2015年度夏季休業明け試験問題・数学B(S3)

１． $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $A : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^3, \vec{x} \to A\vec{x} \quad \left(\vec{x} \in \mathrm{R}^4\right)$ を考える。

次の問いに答えよ。(19点)

（1） A の階数を求めよ。

（2） 線形写像 A の像 $\mathrm{Im}\,A$ の次元と１組の基底を求めよ。

（3） 線形写像 A の核 $\mathrm{Ker}\,A$ の次元と１組の基底を求めよ。 (改・埼玉大)

２． $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_4=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。さらに R^4 の部分空間を $W_1=L\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right]$, $W_2=L\left[\vec{a}_3, \vec{a}_4\right]$ とするとき，次の問いに答えよ。なお，R^4 の内積は標準内積とする。(25点)

（1） $W_1 \cap W_2$ を求めよ。

（2） W_1 の直交補空間 $W_1^{\perp}$ の次元と１組の基底を求めよ。

（3） $\vec{b}$ を W_1 と $W_1^{\perp}$ のベクトルの和で表せ。

３． W を計量ベクトル空間の部分空間とする。このとき，$W \cap W^{\perp}=\left\{\vec{0}\right\}$ を証明する次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。 ただし，答のみ。 (6点)

(ここから) $\vec{a} \in W \cap W^{\perp}$ ならば $\vec{a} \in$ (１) だから W の任意のベクトル $\vec{b}$ に対して $\vec{a} \bullet \vec{b}=$ (２) が成り立つ。また $\vec{a} \in$ (３) でもあるので $\vec{a} \bullet \vec{a}=$ (４)$^2=$ (２) $\therefore$ (４) $=$ (５)
従って $\vec{a}=$ (６) となる。よって証明された。 (ここまで)

４． W, W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とし，また，$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_r$ を V のベクトルとする。次の文章の括弧に入る最も適切な答えを下の解答群から選び，その符号 (ア，イ，ウ，…)を解答用紙にかけ。ただし， 答のみ。 なお，この問題は 無解答なら０点であるが，誤答は −1 点とする。 (25点)

(ここから) $W_1+W_2=\left\{ (\ 1\ ) \mid \vec{a}_1 \in W_1, \vec{a}_2 \in W_2 \right\}$ である。また $\vec{a} \in W_1 \cap W_2$ ならば $\vec{a} \in W_1$ かつ $\vec{a} \in$ (２) である。 (１), $\vec{b}_1+\vec{b}_2 \in W_1+W_2$ ((３) ; $i=1, 2$) とし，k, l をスカラーとすれば $k((\ 1\ ))+l\left(\vec{b}_1+\vec{b}_2\right)=\left(k(\ 4\ )+l\vec{b}_1\right)+\left(k(\ 5\ )+l\vec{b}_2\right)$，仮定から W_1, W_2 は V の部分空間だから $k(\ 4\ )+l\vec{b}_1 \in (\ 6\ )$, $k(\ 5\ )+l\vec{b}_2 \in (\ 7\ )$
$\therefore k((\ 1\ ))+l\left(\vec{b}_1+\vec{b}_2\right) \in (\ 8\ )$，従って W_1+W_2 は V の部分空間である。

つぎに$\vec{a},\vec{b}\in W_1\cap W_2$とし，$k,l$をスカラーとすれば同じ仮定から$k\vec{a}+l\vec{b}\in W_1$,（ 9 ）

$\therefore k\vec{a}+l\vec{b}\in$（ 10 ），従って$W_1\cap W_2$は$V$の部分空間である。

$L\left[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_r\right]=\{$（ 11 ）$|\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_r\in V;k_1,k_2,\cdots,k_r$ はスカラー$\}$

（ 11 ），（ 12 ）$\in L\left[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_r\right]$とし，$k,l$をスカラーとすれば

k((11))$+l$((12))=（ 13 ）$\vec{v}_1+ll_1\vec{v}_1+kk_2\vec{v}_2+$（ 14 ）$\vec{v}_2+\cdots+$（ 15 ）$\vec{v}_r+ll_r\vec{v}_r$

=（ 16 ）$\vec{v}_1+$（ 17 ）$\vec{v}_2+\cdots+$（ 18 ）$\vec{v}_r$ $\therefore k$((11))$+l$((12))$\in$（ 19 ），従って

$L\left[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_r\right]$は$V$の部分空間である。最後に$V$に内積が定義されているとき

$W^{\perp}=\{\vec{a}\in V\,|$ （ 20 ）の任意のベクトル$\vec{v}$に対して（ 21 ）$\}$であるから，$\vec{a},\vec{b}\in W^{\perp}$とし，

k,lをスカラーとすれば，（ 20 ）の任意のベクトル$\vec{v}$に対して（ 21 ），（ 22 ）だから

（ 23 ）$=k$((24))$+l$((25))$=0$ $\therefore k\vec{a}+l\vec{b}\in W^{\perp}$，従って$W^{\perp}$は$V$の部分空間である。 (ここまで)

[解答群]

ア: $\left(k\vec{a}+l\vec{b}\right)\bullet\vec{v}$　　イ: $\vec{a}\bullet\vec{b}$　　ウ: $\vec{a}\bullet\vec{v}=\vec{0}$　　エ: $\vec{a}_1+\vec{a}_2$　　オ: $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$

カ: ll_2　　キ: kk_r　　ク: $l_1\vec{v}_1+l_2\vec{v}_2+\cdots+l_r\vec{v}_r$　　ケ: $l_1\vec{v}_1+l_2\vec{v}_2+\cdots+l_n\vec{v}_n$　　コ: $\left(kk_r+ll_r\right)$

サ: $k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\cdots+k_r\vec{v}_r$　　シ: $\vec{a}\bullet\vec{v}$　　ス: $\vec{a}_i,\vec{b}_i\in W_i$　　セ: W_2　　ソ: $\vec{b}\bullet\vec{v}$

タ: $\left(kk_2+ll_2\right)$　　チ: $\vec{a}\bullet\vec{v}=0$　　ツ: $W^{\perp}$　　テ: W_1　　ト: V

ナ: $W_1\cap W_2$　　ニ: $L\left[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_r\right]$　　ヌ: $\vec{a}_2$　　ネ: $k\vec{a}+l\vec{b}\in W_2$　　ノ: kk_n

ハ: $k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\cdots+k_n\vec{v}_n$　　ヒ: $\left(k_n+l_n\right)$　　フ: $\vec{a}+\vec{b}$　　ヘ: W　　ホ: W_1+W_2

マ: $\vec{b}\bullet\vec{v}=0$　　ミ: $\vec{a}_1$　　ム: kk_1　　メ: $\left(k_1+l_1\right)$　　モ: $\left(kk_1+ll_1\right)$

5． p 個のベクトル$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p$に対し，$\vec{b}_k=\sum_{i=1}^{k}\vec{a}_i$ $\left(k=1,2,\cdots,p\right)$とする。このとき$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p$が線形独立ならば$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_p$も線形独立であることを証明せよ。(5点)