2016年度前期中間試験問題・数学B(S3)

１．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (12点)

（1） 次の行列式の値を求めよ。

[1] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$　　[2] $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　[3] $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

（2） 次の行列式を因数分解せよ。

[1] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 3a+2b & 2a+b \\ b & a+4b & 2a+2b \end{vmatrix}$　　[2] $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix}$

（3） 次の順列について，$\boxed{\text{偶順列}}$ か $\boxed{\text{奇順列}}$ かを調べよ。ただし，この問題は無解答なら０点であるが誤答は −2 点とする。

[1] (4, 3, 1, 2)　　[2] (2, 4, 5, 1, 3)

以下の問題では次のことに注意せよ。消去法とは対象の行列に行基本変形，場合によっては列基本変形を施し階段行列(逆行列では単位行列)まで変形して連立１次方程式の解，階数，逆行列を求める方法である。階段行列とは下の行ほどその行の左から連続する０の成分が増えている行列のことである。ここまで変形していない場合は消去法は完成していないとみなす。

２．次の各問いに答えよ。特に断らない限り解法を書くこと。また指示に従わない解法や消去法においては変形が完成していないものには点を与えない。(38点)

（1） 次の連立１次方程式を消去法を用いて解け。

[1] $\begin{cases} -x+2y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$　　[2] $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$　　[3] $\begin{cases} x+3y-2z+2w=3 \\ 2x+4y+z+3w=2 \\ 3x+5y+4z+4w=2 \end{cases}$

（2） 次の行列の逆行列を消去法で求めよ。

[1] $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　[2] $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　　[3] $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（3） 次の行列の階数を消去法で求めよ。ただし，$\boxed{\text{[2] は答のみ。}}$

[1] $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -9 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 13 & -13 \\ 8 & -13 & 18 & -1 \end{pmatrix}$　　[2] $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

[3] $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （a は実数とする）

3．連立１次方程式 $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-y=8 \\ 3x+4y=a \end{cases}$ （a は定数）の解法に関する以下の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (8点)

注意：（　）は行列 (成分表示)，［　］は数値が入る。

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$ とし，拡大係数行列 $C=\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を考える。C の左から次の２つの行列を掛けると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}C=$（１）となり，さらに

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（１）＝（２）となる。$\left(-1/5 \text{ とは } -\frac{1}{5} \text{ のこと}\right)$ 引き続き

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$（２）＝（３）となるので $rank\,A=$［４］となる。従ってこの連立１次方程式は $a=$［５］のとき解をもち，そのときの解は $x=$［６］，$y=$［７］である。

4．次の各問いに答えよ。(17点)

(1) A を $m\times n$ 行列，$\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_p}$ を p 個の $n\times 1$ の列ベクトルとする。さらに $\vec{c_1}=A\vec{b_1}, \vec{c_2}=A\vec{b_2}, \cdots, \vec{c_p}=A\vec{b_p}$ と表すとき，$\vec{c_1}, \vec{c_2}, \cdots, \vec{c_p}$ が線形独立ならば，$\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_p}$ も線形独立であることを証明せよ。

(2) 次の論証の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

A を $m\times n$ 行列，B を $n\times l$ 行列とする。B を列ベクトルを用いて $B=\begin{pmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \cdots & \vec{b_l} \end{pmatrix}$ と表せば AB を同じく列ベクトルで表すと $AB=$［１］となる。$\vec{c_k}=$［２］$(k=1,2,\cdots,l)$ とすれば $AB=\begin{pmatrix} \vec{c_1} & \vec{c_2} & \cdots & \vec{c_l} \end{pmatrix}$ となる。今，$rank\,AB=r$ とすれば $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \cdots, \vec{c_l}$ から最大［３］個の線形独立な列ベクトルを選ぶことができ，それを $\vec{c_{k_1}}, \vec{c_{k_2}}, \cdots, \vec{c_{k_r}}$ とすれば上の４．(1) のことから［４］も線形独立になる。$rank\,B$ は B の線型独立な列ベクトルの［５］だから，$r\leqq rank$［６］，即ち $rank$［７］$\leqq rank$［６］が示せた。一般に行列 M に対して $rank\,M=rank\,{}^tM$ が成り立つことが知られており，これを用いると

$rank$ [7]$=rank$ ^{t}([7])$=rank$ [8] となる。再び同様な議論をすると

$rank$ [8]$\leqq rank$ [9]$=rank\,A$，従って $rank$ [7]$\leqq rank\,A$ も示せた。

5． 4次の基本行列 $P_i(c)$ $(c\neq0)$，$P_{ij}(c)$ $(i\neq j)$，P_{ij} $(i\neq j)$ を考える。記号の意味は大日本図書の問題集と同じである。つまり（E：単位行列）

$P_i(c)$ $(c\neq0)$：E の (i,i) 成分を c で置き換えた行列

$P_{ij}(c)$ $(i\neq j)$：E の (i,j) 成分に c を加えた行列

P_{ij} $(i\neq j)$：E の第 i 行と第 j 行を入れ換えた行列

今，$A=\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \end{pmatrix}$ （a：定数）とするとき，次の各問いに答えよ。

ただし，$\boxed{\text{(1)～(6) は答のみ。}}$ (25点)

(1) $A_1=AP_{14}$ を求めよ。 (2) $A_2=P_{41}(a-2)P_{31}(1)P_{21}(1)A_1$ を求めよ。

(3) $A_3=P_{23}A_2$ を求めよ。 (4) $A_4=P_{42}(1-a)P_{32}(2-a)A_3$ を求めよ。

(5) $A_5=A_4P_{34}$ を求めよ。

(6) 次の文章の [ ] に入る最も適切な数値を解答用紙にかけ。なお，[1] が不正解の場合は [2]，[3] はその正誤に関わらず点を与えない。

以上より，$a\neq$ [1] ならば $rank\,A=$ [2]，$a=$ [1] ならば $rank\,A=$ [3] となる。

(7) $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$，$\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ を解け。(解法をかくこと)