

## 2015年度学年末試験問題・数学B(S3)

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  について、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。 (13点)

( $E$  は 3 次の単位行列である)

- (1)  $A$  の固有値を求めよ。(  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$  とする)
- (2)  $\lambda_1 = \lambda_2$  に対する固有ベクトルを求めよ。 (3)  $\lambda_3$  に対する固有ベクトルを求めよ。
- (4) 対角化行列  $P$  を 1 つ求めよ。
- (5) (4) で求めた (解答した)  $P$  に対して、 $P^{-1}AP$  を求めよ。

注意：(4) が誤りならば点を与えない。また、(4) で答えた行列の列ベクトルの配列と固有値の順番が異なっている場合も点を与えない。

- (6)  $A^3 - 4A^2 + 5A$  を求めよ。 (7)  $A^2 - 4A + 5E$  の逆行列を求めよ。

2.  $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  について、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。 (12点)

- (1)  $A$  の固有値を求めよ。(  $\lambda_1 < \lambda_2$  とする)
- (2)  $\lambda_1$  に対する固有ベクトルを求めよ。 (3)  $\lambda_2$  に対する固有ベクトルを求めよ。
- (4)  $\lambda_k$  に対する 1 つの固有ベクトルを  $\mathbf{p}_k$  ( $k=1, 2$ ) とし、行列  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$  とするとき、 $P^{-1}AP$  を求めよ。
- (5)  $n$  を自然数とするとき、 $P^{-1}A^nP$  を求めよ。
- (6)  $\phi_A(\lambda)$  を  $A$  の固有多項式とする。このとき整式  $\lambda^n$  を  $\phi_A(\lambda)$  で割った余りを  $a\lambda + b$  とするとき [1]  $a$  の値を求めよ。 [2]  $b$  の値を求めよ。

3. 2次形式  $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$  について、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。

(19点)

- (1)  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $A$ : 2 次の実対称行列とすると、 $f(x, y) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$  となるような  $A$  を求めよ。
- (2)  $A$  の固有値を求めよ。(  $\lambda_1 < \lambda_2$  とする)
- (3)  $\lambda_1$  に対する固有ベクトルを求めよ。 (4)  $\lambda_2$  に対する固有ベクトルを求めよ。
- (5)  $\lambda_k$  に対する 1 つの固有 単位ベクトル を  $\mathbf{p}_k$  ( $k=1, 2$ ) とし、行列  $T = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$  とする。このとき、 $T$  の (1, 1) 成分が正で  $|T|=1$  のなる  $T$  を求めよ。
- (6)  $T^{-1}$  を求めよ。
- (7)  $\mathbf{x} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  と変換したとき、 $f(x, y)$  を  $X, Y$  の式で表せ。またこれはどのような変換であるか答えよ。 [1]  $X, Y$  の式 [2] どのような変換であるか
- (8) 2次曲線  $f(x, y) = 12$  の概形をかけ。

解答上の注意：曲線の名前と各軸との交点の座標を明記せよ。

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -7 & 1 & 7 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  について、次の各問いに答えよ。(18点)

(1)  $A$  の固有値を求めよ。

(2) 次の計算の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

(1) で求めた固有値を  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  とすれば、 $\lambda_1$  に対する1つの固有ベクトルは

$\mathbf{p}_1 = [ 1 ]$  ,  $\lambda_2$  に対する1つの固有ベクトルは  $\mathbf{p}_2 = [ 2 ]$  ,  $\lambda_3$  に対する1つの固有ベクトルは  $\mathbf{p}_3 = [ 3 ]$  となる。ただし、これらのベクトルの (3, 1) 成分の値が1となるものを考える。

$P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$  とするとき  $P^{-1}AP = X^3$  となる 対角行列  $X$  を1つ求めれば

$X = [ 4 ]$  となる。(成分はすべて実数とする) この  $X$  を用いると  $Y^3 = A$  を満たす1つの行列  $Y$  は  $Y = [ 5 ]$  となる。

5. 正方行列  $A$  が 対角化可能 ならば、*Cayley-Hamilton* の定理が成り立つことを証明せよ。

即ち、 $\phi_A(\lambda)$  を  $A$  の固有多項式とすれば  $\phi_A(A) = O$  (零行列) (13点)

*Hint*:  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ,  $A$  の対角化行列  $P$  ,  $P^{-1}\phi_A(A)P$

対角行列  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$  ,  $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n$  ,  $\phi_A(\lambda_k)$  など。

6.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 24 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  について、次の計算の ( ) に入る最も適切な答えを

解答用紙にかけ。ただし、答のみ。 (14点)

$A$  の固有値を求めると  $\lambda_1 = ( 1 )$  ,  $\lambda_2 = ( 2 )$  ,  $\lambda_3 = ( 3 )$  となる。ただし、 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

とする。 $\lambda_1$  に対する固有ベクトルは  $\mathbf{x}_1 = ( 4 )$  ,  $\lambda_2$  に対する固有ベクトルは  $\mathbf{x}_2 = ( 5 )$  ,  $\lambda_3$  に対する固有ベクトルは  $\mathbf{x}_3 = ( 6 )$  となる。

一方、 $B\mathbf{x}_1 = ( 7 ) \mathbf{x}_1$  ,  $B\mathbf{x}_2 = ( 8 ) \mathbf{x}_2$  ,  $B\mathbf{x}_3 = ( 9 ) \mathbf{x}_3$

となるから  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  は  $B$  の固有ベクトルでもある。そこで  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  に対する1つの固有ベク

トルをそれぞれ  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  とし対角化行列を  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$  とすれば、 $P^{-1}AP = ( 10 )$

$P^{-1}BP = ( 11 )$  となる。

7. 次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。 (12点)

注意： $A$  の固有多項式の定義は  $\phi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$  である。また、固有多項式は因数分解したものを答えること。

(1)  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  の [1] 固有 多項式 [2] 固有値 を求めよ。

(2)  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  の [1] 固有 多項式 [2] 固有値 を求めよ。

(3)  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \cdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  : 対角成分および  $(i, n-i+1)$  成分だけが 1 で他は 0 の

$n$  次正方行列 ( $i=1, 2, \dots, n$ ) とし、その固有多項式を  $\phi_n(\lambda)$  とするとき

[1]  $\phi_n(\lambda) = R(\lambda)\phi_{n-2}(\lambda)$  を満たす  $R(\lambda)$  を求めよ。

[2]  $n=2k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) のとき、 $\phi_{2k}(\lambda)$  を求めよ。

[3]  $n=2k+1$  ( $k=1, 2, \dots$ ) のとき、 $\phi_{2k+1}(\lambda)$  を求めよ。

[4]  $A_{2k}$  の固有値を求めよ。 [5]  $A_{2k+1}$  の固有値を求めよ。