2014年度学年末試験問題・数学B（M3）

１．$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

（1） A の固有<u>方程式</u>（未知数 λ ）を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（2） （1）で求めた固有方程式を解いて A の固有値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意：（2）で求めた固有値を $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ とする。

（3） A の固有値 λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を求めよ。

（4） A の固有値 λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。

（5） A の固有値 λ_3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ を求めよ。

（6） $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$ とするとき、$P^{-1}AP$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

２．実対称行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

（1） A の固有<u>方程式</u>（未知数 λ ）を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（2） （1）で求めた固有方程式を解いて A の固有値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意：（2）で求めた固有値を $\lambda_1<\lambda_2=\lambda_3$ とする。

（3） A の固有値 λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を求めよ。

（4） A の固有値 $\lambda_2=\lambda_3$ に対する固有空間 $V(\lambda_2)$ の１組の基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を求めよ。なお、$\boldsymbol{p}_1={}^t(* \;\; * \;\; 0)$, $\boldsymbol{p}_2={}^t(0 \;\; * \;\; *)$ で、成分は０以上の整数となるものを求めよ。この指示を守らないと、次の（5）の問題で大きな失点になる。

注意：この時点で $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $V(\lambda_2)$ の正規直交基底でなくてよい。

（5） （4）で求めた $V(\lambda_2)$ の基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ から $Gram-Schmidt$ の直交化法により正規直交基底を求める手順を示したのが以下の文章である。この文章の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、内積は R^3 の標準(自然)内積とする。

$\boldsymbol{p}_1$ を正規化したものを $\boldsymbol{u}_1$ とすれば、$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{|\boldsymbol{p}_1|}\boldsymbol{p}_1={}^t$[1] となる。

$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{p}_2-k\,\boldsymbol{u}_1$ とするとき、$\boldsymbol{b}_2\in\langle\boldsymbol{u}_1\rangle^{\perp}$ となるためのスカラー k の値は、$k=$[2] である。

このとき、$\boldsymbol{b}_2={}^t$[3] となる。 $|\boldsymbol{b}_2|=$[4] だから $\boldsymbol{b}_2$ を正規化したものを $\boldsymbol{u}_2$ とすれば、

$\boldsymbol{u}_2={}^t$[5] となる。以上により $V(\lambda_2)=\langle\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\rangle=\langle\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$, $\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$

となる。

注意：計量ベクトル空間の部分空間 W の直交補空間を $W^{\perp}$ と表す。

（6） （3）で求めたベクトル $\boldsymbol{x}_1$ で単位ベクトルとなるものを $\boldsymbol{u}_0$ とする。ただし、(1,1) 成分の値は正とする。これと（5）の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を用いて $T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}$ とするとき、T^{-1} を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（7） $T^{-1}AT$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

3．正方行列 A の<u>相異なる</u> r 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とし、それぞれに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ とするならば、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ は線形独立である。これを証明する以下の文章の（　）に入る最も適切な答えを文章の下の選択肢から選び、その符号(あ、い、うなど)を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

<u>**注意：各解答が未記入なら０点であるが、記入した誤答は －２ 点とする**</u>。

［証明］ r に関する数学的帰納法で証明する。

$r=1$ のとき、λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は（ １ ）でないから線形独立である。

$r=k$ のとき命題が成り立つと仮定する。いま、A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ としそれぞれに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ とする。これらのベクトルの一次関係式（ ２ ）… ① を考える。①の左から A をかけると、$A\boldsymbol{x}_i=$（ ３ ）$\left(i=1,2,\cdots,k+1\right)$ を用いれば、（ ４ ）… ② となる。ここで ②から① $\times\lambda_{k+1}$ を引けば、（ ５ ）となる。仮定から $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は線形独立だから（ ６ ）が成り立つ。固有値は相異なるので（ ７ ）これを①に代入。$\alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}$ より（ ８ ）となる。従って、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ は線形独立となる。（証終）

選択肢

あ： $\lambda_i\boldsymbol{x}_i$

い： $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$

う： $\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0}$

え： 零ベクトル

お： $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k+\alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0}$

か： $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})=\cdots=\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})=0$

き： $\alpha_{k+1}=0$

く： $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$

4．２次の実対称行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

（1） A の固有値はすべて実数であることを示せ。ヒント： A の固有方程式は係数が実数の２次方程式である。

（2） $a=c$ かつ $b\neq0$ のとき、A の固有値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（3） （2）と同じ条件のもとで、A の固有ベクトルを求めよ。

5． x, y の２次形式 $f(x,y)=5x^2+2xy+5y^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とするとき、$f(x,y)={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ となる実対称行列 A を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(2) A の固有値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(3) (2) で求めた固有値を $\lambda_1<\lambda_2$ とする。λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルを１つずつ選び A を対角化する $|T|=1$ を満たす<u>直交行列</u> T を求めよ。なお、T の１列、２列にはそれぞれ λ_1, λ_2 の固有ベクトルを配置せよ。

(4) $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}'$ とするとき、x', y' を x, y を用いて表せ。ただし、<u>答のみ</u>。

6． 問題２の実対称行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) *Cayley−Hamilton* の定理を用いて A^3 を求めよ。この定理を用いていない解答には点を与えない。つまり直接計算したもの、対角化を用いたものなどに点を与えない。問題２(1) の結果はもちろん用いてよい。

(2) A^3 の固有値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。ヒント： *Frobenius* の定理を用いると簡単。

7． $\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^3$ に対して、２次形式 $F(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ が正値になるような実数 a の値の範囲を求めよ。２次形式が正値とは、$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ を満たす任意のベクトルに対して $F(\boldsymbol{x})>0$ となることである。

注意： この解答には以下の定理を用いてよい。

２次形式 $F(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して $A_k=A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ とすれば $F(\boldsymbol{x})$ が正値であるための必十条件は、すべての $k=1,2,\cdots,n$ について $|A_k|>0$ が成り立つことである。ただし、$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ は A の首座 k 次小行列である。