2016年度数学B(S3) 後期中間試験問題

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 空間内の点 (2, 3, 1) を z 軸のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点の座標を求めよ。

(2) 原点 O を中心とし，点 A(3, 4) を１つの頂点とする正八角形の頂点の座標を A を含めてすべて求めよ。(すべて正解で点を与える)

(3) 次の行列のなかから直交行列を選び，行列を表す文字 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ を解答用紙にかけ。(過不足なく選んでいる場合のみ点を与える)

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad A_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad A_4=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$A_5=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix},\quad A_6=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(4) R^2 上の線形変換 $f:\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3y\\ y-2x\end{pmatrix}$ を表す行列を求めよ。

(5) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ で表される R^2 上の線形変換をそれぞれ f, g とするとき，次の問いに答えよ。

[1] $g\circ f$ を表す行列を求めよ。　　[2] $(f\circ g)^{-1}$ を表す行列を求めよ。

[3] ベクトル $\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$ の $(f\circ g)^{-1}$ による像を求めよ。

(6) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ で表される R^2 上の線形変換を f とする。このとき直線 $l: y=3x+2$ の f による像を求める次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) l の f による像を l' とし，l' 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}'={}^t(\xi\quad\eta)$ とすれば $f^{-1}(\boldsymbol{x}')={}^t(\,[\ 1\ ]\xi+[\ 2\ ]\eta\quad[\ 3\ ]\xi+[\ 4\ ]\eta\,)$ となる。$f^{-1}(\boldsymbol{x}')$ を位置ベクトルとする点は l 上の点だから l の方程式を満たす。従って [5]+8=0 … ① という ξ, η の方程式が導かれる。①において文字 ξ, η をそれぞれ x, y に置き換えて整理すれば結局 l' の方程式は $y=$[6] となる。(ここまで)

(7) 行列 A で表される R^2 上の線形変換 f によって，ベクトル $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$ は，ともにベクトル $\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$ に移されるとする。このとき A を求める次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) $A\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[\ 1\ ] & [\ 2\ ]\\ [\ 3\ ] & [\ 4\ ]\end{pmatrix}$ を満たす A を求めればよい。

([1]~[4] はすべて正解で点を与える) 列基本変形のみを用いた消去法でこれを解くと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ \hline [\ 1\ ] & [\ 2\ ] \\ [\ 3\ ] & [\ 4\ ] \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & [\ 5\ ] \\ \hline [\ 1\ ] & 1 \\ [\ 3\ ] & [\ 6\ ] \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & [\ 5\ ] \\ \hline [\ 7\ ] & 1 \\ [\ 8\ ] & [\ 6\ ] \end{pmatrix}$$

以上より $A=$ [9] と求まる。(ここまで)

2． 次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

注意：固有ベクトルを答えるとき，任意定数の条件を明記せよ。これがない場合，誤っている場合は点を与えない。

(1) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ について，[1] 固有多項式 $\phi_A(\lambda)=|A-\lambda E|$ を求めよ。

[2] 固有値を求めよ。⇒ ここで求めた固有値を $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ とする。

[3] λ_1 に対する固有ベクトルを求めよ。　[4] λ_2 に対する固有ベクトルを求めよ。

[5] λ_3 に対する固有ベクトルを求めよ。

(2) $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ について，[1] 固有多項式 $\phi_A(\lambda)=|A-\lambda E|$ を求めよ。

[2] 固有値を求めよ。⇒ ここで求めた固有値を $\lambda_1=\lambda_2<\lambda_3$ とする。

[3] λ_3 に対する固有ベクトルを求めよ。

[4] $\lambda_1=\lambda_2$ に対する固有ベクトルを求める次の計算の { } に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。(ここから) 求める固有ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(x \quad y \quad z)$ とする。

$(A+\{\ 1\ \}E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を消去法を用いて解く。斉次なので係数行列だけ変形すればよい。

$A+\{\ 1\ \}E \to \begin{pmatrix} 1 & \{\ 2\ \} & \{\ 3\ \} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるから，$y=\{\ 4\ \}$ (x, z の式)

$x=C_1, z=C_2$ とすれば $\boldsymbol{x}=C_1\{\ 5\ \}+C_2\{\ 6\ \}$ (ベクトルの成分表示) となる。ただし，{ 7 } (C_1, C_2 の条件) である。(ここまで)

3． 第２行の行ベクトルが $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ である直交行列のうち，対称行列であるものを求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(14点)

注意：(2) 以外は数値が入る。

(ここから) 求める行列を $A=\begin{pmatrix} a & [\ 1\ ] & b \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ (\ 2\ ) & [\ 3\ ] & c \end{pmatrix}$ とする。直交行列であるから

$a^2+b^2=$[4] … ①　$b^2+c^2=$[5] … ②　$a+2b=$[6] … ③

$b+2c=$[7] … ④　$(a+c)\,b=$[8] … ⑤

となる。①, ③から $\begin{cases} a=[\ 9\ ] \\ b=[\ 10\ ] \end{cases}$, $\begin{cases} a=[\ 11\ ] \\ b=[\ 12\ ] \end{cases}$ ([9]>0) となる。④と $b=$[10] から

$c=$[13] となり, ④と $b=$[12] から $c=$[14] となる。これらの組は他の②, ⑤を満たす。
(ここまで)

4. $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を R^3 上の線形変換で, ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ の f による像がそれぞれ $\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-7\\8\\27\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\-1\\-22\end{pmatrix}$ であるとき, 次の各問いに答えよ。ただし, (1) の [1], [2] は答のみ。(11点)

(1) ベクトル $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ について

[1] $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線形結合で表せ。　[2] $f(\boldsymbol{d})$ を求めよ。(成分表示)

(2) f を表す行列 A を列基本変形を用いて求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

5. 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & a\end{pmatrix}$ (a は実数の定数) の定める R^2 上の線形変換を f_a とする。即ち, $f_a(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^2)$ である。このとき, 次の各問いに答えよ。ただし, 答のみ。(11点)
(改・三重大)

(1) A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)=|A-\lambda E|$ を求めよ。

(2) A の固有方程式が重解をもつように定数 a の値を定めよ。

注意 : ここで求めた a の値を $a_1<a_2$ とする。

(3) $a=a_1$ のとき, 次のものを求めよ。

[1] A の固有値　[2] この固有値に対する固有ベクトル

(4) $a=a_2$ のとき, 次のものを求めよ。

[1] A の固有値　[2] この固有値に対する固有ベクトル

(5) $\lambda=0$ を固有値にもつように定数 a の値を定めよ。⇒ ここで求めた a の値を a_3 とする。

(6) $a=a_3$ のとき, 次の問いに答えよ。

[1] $\lambda=0$ に対する A の固有ベクトルを求めよ。

[2] 0 以外の A の固有値を求めよ。⇒ ここで求めた λ の値を λ_1 とする。

[3] $\lambda=\lambda_1$ に対する A の固有ベクトルを求めよ。

6．行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\phi_A(\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^2$ である。これを用いて次の各問いに答えよ。ただし，(1) と (2) は答のみ。(14点)

(1) 固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルのうち，(2，1) 成分が 1 であるものを 1 個求めよ。

(2) 固有値 $\lambda=-1$ に対する固有ベクトルのうち，(2，1) 成分が 1 であるものを 1 個求めよ。

注意：(1) で求めた固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$，(2) で求めた固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_2$ と表す。

(3) E を 3 次の単位行列とするとき $(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_2$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

注意：(3) で求めた $\boldsymbol{x}$ のうち (3，1) 成分が 0 であるものを $\boldsymbol{p}_3$ と表す。

(4) $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ をこの順に列ベクトルとして並べた行列を $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とするとき，$AP=PB$ を満たす行列 B の成分表示を求めよ。