E3前中 2018

2016年度試験答案用紙

番号　　氏名

1. (1) $f=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $f'=\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-\frac{3}{2}}=\boxed{\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}}$ [1], $f''=\boxed{\frac{1\cdot 3}{2^2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}}$ (2)

$\cdots$, $f^{(n)}=\dfrac{1\cdot 3\cdots\boxed{(2n-1)}\,[4]}{\boxed{2^n}\,(3)}(1-x)^{\boxed{-\frac{2n+1}{2}}}$ (5)

$\therefore f^{(n)}(0)=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$

$=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot 2^n\boxed{n!}}$ (6) $\quad\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}x^n}$ (7) $\quad(|x|<1)$

(4点)

(2) [1] $f=\log\{3(1-\frac{x}{3})\}=\log 3+\log(1-\frac{x}{3})$

$=\log 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{x}{3}\right)^n=\log 3+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{-\frac{1}{3^n\cdot n}}\right)x^n$

[2] $\left|-\frac{x}{3}\right|<1$ から $|x|<3$ $\therefore$ 収束半径 $R=\boxed{3}$

(3) $f'=\boxed{\cos x-\frac{1}{1+x}}$ [1] $\therefore f'(0)=0$, $f''=\boxed{-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}}$ [2]

より $f''(0)>0$ よって $x=0$ で $\boxed{極小}$ [3] 値 0 をとる.

(4) [1] 与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\boxed{\frac{3}{5}}$

[2] 与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3}=\boxed{4}$

[3] 与式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=\boxed{\infty}$ $\because$ $\frac{5}{3}>1$

[4] 与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2-1}(n-1-n-1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2}{n^2-1}=\boxed{-2}$

(5) $S_N=\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^2+5n+6}=\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{N+3}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+5n+6}=\lim_{N\to\infty}S_N=\boxed{\frac{1}{3}}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log e=1\neq 0$ だから

(7) [1] 初項 -1, 公比 $-\frac{1}{3}$ だから 収束して $\dfrac{-1}{1+\frac{1}{3}}=\boxed{-\frac{3}{4}}$

[2] 初項 $\frac{1}{e}$, 公比 $\frac{1}{e}$ だから 収束して $\dfrac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\boxed{\frac{1}{e-1}}$

(8) $f=\dfrac{1}{3\{1-(-\frac{x}{3})\}}=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n\quad(|x|<3)$

2. (1) 右辺を $f(x,y)$ とおく. $f(2,\frac{4}{3})=\boxed{\frac{1}{3}}$ [1] $f_x=-\dfrac{x}{9f(x,y)}$ [2] $\boxed{-\frac{x}{9}}$

$f_y=-\dfrac{y}{4f(x,y)}$ だから $f_x(2,\frac{4}{3})=\boxed{-\frac{2}{3}}$ [4], $f_y(2,\frac{4}{3})=\boxed{-1}$ [5] [3] $\boxed{-\frac{y}{4}}$

$\therefore z=-\frac{2}{3}(x-2)-(y-\frac{4}{3})+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x-y+3$

$\boxed{2}x+\boxed{3}y+\boxed{3}z=\boxed{9}$ [8] (6) (7)

(2) [1] $z_x=\dfrac{4x+y}{2x^2+xy+5y^2}$, $z_y=\dfrac{x+10y}{2x^2+xy+5y^2}$, $x'=-\sin t$, $y'=\cos t$

$\therefore\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\cos^2 t+6\cos t\sin t-\sin^2 t}{2\cos^2 t+\cos t\sin t+5\sin^2 t}$

[2] $z_x=\frac{1}{y}$, $z_y=-\frac{x}{y^2}$, $x'=e^t-e^{-t}$, $y'=e^t+e^{-t}$

$\therefore\dfrac{dz}{dt}=1-\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{-4}{(e^t-e^{-t})^2}$

(3) [1] $z_u=z_x x_u+z_y y_u=2xy\cdot 1+x^2\cdot v=2(u+v)uv+(u+v)^2v$

$=v(u+v)(3u+v)$

[2] $z_v=2xy\cdot 1+x^2u=2(u+v)uv+(u+v)^2u$

$=u(u+v)(u+3v)$

3 (1) [1] $z_x=\boxed{8x-3y}$ [2] $z_y=\boxed{-3x+12y}$

(2) [1] $z_x=\boxed{-2\sin 2x\log 3y}$ [2] $z_y=\boxed{\frac{1}{y}\cos 2x}$

(3) [1] $z_x=\boxed{3e^{3x}\tan 2y}$ [2] $z_y=\boxed{2e^{3x}\sec^2 2y}$

(4) [1] $z_x=\boxed{\dfrac{x}{(y^2-x^2)^{3/2}}}$ [2] $z_y=\boxed{-\dfrac{y}{(y^2-x^2)^{3/2}}}$

4 (1) $f_x=\dfrac{1}{x+y^2}$, $f_y=\dfrac{2y}{x+y^2}$ より [1] $f_x(1,2)=\boxed{\frac{1}{5}}$

[2] $f_y(1,2)=\boxed{\frac{4}{5}}$

(2) $f_x=2xye^{x^2y}$, $f_y=x^2e^{x^2y}$ より [1] $f_x(1,2)=\boxed{4e^2}$

[2] $f_y(1,2)=\boxed{e^2}$

5. $y'=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ (1), $y''=\boxed{\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}$ (2) $\therefore(1-x^2)y''=\boxed{x}$ (3) y' $\cdots$ ①

この両辺を$(n-1)$回微分すると

$(1-x^2)y^{(n+1)}-\boxed{2(n-1)x}$ (4) $y^{(n)}-\boxed{(n-1)(n-2)}$ (5) $y^{(n-1)}$

$=\boxed{x}y^{(n)}+\boxed{(n-1)}$ (6) $y^{(n-1)}$

$\therefore(1-x^2)y^{(n+1)}+\boxed{(1-2n)x}$ (7) $y^{(n)}-\boxed{(n-1)^2}$ (8) $y^{(n-1)}=0$ $\cdots$ ②

$\therefore y^{(n+1)}(0)=(n-1)^2y^{(n-1)}$, $y(0)=y''(0)=0$, $y'(0)=1$ より

$y^{(2h)}(0)=0$, $y^{(2h+1)}(0)=\{\boxed{(2h-1)}(2h-3)\cdots 3\cdot 1\}^2$ (9)

$y^{(2h+1)}(0)=\left\{\dfrac{(2h)!}{2^h\cdot\boxed{h!}}\right\}^2$ (10) $(2h)!$ (11) $2h+1$

$\therefore\dfrac{y^{(2h+1)}(0)}{(2h+1)!}=\dfrac{(2h)!}{(2^h\cdot h!)^2\boxed{(2h+1)}}$ (11)

6. $\log z=y\log x+x\log y$ $\cdots$ ①

両辺を x で偏微分 → $\dfrac{1}{z}z_x=\dfrac{y}{x}+\log y$

〃 y 〃 → $\dfrac{1}{z}z_y=\dfrac{x}{y}+\log x$

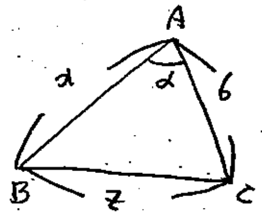
よって $xz_x+yz_y=x\left(\dfrac{yz}{x}+z\log y\right)+y\left(\dfrac{zx}{y}+z\log x\right)$

$=yz+zx+z(x\log y+y\log x)$

$=z(x+y+\log z)$ $\because$ ① より (6点)

7. 余弦定理から

$z=\sqrt{x^2+36-12x\cos\alpha}$ とする.



$\therefore\Delta z\fallingdotseq dz=z_x\Delta x+z_\alpha\Delta\alpha$

$=\dfrac{1}{2z}\{(2x-12\cos\alpha)\Delta x+12x(\sin\alpha)\Delta\alpha\}$

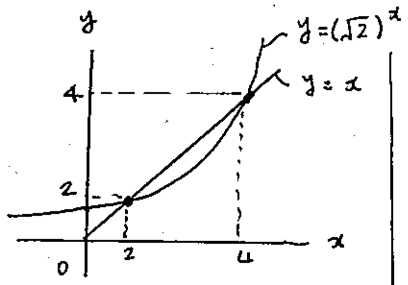
$=\dfrac{(x-6\cos\alpha)\Delta x+(6x\sin\alpha)\Delta\alpha}{\sqrt{x^2+36-12x\cos\alpha}}$ (5点)

8. (1) $a_n = 2$ ならば $a_{n+2} = (\sqrt{2})^2 = 2$

よって $a_1 = 2$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{2}$ (1)

(2) 同様に考えて $a_1 = 4$ のとき

$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{4}$ (2)

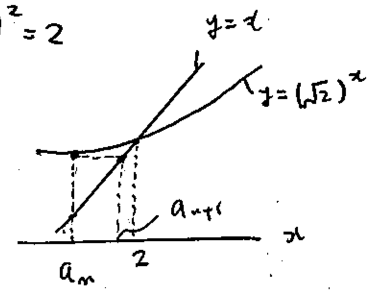


(3) $a_n < 2$ ならば $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} < (\sqrt{2})^2 = 2$

なるから $a_{n+1} < \boxed{2}$ よって $a_1 < 2$ のとき すべての n に対して $a_n < 2$

(上に有界) また $x < 2$ で

$x < (\sqrt{2})^x$ なるから



$$a_n < (\sqrt{2})^{a_n} = a_{n+1} \qquad \therefore\ a_n < a_{n+1}$$

従って $\{a_n\}$ は単調増加。よって Weierstrass の定理から a_n は収束して 極限を α とすれば $a_{n+1} \to \alpha$ でもあるから

漸化式より $(\sqrt{2})^\alpha = \alpha$ (α 台2) α = 2グラフから $\alpha = 2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2$ (10分)

---

9. (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to+0} \frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^2} = 0$

$= f(0,0)$ よって $(0,0)$ で連続である。 (2分)

(2) $\displaystyle f_x(0,0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = 1$

$\displaystyle f_y(0,0) = \lim_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to0} \frac{-\frac{y^3}{y^2}}{y} = -1$ (2分)

(3) $f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \varepsilon = x - y + \varepsilon$

$\displaystyle \therefore\ \varepsilon = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + y - x = \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} \quad ((x,y)\neq(0,0))$

$\displaystyle \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$y = -x$ に沿って $(0,0)$ に近づければ

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2x^3}{2\sqrt{2}|x|^3} = -\frac{x^3}{\sqrt{2}|x|^3} \begin{cases} \nearrow -\frac{1}{\sqrt{2}} & (x\to+0) \\ \searrow \frac{1}{\sqrt{2}} & (x\to-0) \end{cases}$$

従って $\varepsilon \neq o(\sqrt{x^2+y^2})$ なので 全微分可能でない。 (5分)

---

6. 別 対数をとらずに計算した場合

$Z_x = yx^{y-1}y^x + x^y y^x \log y$

$= x^{y-1}y^{x+1} + x^y y^x \log y$

$Z_y = x^{y+1}y^{x-1} + x^y y^x \log x$

$\therefore\ xZ_x + yZ_y = x^y y^{x+1} + x^y y^x \log y^x$

$+ x^{y+1}y^x + x^y y^x \log x^y$

$= x^y y^x (y + x + \log z)$

$= z(x + y + \log z)$

---

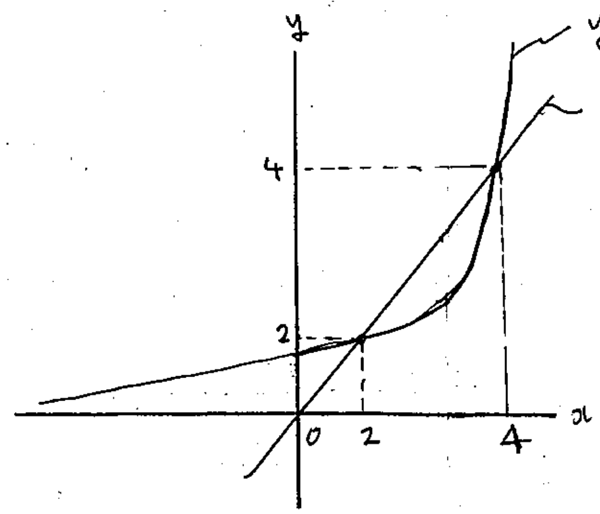
8 (補足) 数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2項間の漸化式が一般に

$a_{n+1} = f(a_n)$

で与えられているとき、この関係を視覚的にとらえるためには

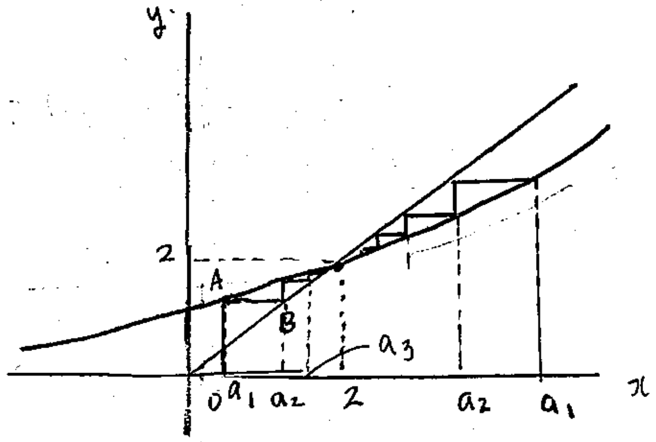
曲線 $y = f(x)$ と 直線 $y = x$ を 同一平面上にかくとよい。

この問題では $y = (\sqrt{2})^x = 2^{\frac{x}{2}}$ と $y = x$ である。



8. (1), (2) は この2つの図形の交点が (2, 2), (4, 4) であることを示すヒントになっている。なお $y = (\sqrt{2})^x$ は明らかに下に凸な曲線なので これと直線 $y = x$ との交点は これ以外にない。

$a_1 < 2$ のとき この図を使って 収束する様子が分かる。拡大する。(多少デフォルメする)



a_2 を求めるため $x = a_1$ のときの $y = (\sqrt{2})^x$ の値をグラフから求める (A の y 座標)

A を通り x 軸に平行な直線 (y 座標が変化しない) と $y = x$ との交点を求める。(B)

B の x 座標 が a_2 になっている!

これをくり返せばよい。$a_n \to 2$ となることが視覚的に分かるし $\{a_n\}$ が $a_1 < 2$ のとき 単調増加になっていることも分かる。

まったく同じ考え方で $2 < a_1 < 4$ のときは $\{a_n\}$ は単調減少で、やはり $a_n \to 2$ となることも分かる。

漸化式から数列の様子を視覚化するこの考え方の身につけておくとよいかもしれない。