C2 前末、2019（微積1）第2章

試験答案用紙　　　番号　　　氏名

1. (1) [1] $t=\frac{\pi}{3}$ に対応する点 $(4\sin\frac{2}{3}\pi,\ 2\sin\pi)=(2\sqrt{3},\ 0)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/3} = \left.\frac{6\cos 2t}{8\cos 3t}\right|_{t=\pi/3} = \frac{3}{2}$ ∴ $y=\frac{3}{2}x-3\sqrt{3}$

[2] $t=-1$ に対応する点 $(1-1,\ 1+2)=(0,\ 3)$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = \left.\frac{-6t^2}{2t}\right|_{t=-1} = \cancel{4}\ 3$ ∴ $y=\cancel{4}\,3x+3$

(2) [1] $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9=3(t^2-4t+3)$ より $=3(t-1)(t-3)$

[1] $\alpha=\frac{dv}{dt}=6t-12$ より

[1] [1] $\boxed{-3}$　[2] $\boxed{0}$

[2] $v=3(t-1)(t-3)$ から　$t=\boxed{1,\ 3}$

(3) [1] $y'=2\sin x\cos x$　$(=\sin 2x)$

$y''=2\cos^2 x-2\sin^2 x$　$(=2\cos 2x)$

[2] $y'=-\frac{1}{(1+x)^2}$,　$y''=\frac{2}{(1+x)^3}$

[3] $y'=\frac{2}{2x-1}$,　$y''=-\frac{4}{(2x-1)^2}$

(4) [1] $y'=-e^{1-x}=-y$　∴ $y^{(n)}=(-1)^n e^{1-x}$

[2] $y'=\frac{1}{x-1}$, $y''=\frac{(-1)}{(x-1)^2}$, …, $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$

$y^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ も同じ

(5) $(e^x)^{(n)}=e^x$ [1], $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ [2]

$(e^x\sin x)^{(4)}=\sum_{n=0}^{4}{}_4C_n$ [3] $(e^x)^{(n)}(\sin x)^{(4-n)}$ [4]

$=\sum_{n=0}^{4}{}_4C_n\, e^x \sin\left(x+\frac{4-n}{2}\pi\right)$ [5]

$=e^x(\sin x+4\cos x-6\sin x-4\cos x+\sin x)$

$=-4e^x\sin x$ [6]

2. (1) [1] $y'=12x^3-12x^2$, $y''=36x^2-24x=0$ ∴ $x=0,\ \frac{2}{3}$

x	…	0	…	$\frac{2}{3}$	…
y''	+	0	−	0	+
y					

∴ $(0,\ 0)$, $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{16}{27}\right)$

[2] $y'=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$,　$y''=-\frac{2(x^2+3)^2-2x\cdot 4x(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$y''=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}=0$ ∴

x	…	−1	…	1	…
y''	+	0	−	0	+
y					

∴ $\left(\pm 1,\ \frac{1}{4}\right)$

(2) $y'=3x^2-12x+9$ [1], $y''=6x-12$ [2] より

$y'=0$ を解いて $x=\boxed{1,\ 3}$ [3]　$y''=0$ を解いて $x=2$ [4]

x	…	1	…	2	…	3	…
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	4	↘	2	↘	0	↗

[5] 1　[6] 2　[7] 3

[8] +　[9] −

[10] −　[11] +

[12] ↗　[13] 4　[14] ↘　[15] 2　[16] ↘　[17] 0　[18] ↗

従って 極大値 $y=\boxed{4}$ [19], 極小値 $y=\boxed{0}$ [20], 変曲点は $(2,\ 2)$ [21] となる

1(2) 両段

3. (1) Pに接線の傾きは $3t^2$ [1] だから, Pにおける接線の方程式は $y=3t^2(x-t)+t^3+1=3t^2x+1-2t^3$ [2]

よって Q の座標は $\left(\frac{2t^3-1}{3t^2},\ 0\right)$ [3] なので

$QR=t-\frac{2t^3-1}{3t^2}=\frac{t^3+1}{3t^2}$ [4]　(∵ $t>-1$, $t\neq 0$)

以上より △PQRの面積を $f(t)$ とおくと

$f(t)=\frac{1}{2}(t^3+1)\cdot\frac{(t^3+1)}{3t^2}=\frac{(t^3+1)^2}{6t^2}$ [5]

(2) $f'=\frac{2(t^3+1)\cdot 3t^2\cdot 6t^2-12t(t^3+1)^2}{36t^4}$

$=\frac{3t^3(t^3+1)-(t^3+1)^2}{3t^3}=\frac{(t^3+1)(2t^3-1)}{3t^3}$

(6行) 7点 4点

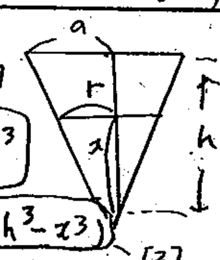
tの範囲から増減表をかくと

t	−1	…	0	…	$2^{-1/3}$	…
f'	0	+		−		+
f	0	↗		↘		↗

$f\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)=\frac{2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{6}=\frac{3}{4\times\sqrt[3]{2}}$ (極小値)

2点 (6行)

4. (1) $x:r=h:a$ から $r=\frac{a}{h}x$



よって残っている水の $\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{\pi a^2}{3h^2}x^3$ [1]

排出された量

$\frac{1}{3}\pi a^2h-\frac{1}{3}\pi a^2\frac{x^3}{h^2}=\frac{\pi a^2(h^3-x^3)}{3h^2}$ [2]

∴ $\frac{\pi a^2(h^3-x^3)}{3h^2}=v_0t$ より　$x^3=h^3-\frac{3h^2v_0t}{\pi a^2}$

$x^3=\frac{h^2}{\pi a^2}(\pi a^2h-3v_0t)$ [3] 6

(3行)

(2) (1)から $3x^2\frac{dx}{dt}=-\frac{3v_0h^2}{\pi a^2}$

∴ $\frac{dx}{dt}=-\frac{v_0h^2}{\pi a^2x^2}$　これに $x=\frac{h}{2}$ を代入して

$\frac{dx}{dt}=-\frac{v_0h^2}{\pi a^2}\cdot\frac{4}{h^2}=-\frac{4v_0}{\pi a^2}$　(3行)

2

※ $x=\frac{h}{2}$ となる t を求めなくてもできる!

ロピタルを使わず，分母,分子を x^2 で割るところが Point

5. (1) 与式 $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x}}{2\cdot\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ (3行) $\boxed{4点}$

(2) $y = (e^{2x} + 3x)^{1/x}$ とおく．(∞^0 型なので 対数をとって考える)

$\lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(e^{2x}+3x)}{x}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4e^{2x}}{2e^{2x}+3}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{8e^{2x}}{4e^{2x}} = 2 \quad \therefore \lim_{x\to\infty} (e^{2x}+3x)^{1/x} = e^2$ (4行) $\boxed{5点}$

6. $y' = \underbrace{\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}}_{(1)}$ より $(1+x)\,y' = \underbrace{\boxed{\dfrac{1}{2}}}_{(2)}\,y$

両辺を $(n-1)$ 回微分すれば

$(1+x)\,y^{(n)} + \underbrace{\boxed{{}_{n-1}C_1}}_{(3)}\,y^{(n-1)} = \dfrac{1}{2}\,y^{(n-1)}$

$(\boxed{n-1})$

$\therefore (1+x)\,y^{(n)} + \left(\underbrace{\boxed{n-\frac{3}{2}}}_{(4)}\right) y^{(n-1)} = 0$ $\quad \boxed{\dfrac{2n-3}{2}}$

$x=0$ と代入して $a_n = y^{(n)}(0)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ と表せ

$a_n = \underbrace{\boxed{-\dfrac{2n-3}{2}}}_{(5)}\,a_{n-1} = \left(\underbrace{\boxed{-\dfrac{2n-3}{2}}}_{(5)}\right)\left(\underbrace{\boxed{-\dfrac{2n-5}{2}}}_{(6)}\right) a_{n-2}$

$= \dfrac{(-1)^2(2n-3)(2n-5)}{2^2}\,a_{n-2}$

$\therefore a_n = \dfrac{(-1)^{\boxed{n}}(\boxed{2n-3})!!}{2^{\boxed{n}}}\,a_0$ $\quad$ (7) n (8) $2n-3$

$(2n-3)!! = \dfrac{(2n-3)!}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-4)} = \dfrac{(\underbrace{\boxed{2n-3}}_{(8)})!}{2^{\underbrace{\boxed{n-2}}_{(9)}}(\underbrace{\boxed{n-2}}_{(10)})!}$

$\therefore a_n = \dfrac{(-1)^{\underbrace{\boxed{n}}_{(7)}}(\underbrace{\boxed{2n-3}}_{(8)})!}{2^{\underbrace{\boxed{2n-2}}_{(11)}}(\underbrace{\boxed{n-2}}_{(10)})!}$, $a_0 = 1$ $\boxed{12点}$ (10行)

(1)	(2)
(3)	(4)
(5)	(6)
(7)	(8)
(9) 1点	
(10) 1点	
(11) 2点	

7段

7. $\dot{x} = -\dfrac{1}{(t-1)^2}$, $\dot{y} = -\dfrac{1}{(t+1)^2}$ より (1) $\boxed{\dfrac{(t-1)^2}{(t+1)^2}}$ 1点

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{1}{\dot{x}} = \dfrac{d}{dt}\left(1 + \dfrac{-4t}{(t+1)^2}\right)\cdot\left(-(t-1)^2\right)$

$= \dfrac{4t-4}{(t+1)^3}\cdot\left(-\cancel{(t-1)^2}\right) = \boxed{-4\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^3}$ 3点

4. (2) $x = h/2$ となる t を求めなくてもよい方法を示したが

(1) から

$x = \left(\dfrac{h^2}{\pi a^2}\right)^{1/3}(\pi a^2 h - 3v_0 t)^{1/3}$ より

$\dfrac{dx}{dt}$ を求めてできる。

$\dfrac{dx}{dt} = -v_0\left(\dfrac{h^2}{\pi a^2}\right)^{1/3}(\pi a^2 h - 3v_0 t)^{-2/3}$ … (※)

であるが $x = \dfrac{h}{2}$ のとき $x^3 = \dfrac{h^3}{8}$ なので

これを (1) で導いた $x^3 = \dfrac{h^2}{\pi a^2}(\pi a^2 h - 3v_0 t)$ に

代入して $\pi a^2 h - 3v_0 t = \dfrac{\pi a^2 h}{8}$

ここで t を出さずに 左辺をこのままにして (※) に代入する!

あとは 簡単に 同じ結論が出る.

5 (2) 別解 $(e^{2x}+3x)^{1/x} = e^2\left\{\left(1+\dfrac{3x}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}$

$= e^2\left\{\left(1+\dfrac{3x}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{3x}}\right\}^{\frac{3}{e^{2x}}}$

$\to e^2 \cdot e^0 = e^2 \quad \because \dfrac{3x}{e^{2x}} \to 0 \ (x\to\infty)$