固有値とその応用

○ ３次の正方行列の固有多項式

次のことは覚えておくと便利

> A が３次の正方行列で $A=\left(a_{ij}\right)$ のとき，
>
> $$\phi_A(u)=-\left(u^3-(tr\,A)\,u^2+\left(\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\right)u-|A|\right)$$
>
> $$=-u^3+(tr\,A)\,u^2-\left(\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\right)u+|A|$$

ただし，$tr\,A=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ である。つまり対角成分の和である。

［証明］ $\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\end{pmatrix}$ とし，R^3 の標準基底を $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ とする。$A-uE$ を列ベクトルを用いて

表せば，$A-uE=\begin{pmatrix}a_{11}-u&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}-u&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{matrix}}-\boxed{\begin{matrix}u\\0\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}a_{12}-0\\a_{22}-u\\a_{32}-0\end{matrix}&\begin{matrix}a_{13}-0\\a_{23}-0\\a_{33}-u\end{matrix}\end{pmatrix}$

$=\left(\boldsymbol{a}_1-u\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{a}_2-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right)$ となるので，行列式の多重線形性を用いれば

$$\phi_A(u)=\left|\boldsymbol{a}_1-u\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{a}_2-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{a}_2-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|+\left|\boldsymbol{a}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|$$
$$+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3-u\boldsymbol{e}_3\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\boldsymbol{a}_3\right|+\left|\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|+\left|\boldsymbol{a}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3\right|+\left|\boldsymbol{a}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|$$
$$+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\boldsymbol{a}_3\right|+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{a}_3\right|$$
$$+\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|$$

ここで，$\left|\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\boldsymbol{a}_3\right|=|A|$，$\left|\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&-u\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}u$

$\left|\boldsymbol{a}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&-u&0\\a_{31}&0&-u\end{vmatrix}=a_{11}u^2$，$\left|-u\boldsymbol{e}_1\quad-u\boldsymbol{e}_2\quad-u\boldsymbol{e}_3\right|=-u^3$

などから等式が証明される。　（証終）

○ 固有ベクトルと線形独立

教科書139ページに「異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である」と書いてある。これを証明する。

正方行列 A の<u>相異なる</u> r 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とし，それぞれに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ とするならば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ は線形独立である。

［証明］ r に関する数学的帰納法で証明する。

$r=1$ のとき，λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は零ベクトルでないから線形独立である。

$r=k$ のとき命題が成り立つと仮定する。いま，A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ としそれぞれに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ とする。一次関係式

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k+\alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0} \quad \cdots \ ①$$

①の左から A をかけると，$A\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i \ (i=1,2,\cdots,k+1)$ を用いれば

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0} \quad \cdots \ ②$$

②から① $\times\lambda_{k+1}$ を引けば

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$$

仮定から $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は線形独立だから

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})=\cdots=\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})=0$$

固有値は相異なるので $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$ これを①に代入。$\alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0}$ となり

$\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}$ より $\alpha_{k+1}=0$ となる。従って，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ は線形独立となる。（証終）

○ 相似な２つの正方行列と固有多項式

A, B をともに n 次の正方行列とする。このとき，ある<u>正則行列</u> P が存在して

$$B=P^{-1}AP$$

が成り立つとき，A と B は相似であるといい，記号で $A\sim B$ と表す。つぎのことが成り立つ。

（1） $A\sim A$ （2） $A\sim B$ ならば $B\sim A$ （3） $A\sim B, B\sim C$ ならば $A\sim C$

（1）は，$A=E^{-1}AE$ より明らか。

（2）は，$B=P^{-1}AP$ より，$A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}BP^{-1} \ \therefore B\sim A$

（3）は，$B=P^{-1}AP, C=Q^{-1}BQ$ より $C=Q^{-1}P^{-1}APQ=(PQ)^{-1}A(PQ) \ \therefore A\sim C$

固有多項式についてつぎのことが成り立つ。

$A\sim B$ ならば，この２つの正方行列の固有多項式は一致する。すなわち A, B の固有値は一致する。

［証明］ $|B-uE|=\left|P^{-1}AP-uE\right|=\left|P^{-1}AP-P^{-1}uEP\right|=\left|P^{-1}(A-uE)P\right|$

$=\left|P^{1}\right||A-uE||P|=|A-uE| \quad \because \left|P^{-1}\right||P|=\left|P^{-1}P\right|=|E|=1$ （証終）

○ 固有空間の次元

n 次正方行列 A の固有方程式の解（すなわち A の固有値）λ が k 重解だったとする。

例： $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$|A-uE|=-u^3+3u+2$ より $u^3-3u-2=0$

$\Rightarrow$ $(u+1)^2(u-2)=0$ 従って，$u=\lambda=-1$ は２重解。　　//

λ を A の固有値とし，$V(\lambda)$ を λ に対する固有空間とする。すなわち $V(\lambda)=\left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \right\}$

部分空間 $V(\lambda)$ の次元について次のことが成り立つ。

> λ を A の固有値とし，その重複度を k とすれば（つまり λ は固有方程式の k 重解）
>
> $1 \leqq dim\, V(\lambda) \leqq k$

［証明］ A を n 次の正方行列とする。$V(\lambda)$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たすから線形変換 $A-\lambda E$ の核のベクトルである。つまり，$V(\lambda)=Ker(A-\lambda E)$， $rank(A-\lambda E)<n$ だから次元定理から，$dim\, V(\lambda)=n-rank(A-\lambda E)\geqq 1$

つぎに $dim\, V(\lambda)=d$ とする。また，$V(\lambda)$ の基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_d$ としこれに $n-d$ 個のベクトルを加えて $V\left(=\mathrm{R}^n \text{ または } \mathrm{C}^n\right)$ の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{b}_{d+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ をつくる。

$Q=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_d & \boldsymbol{b}_{d+1} & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ とおくと Q は正則行列である。このとき

$A\boldsymbol{a}_i=\lambda\boldsymbol{a}_i$， $\boldsymbol{a}_i=Q\boldsymbol{e}_i$ つまり $Q^{-1}\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,\cdots,d)$ ただし，$\boldsymbol{e}_i$ は標準基底。

である。従って

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}AQ &= Q^{-1}A\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_d & \boldsymbol{b}_{d+1} & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \\
&= Q^{-1}\begin{pmatrix} A\boldsymbol{a}_1 & A\boldsymbol{a}_2 & \cdots & A\boldsymbol{a}_d & A\boldsymbol{b}_{d+1} & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \\
&= Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{a}_1 & \lambda\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \lambda\boldsymbol{a}_d & A\boldsymbol{b}_{d+1} & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{e}_1 & \lambda\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda\boldsymbol{e}_d & Q^{-1}A\boldsymbol{b}_{d+1} & \cdots & Q^{-1}A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda E_d & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q^{-1}A\boldsymbol{b}_{d+1} & \cdots & Q^{-1}A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

E_d は d 次の単位行列。O は零行列。

$\therefore\ \phi_A(u)=\phi_{Q^{-1}AQ}(u)=\phi_{\lambda E_d}(u)\,\phi_C(u)=(\lambda-u)^d\phi_C(u)$　　$\therefore\ d\leqq k$

つまり，$dim\, V(\lambda)\leqq k$　　　　（証終）

注意： この証明の中でつぎの事実を用いた。（証明してごらん）

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ （A_{11}, A_{22} は正方行列）であれば，$\phi_A(u)=\phi_{A_{11}}(u)\,\phi_{A_{22}}(u)$

問１ 正方行列 A が正則であることと，A が０の固有値をもたないことは同値であることを示せ。

問２ n 次正方行列 A が正則なとき，A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすれば，A^{-1} の固有値は $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}$ であることを証明せよ。

問３　n 次の正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次の等式を示せ。

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad tr\,A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

問４　$A^2 = A$ を満たす正方行列の固有値は０か１であることを示せ。

○ 対角化可能条件

教科書１４２ページに対角化可能の条件が書いてある。ただこれは実際固有ベクトルを求めなければならない。対角化可能条件を別の表現をつかった定理を紹介する。

> A を n 次正方行列とし，その相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とする。またこれらの固有値の重複度をそれぞれ $k_1, k_2, \cdots, k_r$ とする。このとき，A が対角化可能であるための必十条件は，$dim\,V(\lambda_i) = k_i \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$ である。

［証明］ A が対角化可能で，その対角化行列を P とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \underbrace{\overbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}}}_{k_1} & & & O \\ & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \overbrace{\begin{matrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix}}^{k_r} \end{pmatrix}$$

P の列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1k_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots \boldsymbol{p}_{2k_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{r1}, \boldsymbol{p}_{r2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{rk_r}$

とすれば，これらは線形独立で明らかに $\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{ik_i}$ は固有値 λ_i の固有ベクトルだから

$dim\,V(\lambda_i) \geqq k_i$　他方，前述の定理から $dim\,V(\lambda_i) \leqq k_i$　$\therefore\ dim\,V(\lambda_i) = k_i$

逆に $dim\,V(\lambda_i) = k_i \ (i = 1, 2, \cdots, r)$ が成り立てば $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ で異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立より，各固有空間の基底をならべた行列 P は正則で $P^{-1}AP$ は上のように対角行列になる。　（証終）

例： $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，$\phi_A(u) = -(1-u)^2(1+u)$

$\therefore\ \lambda_1 = 1$（重複度２），$\lambda_2 = -1$　$rank(A-E) = 1$ $\therefore\ dim\,V(\lambda_1) = 3 - 1 = 2$

$rank(A+E) = 2$ $\therefore\ dim\,V(\lambda_2) = 3 - 2 = 1$　従って A は対角化可能である。　//

重要： A が n 次の正方行列ならば，$dim\,V(\lambda) = n - rank(A - \lambda E)$　（次元定理より）

系： A の固有方程式が重解を持たないならば，A は対角化可能である。

$\because$ λ_i を A の固有値とし，$V(\lambda_i)$ をその固有空間とすれば，$1 \leqq dim\,V(\lambda_i) \leqq k_i$，ただし，$k_i$ は固有値 λ_i の重複度で，重解を持たないから $k_i = 1$ $\therefore$ $dim\,V(\lambda_i) = 1$ （証終）

例： k 次の正方行列 $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \bigcirc \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$ を α に関する k 次の $Jordan$ 細胞といい，記号で $J_k(\alpha)$ と表す。例えば，$J_4(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。$J_k(\alpha)$ の固有多項式は

$$|J_k(\alpha) - uE| = \begin{vmatrix} \alpha - u & 1 & & & \bigcirc \\ & \alpha - u & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha - u \end{vmatrix} = (\alpha - u)^k$$

だから，固有値は α だけである。ただし，k 重解。また固有ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \bigcirc \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

より，$x_1 \neq 0$，$x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$， 従って，固有空間 $V(\alpha) = \left\langle \boldsymbol{e}_1 \right\rangle$ となるから $k \geqq 2$ のとき $J_k(\alpha)$ は対角化不可能である。　//

○ 行列の三角化

対角化不可能でもつぎのことは必ず成り立つ。上三角行列は教科書 69 ページで初登場する。

> n 次の正方行列 A は適当な正則行列 U によって
>
> $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & * & \cdots & * \\ & \mu_2 & * & \cdots & * \\ \bigcirc & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \mu_n \end{pmatrix}$ と上三角行列に変換される。とくに U として直交行列をとることができる。

［証明］ 次数 n に関する帰納法で証明する。$n = 1$ のときは明らか。$n - 1$ 次の正方行列は直交行

列により上三角行列にすることができるとする。μ_1 を A の１つの固有値とし，μ_1 に対する固有ベクトルで大きさが１のものを $\boldsymbol{a}_1$ とする。これに適当な $n-1$ 個のベクトルを加えて（後述する）$Gram-Schmidt$ の直交化法により $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を R^n の正規直交基底になるようにできる。このとき $U_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ は明らかに直交行列で

$$ {}^tU_1A\boldsymbol{a}_1=\mu_1{}^tU_1\boldsymbol{a}_1=\mu_1\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{a}_1\\ {}^t\boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ {}^t\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}\boldsymbol{a}_1=\mu_1\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1\\ {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ {}^t\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_1\end{pmatrix}=\mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\mu_1\boldsymbol{e}_1 $$

$$ \therefore\ {}^tU_1AU=\begin{pmatrix}\mu_1\boldsymbol{e}_1 & {}^tU_1A\boldsymbol{a}_2 & \cdots & {}^tU_1A\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}, $$ ただし，

$$ {}^tU_1A\boldsymbol{a}_i=\begin{pmatrix}b_{1i}\\ b_{2i}\\ \vdots\\ b_{ni}\end{pmatrix}\quad(i=2,3,\cdots,n) $$

帰納法の仮定から $n-1$ 次の直交行列 V が存在して

$$ {}^tV\begin{pmatrix}b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}V=\begin{pmatrix}\mu_2 & * & * & \cdots & *\\ & \mu_3 & * & \cdots & *\\ & & & \ddots & \vdots\\ \bigcirc & & & & \mu_n\end{pmatrix} $$

$U_2=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & V\end{pmatrix}$ は直交行列だから，$U=U_1U_2$ とすれば U も直交行列で

$$ {}^tUAU={}^tU_2\left({}^tU_1AU_1\right)U_2={}^tU_2\begin{pmatrix}\mu_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}U_2=\begin{pmatrix}\mu_1 & * & * & \cdots & *\\ & \mu_2 & * & \cdots & *\\ & & & \ddots & \vdots\\ \bigcirc & & & & \mu_n\end{pmatrix} $$

（証終）

例題： $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$ を直交行列で上三角行列に変換せよ。

［解］ $\phi_A(u)=\begin{vmatrix} 2-u & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -u & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -u & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -2-u \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -u & 2-2u & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2-u & 1-u^2 & -u & 2+u \\ 1 & 2-2u & -2 & -u \end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix} -u & 2-2u & 1 \\ -2-u & 1-u^2 & 2+u \\ 1 & 2-2u & -u \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1-u & 2(1-u) & 1 \\ 0 & (1-u)(1+u) & 2+u \\ 1-u & 2(1-u) & -u \end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix} 1-u & 2(1-u) & 1 \\ 0 & (1-u)(1+u) & 2+u \\ 0 & 0 & -1-u \end{vmatrix}=(1-u)^2(1+u)^2$， $\therefore \lambda_1=1$， $\lambda_2=-1$ が固有値で，いずれも２重解。$\lambda_1=1$ のとき，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=(x_i)$ とすれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， $\therefore x_1=x_4$，$x_2=x_3$， $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{a}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，これに $\boldsymbol{a}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

を加える。$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は固有空間 $V(1)$ の正規直交基底で，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ は R^4 の正規直交基底になる。さらに $P_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}$ とすれば P_1 は直交行列で

${}^tP_1AP_1=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$， ここで $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とし，B の固有値は -1 だからそれに対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるから，上と同様にして $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき B を Q で変換すると，${}^tQBQ=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。従って，$P=P_1\begin{pmatrix} E & O \\ O & Q \end{pmatrix}$ とすれば

$$
{}^tPAP=\begin{pmatrix} E & O \\ O & {}^tQ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ O & Q \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

（解終）

問５　$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ を直交行列で上三角行列に変換せよ。

問６　$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ を直交行列で上三角行列に変換せよ。

$g(u)$ を u の多項式で，$g(u)=a_nu^n+a_{n-1}u^{n-1}+\cdots+a_1u+a_0$ とする。このとき正方行列 A に対して

$$
g(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E
$$

と定義する。最後の定数項に相当する部分に単位行列があることに注意する。このように記号を定義するとつぎの美しい定理が成り立つ。これを *Frobenius* の定理という。

> n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ とすれば，$g(A)$ の固有値は $g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$ である。

［証明］ A を上三角行列に変換しておく。$U^{-1}AU=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ & O & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

自然数 k に対して，$\left(U^{-1}AU\right)^k=\left(U^{-1}AU\right)\left(U^{-1}AU\right)\cdots\left(U^{-1}AU\right)=U^{-1}A^kU$ だから，

$$U^{-1}A^kU=\left(U^{-1}AU\right)^k=\begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2^k & * & \cdots & * \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

（注意：$*$ は証明上必要ない部分で $U^{-1}AU$ の $*$ とは値が一般に異なる）また，

$$U^{-1}g(A)U=U^{-1}\left(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E\right)U$$

$$=a_nU^{-1}A^nU+a_{n-1}U^{-1}A^{n-1}U+\cdots+a_1U^{-1}AU+a_0E$$

$$=a_n\left(U^{-1}AU\right)^n+a_{n-1}\left(U^{-1}AU\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(U^{-1}AU\right)+a_0E=g\left(U^{-1}AU\right)$$

$$\therefore\ U^{-1}g(A)U=g\left(U^{-1}AU\right)=\begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & * & \cdots & * \\ & g(\lambda_2) & * & \cdots & * \\ \bigcirc & & \ddots & & \vdots \\ & & & & g(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

これより明らかに $U^{-1}g(A)U$ の固有値は $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ で，$U^{-1}g(A)U$ と $g(A)$ の固有値は一致するから，定理を得る。（証終）

例： 前述の例題の $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値は 1，-1 であった。従って例えば A^2 の固有値は，1^2，$(-1)^2=1$，即ち，1 だけである。また，A^2-A の固有値は，$1-1=0$，$1+1=2$ だから，0 と 2 である。

問７ A を n 次の正方行列とし，その固有多項式を $\phi_A(u)$ とする。A が n 個の異なる固有値を持つならば，$\phi_A(A)$ は零行列であることを証明せよ。

（補足） 実は異なる固有値が n 個より少なくても，つまり固有方程式が重解をもっても $\phi_A(A)$ は零行列になることが証明されている。この美しい定理を *Cayley−Hamilton* の定理という。証明はむずかしい。

Cayley−Hamilton の定理 正方行列 A の固有多項式を $\phi_A(u)$ とすれば，$\phi_A(A)=O$

（この定理の証明は省略する）

例： $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $-u^3+3u+2$ になるので，$-A^3+3A+2E=O$ これから

例えば，$A^3 = 3A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ この結果は A^3 を計算したのではなく，$3A + 2E$ を計算して

だしたものである。このようにして A のべき乗を計算するテクニックがある。　　//

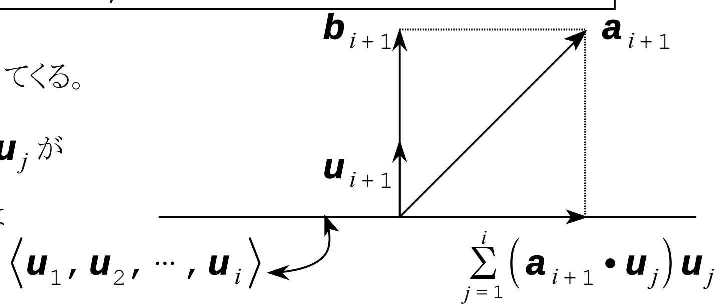
○ *Gram−Schmidt* の直交化法

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立とする。また $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ とし，内積が定義されているとする。つまり $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基底になっている。このとき以下の手順で互いに直交する単位ベクトルからなる V の基底をつくる方法がある。

> *Gram−Schmidt* の直交化法
>
> $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1 / \|\boldsymbol{b}_1\|$
>
> $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b}_2 / \|\boldsymbol{b}_2\|$
>
> $\vdots$
>
> $\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{a}_{i+1} \bullet \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j, \quad \boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{b}_{i+1} / \|\boldsymbol{b}_{i+1}\|$
>
> $\vdots$
>
> $\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} (\boldsymbol{a}_n \bullet \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j, \quad \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{b}_n / \|\boldsymbol{b}_n\|$
>
> とすれば，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は正規直交基底。また
>
> $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ （張る空間は変わらない！）

この手法は第４章§２で例題の中に出てくる。

まず $\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{a}_{i+1} \bullet \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j$ が零ベクトルでないことを確認する。これは張る空間が変わらないことの証明とも関係するので両方を同時に証明する。n に関する数学的帰納法を用いる。



Gram−Schmidt の直交化法の概念図

$n = 1$ のとき。$\boldsymbol{a}_1$ は明らかに零ベクトルではないから，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ また，

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1 / \|\boldsymbol{b}_1\| = \boldsymbol{a}_1 / \|\boldsymbol{a}_1\| \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1 = \|\boldsymbol{a}_1\|\boldsymbol{u}_1 \quad \therefore \langle \boldsymbol{a}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle$ 従って $n = 1$ のとき成り立つ。

$n = i$ のとき成り立つと仮定する。もし，$\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{a}_{i+1} \bullet \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0}$ とすれば

$\boldsymbol{a}_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{a}_{i+1} \bullet \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j \quad \therefore \boldsymbol{a}_{i+1} \in \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_i \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i \rangle$

つまり $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ は線形従属になり $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立という仮定に反する。

そこで $\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{b}_{i+1} / \|\boldsymbol{b}_{i+1}\|$ とすれば，$\sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{a}_{i+1} \bullet \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i \rangle$ だから

$\boldsymbol{u}_{i+1} \in \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \right\rangle \quad \therefore \left\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_{i+1} \right\rangle \subset \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \right\rangle$

また $\boldsymbol{a}_{i+1} = \left\| \boldsymbol{b}_{i+1} \right\| \boldsymbol{u}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \left(\boldsymbol{a}_{i+1} \bullet \boldsymbol{u}_j \right) \boldsymbol{u}_j \in \left\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_{i+1} \right\rangle$

$\therefore \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \right\rangle \subset \left\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_{i+1} \right\rangle$

以上により，$\left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_{i+1} \right\rangle$ （証終）

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が正規直交基底であることは自分で確認してごらん。つまり

$\boldsymbol{u}_i \bullet \boldsymbol{u}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ が成り立つ。

○ 二次形式

$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす i, j についての総和

実数を係数とする変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の斉二次式 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$ を二次形式という。

例： $3x^2 - xy + 3y^2 = 3x^2 - 2 \bullet \frac{1}{2} xy + 3y^2$ ただし，$x_1 = x$，$x_2 = y$ とし，$a_{11} = 3$，$a_{22} = 3$，

$a_{12} = -\frac{1}{2}$ と考える。 $\varDelta$

$a_{ji} = a_{ij} \quad (j > i)$ と定義すれば，行列 $A = \left(a_{ij} \right)$ は実対称行列になる。さらに

$\boldsymbol{x} = {}^t\left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right)$ とすれば，$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$ となる。これを $F\left(\boldsymbol{x} \right)$ と表す。即ち，$F\left(\boldsymbol{x} \right) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$

例： $3x^2 - xy + 3y^2 = (x \quad y) \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\varDelta$

A は実対称行列だから直交行列 T により必ず対角化できる。A の正の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$

負の固有値を $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_q$ とする。$\left(0 \leqq p \leqq q \leqq n \right)$ $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と変換すれば

$$F\left(\boldsymbol{x} \right) = G\left(\boldsymbol{y} \right) = {}^t\boldsymbol{y} \left({}^tTAT \right) \boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2 + \lambda_{p+1} y_{p+1}^2 + \cdots + \lambda_q y_q^2$$

となる。

例： $A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\phi_A(u) = u^2 - 6u + \frac{35}{4} = 0 \quad \therefore \lambda_1 = \frac{7}{2}, \lambda_2 = \frac{5}{2}$

それぞれの固有ベクトルから直交行列による対角化行列を求めれば，$T=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

従って $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と変換すれば $3x^2-xy+3y^2=\dfrac{7}{2}(x')^2+\dfrac{5}{2}(y')^2$ となる。　Δ

$F(\boldsymbol{x})=G(\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{y}\,({}^tTAT)\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_p y_p^2+\lambda_{p+1}y_{p+1}^2+\cdots+\lambda_q y_q^2$ でさらに

$y_1=\dfrac{z_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \cdots, y_p=\dfrac{z_p}{\sqrt{\lambda_p}}, y_{p+1}=\dfrac{z_{p+1}}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}, \cdots, y_q=\dfrac{z_q}{\sqrt{-\lambda_q}}, y_{q+1}=z_{q+1}, \cdots, y_n=z_n$

即ち，$P=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \text{\huge 0} & \\ & & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_p}} & & & & & & \\ & & & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} & & & & & \\ & \text{\huge 0} & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_q}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

として，$\boldsymbol{y}=P\boldsymbol{z}$ と変換すれば

$F(\boldsymbol{x})=\widetilde{G}(\boldsymbol{z})=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_q^2 \quad (0\leqq p\leqq q\leqq n)$

この形を二次形式の**標準形**という。

Claim： $F(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ のとき，上記 q は $q=\mathrm{rank}\,A$ であることは明らか。大切なことは p の値もどのような変換をしても一定。これがつぎの *Sylvester* の慣性律とよばれる定理である。

> *Sylvester* の慣性律
> 二次形式 $F(\boldsymbol{x})$ をどのような正則線形変換によって標準形に直しても，正・負の項の個数は一定である。

［証明］ $F(\boldsymbol{x})$ が２つの正則線形変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{z}$ によってそれぞれ

$F(\boldsymbol{x})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_q^2=z_1^2+\cdots+z_s^2-z_{s+1}^2-\cdots-z_q^2$

となったとする。$p<s$ として矛盾を導く。$P^{-1}=(a_{ij})$，$Q^{-1}=(b_{ij})$ とすれば

$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = Q^{-1}\boldsymbol{x}$ である。そこでつぎの連立斉１次方程式を考えれば

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

$$b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \cdots + b_{jn}x_n = 0 \quad (j = s+1, s+2, \cdots, n)$$

式の個数が $p + (n - s) = n - (s - p) < n$ で未知数の個数より小さいから非自明解 $\boldsymbol{x}_0$ をもつ。

∵ 上の連立斉１次方程式の係数行列の階数は n より小さい。よってその係数行列の核の次元は１以上である。

$\boldsymbol{y}_0 = P^{-1}\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{z}_0 = Q^{-1}\boldsymbol{x}_0$ とすれば $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z}_0 \neq \boldsymbol{0}$ であり

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{p+1\,0} \\ \vdots \\ y_{n\,0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{pmatrix} z_{1\,0} \\ \vdots \\ z_{s\,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $0 \leqq p < s$ から $s > 1$ に注意すれば

$$F(\boldsymbol{x}_0) = -y_{p+1\,0}^2 - \cdots - y_{q\,0}^2 \leqq 0, \quad F(\boldsymbol{x}_0) = z_{1\,0}^2 + \cdots + z_{s\,0}^2 > 0$$

これは矛盾。よって $p \geqq s$. 同様にして $p \leqq s$ が示せるので $p = s$ （証終）

補足： $F(\boldsymbol{x}_0) = -y_{p+1\,0}^2 - \cdots - y_{q\,0}^2 \leqq 0$ は $F(\boldsymbol{x}_0) = -y_{p+1\,0}^2 - \cdots - y_{q\,0}^2 < 0$ ではないのか？

違います。$\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{0}$ であるからその成分 $y_{p+1\,0}, \cdots, y_{n\,0}$ のなかの少なくとも１つは０ではないが,

$q \leqq n$ なのでもし $q < n$ ならば $y_{q+1\,0}, \cdots, y_{n\,0}$ なかで少なくとも１つ０でないものがあり,

$y_{p+1\,0}, \cdots, y_{q\,0}$ はすべて０である可能性がある。

○ 二次形式の正値, 負値, 半正値, 半負値

二次形式 $F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が

（1） 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であるとき, 半正値であるという。

さらに零でない任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $F(\boldsymbol{x}) > 0$ であるとき, 正値であるという。

（2） 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \leqq 0$ であるとき, 半負値であるという。

さらに零でない任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $F(\boldsymbol{x}) < 0$ であるとき, 負値であるという。

プリント１２ページ, 上から３行目の式

$$F(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}\,({}^tTAT)\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2 + \lambda_{p+1} y_{p+1}^2 + \cdots + \lambda_q y_q^2$$

で $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ $(0 \leqq q \leqq n)$ は A の０でない固有値だから

（1） A の固有値がすべて正 $\Leftrightarrow$ $F(\boldsymbol{x})$ は正値

A の固有値がすべて負でない $\Leftrightarrow$ $F(\boldsymbol{x})$ は半正値

（2） A の固有値がすべて負 $\Leftrightarrow$ $F(\boldsymbol{x})$ は負値

A の固有値がすべて正でない $\Leftrightarrow$ $F(\boldsymbol{x})$ は半負値

となる。実は固有値を求めなくても正値であることが判定できる。

二次形式 $F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して $A_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ とすれば $F(\boldsymbol{x})$ が正値であるための必十条件は，すべての $k=1,2,\cdots,n$ について $|A_k|>0$ が成り立つことである。

注意：$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ は A の首座 k 次小行列である。

例： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$A_1 = (0)$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A_3 = A$ である。

この定理は必要性の証明だけ示す。十分性は省略する。

［証明］（必要性）正値とすれば A の固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ はすべて正である。

$\therefore\quad |A_n| = |A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0$

また $\boldsymbol{y}$ を零ベクトルでない任意の k 次元実数ベクトルとし，$\boldsymbol{y}$ からつくった n 次元実数ベクトル

$\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に対して

$$F(\boldsymbol{x}_k) = {}^t\boldsymbol{x}_k A\boldsymbol{x}_k = {}^t\boldsymbol{y}A_k\boldsymbol{y} > 0$$

すなわち，A_k を行列としてもつ二次形式は正値である。よって，上と同様にして $|A_k|>0$ が得られる。

（証終）

例題： 二次形式 $x^2+y^2+z^2+2a(yz+zx+xy)$ が正値となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

［解答］この二次形式の行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ だから

$$|A_1| = 1 > 0,\quad |A_2| = 1-a^2 > 0,$$

$$|A| = (1-a^2)^2 - (a-a^2)^2 = (1-a)^2(1+2a) > 0 \quad \therefore\quad -\frac{1}{2} < a < 1$$

（解終）

補足： 負値であるための必十条件は，k が偶数なら $|A_k|>0$，k が奇数なら $|A_k|<0$ である。

$\because$ 上記の定理を用いてよいなら証明は簡単である。$F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が負値ならば ${}^t\boldsymbol{x}(-A)\boldsymbol{x}$ は正値である。$B=-A$ と表せば，$|B_k| = |-A_k| = (-1)^k|A_k| > 0$　従って

k：偶数 $\Rightarrow |A_k|>0$，k：奇数 $\Rightarrow |A_k|<0$