M2前中 2017

2016年度試験答案用紙

番号　　氏名

1. (1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ で $a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$ に相当する.

[1] $(\pm\sqrt{3}, 0)$ [2] $(0, 0)$ [3] $2\sqrt{3}\ (=2a)$

[4] 焦点は x軸上で $(\pm c, 0)$ $(c>0)$ と表せる. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$

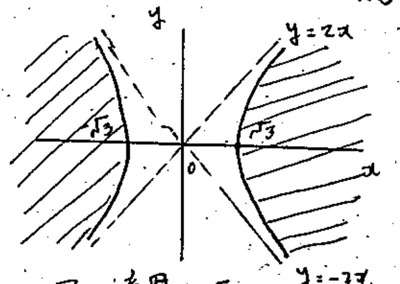
∴ $(\pm\sqrt{15}, 0)$ [4]　[5] $\boxed{y=\pm 2x}$ $\left(=\pm\frac{b}{a}x\right)$

[6] 求める接線: $y=3x+h$ を双曲線の方程式に代入して整理すると

$-5x^2+6hx+h^2+12=0$, $\frac{D}{4}=9h^2-5h^2-5\cdot 12=0$ ∴ $h=\pm\sqrt{15}$

$\boxed{y=3x\pm\sqrt{15}}$

[7]



図の境界を含まない斜線の部分

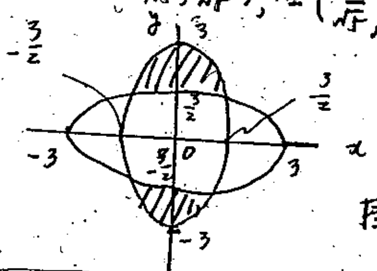
(2) (1) $\begin{cases} x^2+4y^2=9 \\ 4x^2+y^2=9 \end{cases}$ → $15x^2=27$ ∴ $x=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

これを下の式に代入して $y^2=9-\frac{4}{5}\cdot 9=\frac{9}{5}$ ∴ $y=\frac{\pm 3}{\sqrt{5}}$

以上より $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

→ $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right), \pm\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

[2]



図の境界を含む斜線の部分

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で $a=\sqrt{7}$, $b=4$ $(a<b)$ に相当する.

[1] $(\pm\sqrt{7}, 0), (0, \pm 4)$ [2] $\boxed{8}$ [3] $\boxed{2\sqrt{7}}$

[4] $a<b$ より焦点は y軸上で $(0, \pm c)$ $(c>0)$ とすれば $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9}=3$ ∴ $(0, \pm 3)$

[5] 求める接線: $y=mx-5$ を楕円の方程式に代入して整理すると $(16+7m^2)x^2-70mx+63=0$

∴ $\frac{D}{4}=784m^2-1008=0$　$m=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$

∴ $y=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}x-5$

2 (1) $y^2=4px$ で $p=-2$ に相当する.

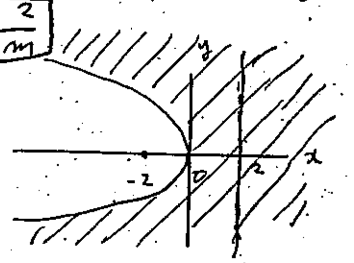
[1] $\boxed{y=0}$ [2] $\boxed{(0,0)}$ [3] $\boxed{(-2, 0)}$ [4] $\boxed{x=2}$

[5] 求める接線: $y=mx+h$ を放物線の方程式に代入して整理すると, $m^2x^2+2(mh+4)x+h^2=0$ $(m\neq 0)$

∴ $\frac{D}{4}=(mh+4)^2-m^2h^2=8mh+16=0$ ∴ $h=-\frac{2}{m}$

よって $\boxed{y=mx-\frac{2}{m}}$

[6]



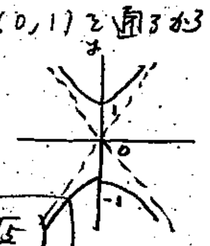
図の境界を含まない斜線の部分

(2) y軸上の点を通るので $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ である. $(0,1)$ を通るから

$b=1$ ∴ [1] $\boxed{2}$

$\frac{b}{a}=2$ から $a=\frac{1}{2}$ よって焦点を $(0, \pm c)$ $(c>0)$

とすれば $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ∴ [2] $\left(0, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$



[3] $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-y^2=-1$ → $\boxed{4x^2-y^2=-1}$

[4] 求める接線: $y=mx-\frac{1}{2}$ を双曲線の方程式に代入すると

$4x^2-\left(mx-\frac{1}{2}\right)^2+1=0$ → $(4-m^2)x^2+mx+\frac{3}{4}=0$

$D=m^2-3(4-m^2)=0$ ∴ $m=\pm\sqrt{3}$ ∴ $\boxed{y=\pm\sqrt{3}x-\frac{1}{2}}$

[5] $(0,0)$ のある領域なので $\boxed{4x^2-y^2>-1}$

(3) [1] ABの傾き $=\frac{1}{3}$, ABの中点 $(1,5)$ だから $\boxed{y=-3(x-1)+5}$

∴ $\boxed{y=-3x+8}$ → $3x+y-8=0$

[2] $\begin{cases} y=-3x+8 \\ y=-x \end{cases}$ → $-3x+8=-x$ ∴ $x=4$, $y=-4$

∴ $\boxed{(4,-4)}$

[3] 中心が $(4,-4)$ で 半径 $r=AC=10$

∴ $(x-4)^2+(y+4)^2=100$ → $x^2+y^2-8x+8y-68=0$

[4] $X=x-4$, $Y=y+4$ とおけば 円は X^2+Y^2 で 接点は $(5\sqrt{3}, 5)$

(X, Y)で

となるから $5\sqrt{3}X+5Y=10$

∴ $5\sqrt{3}(x-4)+5(y+4)=100$

→ $\sqrt{3}(x-4)+y+4=20$

$\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0$

−16

3. $PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ (1), $PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (2)

$|PF-PF'|^2=(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2-2\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}$

$=2(x^2+y^2+c^2)^{(3)}-2\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}$

$x^2+y^2+c^2=x^2+c^2+\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}=\frac{(a^2+b^2)x^2+a^2(c^2-b^2)}{a^2}$

$=\frac{c^2x^2+a^4}{a^2}$ (4)

$(1)\times(2)=\{(x^2+y^2+c^2)-2cx\}\{(x^2+y^2+c^2)+2cx\}$

$=(x^2+y^2+c^2)^2-\boxed{4c^2x^2}^{(5)}=\frac{(c^2x^2+a^4)}{a^4}-4c^2x^2$

$=\frac{c^4x^4-2c^2a^4x^2+a^8}{a^4}=\frac{(a^4-c^2x^2)^2}{a^4}$ (6)

$c^2x^2-a^4\geqq c^2a^2-a^4=a^2(c^2-a^2)=a^2b^2=(\boxed{ab})^2>0$ (7)

∴ $|a^4-c^2x^2|=c^2x^2-a^4$ (8)

以上より $|PF-PF'|^2=\frac{2(c^2x^2+a^4)}{a^2}-\frac{2(c^2x^2-a^4)}{a^2}=4a^2$ //

11

答

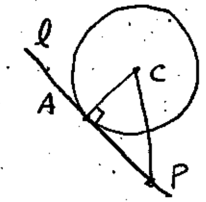
(1) $(x-c)^2+y^2$ (2) $(x+c)^2+y^2$ (3) $x^2+y^2+c^2$

(4) $c^2x^2+a^4$ (5) $4c^2x^2$ (6) a^4 (7) ab (8) $c^2x^2-a^4$

4. (1) 変形すると $x^2-6x+9+y^2-10y+25+21-34=0$

$(x-3)^2+(y-5)^2=13$ よって 中心 $\boxed{(3,5)}$

(2) (1)より 半径 $\boxed{\sqrt{13}}$



(3) l上の任意の点を $P(x,y)$ とすれば

P≠Aのとき △CAPは直角三角形だから

$CP^2=CA^2+AP^2$

∴ $(x-3)^2+(y-5)^2=13+(x-1)^2+(y-2)^2$

整理して $4x+6y-16=0$ ∴ $2x+3y-8=0$

6

9

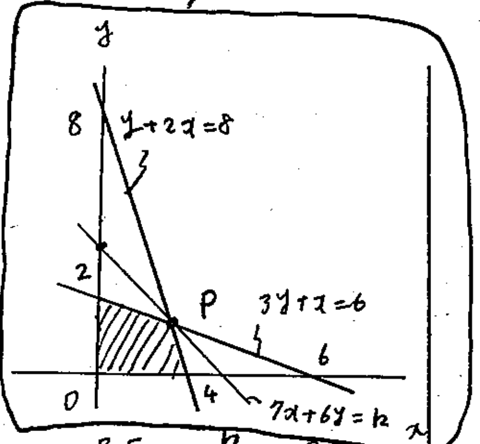
~~これは~~ 点Aの座標もこの方程式を満たす.

→ $2(x-1)+3(y-2)=0$

説明 2点

5点

5. 連立不等式の表す領域を図示すると右の境界を含む斜線の部分となる。$7x+6y=k$ とおけば $y=-\frac{7}{6}x+\frac{k}{6}$ だから これは傾き $-\frac{7}{6}$，切片 $\frac{k}{6}$ の直線となる。この直線と上で求めた領域が共有点をもつ場合で $\frac{k}{6}$ が最大となるのは 2直線 $2x+y=8$，$x+3y=6$ の交点 $P\left(\frac{18}{5}, \frac{4}{5}\right)$ を通るときだから，$x=\frac{18}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ のとき最大値 30 をとる。



⑨

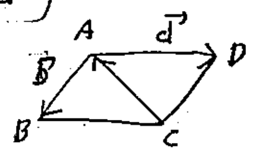
4点

6. (1) [1] $\vec{d}+\vec{PQ}+\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$ より $\vec{PQ}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}-\vec{d}$

[2] $\vec{PQ}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$

(2) [1] $\vec{BD}=\vec{d}-\vec{b}$

[2] $\vec{CA}=-\vec{b}-\vec{d}$

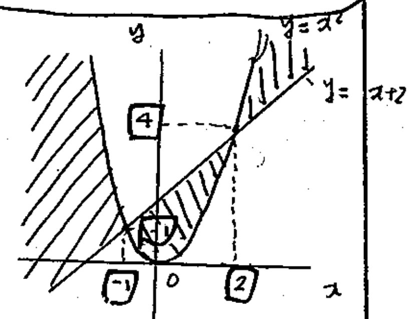


7. $(x^2-y)(x-y+2)\leqq 0 \iff$ (I) $\begin{cases} x^2-y\geqq 0 \\ x-y+2\leqq 0 \end{cases}$，(II) $\begin{cases} x^2-y\leqq 0 \\ x-y+2\geqq 0 \end{cases}$

2点

$y=x^2$ と $y=x+2$ の交点は $(-1,1)$，$(2,4)$ である。

(I) または (II) なので 図の斜線の部分で境界を含む。



⑥

6点