2016年度数学B(S3) 前期末試験問題

１．次の各問いに答えよ。ただし, 答のみ。(25点)

（1） 平面上の４点 A$(-3,-3)$, B$(4,-2)$, C$(5,2)$, D$(-2,1)$ を頂点とする平行四辺形ABCD の面積を求めよ。

（2） ３つのベクトル ${}^t(1\ \ 3\ \ 1)$, ${}^t(-3\ \ 2\ \ 1)$, ${}^t(2\ \ -1\ \ 3)$ によって定まる平行六面体の体積を求めよ。

（3） 次の行列式の値を求めよ。

[1] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　[2] $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　[3] $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

[4] $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

（4） 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。まず $a=$[1] のとき A は正則でない。

次に $|B|=$[2]$\neq 0$ なので B は正則である。B の (i,j) 成分の余因子を $\widetilde{B}_{ij}$ と表せば

$\widetilde{B}_{11}=$[3], $\widetilde{B}_{12}=$[4], $\widetilde{B}_{13}=$[5], $\widetilde{B}_{21}=$[6], $\widetilde{B}_{22}=$[7], $\widetilde{B}_{23}=$[8]

$\widetilde{B}_{31}=$[9], $\widetilde{B}_{32}=$[10], $\widetilde{B}_{33}=$[11] となる。従って $B^{-1}=$[12] となる。

([12] は B^{-1} の成分表示) (ここまで)

２．次の各問いに答えよ。ただし, 答のみ。(25点)

（1） $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}={}^t(x\ \ y\ \ z)$, $\vec{b}={}^t(2\ \ 5\ \ 6)$ とするとき, 連立１次方程式

$A\vec{x}=\vec{b}$ をCrammerの公式を用いて解く次の解法の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。(ここから) 行列式 $|A|$ の第 i 列をベクトル $\vec{b}$ に置き換えた行列式を

Δ_i $(i=1,2,3)$ と表せば, $|A|=$[1], $\Delta_1=$[2], $\Delta_2=$[3], $\Delta_3=$[4] となるから

解は $\vec{x}={}^t$[5] となる。(ここまで)

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}={}^t(x\ \ y\ \ z)$, $\vec{0}={}^t(0\ \ 0\ \ 0)$ とするとき，連立斉１次方程式

$A\vec{x}=\vec{0}$ ついて，次の各問いに答えよ。

[1] 非自明解を持つような定数 k の値を求めよ。

[2] k が [1] で求めた値のとき，解を求めよ。$\left({}^t(x\ \ y\ \ z)\right.$ の形で答えよ$\left.\right)$

(3) 次のベクトルの組のうち線形独立なベクトルの組を選び，その符号(あ，い，う，え)を答えよ。(すべて正解で点を与える)

あ：$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$　　い：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

う：$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　　え：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

(4) 次の計算の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。(ここから) $|A|=3$ ならば $\left|{}^tA\right|=[\ 1\ ]$, $\left|A^{-1}\right|=[\ 2\ ]$, $\left|{}^tAA^{-1}\right|=[\ 3\ ]$ である。ここでは A の余因子行列を $\mathrm{adj}A$ と表す。さらに A が４次の正方行列ならば，$|\mathrm{adj}A|=[\ 4\ ]$, $|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)|=[\ 5\ ]$ となる。また $|B|=2$ ならば，$\left|A^{-1}BA\right|=[\ 6\ ]$ となる。(ここまで)

注意：[4]，[5] は計算せよ。

３．n 個の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して n 次の正方行列 $A_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}$ を次のように定義する。

$A_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}=\left(\delta_{ij}+a_ia_j\right)$　(A の (i,j) 成分が $\delta_{ij}+a_ia_j$)

ただし，δ_{ij} は Kronecker (クロネッカー) のデルタであり，即ち $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$ である。また

ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ を $\vec{v}_i={}^t(a_i\ \ a_{i+1}\ \ \cdots\ \ a_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ と定義する。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(3) は答のみ。(25点)

(1) ２次の正方行列 $A_{(a_1,a_2)}$ を具体的にかけ。

(2) ３次の正方行列 $A_{(a_1,a_2,a_3)}$ を具体的にかけ。

(3) 次の計算の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

(ここから) 行列式を考える。１列目を２つのベクトル $\vec{e}_1={}^t(1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)$ と $a_1[\ 1\ ]$ の和と考え，行列式の多重線形性を用いれば

$$\left|A_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}\right|=\begin{vmatrix} 1 & [\ 2\ ]\,{}^t(\vec{v}_2) \\ \vec{0}_{n-1} & A_{[\ 3\ ]} \end{vmatrix}+[\ 5\ ]\begin{vmatrix} 1 & {}^t(\vec{v}_2) \\ \vec{v}_2 & [\ 4\ ] \end{vmatrix}$$

となる。なお，$\vec{0}_{n-1}$ は $(n-1)$ 次の零(列)ベクトルである。上式の第１項の行列式は $\left|A_{[\ 3\ ]}\right|$ に等しい。また第２項の行列式は，１行目を用いて１列目の $(2,1)$ から $(n,1)$ 成分を掃き出せば

$$\begin{vmatrix} 1 & {}^t\left(\vec{v}_2\right) \\ \vec{v}_2 & [\ 4\ ] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & {}^t\left(\vec{v}_2\right) \\ \vec{0}_{n-1} & [\ 6\ ] \end{vmatrix} = \left|[\ 6\ ]\right| = [\ 7\ ]$$ となる。（［ 6 ］は $(n-1)$ 次）

以上より $\left|A_{(a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n)}\right| = \left|A_{[\ 3\ ]}\right| + [\ 8\ ]$ … ① となる。

（［ 8 ］は［ 5 ］と［ 7 ］の積を答える） (ここまで)

(4)　$\left|A_{(a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n)}\right|$ を (3) で導いた①を用いて求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

4．正則な行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ。なお，k は整数とする。(11点)

(1)　A の逆行列 A^{-1} の成分がすべて整数となるような k の値を求めよ。

(2)　(1) で求めた k の値を $k_1 < k_2$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。

　[1]　$k = k_1$ のとき A^{-1} を求めよ。　　[2]　$k = k_2$ のとき A^{-1} を求めよ。

注意：k の値を具体的に代入して計算する。(愛媛大 改)

5．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{Im}\,A$ と $\mathrm{Ker}\,A$ の１組の基底と次元を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) A の第 i 列のベクトルを $\vec{a}_i$ と表す。$\mathrm{Im}\,A$ とは $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ で張られる $\mathrm{R}^{(1)}$ の部分空間であるから，張られる空間を表す記号を用いると $\mathrm{Im}\,A = (\ 2\ )$ となる。よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ から線形独立なベクトルの組を抽出すればよい。$\vec{a}_3 = (\ 3\ )\vec{a}_1 + (\ 4\ )\vec{a}_2$ となり，$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は線形独立だから $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ が $\mathrm{Im}\,A$ の１組の基底で $\dim(\mathrm{Im}\,A) = (\ 5\ )$ となる。

次に $\mathrm{Ker}\,A = \left\{\vec{x} \in \mathrm{R}^{(6)} \,\middle|\, A\vec{x} = (\ 7\ )\right\}$ であるから，これを満たすベクトル $\vec{x}$ を求めると

$\mathrm{Ker}\,A = \left\{\vec{x} \in \mathrm{R}^{(6)} \,\middle|\, \vec{x} = s\,{}^t(\ 8\ )\ (s：任意の実数)\right\}$ となり $\left\{{}^t(\ 8\ )\right\}$ が１組の基底で

$\dim(\mathrm{Ker}\,A) = (\ 9\ )$ となる。

なお次元定理からも分かるが，$\dim(\mathrm{Im}\,A) + \dim(\mathrm{Ker}\,A) = (\ 10\ )$ である。(ここまで)

6．R^3 の部分空間 $W = \left\{\vec{x} = {}^t(x \quad y \quad z) \in \mathrm{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0\right\}$ について，次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点)

(1)　W の１組の基底を求めよ。　　(2)　W の直交補空間 $W^{\perp}$ の１組の基底を求めよ。