基礎3 学年末　2019年度 D1

二項定理, 7章§2, 確率 1章（一部臨時試験）

試験答案用紙　　番号　　氏名

1. (1)〜(3)：臨時試験 2　1(1), (2), (4)

(4) [1] 与式 $= 1+2\cdot2+3\cdot4 = 1+4+12 = \boxed{17}$

[2] 与式 $= 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = \frac{1}{6}7\cdot8\cdot15-1 = \boxed{139}$

(5) [1] $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}$　[2] $a_m = 2m-1 = 11$ より $m=6$

[2] ∴ $\sum_{k=1}^{6}(2k-1)$

(6) [1] 与式 $= \sum_{k=1}^{m}(k^2+k+k^2-2k) = 2\sum_{k=1}^{m}k^2 - \sum_{k=1}^{m}k$

$= \frac{1}{3}m(m+1)(2m+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{6}m(m+1)(4m-1)$

[2] 与式 $= \sum_{k=1}^{m}2k(2k-1) = 4\sum_{k=1}^{m}k^2 - 2\sum_{k=1}^{m}k$

$= \frac{2}{3}m(m+1)(2m+1) - m(m+1) = \frac{1}{3}m(m+1)(4m-1)$

(7) $a_{n+1} = 7a_n - 7\alpha + \alpha = 7a_n - 6\alpha$　∴ $\alpha = \boxed{\frac{5}{6}}$ [1]

$b_n = a_n - \frac{5}{6}$ とおけば $b_1 = 3 - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{13}{6}}$ [2]

$b_{n+1} = \boxed{7}b_n$ [3] より $b_n = \boxed{\frac{13}{6}\cdot7^{n-1}}$ [4]

∴ $a_n = b_n + \frac{5}{6} = \frac{13}{6}\cdot7^{n-1} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}(13\cdot7^{n-1}+5)$ [5]

---

1. (1) [1] $a_2 = 6,\ a_3 = 12,\ a_4 = 12+9 = 21$

$a_5 = 21+12 = \boxed{33}$

[2] $a_2 = 3,\ a_3 = 9+2 = 11,\ a_4 = 121+2 = 123$

$a_5 = 123^2+2 = \boxed{15131}$

(2) [1] $9k+4$　[2] $n-1$　[3] 2　[4] $9n+8$

[5] $= 9n-1$

~~(4)~~ 3 [1] $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

[2] $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

---

2. (1) [1] $\frac{40}{52} = \frac{10}{13}$　[2] $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$　[3] $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

[4] $\frac{20}{52} = \frac{5}{13}$　[5] $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$　[6] $\frac{10}{52} = \frac{5}{26}$

[7] $P(A)+P(B)-P(A\cap C) = \frac{1}{52}(40+24-20) = \frac{44}{52} = \frac{11}{13}$

[8] $P(B)+P(C)-P(B\cap C) = \frac{1}{52}(24+13-6) = \frac{31}{52}$

[9] $P(C)+P(A)-P(C\cap A) = \frac{1}{52}(13+40-10) = \frac{43}{52}$

[10] $\frac{5}{52}$

[11] $P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$= \frac{1}{52}(40+24+13-20-6-10+5) = \frac{46}{52} = \frac{23}{26}$

(2) [1] $|p-q|$ で $p-q=k$ となる 1〜10の異なる数を考えるので $X=k$ となる事象を A_k とすれば $n(A_k) = 10-k$ より

∴ $P(A_k) = \frac{10-k}{{}_{10}C_2} = \boxed{\frac{10-k}{45}}$

[2] $\bar{X} = \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{45}k(10-k) = \sum_{k=1}^{9}\frac{10}{45}k - \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{45}k^2$

$= \frac{1}{45}(5\cdot9\cdot10 - \frac{1}{6}\cdot9\cdot10\cdot19) = \frac{165}{45} = \frac{11}{3}$

(3) 目を (x,y) とする. $x+y=k$ となる組 (x,y) の個数から

[1] $1 \leqq x \leqq k-1$ と対応する組があるので $\boxed{\frac{k-1}{36}}$

[2] 同様に考えて $\boxed{\frac{13-k}{36}}$

(4) $n(\Omega) = {}_{20}C_3 = \frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2}$　1本も当たらない確率は

$\frac{{}_{16}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{16\cdot15\cdot14}{20\cdot19\cdot18} = \frac{28}{57}$ よって $1-\frac{28}{57} = \boxed{\frac{29}{57}}$

(5) 目を (x,y,z) とする.

[1] 反復試行の確率から ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \boxed{\frac{3}{8}}$

[2] $y+z \leqq 12$ なので $x+y+z \geqq 15$ となるのは

和15: $x=3,\ y+z=12 \to 1$
$x=4,\ y+z=11 \to 2$
$x=5,\ y+z=10 \to 3$
$x=6,\ y+z=9 \to 4$
計 10

和16: 同様に考えて 6,　17: 3,　18: 1

通りあるので 求める確率は $\frac{20}{6\cdot6\cdot6} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$

---

3. (1) $a_n = n(n-1)$ より $a_{3k-2} = 3(3k-2)(k-1)$

(2) 与式 $= \sum_{k=1}^{m}a_{3k-2} = 3\sum_{k=1}^{m}(3k^2-5k+2)$

$= 3\left\{\frac{1}{2}m(m+1)(2m+1) - \frac{5}{2}m(m+1) + 2m\right\}$　2点

$= \frac{3}{2}m(2m^2+3m+1-5m-5+4)$

$= \frac{3}{2}m(2m^2-2m) = 3m^2(m-1)$　(4点)

4. (1) 項は $x^a y^b z^c$ で $a+b+c=6$ だから (a,b,c は0以上) 全部で ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$ 項

(2) [1] $\frac{6!}{5!1!0!}\times2^1 = \boxed{12}$　[2] $\frac{6!}{4!1!1!}\times2 = 60$

[3] $\frac{6!}{3!2!1!}\times2 = 120$　[4] [3]と同じ $\boxed{120}$　(16点)
(3点)

5. (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと 漸化式より $b_n = 3n$

∴ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}3k = 1 + \frac{3}{2}(n-1)n$　2

$= \frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$, a_1 でも成り立つ.

(2) $a_1 = 1$,　$\frac{3-3+2}{2} = 1$ よって $n=1$ のとき成り立つ.

$a_k = \frac{3k^2-3k+2}{2}$ と仮定すれば, 漸化式より

$a_{k+1} = a_k + 3k = \frac{3k^2-3k+2}{2} + 3k = \frac{3k^2+3k+2}{2}$　3

$= \frac{3(k^2+2k+1) - 3(k+1) + 2}{2} = \frac{3(k+1)^2 - 3(k+1) + 2}{2}$

よって $n=k+1$ のときも成り立つことが示された　(8点)

6. $\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{r^5-1}{r^{10}-1} = \frac{1}{r^5+1} = -\frac{1}{242}$

∴ $r^5 = -242-1 = -243$　$(-3)^5 = -243$

∴ $r = \boxed{-3}$

7. (1) 2枚が表：${}_nC_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{{}_nC_2}{2^n}$，2枚が裏の場合も同じなのでこの2倍 ∴ $\frac{{}_nC_2}{2^{n-1}} = \frac{n(n-1)}{2^n} = q$

(2) $(k-1)$回目までは終了しないのでそこまでの確率が

$\left(1-\frac{n(n-1)}{2^n}\right)^{k-1}$ より $p_k = \left(1-\frac{n(n-1)}{2^n}\right)^{k-1}\cdot\frac{n(n-1)}{2^n}$

(3) k回まで終了しない確率が $\left(1-\frac{n(n-1)}{2^n}\right)^k$ だから

$1-\left(1-\frac{n(n-1)}{2^n}\right)^k$

(4) $S_N - rS_N = \sum_{k=1}^{N} k r^{k-1} q - \sum_{k=1}^{N} k r^k q$

$= q\left(\sum_{k=1}^{N} r^{k-1} - N r^N\right)$ [1] $\quad \frac{1-r^N}{1-r} = \frac{1-r^N}{q}$ [2]

$= 1-(1+qN)r^N$ [3]

∴ $S_N = \frac{1}{1-r}\left(1-(1+qN)r^N\right)$ は $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{q} = \frac{2^n}{n(n-1)}$ [4]

に限りなく近づく

8、加法定理：$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

相加相乗：$P(A)+P(B) \geqq 2\sqrt{P(A)P(B)} \geqq 2a$

基本性質：$P(A\cap B) \geqq 0$，$P(A\cup B) \leqq 1$ 以上より

$P(A\cap B) \geqq 2a-1 = \max\{2a-1, 0\}$ (4行)

9、(1) Aだけ：$a(1-b)(1-c)$，他も同様でこれらは互いに排反だから $a(1-b)(1-c)+b(1-c)(1-a)+c(1-a)(1-b)$

$= a+b+c+3abc-2(ab+bc+ca)$

(2) 3人とも不合格：$(1-a)(1-b)(1-c)$ の余事象だから

$1-(1-a)(1-b)(1-c) = a+b+c+abc-ab-bc-ca$

(3) A, B：$ab(1-c)$，他も同様 ~~だから~~ で互いに排反だから

$ab(1-c)+bc(1-a)+ab(1-c) = ab+bc+ca-3abc$