2014年度前期末試験問題・数学B(M3)

１．次の（　　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

A は５次の正方行列で $|A|=3$ とする。このとき、$rank\,A=$（ １ ）である。A の余因子行列を $\widetilde{A}$ と表せば、$\left|\widetilde{A}\right|=$（ ２ ）である。また、$|-2A|=$（ ３ ），$\left|A^{-1}\right|=$（ ４ ），$\left||A|A\right|=$（ ５ ）となる。

２．$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix}$ について、次のベクトルの各組は線形独立か線形従属か解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意：単に独立、従属ではなく、線形独立、線形従属とかけ。また、<u>誤答は</u>３点<u>引く</u>。無解答は減点しない。

（1）$\vec{a}_2,\ \vec{a}_3$　（2）$\vec{a}_1,\ \vec{a}_4$　（3）$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$　（4）$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ \vec{a}_4$

３．$A=\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、a は定数で、$\vec{0}$ は零ベクトルとする。

（1）行列式 $|A|$ を因数分解せよ。

（2）連立斉１次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ が非自明解をもつように、定数 a の値を定めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（3）上の３(2) で求めた値のうち、a が小さい方の値をとるとき、$A\vec{x}=\vec{0}$ を解け。

（4）上の３(2) で求めた値のうち、a が大きい方の値をとるとき、$A\vec{x}=\vec{0}$ を解け。なお（4）で $\vec{x}$ を３個の線形独立なベクトルの線形結合で表した場合は、２点加点する。

（5）上の３(3) のとき、$rank\,A$ の値を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

（6）上の３(4) のとき、$rank\,A$ の値を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

４．A，B を同じ次数の正方行列とするとき、次の（　　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

$|A|=12$ ならば、$\left|{}^tAA\right|=$（ １ ）である。このとき A は正則だから、$\left|{}^tAA^{-1}\right|=$（ ２ ）

$|B|=-7$ ならば、$\left|A^{-1}BA\right|=$（ ３ ）である。

５．A を r 次の正方行列とし、A の余因子行列をここでは $adj\,A$ と表す。また E は単位行列とする。次の文章の（　　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

（A の次数に注意せよ）

$A(adj\,A)=(adj\,A)A=$（ １ ）E　…　① となり、$|adj\,A|=|A|^{(\ 2\ )}$ となる。A の余因子行列の余因子行列 $adj\,(adj\,A)$ を求める。表現を簡略化するために $X=adj\,A$ と表せば、

$X(adj\,X)=(adj\,X)\,X=|A|^{(3)}E$ であるから、これと①から $adj\,(adj\,A)=adj\,X=$ (４) となる。A が正則ならば、やはり①から、$(adj\,A)^{-1}=$ (５) となる。A^{-1} の余因子行列 $adj\,A^{-1}$ は $Y=adj\,A^{-1}$ と表せば、$A^{-1}Y=YA^{-1}=$ (６) E であるから、①から $adj\,A^{-1}=$ (７) となる。
((４),(５),(７) は A と $|A|$ の式、(１),(６) は $|A|$ の式)

６． $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ のとき、次の各問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(1)　$|A|$ の値を求めよ。

(2)　A の余因子行列 $adj\,A$ を求めよ。(成分表示)

(3)　$|adj\,A|$ の値を求めよ。

(4)　A の余因子行列の余因子行列 $adj\,(adj\,A)$ を求めよ。(成分表示)

(5)　$|adj\,(adj\,A)|$ の値を求めよ。

７． 次の行列式の値を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。(自学自習したプリント、問題集の PLUS に書かれていることを用いてよい。それらを学習していない者は行列式の展開などを用いて計算せよ。時間がかかり、誤るリスクが高くなるが、解くことはできる)

(1)　$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (ヒント: まずある２つの行を交換、行を交換したら符号に気をつけろ)

(2)　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　(3)　$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}\right|$

(4)　$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (ヒント: まずある２つの列を交換、列を交換したら符号に気をつけろ)

８． ３点 A(2,3,4),B(6,2,5),C(1,7,3) について、次の各問いに答えよ。

(1)　外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ の成分表示を求めよ。また、三角形 ABC の面積を求めよ。

(2)　A,B,C を通る平面の方程式($ax+by+cz+d=0$ の形)を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

９． 次は *Lagrange* の恒等式と *Schwarz* の不等式を同時に証明したものである。[１]~[４] は下の選択肢から選び、その番号①～⑱を解答用紙にかけ。(ア)～(ウ) はベクトルの成分を用いた数式をかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、ベクトルの成分は実数とする。

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とするとき、$n \times 2$ 型の行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$ を考える。*Gram* 行列式を計算すると、$\left| {}^tAA \right| = \begin{vmatrix} [\ 1\ ] & [\ 2\ ] \\ [\ 2\ ] & [\ 3\ ] \end{vmatrix}$ =（ ア ）となる。

一方、$\left| {}^tAA \right| = \displaystyle\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} |\,[\ 4\ ]\,|^2$ であり、$|\,[\ 4\ ]\,|$ =（ イ ）だから、$\left| {}^tAA \right|$ =（ ウ ）

（ ア ）=（ ウ ）を *Lagrange* の恒等式、（ ア ）≧０を *Schwarz* の不等式という。

注意： $\displaystyle\sum_{1 \leqq i < j \leqq n}$ は $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす整数 i, j に関する総和を表す。

選択肢

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$　③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$　④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$　⑤ $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$　⑥ $A\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

⑦ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & j \end{pmatrix}$　⑧ A　⑨ A^{-1}　⑩ ${}^tA$　⑪ $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2$　⑫ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

⑬ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 {b_k}^2$　⑭ $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$　⑮ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　⑯ $\widetilde{A}$　⑰ $|A|^2$　⑱ $\left|{}^tA\right|\,|A|$