DC3 前中 2017

2016年度試験答案用紙

番号　　氏名

1.(1) 与式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac16\left(1+\frac1n\right)\left(2+\frac1n\right) = \boxed{\frac13}$

(2) [1] $f(x) = \dfrac{\log(x^2+1)}{\log x}$ $(x>0)$ なる関数を考える. ロピタルの定理より

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac1x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$ となるから もとの数列も $\boxed{2}$ に収束する.

[2] [1]と同様に考える.

$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac ax}-e^{\frac bx}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\dfrac{e^{a\varepsilon}-e^{b\varepsilon}}{\varepsilon}$ $\left(\varepsilon=\frac1x\right)$

$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(ae^{a\varepsilon}-be^{b\varepsilon}\right) = \boxed{a-b}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\log\dfrac{10n+2}{n+1} = \boxed{\log 10} \neq 0$ よりこの級数は $\boxed{発散}$ する

$\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n}}{n^2}$ は $\boxed{正項}$ 級数で各項において $\frac{e^{-n}}{n^2} \le \boxed{\frac{1}{n^2}}$ となり

$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ はゼータ級数の収束・発散の条件から $\boxed{収束}$ するので

$\sum_{n=1}^\infty\frac{e^{-n}}{n^2}$ も収束する　$\sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ より

与式 $= \sin\frac\pi3 = \boxed{\frac{\sqrt3}{2}}$

(4) 公比 $2x^2$ の等比級数だから $|2x^2|<1$ 即ち $|x|<\frac{1}{\sqrt2}$ で収束する. ∴ $R=\boxed{\frac1{\sqrt2}}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b-(n+1)a}{n+1}\right|}|x|^2 = \boxed{|a|}|x|^2<1$

∴ $|x^2| < \boxed{\frac{1}{|a|}}$　∴ $|x|<\boxed{\frac{1}{\sqrt{|a|}}}$

(6) [1] $(4+5i)e^{(4+5i)x}$　[2] $(3-i)e^{3x}e^{-ix}$

(7) [1] $47\pi = 23\times2\pi+\pi$ より 与式 $= e^{i\pi} = \boxed{-1}$

[2] 与式 $=\cos\frac\pi2 + i\sin\frac\pi2 = \boxed{i}$

(8) $\boxed{\log(1+2x) = 2x-2x^2+\frac83x^3+o(x^3)}$

(9) 関数を $f(x)$ と表せば $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n+1$ より

$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+o(x^2)$

2(1) [1] $dz = \{2e^{x+3y}+(2x+y)e^{x+3y}\}dx + \{e^{x+3y}+3(2x+y)e^{x+3y}\}dy$

$= \boxed{(2x+y+2)e^{x+3y}dx + (6x+3y+1)e^{x+3y}dy}$

[2] $dz = \boxed{12(3x+5y)^3dx + 20(3x+5y)^3dy}$

(2) $z(1,1)=\log 2$, $z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $z_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$ より

$z_x(1,1) = z_y(1,1) = 1$ ∴ $z-\log2 = x-1+y-1$ ∴ $\boxed{x+y-z+\log 2-2=0}$

(3) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d}{dt}(te^t) + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d}{dt}(\log t) = \boxed{(1+t)e^t\frac{\partial z}{\partial x}+\frac1t\frac{\partial z}{\partial y}}$

(4) $z_x=\cos(x+2y)$, $z_y = 2\cos(x+2y)$, $x' = -\frac{2}{t^2}$, $y'=\frac1t$ より

$\frac{dz}{dt} = \left(-\frac{2}{t^2}+\frac2t\right)\cos(x+2y) = \boxed{\frac{2(t-1)\cos(\cancel{x+2y}\ \frac2t+2\log t)}{t^2}}$

(5) $z_x=2xy$, $z_y=x^2$, $x_r=1$, $y_r=s$, $x_s=1$, $y_s=r$ より

[1] $\frac{\partial z}{\partial r} = 2xy+x^2s = 2(r+s)rs+(r+s)^2s = \boxed{s(r+s)(3r+s)}$

[2] $\frac{\partial z}{\partial s} = 2xy+x^2r = 2(r+s)rs+(r+s)^2r = \boxed{r(r+s)(r+3s)}$

(6) [1] $z_x = \frac{3x-2y-3(x+2y)}{(3x-2y)^2} = \boxed{\frac{-8y}{(3x-2y)^2}}$, $z_y = \frac{2(3x-2y)+2(x+2y)}{(3x-2y)^2}$

$z_y = \boxed{\frac{8x}{(3x-2y)^2}}$

[2] $z_x = \boxed{-2\sin2x\log3y}$, $z_y = \boxed{\frac{\cos2x}{y}}$

[3] $z_x = 2e^{2x+y}\cos(x-y) - e^{2x+y}\sin(x-y) = \boxed{\{2\cos(x-y)-\sin(x-y)\}e^{2x+y}}$

$z_y = e^{2x+y}\cos(x-y)+e^{2x+y}\sin(x-y) = \boxed{\{\cos(x-y)+\sin(x-y)\}e^{2x+y}}$

[4] $z_x = -\frac12\frac{-2x}{(\sqrt{y^2-x^2})^3} = \boxed{\frac{x}{(\sqrt{y^2-x^2})^3}}$, $z_y = \boxed{\frac{-y}{(\sqrt{y^2-x^2})^3}}$

(7) [1] $f_x = \frac{1}{x+y^2}$, $f_y=\frac{2y}{x+y^2}$ より $f_x(1,2) = \boxed{\frac15}$, $f_y(1,2) = \boxed{\frac45}$

[2] $f_x = y^2e^{xy^2}$, $f_y = 2xye^{xy^2}$ より $f_x(1,2)=\boxed{4e^4}$

$f_y(1,2) = \boxed{4e^4}$

3. $u = x-5$ とおく. $x=u+5$

$\frac1x = \frac{1}{5+u} = \frac15\frac{1}{1+\left(\frac u5\right)}$, 従って $\left|\frac u5\right|<1$ 即ち

$|x-5|<5$ のとき 与式 $= \frac15\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\frac u5\right)^n$　$0<x<10$

∴ $f(x) = \frac1x = \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(x-5)^n$ $(|x-5|<5)$ ④

4. $f''(x) = \boxed{4}f(x)$ [1] より $f''(0) = \boxed{4}$ [2] また $f'(0)=0$ から

$f^{(3)}(0)=0$ 以上より $f^{(n)}(0) = \begin{cases}\boxed{4^{k}}\ (3) & (n=2k)\\ 0 & (n=2k+1)\end{cases}$

$(k=0,1,2,\cdots)$

∴ $\cosh 2x = \sum_{n=0}^\infty \boxed{\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}}$ (4) ①, $a_n = \frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}$ とおく.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{4}{(2n+2)(2n+1)}}|x^2| = 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ (5)

①から $\int_0^x\cosh 2t\,dt = \sum_{n=0}^\infty\int_0^x\boxed{\frac{4^n}{(2n)!}t^{2n}}dt$ (6)

$\left[\frac12\sinh 2t\right]_0^x = \sum_{n=0}^\infty\frac{4^n}{(2n)!}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^\infty\boxed{\frac{4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$ (7)

となるので $\sinh 2x = \sum_{n=0}^\infty\boxed{\frac{2\cdot4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$ (8)

5. $e^{i3x} = \cos3x+i\sin3x$ …① である. 一方

$(e^{ix})^3 = (\cos x+i\sin x)^3 = \cos^3x+3i\cos^2x\sin x-3\cos x\sin^2x - i\sin^3x$

∴ $\cos3x = \cos^3x-3\cos x\sin^2x = \cos^3x-3\cos x(1-\cos^2x)$

$=4\cos^3x-3\cos x$

$\sin3x = 3\cos^2x\sin x-\sin^3x = 3(1-\sin^2x)\sin x-\sin^3x$

$=3\sin x-4\sin^3x$　⑦

4. [1] 4　[2] 4　(3) $4^k = 2^{2k}$　(4) $\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}$　2^{2n}

(5) $\frac{4}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2}{(n+1)(2n+1)}$

(6) $\frac{4^n}{(2n)!}t^{2n}$　2^{2n}　(7) $\frac{4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$　2^{2n+1}

(8) $\frac{2\cdot4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$　2^{2n+1}

6. (1) [1] $Z_{xxx} = \boxed{6\log y}$ [2] $Z_{xxy} = \boxed{\dfrac{6x}{y}}$

[3] $Z_{xyy} = \boxed{-\dfrac{3x^2}{y^2}}$ [4] $Z_{yyy} = \boxed{\dfrac{2x^3}{y^3}}$

(2) [1] $f_{xx} = 18xy^2 - 8y^3$ $\therefore$ $f_{xx}(1,-1) = 18+8 = \boxed{26}$

[2] [3] $f_{xy} = f_{yx} = 18x^2y - 24xy^2$ $\therefore$

$f_{xy}(1,-1) = f_{yx}(1,-1) = \boxed{-42} \leftarrow$ [2], [3]

[3] $f_{yy} = 6x^3 - 24x^2y$ $\therefore f_{yy}(1,-1) = 6+24 = \boxed{30}$

---

7 (1) 初項1, 公比 $(-x^2)$ の等比級数になる. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

(2) 0 から x まで積分する

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt$$

$$\therefore \tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad ③$$

(3) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots$ より $x^2\log(1+x) = \boxed{x^3 + o(x^3)}$

(4) (2) から $\tan^{-1}x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ だから

$$\sin x - \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$与式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{6} \quad ③$$

---

8. $x^2 - x - 1 = 0$ 解の公式から $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\therefore \alpha = \boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ [1]

$$|b_n - \alpha| = \left|1 + \frac{1}{b_{n-1}} - \alpha\right| \left(= \left|\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{\boxed{\alpha}}\right|\right) = \frac{|b_{n-1} - \boxed{\alpha}|}{b_{n-1}\boxed{\alpha}}$$ (2)

明らかに $b_{n-1} \geqq 1$ であり $\dfrac{1}{\boxed{\alpha}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (2) [3]

$$|b_n - \alpha| \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}|b_{n-1} - \boxed{\alpha}| \quad \therefore |b_n - \alpha| \leqq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\boxed{n-1}}|b_1 - \alpha|$$ (4) (2)

$(n \geqq 1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$ [5]

[1] $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (2) α [3] $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(4) $n-1$ [5] $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

採点したときの感想など

- 3 $\dfrac{1}{1-x}$ の Maclaurin 展開を用いれば簡単にできることを解説（授業で）したが，それを用いた答案は1人だけだった．

Rule: $x=a$ における Taylor 展開 → $u = x-a$ と置き $f(x)$ を u の式で表わし Maclaurin 展開を用いる

- 1 (4) $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は収束域．収束半径は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と答える．
- 4 双曲線関数はこの機会にぜひ学習すること．
- 1 (6) [2] もとが $e^{3x}e^{-ix}$ だから $(3-i)e^{3x}e^{-ix}$ と答えるのがベスト．$(3-i)e^{(3-i)x}$ でもよいが…
  [1] $4+i5\,e^{(4+5i)x}$ は ( ) がない．×
- 1 (8), (9) 等式で表せとある．そうしていない答案は×
  また $f(x) = \cdots$ としたものは減点．$f(x)$ とは問題に書いていない．$\log(1+2x) = \cdots$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \cdots$ とすべき．問題をよく読むこと．
- 5 $e^{ix} = \cos x - i\sin x$ としている者が思ったより多い．人類の至宝たる公式を誤るな！
  また $(\cos x + i\sin x)^3$ で $(a+b)^3$ の展開公式を使わない（覚えていない）者もいた。展開して終っている答案には点なし

※ 配点合計は 101点となるが，100点満点として比率を計算する．