行列（線形写像）の階数

○ 行列の列ベクトル（48ページ）による表示

例： $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ を２つの列ベクトル $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ を考え、$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2\end{pmatrix}$

と表すことがある。

この考えは一般の m 行 n 列の行列でも使われる。

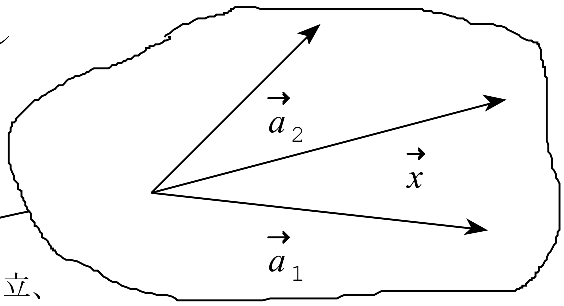
$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix}$$

ただし、$a_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$

○ ベクトルの線形独立、線形従属および線形結合

線形独立、線形従属（21，42ページ）および線形結合（21，42ページ）は線形代数において重要な概念である。

線形結合： n 個のベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ の線形結合とは。$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ を<u>任意の数</u>としたとき、$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\vec{a}_j=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n$ と表されるベクトルのこと。これは $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ を骨とした傘をイメージすればよい。右の図は２つのベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ の線形結合で表されるベクトルが、この２つのベクトルが含まれる平面上にあることを意味している。



$\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2$

線形独立、線形従属：

上の線形結合の概念を用いると分かりにくかった線形独立、線形従属が理解しやすい。

n 個のベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ が線形従属

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ のうち、少なくとも１つのベクトルが他の $n-1$ 個以下のベクトルの線形結合で表せる。$\Leftrightarrow$ $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ が少なくとも１つ０でない数の組 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ で成り立つ。

n 個のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ が線形独立

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ のどのベクトルも他の $n-1$ 個以下のベクトルの線形結合で表すことができない。$\Leftrightarrow$ $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ が成り立つのは、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の値がすべて０の時だけである。

○ 行列の階数（$rank$）の意味と重要性

行列を列ベクトルを用いて、$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix}$ と表されていたとする。n 個のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ が線形独立なら A の階数は n である。もし線形従属なら少なくとも１つのベクトルが他の $n-1$ 個以下のベクトルの線形結合で表せるので、それを除いていく。これを繰り返すといつか残ったベクトルが線形独立になる。残ったベクトルの個数は除き方によらず $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ が与えられた時点で決まっていることが知られている。この残ったベクトルの個数が A の階数である。つまり A の階数とは n 個のベクトルの組、$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ のうちの線形独立なベクトルの最大個数である。この残ったベクトルが非常に重要であることが知られている。ここでは詳細は述べないが A の本質的な属性に関係していることが知られている。

ではなぜ教科書のような方法で A の階数が求められるのであろうか。線形独立、線形従属のところで書いた、$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$ を見てほしい。これは行列を用いると次の連立１次方程式を考えていることがわかる。（このことは大切なので自分で確認すること）

$$A\vec{x}=\vec{0} \quad \text{ただし、} \vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\ \vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

連立１次方程式を解くのだから、消去法で求められる、となる。具体例で見ていこう。

例題：$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

解：$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

これは、A を列ベクトルで表したとき、$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3=\vec{0}$ を解くと、

$\alpha_1+2\alpha_3=0,\ \alpha_2+\alpha_3=0$ となることを表している。$\alpha_3=1$ とすれば、$\alpha_1=-2,\ \alpha_2=-1$

つまり、$-2\vec{a}_1-\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{0}$ $\therefore \vec{a}_3=2\vec{a}_1+\vec{a}_2$ よって、$\vec{a}_3$ を除くことができる。$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ で同様のことを考えれば、$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2=\vec{0}$ これは、$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解くことだから上の解法を見ればわかるように、

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 即ち上の解法の前２列の変化とまったく同じことになり改めて解く必要はない。そして結果は、$\alpha_1 = 0$，$\alpha_2 = 0$ となるから、$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$ は線形独立である。従って、$rank\,A = 2$ （解終）

○ 階数の性質

証明は省略する。行列の和や積はそれが定義できる行列の型とする。

（1） A：m 行 n 列ならば、$rank\,A \leqq min\,(m\,,\,n)$

（2） A の階数とその転置行列の階数は等しい。即ち、$rank\,{}^tA = rank\,A$

（3） $rank\,(A+B) \leqq rank\,A + rank\,B$

（4） $rank\,AB \leqq min\,(rank\,A\,,\,rank\,B)$

（5） $P\,,\,Q$ が正則（62 ページ）ならば、$rank\,PAQ = rank\,A$

（6） $|\,rank\,A - ramk\,B\,| \leqq rank\,(A-B)$

（7） $A\,,\,B$ が n 次の正方行列（48 ページ）ならば、$rank\,A + rank\,B - n \leqq rank\,AB$

以上。

これらの証明にはベクトルの線形独立、線形従属の概念が多く使われる。また上の番号の性質を用いて証明するものもある。例えば、（4）を用いて（5）が証明できる。（4）を認めて（5）を証明してみる。

$rank\,PAQ \leqq min\,(rank\,PA\,,\,rank\,Q) \leqq rank\,PA \leqq min\,(rank\,P\,,\,rank\,A) \leqq rank\,A$

一方、$A = P^{-1}\,(PAQ)\,Q^{-1}$ だから同様に考えて $rank\,A \leqq rank\,PAQ$

$\therefore\ rank\,PAQ = rank\,A$

○ 問題

１．$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。ただし、a は実数とする。

［解］ $A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a^3 \end{pmatrix}$

a は実数だから、$a \neq 1$ ならば、$rank\,A = 3$，$a = 1$ ならば、$rank\,A = 2$ （解終）

２．連立１次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$ （ただし、$a\,,\,b$ は定数）は $a\,,\,b$ がどのような値のとき解をもたないか。

［解］ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1-2a & -3a & b-a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-a \end{pmatrix}$

$a \neq -1$ のとき、係数行列と拡大係数行列の階数は同じ３になるのでこの場合は解がある。従ってまず

$a=-1$ である。このとき $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$ となるので解をもたないためには $b \neq 1$ である。

まとめると、$a=-1$, $b \neq -1$ となる。 （解終）

３． 連立１次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、次の性質をもつとき a の値を求めよ。 [1] ただ１つの解をもつ　[2] ２つ以上の解をもつ　[3] 解をもたない

［解説］ 解答の前に解説する。[3] とそれ以外は係数行列と拡大係数行列の階数を調べればよい。問題は解をもつ場合、どのようなときに [1] や [2] になるかである。これに関して次のことが知られている。

> n 個の未知数をもつ連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ が<u>解をもつ</u>とき、この方程式の解の自由度は $n-rank\,A$ となる。とくに $rank\,A=n$ のとき、かつこのときに限り、この方程式はただ１つの解をもつ。

「解の自由度」とは自由に値をとることができる解の個数であり、解を表すときに出てくる任意定数の個数でもある。

［解］ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & a & -1 & -2 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & a & 5 & 4 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \\ 0 & a & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \\ 0 & 0 & 5-\dfrac{a}{2}(a+3) & 4-2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \\ 0 & 0 & -(a+5)(a-2) & 4(2-a) \end{pmatrix}$$

係数行列を A 、拡大係数行列を C と表す。

$Case\,1$　$a \neq -5$ かつ $a \neq 2$ のとき、$rank\,A = rank\,C = 3$ なので解をもち、A の階数が未知数の個数に等しいので、ただ１つの解をもつ。

$Case\,2$　$a=2$ のとき、$rank\,A = rank\,C = 2$ なので解をもち、解の自由度が $3-2=1$ なので、２つ以上の解をもつ。

$Case\,3$　$a=-5$ のとき、$rank\,A=2$, $rank\,C=3$ なので、解をもたない。 （解終）

［補足］ $Case\,1$ のとき解は、$z=\dfrac{4}{a+5}$, $y=2-\dfrac{(a+3)z}{2}=\dfrac{4}{a+5}$, $x=3z-3=\dfrac{-3a-3}{a+5}$

$Case\,2$ のとき解は、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから、$z=t$ （任意定数）として $y=2-\dfrac{5}{2}t$,

$x=3t-3$ （補足終）

○ 行列の核（$kernel$） 正確には「線形写像の核」という。

連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ （定数項の値がすべて 0）を**連立斉１次方程式**といい、重要な方程式であることが知られている。まず押さえておきたいことは

連立斉１次方程式は、必ず解をもつ

ことである。実際、$\vec{x}=\vec{0}$ は解である。またこれは $rank\,A = rank\begin{pmatrix} A & \vec{0} \end{pmatrix}$ がつねに成り立つことからもわかる。解をもつので前述の解の自由度の話しが使える。未知数の個数が n とすれば

$rank\,A = n \;\Rightarrow$ ただ１つの解、$\vec{x}=\vec{0}$ をもつ （すべて０という解）

$rank\,A < n \;\Rightarrow$ $\vec{x}=\vec{0}$ と、それ以外の解をもつ （実際無限に多くの解をもつ）

もう１つ押さえてほしいのが、未知数の個数が n のとき、$rank\,A \leqq n$ である。これは階数の性質（１）から明らかである。（未知数の個数 ＝ A の列の数）

さて、以下の定義がある。

$A\vec{x}=\vec{0}$ のすべての解を集めた集合を行列 A の核といい、記号で $ker\,A$ と表す

$rank\,A = n$ ならば、$ker\,A$ の要素は零ベクトル $\vec{x}=\vec{0}$ だけである。重要なのは $rank\,A < n$ のときである。問題を１つ解いてみる。

問題： 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の核、$ker\,A$ を求めよ。

［解］ $A\vec{x}=\vec{0}$ を解く。定数項が $\vec{0}$ なので係数行列の行基本変形だけ考えればよい。（定数項を表す列は変化しないから）

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 解を $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば、

$x=t\,,\; y=t\,,\; z=-t$ （t は任意定数）となる。即ち、$\vec{x}=\begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。 （解終）

［補足］ 上の問題で未知数の個数は３、$rank\,A = 2$ だから $\vec{x}=\vec{0}$ と、それ以外の解をもつことがわかる。実際、t は任意定数だから無限個の解がある。$ker\,A$ は集合だから解答の最後は

$$ker\,A = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \text{ は任意定数} \right\}$$

と書くのが正式な表現である。$ker\,A$ の図形的意味を考える。空間内の直線の方程式（34 ページ）より、$ker\,A$ とは原点を通り方向ベクトルが $(1, 1, -1)$ の直線となる。このように $ker\,A$ が原点を通る直線になるとき、$ker\,A$ は１次元であるという。（次元の正確な定義はいつか話すかもしれない）実は $n - rank\,A$ の値が $ker\,A$ の次元の値であることが知られている。（n は未知数の個数、即ち A の列の数）

（補足終）

問題： 連立１次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け。

［解］ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore x = 3t - 3,\ y = -\frac{5}{2}t + 2,\ z = t$ これを列ベクトルで表せば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-3 \\ -\frac{5}{2}t+2 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（解終）

［補足］ この解の第１項（t があるほう）を見てほしい。行基本変形が終了した時点の行列をみると $t\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ が表す連立斉１次方程式の解であることがわかる。実際 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ を解く過程は問題の方程式の係数行列の基本変形になっている。（点線の四角の部分）一方、解の第２項 $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は明らかにこの連立１次方程式の（１つの）解である。（$t = 0$ の場合だから）言いたいことは $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解は、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の核を表すベクトルとこの方程式の１つの解の和で表されているということである。これは一般に成り立つことが知られている。即ち

$A\vec{x} = \vec{b}$ の解が存在するならば、その解は A の核を表すベクトルとこの方程式の１つの解の和で現される

この事実は線形代数の重要な基本定理の１つである。
最後に次の問題にチャレンジしてみよう。

問題： r 個のベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r$ が $\ker A$ の要素ならば、$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r$ の線形結合で表される任意のベクトル、$\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_r\vec{x}_r$ も $\ker A$ の要素であることを証明せよ。

○ 階数の性質に関する補足
先にあげた以下の性質について証明できるものはそれを示す。

（1） A : m 行 n 列ならば、$rank\,A \leqq min\,(m\,,\,n)$

（2） A の階数とその転置行列の階数は等しい。即ち、$rank\,{}^tA = rank\,A$

実は、まず（2）を証明してから（1）を証明するのが常道。ただし、（2）は第３章で学習する行列式の概念が必要なので、ここでは証明を記さない。（2）を用いると（1）の証明は容易。

（1）の証明

まず A の列ベクトルは最大 n 個だから、階数の定義より $rank\,A \leqq n$ は明らか。次に ${}^tA$ は n 行 m 列になるので、$rank\,{}^tA \leqq m$ $\therefore\ rank\,A = rank\,{}^tA \leqq m$ $\therefore\ rank\,A \leqq min\,(m\,,\,n)$ （証終）

（3） $rank\,(A+B) \leqq rank\,A + rank\,B$

これもベクトルが張る部分空間の概念が必要なので証明は記さない。

（4） $rank\,AB \leqq min\,(rank\,A\,,\,rank\,B)$

この証明はまず次の $Claim$ を示す。

$Claim$ A : $m \times n$ 行列、$\vec{b}_1\,,\,\vec{b}_2\,,\,\cdots\,,\,\vec{b}_p$: $n \times 1$ の列ベクトルとし、
$\vec{c}_k = A\vec{b}_k\ \left(k=1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,p\right)$ とすれば、$\vec{c}_1\,,\,\vec{c}_2\,,\,\cdots\,,\,\vec{c}_p$ が線形独立ならば、$\vec{b}_1\,,\,\vec{b}_2\,,\,\cdots\,,\,\vec{b}_p$ も線形独立である。

$Claim$ の証明

$\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \cdots + \beta_p\vec{b}_p = \vec{0}$ … ① ならば $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$ を示す。
①の左から A を掛けると、行列の積の性質（教科書56ページ）から
$\beta_1 A\vec{b}_1 + \beta_2 A\vec{b}_2 + \cdots + \beta_p A\vec{b}_p = A\vec{0} = \vec{0}$, $A\vec{b}_k = \vec{c}_k\ \left(k=1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,p\right)$ だから
$\beta_1\vec{c}_1 + \beta_2\vec{c}_2 + \cdots + \beta_p\vec{c}_p = \vec{0}$, $\vec{c}_1\,,\,\vec{c}_2\,,\,\cdots\,,\,\vec{c}_p$ は線形独立より $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$
従って、$\vec{b}_1\,,\,\vec{b}_2\,,\,\cdots\,,\,\vec{b}_p$ は線形独立である。（証終）

（4）の証明

$A\,,\,B$ をそれぞれ $m \times k$ 行列、$k \times n$ 行列とする。B を列ベクトル用いて表し、それを
$B = \left(\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \cdots\ \ \vec{b}_n\right)$ とする。$AB = \left(A\vec{b}_1\ \ A\vec{b}_2\ \ \cdots\ \ A\vec{b}_n\right)$ だから $rank\,AB = r$ とすれば
最大 r 個の線形独立なベクトル $A\vec{b}_{i_1}\,,\,A\vec{b}_{i_2}\,,\,\cdots A\vec{b}_{i_r}$ が存在する。このとき $Claim$ で示したことから
$\vec{b}_{i_1}\,,\,\vec{b}_{i_2}\,,\,\cdots\,,\,\vec{b}_{i_r}$ は線形独立である。よって行列の階数の定義から $r \leqq rank\,B$, 即ち
$rank\,AB \leqq rank\,B$ が示せた。階数の性質（2）を繰り返し用いれば
$rank\,AB = rank\,{}^t(AB) = rank\,{}^tB\,{}^tA \leqq rank\,{}^tA = rank\,A$ $\therefore\ rank\,AB \leqq rank\,A$
以上より、$rank\,AB \leqq min\,(rank\,A\,,\,rank\,B)$ （証終）

（5） $P\,,\,Q$ が正則（62ページ）ならば、$rank\,PAQ = rank\,A$

すでに（4）を用いて証明済み。

（6） $|\,rank\,A - ramk\,B\,| \leqq rank\,(A-B)$

性質の（3）を用いる

（6）の証明

$A=(A-B)+B$ だから、$rank\,A=rank\big((A-B)+B\big)\leqq rank\,(A-B)+rank\,B$

$\therefore\ rank\,A-rank\,B\leqq rank\,(A-B)$，また明らかに $rank\,(B-A)=rank\,(A-B)$ だから

$rank\,B=rank\big((B-A)+A\big)\leqq rank\,(B-A)+rank\,A$

$\therefore\ rank\,B-rank\,A\leqq rank\,(B-A)=rank\,(A-B)$

以上より、$|\,rank\,A-ramk\,B\,|\leqq rank\,(A-B)$ （証終）

（7） A，B が n 次の正方行列（48 ページ）ならば、$rank\,A+rank\,B-n\leqq rank\,AB$

この証明には「次元定理」とよばれる定理を用いる。つぎのことが次元定理より成り立つ。

A：n 次の正方行列ならば、$rank\,A+nul\,A=n$

ここで、$nul\,A=dim\,(Ker\,A)$ であり、$Ker\,A$ とは $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たすベクトル全体からなる集合で n 次元実数ベクトル空間 R^n の「部分空間」とよばれるものを形成することが知られている。その部分空間から線形独立なベクトルを選び１組とするとき、選ぶことができる線形独立なベクトルの最大個数をその部分空間の「次元」という。$dim\,(Ker\,A)$ は $Ker\,A$ の次元を表す記号である。

（7）の証明

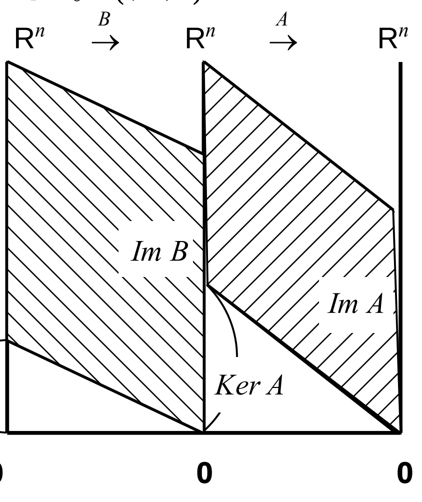
$rank\,A=r$，$rank\,B=s$ とすれば、$nul\,A=n-r$，$nul\,B=n-s$ だから、$A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ の解は $n-r$ 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_{n-r}$ の線形結合で表せる。同様にして $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $n-s$ 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_{n-s}$ の線形結合で表せる。そこで $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_k$ を満たす解の１つを $\boldsymbol{z}_k$（そのような解が存在しない場合は考えない）とすると、$AB\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は

$\boldsymbol{z}_{k_1}$，$\boldsymbol{z}_{k_2}$，…，$\boldsymbol{z}_{k_p}$，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_{n-s}$ の線形結合で表せる。$\big(p\leqq n-r\big)$

$\boldsymbol{z}_{k_1}$，$\boldsymbol{z}_{k_2}$，…，$\boldsymbol{z}_{k_p}$，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_{n-s}$ は線形独立は限らないので

$n-rank\,AB\leqq p+(n-s)\leqq n-r+n-s$

$\therefore\ r+s-n\leqq rank\,AB$，$rank\,A=r$，$rank\,B=s$ だから証明できた。（証終）



$rank\ A=dim\,(Im\ A)$，$rank\ B=dim\,(Im\ B)$

○ 基本行列と行および列基本変形

問題集 33～35 ページに書かれていることを解説する。

授業で説明した消去法における３つの行基本変形は、基本行列とよばれる正則行列（従って正方行列）を左から掛けることと同じであることが知られている。**<u>単位行列</u>** E に次の操作をすることで基本行列が求まる。

（1） E の i 行を c 倍する。ただし、$c\neq 0$

この行列を $P_i\,(c)$ と表す。

（2） E の i 行に j 行の c 倍を加えた行列

この行列を $P_{ij}\,(c)$ と表す。ただし、$i\neq j$

（3） E の i 行と j 行を交換する。この行列を P_{ij} と表す。ただし、$i\neq j$

注意： これらはいずれも正方行列である。その次数 n も表現する必要がある場合は、それぞれ

$P_n(i\,;c)$, $P_n(i\,,j\,;c)$, $P_n(i\,,j)$ と表す。

例： 4次の場合

$$P_3(-2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_{14}(3)=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_{24}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad \varDelta$$

つぎのことが容易に確認できる。

$A : m\times n$ 行列のとき、$P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij} を m 次とすれば

$P_i(c)A \to$ A の i を c 倍する。

$P_{ij}(c)A \to$ A の i 行に j 行の c 倍を加える。

$P_{ij}A \to$ A の i 行と j 行を交換する。

つぎことも容易に確認できる。

$P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij} はいずれも正則で

$$P_i(c)^{-1}=P_i\left(\frac{1}{c}\right),\ P_{ij}(c)^{-1}=P_{ij}(-c),\ P_{ij}{}^{-1}=P_{ij}$$

この事実と階数の性質（5）より、行列 A の階数が行基本変形により求めることができることが分かる。

さらに次の事実も容易に確認できる。

$A : m\times n$ 行列のとき、$P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij} を n 次とすれば

$AP_i(c) \to$ A の i 列を c 倍する。

$AP_{ij}(c) \to$ A の i 列に j 列の c 倍を加える。

$AP_{ij} \to$ A の i 列と j 列を交換する。

という基本変形となり、これを列基本変形という。これと階数の性質（2）および再び（5）から、行列 A の階数を求める際は、行基本変形だけでなく列基本変形も用いてよいことが分かる。

列基本変形は行列の階数を求めるときだけ使用すること。

ただし、連立１次方程式の解法のときは、列の交換は用いてよい。(未知数の順番を変えるだけ)

しかし、逆行列を消去法で求めるときは、列基本変形は決して用いないこと！

例： 教科書77ページ、問5(1) の授業での解法は

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-3&1\\-1&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{①}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&-1\\0&3&3\end{pmatrix}$$

①： 2行に1行の −2 倍を加える。3行に1行を加える、であった。つまり基本行列を用いれば

$P_{31}(1)P_{21}(-2)A$ と同じこと。実際、

$$P_{31}(1)P_{21}(-2)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-3&1\\-1&4&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&-1\\0&3&3\end{pmatrix}$$ となる。これに $P_{32}(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ を左から掛ければ $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

となる。 $\varDelta$

$m \times n$ 行列 A に基本変形（行、列）を施して $\begin{pmatrix} E_r & O_{r,\,n-r} \\ O_{m-r,\,r} & O_{m-r,\,n-r} \end{pmatrix}$ という形にする。ただし、$E_r : r$ 次の単位行列、$O_{p,\,q} : p \times q$ 型の零行列である。このとき $\begin{pmatrix} E_r & O_{r,\,n-r} \\ O_{m-r,\,r} & O_{m-r,\,n-r} \end{pmatrix}$ を A の標準形という。明らかに r は A の階数であるから途中の変形によらずこの形は A に固有のものである。

例題： $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ を標準形に変形せよ。

解法： $A \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

①：１行と２行を交換。 ②：１行を1/3倍、３行を1/2倍。 ③： ３行に１行を加える。

$\xrightarrow{④} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑤} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑥} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑦} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

④：２<u>列</u>と３<u>列</u>を交換。 ⑤：１行に２行の −2 倍を加える。

⑥：３<u>列</u>に１<u>列</u>の３倍を加え、4<u>列</u>に１<u>列</u>の −5 倍を加える。

⑦：４<u>列</u>に２<u>列</u>の２倍を加える。（解終）

例題： 上の例題の標準形を N と表す。やはり上の A に対して、$PAQ = N$ を満たす正則行列 P, Q の１組を求めよ。

解法： P が上の行基本変形を基本行列で表したもの、Q が上の列基本変形を基本行列で表したものだから

$$E_3 \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑤} \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = P$$

$$E_4 \xrightarrow{④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑥} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑦} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q \quad \text{(解終)}$$

PAQ を実際計算すると（検算）

$$PAQ = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。