2015年度後期中間試験問題・数学B(S3)

１．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

（1） $k\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \\ 2 & a & c \end{pmatrix}$ が直交行列になるように実数 k, a, b, c の値を求めると，$k=[\ 1\ ]$，

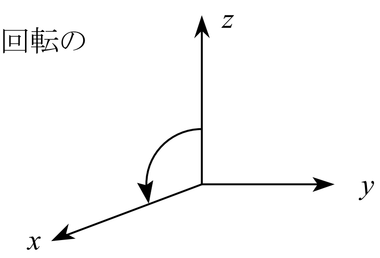
$a=[\ 2\ ]$, $b=[\ 3\ ]$, $c=[\ 4\ ]$ となる。

（2） R^2 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{p}$ $(\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}^2)$ とするとき，直線 $y=3x+2$ の f による像を求めると，$y=[\ 1\ ]x+[\ 2\ ]$ となる。

（3） R^2 上の線形変換 f, g の表現行列をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば，合成変換 $f\circ g$, $g\circ f$ の表現行列はそれぞれ $[\ 1\ ]$, $[\ 2\ ]$ となる。また逆変換 f^{-1}, g^{-1} の表現行列はそれぞれ $[\ 3\ ]$, $[\ 4\ ]$ となる。またベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の $g\circ f$, f^{-1} による像はそれぞれ $[\ 5\ ]$, $[\ 6\ ]$ となる。

（4） R^2 上の線形変換 f の表現行列が $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ であるとき，f によって直線 $y=x+2$ に移されるもとの図形の方程式を求めよ。

（5） 空間内の点を $\boxed{y\text{ 軸のまわりに}}$ $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させる線形変換の表現行列は $[\ 1\ ]$ である。またこの変換による点 $(2, 3, 1)$ の像は $[\ 2\ ]$ となる。なお，回転の向きは z 軸正から x 軸正へ向かう回転を正とする。



（6） R^2 上の線形変換 f によるベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の像がそれぞれ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき，f の表現行列は $[\ 1\ ]$ である。また f によるベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ の像は $[\ 2\ ]$ となる。

２． R^2 上の線形変換 f の表現行列を $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ とする。また f による直線 $y=2x+1$ の像の方程式が $2x+15y+8=0$ であるとき，次の各問いに答えよ。ただし，a, b は実数の定数とする。(17点)

（1） a, b の値を求めよ。

（2） $\boxed{\text{原点を通る}}$ 直線 l の f による像が l 自身であるとき，l の方程式を求める次の計算の $[\quad]$ に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

注意：a，b は（1）で求めた値を使うこと。つまり解答に文字 a，b を用いてはいけない。

原点を通る直線は $y=mx$ （m は傾きを表す定数）か，直線 $x=0$ である。$x=0$ の f による像は直線［ 1 ］であるから自分自身には移らない。$y=mx$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x, mx)$ とし，f による P の像を $\mathrm{P}'(x', y')$ とすれば $x'=$［ 2 ］，$y'=$［ 3 ］（［ 2 ］，［ 3 ］は x，m の式）
$y'=mx'$ を満たすから m の２次方程式［ 4 ］$=0$ が導かれる。これを解いて $m=$［ 5 ］

3．原点のまわりの xy 平面上の角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転によって，方程式 $xy=a^2$ $(a>0)$ で表される図形はどのような図形に移されるか。その方程式を求めよ。(6点)

4．R^3 上の線形変換 f とベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathrm{R}^3$，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ について，次の各問いに答えよ。ただし，（1），（2）は $\boxed{\text{答のみ。}}$ (7点)

（1） ベクトル $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点 A を通り，$\boldsymbol{v}$ に平行な直線 l のベクトル方程式をかけ。ただし，この直線上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$，媒介変数を t とせよ。

（2） $\boldsymbol{p}$ の f による像 $\boldsymbol{p}'$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{v}$ の f による像を用いて表せ。

（3） f の表現行列が $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & -13 & 5 \end{pmatrix}$ であるとき，（2）の像が１点となるためのベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めよ。（$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ という条件は満たす）

5．f を R^3 上の線形変換で

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$$ に対して

$f(\boldsymbol{a}_i)=\boldsymbol{b}_i$ $(i=1,2,3)$ を満たすものとする。このとき，次の各問いに答えよ。(20点)

（1） ベクトル $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の線形変換 f による像を求めよ。

（2） f で $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\9\end{pmatrix}$ に写される R^3 のもとのベクトルを求めよ。（以上，お茶の水女子大）

（3） $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は明らかに線形独立だから，基底 $\mathrm{A}'=\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する f の表現行列 A' を求めよ。

6．A が直交行列であるとき次のことを示せ。ただし，成分はすべて実数とする。(10点)

（1） $|A|=\pm1$

（2） A が２次であるならば $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

７． $f:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ ， $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ で定義される線形写像とする。ただし，f の表現行列 A はそれぞれ R^3, R^2 の標準基底に関するものとする。このとき次の各問いに答えよ。(15点)

（1） 次の文章の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

$\boldsymbol{x} \in Ker f \Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ だから，$\boldsymbol{x}={}^t(x_1, x_2, x_3)$ とすれば消去法から $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & [\ 1\ ] \\ 0 & 1 & [\ 2\ ] \end{pmatrix}$

$\therefore x_1=[\ 3\ ]x_3$, $x_2=[\ 4\ ]x_3$ 従って $\dim Ker f=[\ 5\ ]$ で，１組の基底は ${}^t[\ 6\ ]$ となる。

また［ 7 ］定理から $\dim Im f=[\ 8\ ]$ である。(［ 6 ］の左上の転置記号に注意)

（2） f の表現行列が $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ になるように R^3 および R^2 の基底を１組ずつ定めよ。