9}d$