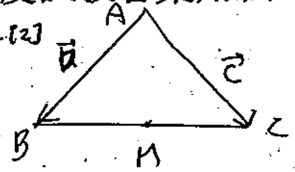
M2 前末 2017

2016年度試験答案用紙

番号　　氏名

1.(1) $\overrightarrow{AM} = \boxed{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})}$ [1], $\overrightarrow{BC} = \boxed{\vec{c}-\vec{b}}$ [2]



$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$= \frac{1}{2}(\boxed{|\vec{c}|^2}_{[3]} - \boxed{|\vec{b}|^2}_{[4]}) = \boxed{0}$ [5]　　$|\vec{b}| = |\vec{c}|$

よって $AM \perp BC$　　[4]

(2) [1] $\boxed{x = 1-3t,\ y = -1+2t}$

[2] $\overrightarrow{AB} = (5,-8)$ は方向ベクトルの1つだから

$\boxed{x = 2+5t,\ y = 5-8t}$ または $\boxed{x = 7+5t,\ y = -3-8t}$　　[2]

(3) $2x+7y+1=0$ だから [1] $\boxed{(2,7)}$

[2] 法線ベクトルと垂直な $\vec{0}$ でないベクトルだから $\boxed{(7,-2)}$　　[1]

(4) [1] 直線は $2x+y-3=0$ より $\frac{|2\times(-3)+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{5}}}$

[2] 直線は $-3x+2y+5=0$ より $\frac{|5|}{\sqrt{9+4}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{13}}}$　　[1]

(5) [1] $\overrightarrow{AB} = (5,-3)$ が方向ベクトルの1つだから $\boxed{\frac{x}{5} = \frac{y-1}{-3}}$

つまり $\boxed{3x+5y-5=0}$

[2] $\frac{|3\times3+5\times4-5|}{\sqrt{9+25}} = \boxed{\frac{24}{\sqrt{34}}} = \boxed{\frac{12}{17}\sqrt{34}}$

[3] $AB = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$　∴ $\frac{1}{2}\sqrt{34}\cdot\frac{24}{\sqrt{34}} = \boxed{12}$　　[2]

(6) [1] $m\vec{a}+n\vec{b} = (-3,5)$ から $\begin{cases} -m+n=-3 \\ 2m-n=5 \end{cases}$

∴ $m=2,\ n=-1$　∴ $\boxed{2\vec{a}-\vec{b}}$

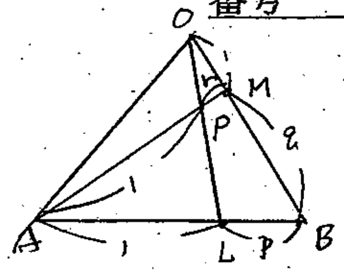
[2] 同様にして $\begin{cases} -m+n=-1 \\ 2m-n=3 \end{cases}$　∴ $m=2,\ n=1$

$\boxed{2\vec{a}+\vec{b}}$　　[2]

(7) [1] $\vec{a},\vec{b}$ の係数を比較して $\begin{cases} x+2=y \\ -3=-(2-x) \end{cases}$　∴ $\boxed{x=-1,\ y=1}$

[2] 同様にして $\begin{cases} x+y=-y-1 \\ x-y=2 \end{cases}$　∴ $\boxed{x=1,\ y=-1}$　　[2]

2. $\overrightarrow{OL} = \boxed{\frac{p}{p+1}}_{(1)}\vec{a} + \boxed{\frac{1}{p+1}}_{(2)}\vec{b}$ …①



$\overrightarrow{OP} = \boxed{\frac{r}{r+1}}_{(3)}\vec{a} + \boxed{\frac{1}{r+1}}_{(4)}\overrightarrow{OM}$

$= \frac{r}{r+1}\vec{a} + \boxed{\frac{1}{(r+1)(q+1)}}_{(5)}\vec{b}$ …②　$\longleftrightarrow$　$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{q+1}\vec{b}$

また $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OL}$ より $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OL} = \frac{pt}{p+1}\vec{a} + \frac{t}{p+1}\vec{b}$ …③

$\vec{a},\vec{b}$ は線形独立だから ②, ③ より

$\begin{cases} \frac{pt}{p+1} = \frac{r}{r+1} \\ \frac{t}{p+1} = \frac{1}{(r+1)(q+1)} \end{cases} \to \therefore \frac{p}{(r+1)(q+1)} = \frac{r}{r+1}$

$r = \boxed{\frac{p}{q+1}}$ (6)

∴ $AP : PM = 1 : \frac{p}{q+1} = \boxed{q+1}_{(7)} : p$,　$p=\frac{2}{3},\ q=1$ のとき

$AP : PM = 2 : \frac{2}{3} = 6 : 2 = \boxed{3:1}$ (8)　　6段 9T

3.(1) [1] $|\overrightarrow{AC}| = |k||\overrightarrow{AB}| = |k|\sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}\,|k|$

∴ $|k| = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$,　$k<0$ より $k = \boxed{-2\sqrt{10}}$

[2] $\overrightarrow{AC} = (x+1, y) = -2\sqrt{10}(3,-1)$　∴ $x = -1-6\sqrt{10},\ y = 2\sqrt{10}$

∴ $C\boxed{(-1-6\sqrt{10},\ 2\sqrt{10})}$

(2) [1] $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\times2\cos\frac{5\pi}{6} = -8\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-4\sqrt{3}}$

[2] $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\sqrt{3}\cos\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4} = \boxed{-\sqrt{6}}$

(3) [1] $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4+6 = \boxed{10}$　[2] $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{50}-5\sqrt{2} = \boxed{0}$　　[1]

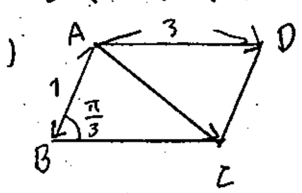
(4) [1] $\cos\theta = \frac{-4-9}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = -1$　∴ $\theta = \boxed{\pi}$

[2] $\vec{a}\cdot\vec{b} = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+2 = 1-3+2 = 0$　∴ $\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$　　[1]

(5) [1] $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} = 4+9+2 = \boxed{15}$

[2] 与式 $= 2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2 = 8+1-9 = \boxed{0}$　　[1]

(6)



$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2 = 1+9+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= 10+6\cos\frac{2\pi}{3} = 10-3 = 7$

∴ $|\overrightarrow{AC}| = \boxed{\sqrt{7}}$ ← 3点

8段

4. $|\overrightarrow{OP}|^2 - 60\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} + 310|\overrightarrow{OA}|^2 = 0$

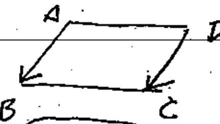
$|\overrightarrow{OP}|^2 - 60\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} + 910|\overrightarrow{OA}|^2 = 610|\overrightarrow{OA}|^2$

$|\overrightarrow{OP}-30\overrightarrow{OA}|^2 = (\sqrt{6}|\overrightarrow{OA}|)^2$

よって点Pは中心の位置ベクトルが $30\overrightarrow{OA} = (9,3)$ (中心)

半径 $\sqrt{6}|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{6}\sqrt{9+1} = 2\sqrt{15}$ (半径の値)　　[5]

5.(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ となればよいから



$(x+2, y-2) = (6,3)$　∴ $C(x,y) = C\boxed{(4,5)}$

(2) [1] $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = (2\sqrt{13})^2$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{12}(4\times1^2+9\times2^2-52) = \boxed{-1}$

[2] なす角を θ,　$\cos\theta = \frac{-1}{1\times2} = -\frac{1}{2}$　∴ $\theta = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$

(3) $\overrightarrow{AM} = \boxed{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})}$ [1], $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{b} = \boxed{\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})}$ [2]

∴ $|\overrightarrow{AM}|^2 = \boxed{\frac{1}{4}}_{[3]}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}\boxed{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{[4]} + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2$

$|\overrightarrow{BM}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2$

[5] $\boxed{-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}}$

∴ $|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2 = \boxed{\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{c}|^2}$ [6]

(4) $3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}) + 6(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}) = \vec{0}$ から

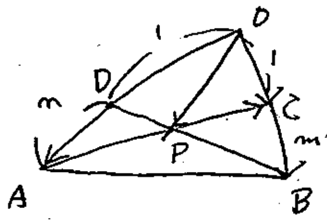
$\boxed{-4}_{[1]}\overrightarrow{OP} + \boxed{3}_{[2]}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$　∴ $\overrightarrow{OP} = \boxed{\frac{3}{4}}_{[3]}\overrightarrow{OA} + \boxed{\frac{1}{4}}_{[4]}\overrightarrow{OB}$

よって点Pは線分ABを $\boxed{1:3}_{[5]}$ の比に内分する点である。

(5) $3(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}) = \vec{0}$

$5\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$　∴ $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$　よって ABを $\boxed{2:3}$

の比に内分する点



6.(1) $\vec{OC} = \frac{1}{m+1}\vec{OB}$ … ②

$\vec{OC} = \vec{OA} + t\vec{AP} = \vec{OA} + t(\vec{OP} - \vec{OA})$

$= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + \frac{bt}{a}\vec{OA} + \frac{ct}{a}\vec{OB}$

$= \left(1 - t + \frac{b}{a}t\right)\vec{OA} + \frac{ct}{a}\vec{OB}$ … ③

$\vec{OA}, \vec{OB}$ は線形独立より

$\begin{cases} 1 - t + \frac{b}{a}t = 0 & \cdots ④ \\ \frac{ct}{a} = \frac{1}{m+1} & \cdots ⑤ \end{cases}$

④から $t = \frac{a}{a-b}$　∴ $\frac{1}{m+1} = \frac{c}{a-b}$

∴ $m = \frac{a-b-c}{c}$

(2) $\vec{OD} = \frac{1}{n+1}\vec{OA}$ … ⑥

$\vec{OD} = \vec{OB} + s\vec{BP} = \vec{OB} + s(\vec{OP} - \vec{OB})$

$= (1-s)\vec{OB} + \frac{bs}{a}\vec{OA} + \frac{cs}{a}\vec{OB}$

$= \left(1 - s + \frac{cs}{a}\right)\vec{OB} + \frac{bs}{a}\vec{OA}$ … ⑦

⑥,⑦より $\begin{cases} 1 - s + \frac{cs}{a} = 0 & \cdots ⑧ \\ \frac{1}{n+1} = \frac{bs}{a} & \cdots ⑨ \end{cases}$　⑧から $s = \frac{a}{a-c}$

∴ $\frac{1}{n+1} = \frac{b}{a-c}$　∴ $n = \frac{a-b-c}{b}$　(6行)

(3) $\vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, $\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{OP} = \frac{b}{2a}\vec{OA} + \frac{c}{2a}\vec{OB} = \frac{1}{2a}(b\vec{OA} + c\vec{OB})$,

$\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{b}{2(a-c)}\vec{OA} + \frac{c}{2(a-b)}\vec{OB}$ より

$\vec{GE} = \frac{b-a}{2a}\vec{OA} + \frac{c-a}{2a}\vec{OB}$ … ②

$\vec{GH} = \left(\frac{b}{2(a-c)} - \frac{1}{2}\right)\vec{OA} + \left(\frac{c}{2(a-b)} - \frac{1}{2}\right)\vec{OB}$

$= \frac{b+c-a}{2(a-c)}\vec{OA} + \frac{b+c-a}{2(a-b)}\vec{OB}$

$= \frac{b+c-a}{2(a-c)(a-b)}\{(a-b)\vec{OA} + (a-c)\vec{OB}\}$ … ③

$= \frac{a-b-c}{2(a-c)(a-b)}\{(b-a)\vec{OA} + (c-a)\vec{OB}\}$　（$= 2a\vec{GE}$）

$= \frac{a(a-b-c)}{(a-b)(a-c)}\vec{GE}$

4.(別解) $\vec{OP} = (x, y)$ として方程式を成分で表せば

$|\vec{OP}|^2 - 6\vec{OP}\cdot\vec{OA} + 3|\vec{OA}|^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 6(3x + y) + 3(9+1) = 0$

$(x-9)^2 + (y-3)^2 = 81 + 9 - 30 = 60 = (2\sqrt{15})^2$

よって中心 $(9, 3)$, 半径 $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$ の円となる。