2015年度前期中間試験問題・数学B（S3）

１． $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ とするとき、連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ を考える。

このとき、次の各問いに答えよ。なお、３個の基本行列（いずれも３次の正方行列）を $P_i(c)$ $(c\neq 0)$, $P_{ij}(c)$ $(i\neq j)$, P_{ij} $(i\neq j)$ とする。意味は「新 線形代数問題集」に記載されているものとする。ただし、答のみ。

（1） $P_{21}(-2)$ をかけ。　（2） $P_{31}(-3)$ をかけ。　（3） $P_2\left(-\dfrac{1}{5}\right)$ をかけ。

（4） $P_{32}(7)$ をかけ。　（5） $P_{31}(-3)^{-1}$ をかけ。　（6） $P_2\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$ をかけ。

（7） $P=P_{32}(7)\,P_2\left(-\dfrac{1}{5}\right)P_{31}(-3)\,P_{21}(-2)$ とするとき、PA を求めよ。

（8） 拡大係数行列 $C=\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ について、PC を求めよ。

（9） 次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお、[　] は t の式、<　> は成分が整数の列ベクトルである。

（8）の結果から $z=t$ （t は任意の数）とすれば、$y=$[１], $x=$[２] となる。従って
$\vec{x}=$< ３ >$+t$< ４ >となる。

２． $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -9 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 13 & -13 \\ 8 & -13 & 18 & -1 \end{pmatrix}$ のとき、A の階数を消去法により求めよ。

３． 次の証明は $rank\,AB \leqq min\,(rank\,A,\,rank\,B)$ が成り立つことを用いて、正則行列 P, Q に対し、$rank\,PAQ=rank\,A$ となることを示したものである。括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお、行列の積は定義できるものとする。ただし、答のみ。

$rank\,PAQ=rank\,(PA)\,Q \leqq min\,((\ 1\ ),\,rank\,Q) \leqq (\ 2\ ) \leqq min\,(rank\,P,\,(\ 3\ ))$

$\therefore\ rank\,PAQ \leqq rank\,A$ … ①　　次に、

$rank\,A=rank\,P^{-1}((\ 4\ ))\,Q^{-1} \leqq min\left((\ 5\ ),\,rank\,Q^{-1}\right) \leqq (\ 6\ )$

$\leqq min\left(rank\,P^{-1},\,(\ 7\ )\right)$　　$\therefore\ rank\,A \leqq rank\,PAQ$ … ②

①, ②から $rank\,PAQ=rank\,A$

４． $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の各問いに答えよ。

注意： $P_i(c)$ $(c\neq 0)$, $P_{ij}(c)$ $(i\neq j)$, P_{ij} $(i\neq j)$ は問題１と同じ基本行列を表す。

（1） $P = P_{32}\left(\dfrac{3}{2}\right)P_{31}(-2)\,P_{21}(-3)$ とする。PA を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（2） P^{-1} を求めよ。(成分で表せ) ただし、<u>答のみ</u>。

以下、$U = PA$，$L = P^{-1}$ と表す。また、$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ とする。

（3） 連立１次方程式 $L\vec{y} = \vec{b}$ を解け。(列ベクトルの形で答えよ)

（4） （3）で求めた $\vec{y}$ に対して、連立１次方程式 $U\vec{x} = \vec{y}$ を解け。(列ベクトルの形で答えよ)

５． $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が２つの条件 $ad - bc = -2$，$A^2 = E$ （E：単位行列）を満たすとき、連立１次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b + d \\ -2a - c \end{pmatrix}$ を解け。

６． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が正則ならば、その逆行列を消去法で求めよ。

７． $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & 10 \\ -8 & 4 & -2 & 12 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ とするとき、連立１次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ について、次の各問いに答えよ。

（1） $C = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ とする。A および C の階数を求めよ。

（2） この連立１次方程式の解 $\vec{x}$ を求めよ。

（3） A を列ベクトルを用いて $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{pmatrix}$ と表すとき、

$\vec{a}_2 = [\ 1\ ]\vec{a}_1 + [\ 2\ ]\vec{a}_3$，$\vec{a}_4 = [\ 3\ ]\vec{a}_1 + [\ 4\ ]\vec{a}_3$ となる。[　　] に入る<u>**数値**</u>を求めよ。

ただし、（3）は<u>答のみ</u>。

８． $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ （x は定数）の階数を求める次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。注意：（　　）は行列、[　　] は数値が入る。

また、$P_i(c)$ $(c \neq 0)$，$P_{ij}(c)$ $(i \neq j)$，P_{ij} $(i \neq j)$ は問題１と同じ基本行列を表す。

$P_{31}(-x)\,P_{21}(-x)\,A =$ （ 1 ） となる。$x \neq 1$ のとき、$P_3\left(\dfrac{1}{1-x}\right)P_2\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$（ 1 ）=（ 2 ），

$P_{23}(-1)$（ 2 ）=（ 3 ）となる。さらに、$P_{32}(-x)$（ 3 ）=（ 4 ）となる。（ 4 ）から、$x \neq 1$ かつ $x \neq$ [5] のとき、$rank\,A =$ [6] となる。$x =$ [5] のとき、$rank\,A =$ [7] であり、$x = 1$ のとき $rank\,A =$ [8] となる。

9． $P, Q \in S_6$ で、$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ とする。また、

互換 (i, j) はすべて S_6 の要素とする。例： $(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

さらに恒等置換を I と表す。このとき、次の各問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1） PQ を求めよ。 （2） QP を求めよ。 （3） $P^2 = PP$ を求めよ。

（4） P^4 を求めよ。 （5） $(2, 6)\,(2, 5)\,(2, 4)$ を求めよ。

（6） $sgn(P)$ を求めよ。（（6）は減点問題。無解答なら 0 点であるが、誤答は 3 点減点する）

（7） $sgn(PQ)$ を求めよ。（（7）は減点問題。無解答なら 0 点であるが、誤答は 3 点減点する）

10． 次の行列式の値を求めよ。ただし、答のみ。

（1） $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ （2） $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ （3） $\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

（4） $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$