DC3 前末 2017

~~2016~~ 2017年度試験答案用紙　　　番号　　　氏名

1. (1) [1] $f_x = 24x^2 - 6y = 6(4x^2 - y) = 0$

$f_y = -6x - 3y^2 = -3(2x + y^2) = 0$ より $(0,0),\ (-\frac{1}{2}, 1)$

[2] $f_{xx} = 48x$, $f_{yy} = -6y$, $f_{xy} = -6$ より

$D(x,y) = -6 \cdot 48xy - 36 = -36(8xy+1)$ $\}\ -288xy - 36$

[3] $D(0,0) = -36 < 0$ より $(0,0)$ で極値をとらない

$D(-\frac{1}{2}, 1) = 108 > 0$, $f_{xx}(-\frac{1}{2}, 1) = -24 < 0$ より 点 $(-\frac{1}{2}, 1)$ で

極大値 $f(-\frac{1}{2}, 1) = 1$

(2) [1] $F = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$ とおけば $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

[2] $F = x^3y^3 + y - x$ とおけば $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2y^3 - 1}{3x^3y^2 + 1}$

(3) $F = \cos(xyz) - 1$ とおく. $F_z = -xy\sin(xyz)$, $F_x = -yz\sin(xyz)$

$F_y = -zx\sin(xyz)$ より [1] $z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z}{x}$ [2] $z_y = -\frac{z}{y}$

[3] $z_{xx} = -\frac{z_x x - z}{x^2} = -\frac{-z-z}{x^2} = \frac{2z}{x^2}$

[4] $z_{xy} = -\frac{z_y}{x} = -\frac{-\frac{z}{y}}{x} = \frac{z}{xy}$

[5] $z_{yy} = -\frac{z_y y - z}{y^2} = -\frac{-z-z}{y^2} = \frac{2z}{y^2}$

(4) $F = x\log y - \log z$ とおく. $x = 1$, $y = e$ のとき $\log z = 1$ より

$z = e$. $F_x = \log y$, $F_y = \frac{x}{y}$, $F_z = -\frac{1}{z}$ より 接平面の方程式は

$\log e(x-1) + \frac{1}{e}(y-e) - \frac{1}{e}(z-e) = 0$

∴ $ex + y - z - e = 0$

(5) $\varphi = x^2 + y^2 - 4$, $f = x + 4y + 1$ とおく $f_x = 1$, $f_y = 4$, $\varphi_x = 2x$

$\varphi_y = 2y$ より $\begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 4 \end{cases}$ → $4\lambda^2(x^2+y^2) = 17$ $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

∴ $(x,y) = (\pm\frac{2}{\sqrt{17}}, \pm\frac{8}{\sqrt{17}})$ [1] (複号同順)

よって最大値 点 $(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}})$ で $1 + \frac{34}{\sqrt{17}} = 1 + 2\sqrt{17}$ [2]

最小値 点 $(-\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}})$ で $1 - \frac{34}{\sqrt{17}} = 1 - 2\sqrt{17}$ [3]

2 (1) [1] 与式 $= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x[y^2]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}$

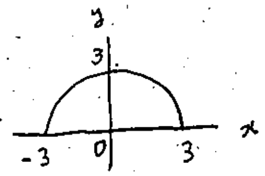
[2] $D \to 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$ だから 与式 $= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2[y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{15}$

[3] 与式 $= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 y^2[x^2]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4y^2 - y^4)dy$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}) = \frac{32}{15}$

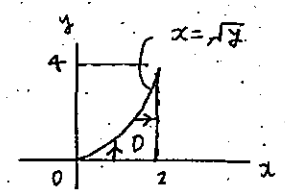
[4] 与式 $= \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^3 [y^2]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx$



$= \int_0^3 (9 - x^2)dx = [9x - \frac{1}{3}x^3]_0^3 = 27 - 9 = 18$

[5] $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおけば 与式 $= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r\sin r\,dr\,d\theta$

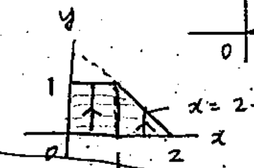
$= 2\pi\left([-r\cos r]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos r\,dr\right) = 2\pi^2$



(2) [1] $D: 0 \leqq y \leqq 4$, $\sqrt{y} \leqq x \leqq 2$

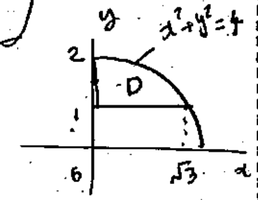
→ $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq x^2$ より

$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$



[2] $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$ $\int_0^1\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

(3) $I = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$



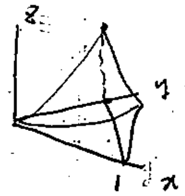
$= \int_1^2 \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_1^2 (2-y)\,dy = \left[2y - \frac{1}{2}y^2\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}$　　[1] $\sqrt{4-y^2}$　[2] $\sqrt{x^2+y^2}$　[3] $2-y$

[4] $2y - \frac{1}{2}y^2$　[5] $\frac{1}{2}$

3. $D: 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1-x$ で $z = x^2 + 2y^2$ を

積分すればよい $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + 2y^2)\,dy\,dx$



$= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{2}{3}y^3\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left\{x^2(1-x) + \frac{2}{3}(1-x)^3\right\} dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

4. (1) $F_x = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$, $F_y = -6y^2 - 6y = -6y(y+1)$

$F_x = 0$ より $x = 0, \pm 1$

$x = 0$ のとき $F(0,y) = -2y^3 - 3y^2 + 1 = 0$ から $(y+1)^2(2y-1) = 0$

これで $F_y = 0$ から $y = -1$ ∴ $(0,-1)$

$x = \pm 1$ のとき $F(\pm 1, y) = -2y^3 - 3y^2 = 0$ から $y^2(2y+3) = 0$

これで $F_y = 0$ から $(\pm 1, 0)$　　5

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = 0$ $(F_y \neq 0)$ より $F = F_x = 0$ かつ $F_y \neq 0$

上の(1)から $x = 0$ のとき $y = \frac{1}{2}$, $x = \pm 1$ のとき $y = -\frac{3}{2}$　　2

(3) $F_x = 0$, $F_y \neq 0$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} = \frac{6x^2 - 2}{3y(y+1)}$ だから

$(x,y) = (0, \frac{1}{2})$ で $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{-8}{9} < 0$ よって $x = 0$ のとき

極大値 $y = \frac{1}{2}$ 同様にして $(x,y) = (\pm 1, -\frac{3}{2})$ で

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{16}{9} > 0$ よって $x = \pm 1$ で 極小値 $y = -\frac{3}{2}$　　4

5. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

$K \to \hat{K}$: $0 \leqq r \leqq R$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$

$J = r^2\sin\theta$ となるから

$I = \iiint_{\hat{K}} r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$r^4\sin^3\theta\sin\varphi\cos\varphi$

$= \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)$

$= \frac{1}{5}R^5 \cdot \underbrace{2 \cdot \frac{2}{3}}_{=\frac{4}{3}} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{2}{15}R^5$

(1) $\sin\theta$　(2) $\sin\theta\sin\varphi$　[3] π　[4] $\frac{\pi}{2}$　(5) $r^2\sin\theta$

(6) $r^4\sin^3\theta\sin\varphi\cos\varphi$　(7) r^4　(8) $\sin^3\theta$　(9) $\sin\varphi\cos\varphi$

[10] $\frac{4}{3}$　[11] $\frac{1}{2}$　(12) $\frac{2}{15}R^5$

$$= u^2 v \begin{vmatrix} 1-v & -1 & 0 \\ v-vw & 1-w & -1 \\ vw & w & 1 \end{vmatrix}$$

6. (1) ①から $x = u - uv$, $y = uv - uvw$, $z = uvw$ だから

$$J = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = uv \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix}$$

これがあるか?

$$= uv(u - uv + uv) = u^2 v$$

③

(2) ヒントと(1)から

$$I = \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^1\int_0^1 u^2 v \tan^{-1} u \, dw\, dv\, du = \left(\int_1^{\sqrt{3}} u^2 \tan^{-1} u \, du\right)\left(\int_0^1 v\, dv\right)\left(\int_0^1 dw\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{3}u^3 \tan^{-1} u\right]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^3}{1+u^2}\, du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \left(u - \frac{u}{1+u^2}\right) du\right\}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\log(1+u^2)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{24}(4\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\log 2$$

⑦

7. (1) $V = \iiint_K dx\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^1\int_0^1 \boxed{u^2 v}\, dw\, dv\, du$ [1] $= \left(\int_0^a u^2\, du\right)\left(\int_0^1 v\, dv\right)\left(\int_0^1 dw\right)$

$$= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^a \left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}a^3}$$ [2]

(2) K_s: $0 \leq x + y + z \leq \boxed{a-s}$ [1], $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

$$\therefore I = \int_0^a s^2 \left(\iiint_{\boxed{K_s}} dx\,dy\,dz\right) ds$$ [2]

(1)から $\iiint_{K_s} dx\,dy\,dz = \boxed{\frac{1}{6}(a-s)^3}$ [3] だから

$$I = \int_0^a s^2 \cdot \frac{1}{6}(\cancel{s-a}\ a-s)^3 ds \underset{s=at}{=} \frac{1}{6}\int_0^1 a^2 t^2 (a - at)^3 \cdot a\, dt$$

$$= \frac{a^6}{6}\int_0^{\boxed{1}} \boxed{t^2(1-t)^3}\, dt$$ [4] [5]

$$= \frac{a^6}{6}\left(\left[-\frac{1}{4}t^2(1-t)^4\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)^4\, dt\right)$$

$$= \frac{a^6}{12}\left(\left[-\frac{1}{5}t(1-t)^5\right]_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 (1-t)^5\, dt\right)$$

$$= \boxed{\frac{a^6}{60}}\left[-\frac{1}{6}(1-t)^6\right]_0^1 = \boxed{\frac{a^6}{360}}$$ [6] [7]

1 (1) [2] 特異点での D の値を求めている者が多い。問題にそのようなことは書いていない。

(1) [3] ただ極値としたり、極小値としたものは ×

4 (1) $F_x = 0$ で $x = 0$ が、$F_y = 0$ で $y = 0$ がぬけているのが多かった。

(2) 特異点以外の点で … と書いてある。このような記述がなくても特異点では陰関数が存在しないから除くのはあたり前。

(3) $z = f(x, y)$ の極値ととりちがえている者がいた。