C1 後中 2017

2016年度試験答案用紙

番号　　　氏名

1. (1) [1] $\underbrace{ab=cd}$ かつ $ac=bd$ だから 前者から $b=\frac{cd}{a}$ これと後者より ([1]点)

$ac=\frac{cd^2}{a}$ ∴ $a^2=d^2$ ∴ $a=d$ これと後者から $b=c$ ∴ $a=d,\ b=c$

[2] $a=b$, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ より $\boxed{a=b}$

(2) $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{x\mid(x-4)(x-8)\leqq 0\}=\{4,5,6,7,8\}$ より

[1] $A\cap B=\boxed{\{4,6,8\}}$　[2] $A\cup B=\boxed{\{2,4,5,6,7,8,10\}}$

[3] $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\boxed{\{1,2,3,5,7,9,10\}}$

[4] $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\boxed{\{1,3,9\}}$　[5] $A-B=\boxed{\{2,10\}}$

[6] $B-A=\boxed{\{5,7\}}$

[7] $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C=\{1,3,9\}\cap\{3,4,5,7,8\}=\boxed{\{3\}}$

[8] $\overline{A\cap B}\cup\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}=\{4,8\}$

$=\boxed{\{1,2,3,5,6,7,9,10\}}$

(3) [1] $n(A)=\frac{250}{2}=\boxed{125}$　[2] $\frac{250}{3}=83+\frac{1}{3}$ より $n(B)=\boxed{83}$

[3] $n(C)=\frac{250}{5}=\boxed{50}$

[4] $A\cap B$：6の倍数であるから $\frac{250}{6}=41.6\cdots$ ∴ $n(A\cap B)=\boxed{41}$

[5] $B\cap C$：15の倍数であるから $\frac{250}{15}=16.6\cdots$ ∴ $n(B\cap C)=\boxed{16}$

[6] $C\cap A$：10の倍数であるから $n(C\cap A)=\frac{250}{10}=\boxed{25}$

[7] $A\cap B\cap C$：30の倍数であるから $\frac{250}{30}=8.3\cdots$ ∴ $n(A\cap B\cap C)=\boxed{8}$

[8] $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=125+83+50-41-16-25+8=\boxed{184}$

2. (1) [1] $x=3\to x^2=9$ (真), $x^2=9\to x=3$ (偽) ∴ $\boxed{十分}$

[2] $x^2=0\iff x=0$ なので $\boxed{必要十分}$

[3] x,y は実数だから $x^2+y^2=0\iff x=y=0$ ∴ $\boxed{必要十分}$

[4] $xy=0\to x=y=0$ (偽), $x=y=0\to xy=0$ (真) ∴ $\boxed{必要}$

[5] $2x+y=5\to x=2, y=1$ (偽), $x=2, y=1\to 2x+y=5$ (真) $\boxed{必要}$

[6] $x^2=1\to x=1$ (偽), $x=1\to x^2=1$ (真) $\boxed{必要}$

[7] $a=b=2\to ab=4$ (真), $ab=4\to a=b=2$ (偽) $\boxed{十分}$

(2) まず「$x>0$ かつ $y>0\to x+y>0$」は 真である。 (2:1)

[1]「$x+y\leqq 0\to x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」 [2] 真

[3]「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0\to x+y\leqq 0$」 [4] 偽　$x=0$, $y=1$ 反例

[5]「$x+y>0\to x>0$ かつ $y>0$」 [6] 偽　裏が偽なので

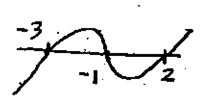
(3) 第1式から $-3x>-9$ ∴ $x<3$, 第2式から $-x>-1$ ∴ $x<1$

以上より $\boxed{x<1}$

(4) [1] 6倍して $2(5x-2)\geqq 3\left(\frac{7}{2}x-1\right)$

$10x-4\geqq 21x-6$ ∴ $11x\leqq 2$ ∴ $\boxed{x\leqq\frac{2}{11}}$

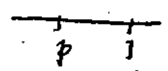
[2] $(x+1)(x+3)(x-2)=0$ より $x=-3,-1,2$



よって $\boxed{x\leqq -3,\ -1\leqq x\leqq 2}$

[3] $(x-2)(x+1)<0$ より $\boxed{-1<x<2}$

[4] $x^2-(p+1)x+p=(x-1)(x-p)\geqq 0$. $p<1$ だから



$\boxed{x\leqq p,\ x\geqq 1}$

[5] $3x^2-2x+1=0$ の判別式 D とすれば $\frac{D}{4}=1-3=-2<0$

従って $3x^2-2x+1>0$ となるから $\boxed{解なし}$

(5) 判別式を D とすれば $\frac{D}{4}=4-3m^2>0$ ∴ $m^2<\frac{4}{3}$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}<m<\frac{2}{\sqrt{3}}$. 2次方程式より $m\neq 0$ ∴ $\boxed{-\frac{2}{\sqrt{3}}<m<0,\ 0<m<\frac{2}{\sqrt{3}}}$

3. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-(\boxed{3x^2y+3xy^2})-3xyz$ (1)

$=(x+y+z)(\boxed{(x+y)^2-z(x+y)+z^2})-\boxed{3xy}(x+y+z)$ (2) (3)

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-(\boxed{xy+yz+zx}))$ (4)

$=(x+y+z)\cdot\boxed{\frac{1}{2}}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$ [5]

$=\frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(\boxed{z-x})^2)\geqq 0$ (6)

∴ $x^3+y^3+z^3-3xyz\geqq 0$ 等号成立 $\iff\boxed{x=y=z}$ (7)

$a+b+c\geqq 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$ なので $\frac{a+b+c}{3}\geqq\boxed{\sqrt[3]{abc}}$ (8)

$S=\sqrt{\frac{L}{2}\boxed{\left(\frac{L}{2}-a\right)\left(\frac{L}{2}-b\right)\left(\frac{L}{2}-c\right)}}$ (9)

ここで $\sqrt{\left(\frac{L}{2}-a\right)\left(\frac{L}{2}-b\right)\left(\frac{L}{2}-c\right)}=\left(\sqrt[3]{\left(\frac{L}{2}-a\right)\left(\frac{L}{2}-b\right)\left(\frac{L}{2}-c\right)}\right)^{\boxed{\frac{3}{2}}}$ [10]

$\leqq\left(\frac{\frac{3}{2}L-\boxed{(a+b+c)}}{3}\right)^{3/2}=\frac{L^{3/2}}{\boxed{6^{\frac{3}{2}}}}$ (11) [12]　(等号成立 $\iff a=b=c$)

従って $S\leqq\sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{L^3}{6^3}}=\boxed{\frac{1}{12\sqrt{3}}}L^{\boxed{2}}$ [14]　[14] 2

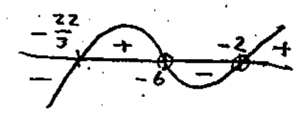
[13] $=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{36}}$

4. $\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x+6}\geqq 0$　$\frac{3x+22}{(x+2)(x+6)}\geqq 0$

両辺に $(x+2)^2(x+6)^2$ をかける. ただし $x\neq -6$, $x\neq -2$.

$3\left(x+\frac{22}{3}\right)(x+2)(x+6)\geqq 0$. 左辺が0になるのは小さい順に

$x=-\frac{22}{3},-6,-2$ だから



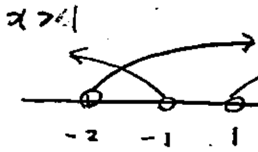
$-\frac{22}{3}\leqq x<-6$, $x>-2$

(5行)

5. 第1式から $4x-4>3x-6$ ∴ $x>-2$

第2式から $(x+1)(x-1)>0$ ∴ $x<-1$, $x>1$

以上より $-2<x<-1$, $x>1$



(3行)

6 (1) 対偶を証明する。n が 3の倍数でないならば，n を3で割った余りは1か2なので $n=3h+1$ または $n=3h+2$ とする。($h\in\mathbb{Z}$) $n=3h+1$ のとき

~~$n=3h+1$ のとき~~ $n^3=(3h+1)^3=27h^3+27h^2+9h+1$

$=3(9h^3+9h^2+3h)+1$ 　($9h^3+9h^2+3h\in\mathbb{Z}$)

よって n^3 は3の倍数でない。同様に $n=3h+2$ のとき

$n^3=(3h+2)^3=27h^3+5\overset{4}{}h^2+36h+8=3(9h^3+18h^2+12h+2)+2$ 　($9h^3+18h^2+12h+2\in\mathbb{Z}$)

よって n^3 はこのときも3の倍数ではない。従って n が3の倍数でないならば n^3 も3の倍数でないことが示せた。 6 ~~8~~9行

(2) $\sqrt[3]{3}$ は有理数と仮定する。即ち $\sqrt[3]{3}=\frac{b}{a}$，a, b は自然数で $\boxed{既約}$ とする。このとき $b^3=3a^3$。よって b^3 は3の倍数だから(1)より $b=3h$ ($h\in\mathbb{N}$) と表せる。

∴ $3a^3=(3h)^3=27h^3$ より $a^3=9h^3$ より a も3の倍数。

a, b ともに3の倍数となり $\frac{b}{a}$ が既約であることに矛盾する。

従って $\sqrt[3]{3}$ は無理数である (6行)

「既約」と「既約であることに矛盾する」がないと×　背理法なので何に対して矛盾するのかが大切!

---

7. $|x-1|=\begin{cases}\boxed{x-1}\ ^{(1)} & (x\geqq 1)\\ \boxed{1-x}\ ^{(2)} & (x<1)\end{cases}$，$|x-6|=\begin{cases}\boxed{x-6}\ ^{(3)} & (x\geqq 6)\\ \boxed{6-x}\ ^{(4)} & (x<6)\end{cases}$ より

$|x-1|+|x-6|=\begin{cases}\boxed{2x-7}\ ^{(5)} & (x\geqq 6)\\ \boxed{5}\ ^{(6)} & (1\leqq x<6)\\ \boxed{7-2x}\ ^{(7)} & (x<1)\end{cases}$

∴ ①の解は

$x\geqq 6$ のとき　$2x-7>7$　∴ $\boxed{x>7}$ (8)

$1\leqq x<6$ のとき　$5>7$　$\boxed{解なし}$ (9)

$x<1$ のとき　$7-2x>7$　$\boxed{x<0}$ (10)

以上より $x<0,\ x>7$ (11)