線形写像

○ 線形写像の定義

一般のベクトル空間での線形写像の定義を述べる。こちらが本質的。

> 定義（線形写像・線形変換）
>
> V, W を実ベクトル空間（スカラーが実数）とする。V から W への写像 f がつぎの条件を満たすとき、f を V から W への線形写像または一次写像という。
>
> (1) $f(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=f(\boldsymbol{a}_1)+f(\boldsymbol{a}_2) \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V)$
>
> (2) $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a}) \quad (k \in \mathrm{R}, \boldsymbol{a} \in V)$
>
> とくに $W=V$ のとき、f を V 上の線形変換または一次変換という。また上の (1), (2) の性質を線形性という。

例： 高々 n 次の実係数整式全体 $P(n;\mathrm{R})$ は通常の関数の和、定数倍によってベクトル空間の構造を持っていた。いま、$V=P(n;\mathrm{R})$, $W=P(n-1;\mathrm{R})$ とし、V から W への写像 f を

$$f: V \to W,\ f(p(x))=\frac{dp}{dx} \quad \text{（即ち、} p(x) \text{ の導関数を対応させる）}$$

と定義すれば微分の性質からこの f は V から W への線形写像となる。（確認してご覧）

またこの場合、$W=V$ 即ち、$W=P(n;\mathrm{R})$ としてもよい。つまり $f: V \to V$ として線形変換と考えることができる。

注意： 線形写像の定義の条件 (1), (2) は次のように１つにまとめることができる。

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2)=k_1f(\boldsymbol{a}_1)+k_2f(\boldsymbol{a}_2) \quad (k_1, k_2 \in \mathrm{R}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V)$$

このことを確認してご覧。つまり (1), (2) を仮定して上式が成り立つことを示し、逆に上式を仮定して (1), (2) が成り立つことを示してご覧。

○ 像空間と核

$f: V \to W$ が線形写像、V_0 が V の部分空間、W_0 が W の部分空間とする。このときつぎのことがいえる。

(1) V_0 の元（ベクトル）の f による像全体、即ち

$$f(V_0)=\{f(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in V_0\} \quad \text{（右辺の集合を左辺の記号で表す）}$$

は W の部分空間になる。（証明してご覧）また、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が V_0 の生成系、即ち

$V_0=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ ならば、$f(V_0)=\langle f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_r) \rangle$ （これは明らか）

よって、$dim\,V_0=p \Rightarrow dim\,f(V_0) \leqq p$ である。（$dim\,f(V_0)=p$ ではない）

特に、$V_0=V$ のとき、即ち、$f(V)$ を単に線形写像 f の像空間という。

(2) f により W_0 の元（ベクトル）に写される V の元全体、即ち、

$$f^{-1}(W_0)=\{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) \in W_0\} \quad \text{（右辺の集合を左辺の記号で表す）}$$

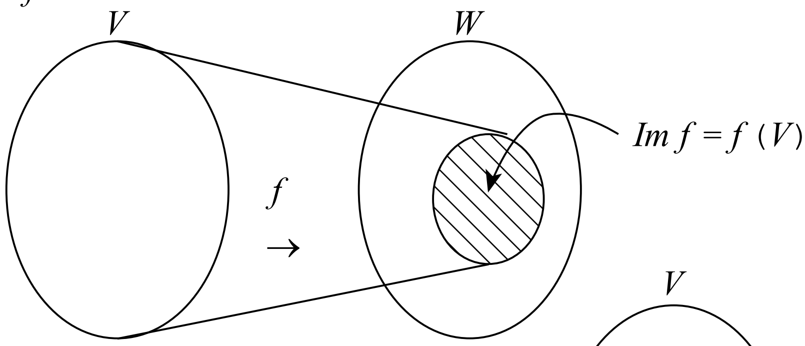
は V の部分空間になる。（証明してご覧） 特に、$W_0=\{\boldsymbol{0}\}$ （零ベクトルのみの集合は W の部分空間である） 即ち、$f^{-1}(\boldsymbol{0})$ を線形写像 f の核という。

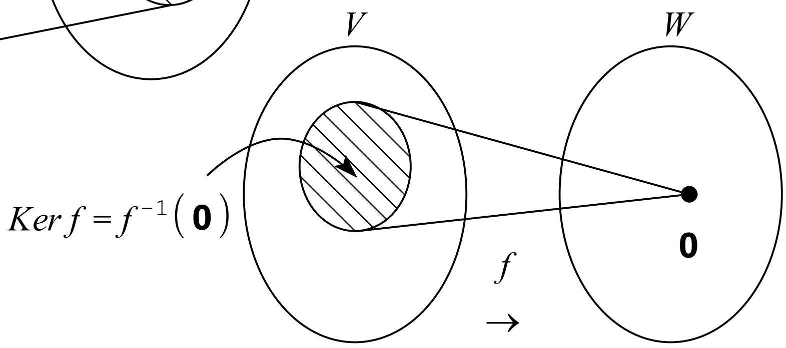
定義（像空間・核）

$f : V \to W$ が線形写像のとき、$f(V)$ を f の像空間といい、記号で $Im\, f$ と表し $f^{-1}(\mathbf{0})$ を f の核といい、記号で $Ker\, f$ と表す。

$Im\, f = W$ が成り立つとき、f を全射という。また、$Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$ のとき、f を単射という。

$Im\, f$, $Ker\, f$
の概念。





さらに次の記号を定義する。（右辺の値を左辺の記号で表す）

定義（階数・退化次数）

$Im\, f$ の次元を線形写像 f の階数といい、$rank\,(f)$ と表す。また $Ker\, f$ の次元を f の退化次数といい、$nul\,(f)$ で表す。即ち、

$rank\,(f) = dim\,(Im\, f)$ ， $nul\,(f) = dim\,(Ker\, f)$

注意： 線形写像の階数と行列の階数および線形写像の核と行列の核はまったく同じ概念になる。これはあとで説明する。

例： $f : P(n\,; \mathrm{R}) \to P(n-1\,; \mathrm{R})$ で $f(p(x)) = \dfrac{dp}{dx}$

とすれば、$Im\, f = P(n-1\,; \mathrm{R})$ であるから上への写像である。

また $rank\,(f) = dim(P(n-1\,; \mathrm{R})) = n$ である。$Ker\, f = P(0\,; \mathrm{R})$ であるから、

$nul\,(f) = dim(P(0\,; \mathrm{R})) = 1$ である。

注意： $dim(P(n\,; \mathrm{R})) = n+1$ であり、基底は $1, x, x_2, \cdots, x^n$ である。即ち、

$P(n\,; \mathrm{R}) = \langle 1, x, x_2, \cdots, x^n \rangle$ なお、$P(0\,; \mathrm{R}) = <1>$ つまり定数関数全体である。

次の定理は非常に重要であり、次元定理と呼ばれている。

定理（次元定理）
$f : V \to W$ を線形写像とし、V は有限次元とする。このとき次のことが成り立つ。
$dim\ V = rank\,(f) + nul\,(f) = dim\,(Im\,f) + dim\,(Ker\,f)$
つまり、f の像の次元と f の核の次元を加えたものが f の定義域にあたるベクトル空間 V の次元と一致する。

［証明］ $dim\ V = n$, $nul\,(f) = r$ とし、$f^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$ の基底を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ とする。
これに $\boxed{\text{適当な}\,n-r\,\text{個のベクトルを加えて、}\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_n\,\text{が}\,V\,\text{の基底}}$ になるようにする。（このようなことができることの証明は省略する）任意の $\mathbf{a} \in V$ は

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r + k_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{a}_n$$

と表せるので、$f\left(\mathbf{a}\right) = f\left(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r + k_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{a}_n\right)$
$= f\left(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r\right) + k_{r+1}f\left(\mathbf{a}_{r+1}\right) + \cdots + k_nf\left(\mathbf{a}_n\right)$
$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r \in f^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$ より、$f\left(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r\right) = \mathbf{0}$
$\therefore f\left(\mathbf{a}\right) = k_{r+1}f\left(\mathbf{a}_{r+1}\right) + \cdots + k_nf\left(\mathbf{a}_n\right)$ つまり、$Im\,f = \left\langle f\left(\mathbf{a}_{r+1}\right), \cdots, f\left(\mathbf{a}_n\right)\right\rangle$
従って、$f\left(\mathbf{a}_{r+1}\right), \cdots, f\left(\mathbf{a}_n\right)$ が線形独立であることを示せばよい。さすれば $rank\,(f) = n - r$ となるから定理の等式が示せたことになる。

$$\alpha_{r+1}f\left(\mathbf{a}_{r+1}\right) + \cdots + \alpha_nf\left(\mathbf{a}_n\right) = \mathbf{0}$$

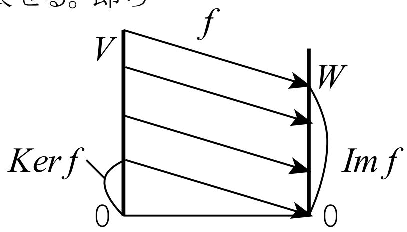
とすれば左辺は線形写像の性質から

$$f\left(\alpha_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n\right) = \mathbf{0}$$ 従って、$\alpha_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n \in f^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$

よって $\alpha_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ の線形結合で表せる。即ち

$$\alpha_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_r\mathbf{a}_r$$

$$\therefore\ \beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_r\mathbf{a}_r - \alpha_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} - \cdots - \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$



$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_n$ は V の基底で線形独立だから、
$\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0 \quad \therefore f\left(\mathbf{a}_{r+1}\right), \cdots, f\left(\mathbf{a}_n\right)$ は線形独立である。（証終）

○ 同型写像
V, W がともに実ベクトル空間（スカラーが実数）であり、$\phi : V \to W$ を線形写像とする。このとき $Im\ \phi = W$, $Ker\ \phi = \left\{\mathbf{0}\right\}$ 即ち、全射かつ単射であるならばこの線形写像 ϕ を同型写像という。
注意： $\phi : V \to W$ が同型写像ならば、逆写像 $\phi^{-1} : W \to V$ が定義できる。ϕ^{-1} も線形写像である。
V から V 自身への同型写像を正則一次変換という。
V から W への同型写像が存在するとき、V と W は同型であるといい、

$$V \cong W$$

と表す。V が有限次元ならば $V \cong W \Rightarrow dim\ V = dim\ W$ が成り立つ。

［証明］ 仮定から同型写像 $\phi : V \to W$ が存在する。ϕ は全射であるから $Im\ \phi = W$ 即ち

$$rank(\phi) = dim(Im\ \phi) = dim\ W$$

また ϕ は単射でもあるので、$Ker\ \phi = \{\mathbf{0}\}$ 従って $nul(\phi) = 0$ 次元定理から

$$dim\ V = rank(\phi) + nul(\phi) = dim\ W + 0 = dim\ W$$

（証終）

実はこの逆も成り立つ。即ち、V, W が有限次元で $dim\ V = dim\ W$ ならば、$V \cong W$ となる。

［証明］ $dim\ V = dim\ W = n$ とし、それぞれの基底を $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ とする。V から W への線形写像 ϕ を次のように定義する。

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{b}_i,\ \phi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$Claim\,1 : Im\ \phi = W$

$\because$ W の任意のベクトル $\mathbf{b}$ は基底を用いて $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i$ と一意に表せるので V のベクトルとして

$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{a}_i$ を考えれば明らかに $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ となる。

$Claim\,2 : Ker\ \phi = \{\mathbf{0}\}$

$\because$ $\phi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ ならば、$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ は線形独立だから

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

以上より ϕ は V から W への同型写像になる。（証終）

以上をまとめて次の定理を得る。

> 定理（同型条件）
> ２つの有限次元ベクトル空間 V, W が同型となるための必十条件は $dim\ V = dim\ W$ が成り立つことである。

例： $P(n\,;\mathrm{R}) \cong \mathrm{R}^{n+1}$ 同型写像として $P(n\,;\mathrm{R})$ の１組の基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ に対して

$$\phi\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

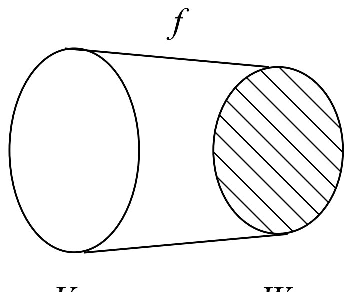
とすれば、ϕ は $P(n\,;\mathrm{R})$ から R^{n+1} への同型写像となる。

補足： 全射と単射について

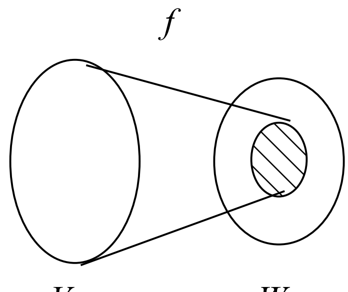
$f : V \to W$ を線形写像とする。全射とは、$Im\,f = W$ が成り立つこと、単射とは、$Ker\,f = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことであった。これはどういうことを言っているのか元（ベクトル）で説明する。

全射： $Im\,f = W$ だから W の任意の元 $\mathbf{b} \in W$ に対して V の元 $\mathbf{a} \in V$ で f により $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$

となるものが少なくとも１つあることを意味している。



全射



全射でない場合

単射： $Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$ とはどういうことであろうか。いま、V の２つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V$ の f による像が一致したとする。即ち、$f(\boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_2) \Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) = \mathbf{0}$ （$\because f$ は線形写像）

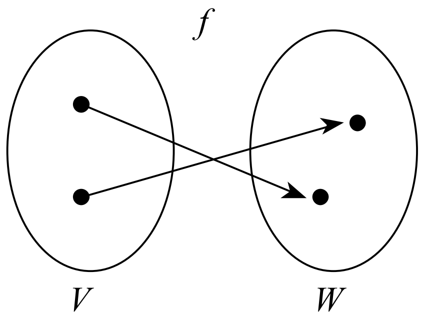
従って、$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \in Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$ よって、$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ $\therefore \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$ つまり、

$$f(\boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_2) \Rightarrow \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \ (*)$$

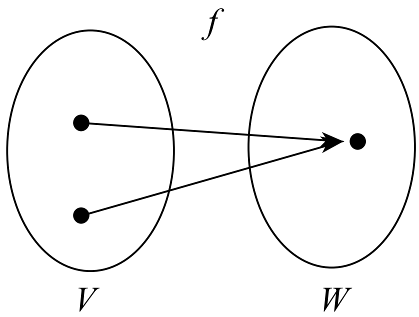
が成り立つ。逆に（*）が常に成り立てば $Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$ がいえる。（確認してご覧）これを言葉にするなら「f により同じベクトルに写るならもとのベクトルは等しい」となる。（*）の対偶を考えるともっと分かりやすい。対偶は

$$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{a}_2 \Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1) \neq f(\boldsymbol{a}_2)$$

となる。つまり「異なるベクトルは f により異なるベクトルに写る」となる。



単射



単射でない場合

例題１： 次の写像 f ： $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ は線形写像か。

（1） $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ xy \\ 0 \end{pmatrix}$ 　　（2） $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+y \\ 4x \\ x-2y \end{pmatrix}$

［解］（1） 線形写像でない。反例をあげる。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから

$f(2\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ 　一方、$2f(\boldsymbol{a}) = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 　$\therefore f(2\boldsymbol{a}) \neq 2f(\boldsymbol{a})$

（2） $\begin{pmatrix} 3x+y \\ 4x \\ x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ だから線形写像である。　　（解終）

例題２：次の線形写像 f について、$Im f$, $Ker f$ の基底を１組求めよ。

（１） f： $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$， $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+3z \\ 2x+3y+4z \end{pmatrix}$

（２） f： $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$， $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+2x_2+\cdots+nx_n \end{pmatrix}$

［解］（１） 標準基底による行列を用いると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となるから、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の階数を求めて、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\therefore rank\,(f) = dim\,(Im f) = 2$ よって １組の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ また次元定理から $nul\,(f) = dim\,(Ker f) = 3-2=1$ であり、上の基本変形の結果から、$x+y+3z=0$, $y-2z=0$ より、$z=t$ （任意の実数）として、$y=2t$, $x=-5t$

従って、$Ker f$ の１組の基底は $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

（２） 同じく行列を用いると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ だから、$rank\,(f)=1$　１組の基底は $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ である。次元定理から $nul\,(f) = dim\,(Ker f) = n-1$

$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$ を解いて、$Ker f$ のベクトルは $\begin{pmatrix} -2x_2-3x_3-\cdots-nx_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ だから１組の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の $n-1$ 個のベクトルである。　　（解終）

○ 線形写像と行列の関係

線形写像と行列の関係は今まで曖昧にしてきたが、ここで明確な説明を加える。ここでは有限次元実ベクトル空間だけ考える。

$f: V \to W$ を線形写像とし、$dim\,V = n$, $dim\,W = m$ とする。ϕ を V から R^n への自然な同型写像、ψ を W から R^m への自然な同型写像とする。詳しく述べれば、

$\left\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right\}$ を V の１組の基底、$\left\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\right\}$ を W の１組の基底とすれば

$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i \in V$ に対して、$\phi\left(\boldsymbol{a}\right) = {}^t(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n)$

$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{b}_i \in W$ に対して、$\psi\left(\boldsymbol{b}\right) = {}^t(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_m)$

という同型写像を考える。（これがそれぞれの同型写像であることは明らか）

このとき、合成写像 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ は R^n から R^m への線形写像となり、これは m 行 n 列の行列 A で表せる。この行列 A を基底 $\left\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right\}$, $\left\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\right\}$ に関する線形写像 f の行列表現という。具体的に A はどのようにして求まるのか？

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ \mathrm{R}^n \arrow[r, "\psi \circ f \circ \phi^{-1}"'] & \mathrm{R}^m \end{tikzcd}$$

$$f\left(\boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{b}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

形式的に表せば

$$\left(f\left(\boldsymbol{a}_1\right) \ \ f\left(\boldsymbol{a}_2\right) \ \ \cdots \ \ f\left(\boldsymbol{a}_n\right)\right) = \left(\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{b}_m\right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このとき、$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ である。また $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i \in V$ に対して

$f\left(\boldsymbol{a}\right) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{b}_i \in W$ とすれば容易な考察により

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる。

例題３： $P(2;\mathrm{R})$ 元（ベクトル）$p(x)$ に対して $p(x+a)$ を対応させる変換 $f : P(2;\mathrm{R}) \to P(2;\mathrm{R})$ は線形変換である。（a は定数）この線形変換の基底 $\left\{1, x, x^2\right\}$ に関する行列表現を求めよ。また基底 $\left\{x^2, x, 1\right\}$ に関する行列表現も求めよ。（基底の並びも重要）

［解］ $\left\{1, x, x^2\right\}$ のとき、$f(1) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$, $f(x) = x + a = a1 + 1x + 0x^2$

$f\left(x^2\right) = (x+a)^2 = a^2 1 + 2ax + 1x^2$ だから、f の行列表現は $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

$\{x^2, x, 1\}$ のときは、$f(x^2) = (x+a)^2 = 1x^2 + 2ax + a^2 1$ などど順番をいれかえれば f の行列表現は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(解終)

○ 基底変換

ベクトル空間の基底を換えることを考える。これを基底変換という。ここでも有限次元実ベクトル空間だけ考える。

ベクトル空間 V の２組の基底を $E = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $E' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n\}$ とする。ただし、$dim\, V = n$ とする。

$$\boldsymbol{a}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{a}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

なる関係があるとき、行列 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ を E より E' への基底の変換行列という。

注意すべきは $\boldsymbol{a} \in V$ に対して基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ のとき、$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i$

一方基底 $\{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n\}$ のとき、$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \boldsymbol{a}'_i$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

となる。つまり α_i を旧座標、α'_i を新座標と呼べば、$\begin{pmatrix} \text{旧} \\ \text{座} \\ \text{標} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \text{新} \\ \text{座} \\ \text{標} \end{pmatrix}$ となっている。

基底の変換によって線形写像の行列表現がどのように変わるかを考察する。

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathrm{R}^n \arrow[rr] & & R^n \end{tikzcd}$$

$$\phi \circ \phi'^{-1} = P$$

$f: V \to W$ を線形写像とする。また V の基底を

$E = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $E' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n\}$ とし

W の基底を $F = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$, $F' = \{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \cdots, \boldsymbol{b}'_m\}$ とする。さらに f の基底 E, F に関する行列表現を A 、基底 E', F' に関する行列表現を A' とする。E より E' への基底変換の行列を

P とし、F から F' への基底変換の行列を Q とすれば、

$$A' = Q^{-1}AP$$

が成り立つ。右の図は線形写像と基底変換およびそれらの行列との関係を示したものでダイアグラムという。
なお線形変換
$f: V \to V$ の場合は

$$A' = P^{-1}AP$$

となる。これがあとで学習する固有値に関係している。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}^n \arrow[rrr, "\psi \circ f \circ \phi^{-1} = A"] \arrow[dr, "\phi^{-1}"] & & & \mathrm{R}^m \arrow[dd, "\psi' \circ \psi^{-1} = Q^{-1}"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\
\mathrm{R}^n \arrow[uu, "\phi \circ \phi'^{-1} = P"] \arrow[ur, "\phi'^{-1}"] \arrow[rrr, "\psi' \circ f \circ \phi'^{-1} = A' = Q^{-1}AP"'] & & & \mathrm{R}^m
\end{tikzcd}$$

例題４：３次元実ベクトル空間 V の線形変換 f が、基底 $E = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関して次のように行列表現されているとする。E より基底 $E' = \{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1\}$ への基底変換の行列および基底 E' に関する f の行列表現を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

［解］ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから基底変換の行列

を P と表せば、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。P の逆行列を求めると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

（解終）

○ 不変部分空間
線形写像の話もいよいよ最後である。
$f: V \to V$ を線形変換（変換である！）とする。V の部分空間 W が

$f(W) \subset W$

を満たすとき、W を f の不変部分空間という。次の定理が成り立つ。

定理

V を n 次元実ベクトル空間とし、$f: V \to V$ を線形変換とする。このとき

(1) W を f の p 次元不変部分空間とする。V の基底として、W の基底を拡大したものを選べば、f のこの基底による行列表現 A は

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$ ただし、$A_{11}: p$ 次正方行列、$A_{22}: n-p$ 次正方行列

というものがとれる。

(2) $V = W_1 \oplus W_2$ で、W_1, W_2 は f の不変部分空間とする。W_1, W_2 の基底を合わせたものは V の基底となり、この基底による f の行列表現 A は

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$, $A_{11}: p$ 次正方行列で、$\dim W_1 = p$, $A_{22}: n-p$ 次正方行列で、$\dim W_2 = n-p$

[証明] (1) W の基底を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ としこれに $n-p$ 個のベクトルを加えて $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の基底とする。W は f の不変部分空間だから

$$j = 1, 2, \cdots, p \Rightarrow f(\boldsymbol{a}_j) \in W \quad \therefore f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} \boldsymbol{a}_i + 0\boldsymbol{a}_{p+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n$$

従って A の $1 \sim p$ 列の列ベクトルの成分は $p+1$ 行から n 行まで 0 になる。

(2) W_1, W_2 の基底をそれぞれ $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$, $\{\boldsymbol{a}_{p+1}, \boldsymbol{a}_{p+2}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ とすれば、これらをあわせた n 個のベクトルは V の基底になる。(V は W_1, W_2 の直和だから)

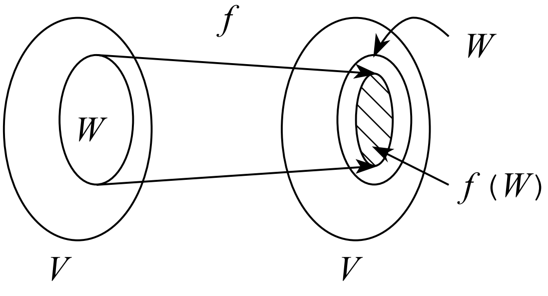
$f(W_i) \subset W_i \quad (i = 1, 2)$ だから

$$j = 1, 2, \cdots, p \Rightarrow f(\boldsymbol{a}_j) \in W_1 \quad \therefore f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} \boldsymbol{a}_i + 0\boldsymbol{a}_{p+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n$$

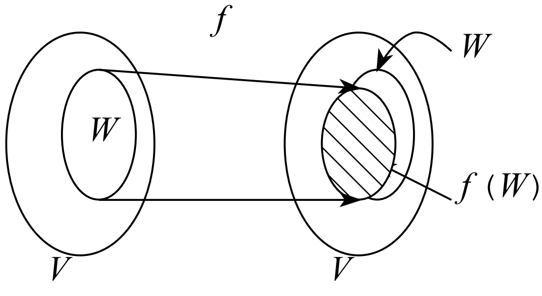
$$j = p+1, p+2, \cdots, n \Rightarrow f(\boldsymbol{a}_j) \in W_2$$

$$\therefore f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_{ij} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_{ij} \boldsymbol{a}_i + 0\boldsymbol{a}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_p$$

従って、(1) と同じ理由により証明できた。 (証終)



W が f の不変部分空間のとき



W が f の不変部分空間でないとき