ES4 学末 2017

2016年度試験答案用紙

番号　　氏名

1.(1) $z=\boxed{i}$ [1], $\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z)=\lim_{z\to i} z\exp(-z)=ie^{-i}$

$=i(\cos 1-i\sin 1)=\boxed{\sin 1}+i\boxed{\cos 1}$ [2][3] ∴ $\boxed{2}$位の極 [4]

∴ $\mathrm{Res}[f,i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(ze^{-z})=\lim_{z\to i}(e^{-z}-ze^{-z})$

$=(1-i)(\cos 1-i\sin 1)=\boxed{\cos 1-\sin 1}-i(\boxed{\cos 1+\sin 1})$ [5][6]

$C:|z-3|=R$ で $0<R<\boxed{\sqrt{10}}$ [7] $\Rightarrow \int_C f(z)dz=0$

$R>\sqrt{10}\Rightarrow \int_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,i]=\boxed{2\pi i(1-i)}e^{-i}$

$=\boxed{2\pi(\cos 1+\sin 1)}+i\boxed{2\pi(\cos 1-\sin 1)}$ [8][9][10]

(7点)

(2) $iz=iR(\cos t+i\sin t)=-R\sin t+iR\cos t$ より

$|e^{iz}|=e^{\boxed{-R\sin t}}$ [1] ∴ $\boxed{e^{-R}}\leqq|e^{iz}|\leqq\boxed{e^{R}}$ [2][3]

(2点)

(3) $\mathrm{Res}[f,i]=\lim_{z\to i}\frac{z+1}{z+i}=\frac{1+i}{2i}=\boxed{\frac{1}{2}(1-i)}$ [1]

$\mathrm{Res}[f,-i]=\lim_{z\to -i}\frac{z+1}{z-i}=\frac{1-i}{-2i}=\boxed{\frac{1}{2}(1+i)}$ [2]

$0<R<1\Rightarrow\int_C=0$, $1<R<\boxed{\sqrt{5}}$ [3] $\Rightarrow\int_C=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,i]$

$=2\pi i\cdot\frac{1}{2}(1-i)=\boxed{\pi(1+i)}$ [4] $\boxed{\pi i(1-i)}$, $\sqrt{5}<R\Rightarrow\int_C=2\pi i\cdot 1=2\pi i$

(4点)

(4) $\mathrm{Res}[f,i]=\lim_{z\to i}\frac{e^{i2z}}{z+i}=\frac{e^{-2}}{2i}=\boxed{-\frac{e^{-2}}{2}i}$ [1]

$\mathrm{Res}[f,-i]=\lim_{z\to -i}\frac{e^{i2z}}{z-i}=\frac{e^{2}}{-2i}=\boxed{\frac{e^{2}}{2}i}$ [2]

$R>1\Rightarrow\int_{C_R+P_R}=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,i]=2\pi i\cdot\frac{e^{-2}}{2i}=\boxed{\pi e^{-2}}$ [3]

C_R上で $|e^{i2z}|=|e^{i2R(\cos t+i\sin t)}|=e^{\boxed{-2R\sin t}}\leqq 1$ [4]

$\left|\frac{1}{z^2+1}\right|\leqq\frac{1}{|z^2|-1}=\frac{1}{\boxed{R^2}-1}$ [5] ∴ $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$?

∴ $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R+P_R}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2t}{t^2+1}dt$ ∴ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boxed{\cos 2x}}{x^2+1}dx=\pi e^{-2}$ [6]

(6点)

2 (1) $\int_C\bar{z}dz=\int_0^{\pi/2}e^{-it}\cdot ie^{it}dt=i\int_0^{\pi/2}dt=\boxed{\frac{\pi}{2}i}$ (1点)

(2) 被積分関数は $\mathbb{C}$ で正則で Cの始点 0, 終点 $2+i$ である

$\int_C(z^2-iz+2)dz=\left[\frac{1}{3}z^3-\frac{i}{2}z^2+2z\right]_0^{2+i}=\frac{1}{3}(2+11i)-\frac{i}{2}(3+4i)+4+2i$

$=\boxed{\frac{20}{3}+i\frac{25}{6}}$ (3点)

(3) (C)にあるのは $z=\pm i$ ∴ $\int_C\frac{e^{-iz}}{z^2+1}dz=2\pi i(\mathrm{Res}[f,i]+\mathrm{Res}[f,-i])$

$=2\pi i\left(\frac{e}{2i}-\frac{e^{-1}}{2i}\right)=\boxed{\pi(e-e^{-1})}$

(4) $\int_C\frac{e^z}{z+1}dz=\boxed{2\pi e^{-1}i}$ (1点)

(5) (C)内にある特異点は $z=4$ ∴ $\int_C\frac{2z+1}{z(z-4)}dz=2\pi i\cdot\frac{8+1}{4}$

$=\boxed{\frac{9}{2}\pi i}$

3. C上で $z=\boxed{1-t-it}$ [1], $\frac{dz}{dt}=-1+i$ である

$I=(\boxed{-1+i})$ [2] $\int_0^1(1-t-it)dt=(-1+i)\left[t-\frac{t^2}{2}-\frac{i}{2}t^2\right]_0^1$

$=(-1+i)\boxed{\frac{1}{2}(1-i)}$ [3] $=-\frac{1}{2}(1-i)^2=\boxed{i}$ [4]　[3] $\boxed{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}$

4. (1) $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ より $\boxed{\alpha=-2,\ \beta=-3}$

(2) $u=z+2$ とおけば $0<|u|<1$ で

$f(z)=\frac{1}{u(u+1)}=\frac{1}{u}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m u^m=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m(z+2)^{n-1}}$

(3) (2)と同じuで $1<|u|$, つまり $\left|\frac{1}{u}\right|<1$ で

$f(z)=\frac{1}{u^2(1+\frac{1}{u})}=\frac{1}{u^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{u^m}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(z+2)^{n+2}}}$

(4) $v=z+3$ とおけば $0<|v|<1$ で

$f(z)=\frac{1}{v(v-1)}=-\frac{1}{v}\frac{1}{1-v}=-\frac{1}{v}\sum_{n=0}^{\infty}v^m=\boxed{-\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^{m-1}}$

(5) (4)と同じvで $\left|\frac{1}{v}\right|<1$ より $f(z)=\frac{1}{v^2}\frac{1}{1-\frac{1}{v}}$

$=\frac{1}{v^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{v^m}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^{n+2}}}$

(6) (2)より $\frac{1}{z+2}$ の係数である $\boxed{1}$

(7) (4)より $\frac{1}{z+3}$ の係数である $\boxed{-1}$

(8) $\alpha,\beta\in(C)$ である (6), (7)から $\int_C f(z)dz=\boxed{0}$

5 (1) [1] $0<|z|$ での Laurent 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{1}{z^{2m-1}}$ より $\boxed{\text{真性特異点}}$

[2] 同じく $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^3}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m-2}$

$=\frac{1}{z^2}+f_1(z)$ ($f_1(z)$: 正則部) より $\boxed{2\text{位の極}}$

[3] 同じく $\frac{1}{z^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2m)!}z^{2m}\right)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}z^{2m}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}z^{2m-2}$ より $\boxed{\text{除去可能特異点で } h(0)=\frac{1}{2}}$

(2) $0<|z|$ における各関数の Laurent 級数の a_{-1} の値は

$f(z): -\frac{1}{2}$, $g(z): 0$ である

[1] $\int_C f(z)dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\pi i}$　[2] $\int_C g(z)dz=\boxed{0}$ [4点]

6 (1) $\frac{1}{1-z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^3)^m=\sum_{n=0}^{\infty}z^{3m}$　$\boxed{\frac{1}{1-z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{3m}}$

$|z|<1$ より $R=\boxed{1}$

(2) $|2z|<1$ より $|z|<\frac{1}{2}$ ∴ $R=\boxed{\frac{1}{2}}$ このとき

$\frac{1}{1-2z}=\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^m$ ∴ $\boxed{\frac{1}{1-2z}=\sum_{n=0}^{\infty}2^m z^m}$

(3) (2)の両辺を微分すれば $|z|<\frac{1}{2}$ ($R=\boxed{\frac{1}{2}}$) で

$\frac{2}{(1-2z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 2^m z^{n-1}$ ∴ $\boxed{\frac{1}{(1-2z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 2^{n-1}z^{n-1}}$

(4) $u=z-2i$ と置く $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-2i)-u}=\frac{1}{1-2i}\frac{1}{1-\frac{u}{1-2i}}$

よって $\left|\frac{u}{1-2i}\right|<1\to|u|<|1-2i|=\sqrt{5}$ ($R=\boxed{\sqrt{5}}$) のとき

$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^m$ ∴ $\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^m}{(1-2i)^{n+1}}}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+2i}{5}\right)^{n+1}(z-2i)^m$

7. $0<|z-\alpha|<R$ における Laurent 展開 $f(z)=\boxed{\frac{a_{-1}}{z-\alpha}}+f_1(z)$

($f_1(z)$: 正則部) とすれば $\lim_{z\to\alpha}\frac{d}{dz}\{(z-\alpha)^2f(z)\}$ [1]

$=\lim_{z\to\alpha}\{(a_{-1}(z-\alpha)+(z-\alpha)^2f_1(z))\}'$ [2]

$=\lim_{z\to\alpha}\{a_{-1}+2(z-\alpha)f_1(z)+(z-\alpha)^2f_1'(z)\}=\boxed{a_{-1}}$ [3][4]

一方 $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=\boxed{a_{-1}}$ [5]

~~8. Cauchyの積分表示から $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$,~~
~~$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 仮定から C上で $f(\zeta)=g(\zeta)$~~
~~だから $f(z)=g(z)$~~ ~~3行~~

8. $C: |z|=1$, $z=e^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ とすれば $\cos\theta=\boxed{\frac{1}{2}(z+z^{-1})}$ (1)

$dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$, $\frac{1}{2+\cos\theta}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=\frac{2z}{\boxed{z^2+4z+1}}$ (2)

$\therefore I=\int_C \frac{2z}{z^2+4z+1}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{2}{i}\int_C \boxed{\frac{1}{z^2+4z+1}}dz$ …① (3)

$f(z)=\frac{1}{z^2+4z+1}$ とおけば f の孤立特異点は $z^2+4z+1=0$ から

$z=\boxed{-2\pm\sqrt{3}}$ [4], このうち (C)に属するのは $z=\boxed{-2+\sqrt{3}}$ [5] で 1位の

極なので $\mathrm{Res}[f,-2+\sqrt{3}]=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{z+2-\sqrt{3}}{z^2+4z+1}=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{1}{2z+4}$

$=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ [6] よって ① から $I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$ (7)

~~9. (1) C_R上で $tz=t(\sigma+R\cos\theta+i\sin\theta)$ だから~~
~~$|\exp(tz)|=e^{(\sigma+R\cos\theta)t}\leq e^{\sigma t}$ (C_R上で $-1\leq\cos\theta\leq 0$)~~
~~また $|f(z)|=\frac{|z|}{|z^2+a^2|}\leq\frac{|z|}{|z|^2-a^2}=\frac{1}{|z|(1-\frac{a^2}{|z|^2})}\leq\frac{2}{|z|}$~~
~~R:十分大~~
~~同じく C_R上で $|z|\geq R-\sigma$ より $|f(z)|\leq\frac{2}{R-\sigma}$~~
~~$\therefore |\exp(tz)f(z)|\leq\frac{2e^{\sigma t}}{R-\sigma}$~~ ~~5行~~

9. (2) $g(z)=\exp(tz)f(z)$ とおく. (Γ_R+C_R) に属する $g(z)$ の
孤立特異点は Rの条件から $\pm ia$ でありいずれも1位の極
$\mathrm{Res}[g,\pm ia]=\lim_{z\to\pm ia}(z\mp ia)g(z)=\frac{1}{2}e^{\pm iat}$ (複号同順)

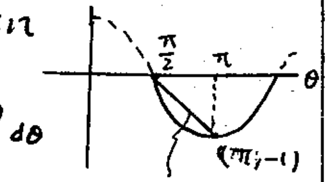
$\therefore \int_{\Gamma_R}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat})-\int_{C_R}$

(1) より $R\to\infty$ のとき $\int_{C_R}\to 0$ なので $\int_{\Gamma_R}\to 2\pi i\cos at$ → $\pi i(e^{iat}+e^{-iat})$ でもよい.

5行

加点+1

9(1) C_R上で $|z|=|\sigma+Re^{i\theta}|\geq|Re^{i\theta}|-\sigma=R-\sigma$ だから, Rが
十分大きければ $\left|\frac{a^2}{z^2}\right|\leq\frac{1}{2}$ より $\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right|\leq\frac{|z|}{|z|^2(1-|\frac{a^2}{z^2}|)}\leq\frac{2}{|z|}\leq\frac{2}{R-\sigma}$
また $|e^{tz}|=|e^{t(\sigma+Re^{i\theta})}|=e^{t(\sigma+R\cos\theta)}$ で $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ において
$\cos\theta\leq 1-\frac{2}{\pi}\theta$ であるから $\left|\frac{dz}{d\theta}\right|=R$ に注意して



$$\left|\int_{C_R}e^{tz}\frac{z}{z^2+a^2}dz\right|\leq\frac{2}{R-\sigma}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}Re^{t(\sigma+R\cos\theta)}d\theta$$

$$=\frac{4R}{R-\sigma}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sigma t}e^{Rt\cos\theta}d\theta\leq\frac{4R}{R-\sigma}e^{\sigma t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{Rt(1-\frac{2}{\pi}\theta)}d\theta$$

$$=\frac{4Re^{\sigma t}}{R-\sigma}\left[-\frac{\pi}{2Rt}e^{Rt(1-\frac{2}{\pi}\theta)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2\pi e^{\sigma t}}{t(R-\sigma)}(1-e^{-Rt})$$

7行