E3 微積4 学年末 2018

試験答案用紙 番号 氏名

1. $y_1=-1$ より $y=u-1$ とおいて ① に代入すると (2×4段)

$u'=(u-4)u$ ∴ $u'+\boxed{4u-u^2}=0$ [(1)] …②

$z=u^{-1}$ とおけば $z'=\boxed{-u^{-2}u'}$ となる [(2)]

これを ② に代入して $-z'=\boxed{4}z=\boxed{-1}$ [(3)][(4)] この一般解は

$z=C\boxed{e^{4x}}+\boxed{\frac{1}{4}}$ [(5)][(6)] ∴ $u=\frac{4}{4Ce^{4x}+1}\to\frac{\boxed{4}}{Ce^{4x}+1}$ [(7)]

以上より一般解は $y=\frac{4}{Ce^{4x}+1}-1=\frac{3-Ce^{4x}}{Ce^{4x}+1}$ [(8)]

2. (1) 与式 $=\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\0&1&2x&3x^2\\0&0&2&6x\\0&0&0&6\end{vmatrix}=\boxed{12}$ (1段)

(2) 与式 $=\begin{vmatrix}e^{ax}&e^{bx}&e^{cx}\\ae^{ax}&be^{bx}&ce^{cx}\\a^2e^{ax}&b^2e^{bx}&c^2e^{cx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}e^{ax+by+cx}$

$=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\a+b&a+c\end{vmatrix}$ $c-b$

∴ $(a-b)(b-c)(c-a)e^{(a+b+c)x}$ (4行)

3. $u=y^2$ とおけば $u'=\boxed{2yy'}$ となる [(1)] ① から $u'+\boxed{2x}u=\boxed{2}e^{-x^2}\sin x$ [(2)][(3)] …②

$u'+2xu=0$ を解いて $u=C\boxed{e^{-x^2}}$ [(4)] $v=v(x)$ として

$u=v\,e^{-x^2}$ を ② に代入 $v'e^{-x^2}=2e^{-x^2}\sin x$ $v'=\boxed{2\sin x}$ [(5)]

∴ $v=2\int\sin x\,dx+C=\boxed{-2\cos x}+C$ [(6)]

∴ $u=Ce^{-x^2}-2e^{-x^2}\cos x$ より

$y^2=(C-2\cos x)e^{-x^2}$ [(7)]

4. $y''+4y'+4y=0$ $((\lambda+2)^2=0)$ より $y_0=\boxed{(C_1+C_2x)e^{-2x}}$ [(1)]

$\eta=\frac{1}{(D+2)^2}\left(\frac{e^{-2x}}{1+x^2}\right)=e^{-2x}\frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ [(2)][(3)]

$\frac{1}{D}\frac{1}{1+x^2}=\boxed{\tan^{-1}x}$ となる [(4)]

$\frac{1}{D^2}\frac{1}{1+x^2}=\int\tan^{-1}x\,dx=x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$ [(5)]

$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ [(6)]

∴ $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)e^{-2x}$ [(7)] (5段)

5 (1) $W'=\begin{vmatrix}y_1'&y_2'\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1''&y_2''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\-Py_1'-Qy_1&-Py_2'-Qy_2\end{vmatrix}$

$=\boxed{-P(x)}W$ [(1)] ∴ $\int\frac{dw}{w}=\int_a^x-P(t)dt+C$ ∴ $w=w(a)\exp\left(-\int_a^x P(t)dt\right)$ [(2)][(3)] (3段)

(2) $-2\int_0^x\sqrt{t^2+2}\,dt=-\left[t\sqrt{t^2+2}+2\log\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)\right]_0^x$

$=\log2-x\sqrt{x^2+2}-2\log\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

$W(0)=\begin{vmatrix}y_1(0)&y_2(0)\\y_1'(0)&y_2'(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&-8\\8&-3\end{vmatrix}=82$

∴ $w=82\exp\left(\log2-2\log(x+\sqrt{x^2+2})-x\sqrt{x^2+2}\right)$

$=\frac{164}{(x+\sqrt{x^2+2})^2\exp\left(x\sqrt{x^2+2}\right)}$ (5行)

6. (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y}{x+2y}$ [(1)], $u=\frac{y}{x}\to y=xu$ ∴ $y'=u+xu'$

故 $xu'=\frac{u-2}{1+2u}-u=-\frac{2(u^2+1)}{2u+1}$ [(2)] ∴ $\int\frac{2u+1}{u^2+1}du=-2\int\frac{dx}{x}+C$ [(3)]

$\int\frac{2u+1}{u^2+1}du=\log(u^2+1)+\tan^{-1}u$ [(4)]

$\log(u^2+1)+\tan^{-1}u=\log\frac{1}{x^2}+C$

∴ $\log(x^2+y^2)+\tan^{-1}\frac{y}{x}=C$ [(5)] (3段)

6. (2) $P=\frac{2x-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{2y+x}{x^2+y^2}$ と表せば

$P_y=Q_x=\frac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}$ なので ① は完全である。

$u_x=P$ を解けば $u=\int\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\varphi(y)$

$u=\log(x^2+y^2)-\tan^{-1}\frac{x}{y}+\varphi(y)$

$u_y=Q$ から $\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=Q$ ∴ $\varphi(y)=C$

以上より $\log(x^2+y^2)-\tan^{-1}\frac{x}{y}=C$ (6行) (7点)

7. $y=x^\alpha$ とおいて ① に代入、$\alpha(\alpha-1)-2\alpha+2=0$ ∴ $(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

$\eta=xu_1+x^2u_2$ として $\eta'=u_1+2xu_2+\boxed{xu_1'+x^2u_2'}$ [(1)]

$xu_1'+x^2u_2'=0$ …② $\eta'=u_1+2xu_2$ なので

$\eta''=2u_2+\boxed{u_1'+2xu_2'}$ [(2)]

→ $u_1'+2xu_2'=\boxed{x}$ [(3)] …③

$\begin{pmatrix}x&x^2\\1&2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$ ∴ $u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0&x^2\\x&2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x&x^2\\1&2x\end{vmatrix}}=\boxed{-x}$ [(4)]

$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}x&0\\1&x\end{vmatrix}}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$ [(5)]

∴ $u_1=\boxed{-\frac{1}{2}x^2}$ [(6)], $u_2=\boxed{x}$ [(7)] 以上より $\eta=\boxed{\frac{1}{2}x^3}$ [(8)]

∴ $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}x^3$ [(9)] (6段) 9行

8. $\dot y=\frac{dy}{dt}$, $\ddot y=\frac{d^2y}{dt^2}$ と表す。$\frac{dy}{dx}=\dot y\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\dot y$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\dot y+\frac{1}{x^2}\ddot y=\frac{1}{x^2}(\ddot y-\dot y)$ なので ① に代入して

$\ddot y-\dot y-2\dot y+2y=e^{3t}\to\ddot y-3\dot y+2y=e^{3t}$ ↗3

特性方程式 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ ∴ $\lambda=1,2$, y_0 の解

$\eta=\frac{1}{D^2-3D+2}e^{3t}=\frac{1}{2}e^{3t}$ ∴ $y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$ ↗5

∴ $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}x^3$ (6行)

9. $\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1=0 \rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)=0$ (1)

$\therefore \lambda = \boxed{1, \pm i}$ [2] $\therefore y_0 = (C_1+C_2x)e^x + C_3\cos x + C_4 \sin x$ (3)

$y_1 = \dfrac{1}{(D^2+1)(D-1)^2}e^{ix} = \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{D^2+1}e^{ix} = \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{(D-i)(D+i)}e^{ix}$

[4] 1 [5] 1 [6] ix [7] $\frac{i}{2}$

$= \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{D-i}e^{ix} = \dfrac{1}{4}e^{ix}\dfrac{1}{D}1 = \dfrac{x}{4}e^{ix}$, ∴

[8] $\frac{1}{4}$ [9] i (10) D (11) $\frac{x}{4}$

$\therefore y_1 = Re(y_1) = \boxed{\dfrac{x}{4}\cos x}$ (12)

$(-2D + D^2 \ldots D^3 + D^4)$ (13)

$1-2D+2D^2-2D^3+D^4 \,\overline{)\, 3x^2+20x}$ quotient: $3x^2+32x+52$

$3x^2-12x+12$

$32x-112$

$32x-64$

52

52

0

9段

10. (1)

$\frac{20}{9}x + \frac{20}{27}$

$3-D-3D^2+D^3 \,\overline{)\, x^3}$ quotient: $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2+\ldots$

x^3-x^2-6x+2

x^2+6x-2

$x^2-\frac{2}{3}x-2$

$\frac{20}{3}x$

$\cancel{16x} \quad \cancel{16}$

$\cancel{16x} \quad \cancel{3}$

$\frac{20}{3}x - \frac{20}{9}$

$\frac{20}{9}$

$\frac{20}{9}$

0

(2)

$-D-3D^2+D^3 \,\overline{)\, x^2}$ quotient: $-\frac{1}{3}x^3+3x^2-20x$

x^2+6x-2

$-6x+2$

$-6x-18$

20

20

0

$3-D-3D^2+D^3 \,\overline{)\, x^3}$ quotient: $\frac{1}{3}x^3$

x^3-x^2