2016年度数学B(S3) 学年末試験問題

１．次の各問いに答えよ。ただし, 答のみ。(25点)

(1) $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ について,

[1] A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)=|A-\lambda E|$ を求めよ。

[2] A の固有値 λ_1 を求めよ。　[3] A の固有値 λ_2 を求めよ。$(\lambda_1>\lambda_2)$

[4] λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を求めよ。　[5] λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。

(2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について,

[1] $A\boldsymbol{x}_1$ を求めよ。　[2] $A\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。

[3] $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ とするとき, $P^{-1}AP$ を求めよ。

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について,

[1] A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)=|A-\lambda E|$ を求めよ。

[2] A の固有値 λ_1 を求めよ。　[3] A の固有値 λ_2 を求めよ。$(\lambda_1>\lambda_2)$

[4] λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を求めよ。　[5] λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。

[6] λ_2 に対する固有空間 $W(\lambda_2)=\left\{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^3 \mid A\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x}\right\}$ の次元を求めよ。

２．上の問題１(3) の行列 A について, A^n (n：自然数) を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし, 答のみ。(25点)

(ここから) 問題１(3) [1] の結果とCayley−Hamiltonの定理から

$\phi_A(A)=-A^3+(\ 1\ )A^2-(\ 2\ )A+(\ 3\ )=O$ (零行列)

$\therefore A^3-(\ 1\ )A^2+(\ 2\ )A-(\ 3\ )=O$ … ① が成り立つ。

λ^n を $\lambda^3-(\ 1\ )\lambda^2+(\ 2\ )\lambda-(\ 4\ )\left(=-\phi_A(\lambda)\right)$ で割った商を $Q(\lambda)$, 余りを

$a\lambda^2+b\lambda+c$ とすれば

$\lambda^n=\left(\lambda^3-(\ 1\ )\lambda^2+(\ 2\ )\lambda-(\ 4\ )\right)Q(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$ … ②

となる。λ_1, λ_2 を問題１(3) [2], [3] とすると②を用いれば

$\lambda=\lambda_1$ を②に代入して $(\ 5\ )a+(\ 6\ )b+c=(\ 7\ )$ … ③

$\lambda=\lambda_2$ を②に代入して $(\ 8\ )a+(\ 9\ )b+c=(\ 10\ )$ … ④

②の両辺を λ で１回微分した式に $\lambda=\lambda_2$ を代入して $(\ 11\ )a+b=(\ 12\ )$ … ⑤

(③〜⑤は λ_1, λ_2 に１(3) で求めた値を代入したものを解答せよ)

③, ④, ⑤を解いて $a=(\ 13\ )$, $b=(\ 14\ )$, $c=(\ 15\ )$ となる。従って A^n の (2, 2) 成分は

（ 16 ）となる。(ここまで)

3．正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とし，それに対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ とするならば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ は線形独立となることを示す次の証明の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) 数学的帰納法で証明する。

Step1：（ 1 ）だから $\boldsymbol{x}_1$ は線形独立である。

Step2：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ は線形独立であると仮定する。(仮定＊) これに $\boldsymbol{x}_{p+1}$ を加えたベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_{p+1}$ が線形独立になることを示す。$c_1, c_2, \cdots, c_p, c_{p+1}$ をスカラーとし $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_{p+1}$ の１次関係式 $\sum_{k=1}^{(\ 2\ )} c_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ … ① を考える。この両辺の左から A を掛けると $\boldsymbol{x}_k$ が λ_k の固有ベクトルだから $\sum_{k=1}^{(\ 2\ )} (\ 3\ ) \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ … ② となる。①× λ_{p+1} − ②を計算すると $\sum_{k=1}^{(\ 4\ )} (\ 5\ ) \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ となる。仮定＊と固有値は相異なることから $k = 1, 2, \cdots, (\ 6\ )$ に対して $c_k = 0$ となる。これらを①に代入すれば（ 7 ）$= \boldsymbol{0}$ が得られ Step1と同様な理由から（ 8 ）=0 となる。以上より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_{p+1}$ が線形独立になることが示された。(ここまで)

4．A, B, P を s 次の正方行列とし，P は正則とするとき次の問いに答えよ。(9点)

（1） $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを示す次の証明の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

(ここから) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とする。積 AB の (k, k) 成分は $\sum_{l=1}^{[\ 1\ ]} [\ 2\ ]$ であるから

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{[\ 1\ ]} \left(\sum_{l=1}^{[\ 1\ ]} [\ 2\ ] \right) = \sum_{l=1}^{[\ 1\ ]} \left(\sum_{k=1}^{[\ 1\ ]} b_{lk} [\ 3\ ] \right) \quad \cdots \text{①}$$

ここで $\sum_{k=1}^{[\ 1\ ]} b_{lk} [\ 3\ ]$ は積 [4] の [5] 成分だから①は $\mathrm{tr}([\ 6\ ])$ に等しい。(ここまで)

（2） $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ を証明せよ。なお，この証明は次の５つの段階を経て示される。各等号の下に次の①～④の理由をその番号を書いて $\underset{①}{=}$ のように示せ。

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = \mathrm{tr}(A)$$

①：行列の積の結合律　②：$AE = EA = A$　③：上の（1）から　④：$P^{-1}P = PP^{-1} = E$

5． 3次以下の実係数多項式全体の作るベクトル空間 $P(3;\mathrm{R})$ に2つの基底 $\mathrm{B}_0=\{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathrm{B}_a=\{1, x+a, (x+a)^2, (x+a)^3\}$ を考える。このとき，次の各問いに答えよ。なお，a は 0 でない実数の定数である。ただし，(2)，(3) は答のみ。(12点)

(1) $P(3;\mathrm{R})$ 上の線形変換 f を $f: P(3;\mathrm{R}) \to P(3;\mathrm{R})$, $p(x) \mapsto p(x+a)$ とする。このとき基底 B_0 に関する f の行列表現 A を求めよ。

(2) f を (1) と同じものとする。このとき基底 B_a に関する f の行列表現 B を求めよ。

(3) B_0 から B_a への基底変換行列 P を求めよ。

6． 実対称行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ と R^3 のベクトル $\boldsymbol{x}={}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ に対して，次の各問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(3)，(4) は答のみ。 (茨城大・改) (21点)

(1) A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)=|A-\lambda E|$ を求めよ。

(2) A の固有値 $(\lambda_1>\lambda_2)$ を求めよ。 [1] λ_1 　 [2] λ_2

(3) A^3+6A^2 を求めよ。

(4) λ_1 に対する固有ベクトルのうち，(1，1) 成分が正の単位ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ。

(5) λ_2 に対する固有ベクトルのうち，互いに直交する２つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ。

(6) $|\boldsymbol{x}|=1$ を満たすときの２次形式 $A[\boldsymbol{x}]={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の最小値とそれを与える $\boldsymbol{x}$ を求めよ。