2015年度前期末試験問題・数学B(S3)

1．$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ に関して考察した以下の理論展開の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (19点)

行列 $A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$ の階数を求める。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&-1&0&1\\0&1&k&1\end{pmatrix}\overset{①}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&(\ 1\ )&(\ 2\ )&(\ 3\ )\\0&1&k&1\end{pmatrix}\ (①:2行-1行)$$

$$\overset{②}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&k&1\\0&(\ 1\ )&(\ 2\ )&(\ 3\ )\end{pmatrix}\ (②:行の交換)$$

$$\overset{③}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&k&1\\0&0&(\ 4\ )&(\ 5\ )\end{pmatrix}\ (③:3行-((\ 1\ ))\times 2行)$$

$\therefore\ k\neq(\ 6\ )\Rightarrow rank\,A=(\ 7\ )$，$k=(\ 6\ )\Rightarrow rank\,A=(\ 8\ )$

$k\neq(\ 6\ )$ のとき，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ から線形独立になるベクトルは最大（ 9 ）個選べる。実際，上記変形の最後の形から $(\ 10\ )\vec{a}_1+(\ 11\ )\vec{a}_2+(\ 12\ )\vec{a}_3-\vec{a}_4=\vec{0}$ $\left(\vec{0}\text{ は零ベクトル}\right)$となる。

また行列式 $\left|\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \vec{a}_3\right|$ を計算すると（ 13 ）になり，$\left|\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \vec{a}_4\right|$ を計算すると（ 14 ）になることからも確認できる。

$k=(\ 6\ )$ のとき，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ から線形独立になるベクトルは最大（ 15 ）個選べる。同様にして上記変形の最後の形から $\vec{a}_3=(\ 16\ )\vec{a}_1+(\ 17\ )\vec{a}_2$，$\vec{a}_4=(\ 18\ )\vec{a}_1+(\ 19\ )\vec{a}_2$ となる。

2．問題１と同じ状況のもと１．(6) の値を k_0 と表す。$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$，$\vec{x}={}^t\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}$ とするとき，連立斉１次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ を次の各場合について解け。ただし，解は線形独立なベクトルの線形結合の形で答えよ。(12点)

（1） $k\neq k_0$ （2） $k=k_0$

3．$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}$ とするとき，次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (19点)

A の (i,j) 成分の余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と表す。$|A|=(\ 1\ )$，$\tilde{a}_{11}=(\ 2\ )$，$\tilde{a}_{12}=(\ 3\ )$，

$\tilde{a}_{13}=(\ 4\ ),\tilde{a}_{21}=(\ 5\ ),\tilde{a}_{22}=(\ 6\ ),\tilde{a}_{23}=(\ 7\ ),\tilde{a}_{31}=(\ 8\ ),\tilde{a}_{32}=(\ 9\ ),$

$\tilde{a}_{33}=(\ 10\ )$ となる。A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすれば $A\tilde{A}=\tilde{A}A=(\ 11\ )E$ が成り立つ。

ただし，E は単位行列。従って a (12) のとき，$A^{-1}=(\ 13\ )$ となる。またこのとき

$\left(\tilde{A}\right)^{-1}=(\ 14\ )$ である。また $\left|\tilde{A}\right|=(\ 15\ )$，$\left|\left(\tilde{A}\right)^{-1}\right|=(\ 16\ )$ である。

$\boxed{\text{(13),(14) は成分表示せよ。また，行列式は計算した結果をかけ。}}$

4．A,B はともに n 次の正方行列とする。このとき，次の文章の (　　) に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \overset{①}{=} \begin{vmatrix} (\ 1\ ) & (\ 2\ ) \\ (\ 3\ ) & (\ 4\ ) \end{vmatrix} \overset{②}{=} \begin{vmatrix} (\ 5\ ) & (\ 6\ ) \\ (\ 7\ ) & (\ 8\ ) \end{vmatrix} = |(\ 5\ )|\,|(\ 9\ )|$$

(①：$k=1,2,\cdots,n$ に対して，$(n+k)$ 行に k 行を加える)

(②：$k=1,2,\cdots,n$ に対して，k 列から $(n+k)$ 列を引く)

$$\begin{vmatrix} A & -A \\ B & B \end{vmatrix} \overset{③}{=} \begin{vmatrix} (\ 10\ ) & (\ 11\ ) \\ (\ 12\ ) & (\ 13\ ) \end{vmatrix} = (\ 14\ )\,|A|\,|B|$$

(③：$k=1,2,\cdots,n$ に対して，k 列から $(n+k)$ 列を引く)

A,B の余因子行列をそれぞれ $adj\,A$，$adj\,B$ と表す。また E は同じ次数の単位行列。

$A(adj\,A)=(adj\,A)A=(\ 15\ )E\ \cdots$ (*)　$\therefore\ |adj\,A|=|A|^{(16)}$

$X=adj\,A$ と表し，(*) の両辺に $|A|^{n-2}$ 掛ければ

$\left(|A|^{n-2}A\right)X=X\left(|A|^{n-2}A\right)=|X|E\quad \therefore\ adj\,X=adj\,(adj\,A)=|A|^{(17)}A$

$\therefore\ |adj\,(adj\,A)|=|A|^{(18)}$

次に A が正則ならば(*)の両辺に $|A|^{-2}$ を掛けて変形することにより $adj\,A^{-1}=(\ 19\ )A$ となる。
最後に

$AB\,(adj\,(\ 20\ ))\,(adj\,(\ 21\ ))=|B|A\,(adj\,(\ 21\ ))=|B|\,(\ 22\ )E$ となるから

$adj\,(AB)=(adj\,(\ 23\ ))\,(adj\,(\ 24\ ))$ が成り立つ。

5．$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$，$\vec{x}={}^t\left(x_1\ \ x_2\ \ x_3\right)$，$\vec{d}={}^t\left(1\ \ d\ \ d^2\right)$ について，次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{(1),(2),(3) は答のみ。}}$ (11点)

(1)　行列式 $|A|$ を因数分解せよ。　　(2)　$|A|\neq 0$ となる条件を求めよ。

(3)　$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ。

(4)　$|A|\neq 0$ のとき，連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{d}$ を $\boxed{Crammer\text{ の公式を用いて}}$ 解け。

6． O を原点とし A (2, 3, 1) , B (−2, 2, 2) , C (1, 2, −3) とするとき，四面体 OABC の体積を $\boxed{\text{行列式を用いて}}$ 求めよ。(4点)

7． $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ のとき，次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (6点)

(1) 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の成分表示を求めよ。　(2) 外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ の成分表示を求めよ。

(3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ の成分表示を求めよ。　(4) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ の成分表示を求めよ。

8． 次の行列式の値を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (4点)

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

補足：問題 5 に関連して

n 次の行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$ を *Vandermonde* (ヴァンデルモンド) の行列式

という。これがどのような式に等しいか，ここでは書かない。