後期中間試験問題・数学B（M3）

○ 全体の注意： とくに断らない限り実ベクトル空間を考える。また数ベクトル空間のあいだの線形写像(変換)を表す行列は、標準基底の通常の並びによるものとする。また数ベクトル空間で内積を考えるときは、これもとくに断らない限り標準内積とする。（意味がわからない場合は無視せよ）

１． 次の各問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(1) R^2 上の線形変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ によって、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ は、ともにベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ に写されるとするとき、２次の正方行列 A を求めよ。

(2) 原点のまわりに 90° だけ回転する R^2 上の線形変換による、直線 $y=3x+1$ の像を求めよ。解答は $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x, y\text{ の方程式} \right\}$ という形で答えよ。

(3) 座標平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を直線 $y=-x$ に関して対称な点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に写す変換は R^2 上の線形変換になる。この線形変換を表す行列を求めよ。

(4) 次の式で定まる R^2 上の変換のうち線形変換<u>でないもの</u>をすべて選んで、その番号を解答用紙にかけ。なお、線形変換であるものを選んだ場合は、２点減点する。また、すべて線形変換である場合は「すべて線形変換」と答えよ。

① $\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=2x+3y \end{cases}$　② $\begin{cases} x'=-3x \\ y'=x+y \end{cases}$　③ $\begin{cases} x'=3x-y \\ y'=4x^2+5y^2 \end{cases}$

(5) R^2 上の線形変換 f のよるベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の像がそれぞれ $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるとき、ベクトル $3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$ の f による像を求めよ。

(6) R^2 上の線形変換 f, g を表す行列がそれぞれ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ であるとき、

[1] 合成変換 $f\circ g$ を表す行列を求めよ。　[2] 合成変換 $g\circ f$ を表す行列を求めよ。

[3] 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めよ。逆変換が存在しない場合は、「存在しない」と答えよ。

[4] 逆変換 g^{-1} を表す行列を求めよ。逆変換が存在しない場合は、「存在しない」と答えよ。

(7) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ で表される R^2 上の線形変換 f によって直線 $y=x+2$ に写されるもとの図形(原像という)を求めよ。解答は $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x, y\text{ の方程式} \right\}$ という形で答えよ。

２． $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、R^3 上の線形変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を考える。また、$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。

（1） 行列式 $\left|\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\right|$ の値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（2） R^3 の新しい基底を $A:\left\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\right\}$ とする。標準基底 $\left\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right\}$ から A への基底の変換行列 P を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（3） P の逆行列 P^{-1} を<u>消去法を用いて</u>求めよ。(余因子行列を用いていた場合は減点する)

（4） ベクトル $\begin{pmatrix}-8\\8\\-3\end{pmatrix}$ の基底 A に関する座標 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（5） $f\left(\boldsymbol{a}_j\right)$ $(j=1,2,3)$ を求めよ。

（6） 線形変換 f の基底 A に関する行列表現を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（7） R^3 の任意のベクトル $\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3$ の f による像を $\boldsymbol{b}$ とするとき、$\boldsymbol{b}$ の基底 A に関する座標を求めよ。

３． 次の文章の括弧に入る最も適切な数値、文字、行列を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、（　）は数値、＜　＞は文字、[　] は行列 (成分表示) が入る。

第１列が $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ の直交行列でかつ対称行列となる A を求める。対称なので

$$A=\left(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & (\ 1\ ) & (\ 2\ )\\ \frac{1}{3} & a & <\ 3\ > \\ \frac{2}{3} & b & c\end{pmatrix}$$

となる。さらに直交行列だから、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の内積を計算して $a+2b=$（ 4 ） … ① となる。また $\boldsymbol{a}_2$ の大きさを計算して $a^2+b^2=$（ 5 ） … ② となる。①から a を b で表して②に代入すると、b の２次方程式 $(3b+(\ 6\ ))((\ 7\ )b-2)=0$ が得られ、これを解くと $b=$（ 8 ），（ 9 ）となる。ただし、（ 8 ）の値は正とする。

*Case*１： $b=$（ 8 ）のとき、①から $a=$（ 10 ）となる。$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ の内積を計算して $c=$（ 11 ）を得る。この値は $\boldsymbol{a}_3$ が満たすべき他の条件もクリアする。従って $A=$[12] となる。

*Case*２： $b=$（ 9 ）のとき、①から $a=$（ 13 ）となる。同じく $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ の内積を計算して $c=$（ 14 ）となる。これも $\boldsymbol{a}_3$ が満たすべき他の条件をクリアする。従って $A=$[15]

4． $A:\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ を３次元ベクトル空間 V の１つの基底とする。この基底を $B:\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ に変換するとき、次の各問いに答えよ。

(1)　$A \to B$ なる基底の変換行列 P を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(2)　V のベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 A に関する座標が $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ であるとき、$\boldsymbol{v}$ の基底 B に関する座標を求めよ。

(3)　V 上の線形変換 f の基底 A に関する行列表現が $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ であるとき、基底 B に関する f の行列表現を求めよ。

5． $\mathrm{P}(1;\mathrm{R}), \mathrm{P}(2;\mathrm{R})$ をそれぞれ１次以下、２次以下の係数が実数の x の整式全体からなるベクトル空間とする。線形写像 $f:\mathrm{P}(1;\mathrm{R}) \to \mathrm{P}(2;\mathrm{R})$ を $f: p(x) \mapsto \int_1^x p(t)\,dt$ とするとき、次の各問いに答えよ。なお、この f が線形写像であることは証明しなくてよい。

(1)　$A:\{1, x\}, C:\{1, x, x^2\}$ をそれぞれ $\mathrm{P}(1;\mathrm{R}), \mathrm{P}(2;\mathrm{R})$ の基底とするとき、A, C に関する f の行列表現 A を求めよ。

(2)　$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ とする。B を求めよ。

(3)　f の行列表現が B となるような $\mathrm{P}(1;\mathrm{R})$ の基底 B および $\mathrm{P}(2;\mathrm{R})$ の基底 D を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。