2014年度前期中間試験問題・数学B（M3） 2014年6月4日

１．連立方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+5y-3z=1 \\ x-3y+8z=-2 \end{cases}$ について、次の問いに答えよ。

(1) この連立方程式の拡大係数行列を解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。なお、式および未知数の順番は変えないこと。

(2) 消去法を用いてこの連立方程式を解け。消去法とは基本変形を用いて解く方法。指示に従わない場合は点を与えない。

２．$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b+a \\ b & a & b-a \end{vmatrix}$ を行列式の性質を用いて因数分解せよ。サラスの方法を用いていたら点を与えない。

３．つぎの行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 22 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

４．$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

５．$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 基本行列 $P_{21}(-2)$ を A の左からかけた行列 $P_{21}(-2)A$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(2) 基本行列 $P_{32}(-3)$ を (1) で求めた行列の左からかけた行列 $P_{32}(-3)P_{21}(-2)A$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(3) さらに基本行列 $P_2\left(\frac{1}{2}\right), P_3\left(\frac{1}{2}\right)$ に対して、

$P_3\left(\frac{1}{2}\right)P_2\left(\frac{1}{2}\right)P_{32}(-3)P_{21}(-2)A$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(4) $P=P_3\left(\frac{1}{2}\right)P_2\left(\frac{1}{2}\right)P_{32}(-3)P_{21}(-2)$ とし、$L=P^{-1}$ とおくとき、L を求めよ。

参考： $P_i(c)$： 単位行列の (i,i) 成分を c に置き換えた行列。ただし、$c\neq 0$

$P_{ij}(c)$： 単位行列の (i,j) 成分に c を加えた行列。ただし、$i\neq j$

6．１から６の順列 $P=(2,4,5,1,3,6)$，$Q=(2,6,1,5,4,3)$ について次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

(1) ２つの順列の積 PQ を求めよ。　(2) ２つの順列の積 QP を求めよ。

(3) P の逆順列 P^{-1} を求めよ。　(4) Q の逆順列 Q^{-1} を求めよ。

(5) P の符号 ε_P を求めよ。　(6) Q の符号 ε_Q を求めよ。

(7) PQ の符号 ε_{PQ} を求めよ。　(8) QP の符号 ε_{QP} を求めよ。

(9) P^{-1} の符号 $\varepsilon_{P^{-1}}$ を求めよ。　(10) Q^{-1} の符号 $\varepsilon_{Q^{-1}}$ を求めよ。

注意： 符号を答える問題は間違っていたら－１点とする。分からない場合は何も書かないこと。

7．次の証明のなかの（　）に入るもっとも適切なものを下の解答群から選びその符号（あ、い、うなど）を解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

$A:m\times l$ 行列、$B:l\times n$ 行列とする。列ベクトルを用いて $B=\left(\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \cdots\ \ \vec{b}_n\right)$ と表せば $AB=$（ １ ）となる。$rank\,AB=r$ とすれば r 個の線形独立な列ベクトル（ ２ ）がとれる。このとき（ ３ ）は線形独立になる。実際、（ ４ ）$=\vec{0}$ とし、この両辺の左から A を掛けると（ ５ ）$=\vec{0}$ となる。（ ２ ）は線形独立だから（ ６ ）$=0$ となり示せた。行列の階数の定義から $rank\,AB\leqq$（ ７ ）が示せた。一般に行列 M に対して $rank\,{}^tM=rank\,M$ が成り立つことが証明されており、これを用いると $rank\,AB=$（ ８ ）$=rank\,{}^tB\,{}^tA\leqq$（ ９ ）$=rank\,A$ 以上まとめると $rank\,AB\leqq$（ 10 ）

解答群

あ：l　い：n　う：m　え：$c_{i_1}=c_{i_2}=\cdots=c_{i_r}$　お：$c_{i_1}=c_{i_2}=\cdots=c_{i_n}$

か：$c_1=c_2=\cdots=c_r$　き：$c_1=c_2=\cdots=c_n$　く：$rank\,{}^t(AB)$　け：$rank\,{}^tB$　こ：$rank\,{}^tA$

さ：$rank\,{}^t(BA)$　し：AB　す：B　せ：A　そ：$rank\,A$

た：$rank\,B$　ち：$\sum_{k=1}^{r}c_k\vec{b}_{i_k}$　つ：$\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{b}_{i_k}$　て：$\sum_{k=1}^{r}c_k\vec{b}_k$　と：$\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{b}_k$

な：$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$　に：$\vec{b}_{i_1},\vec{b}_{i_2},\cdots,\vec{b}_{i_r}$　ぬ：$\sum_{k=1}^{r}c_kA\vec{b}_{i_k}$　ね：$\sum_{k=1}^{n}c_kA\vec{b}_{i_k}$

の：$\sum_{k=1}^{r}c_kA\vec{b}_k$　は：$\sum_{k=1}^{n}c_kA\vec{b}_k$　ひ：$\left(\vec{b}_1A\ \ \vec{b}_2A\ \ \cdots\ \ \vec{b}_nA\right)$

ふ：$\left(A\vec{b}_1\ \ A\vec{b}_2\ \ \cdots\ \ A\vec{b}_n\right)$　へ：$max\{rank\,A,\,rank\,B\}$　ほ：$min\{rank\,A,\,rank\,B\}$

ま：$\vec{b}_1A,\vec{b}_2A,\cdots,\vec{b}_nA$　み：$A\vec{b}_1,A\vec{b}_2,\cdots,A\vec{b}_n$　む：$A\vec{b}_{i_1},A\vec{b}_{i_2},\cdots,A\vec{b}_{i_r}$

め：$\vec{b}_{i_1}A,\vec{b}_{i_2}A,\cdots,\vec{b}_{i_r}A$

8．$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は存在するか。存在するなら消去法を用いて逆行列を求めよ。

9. $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 8 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ の値を求めよ。ただし、サラスの方法では点を与えない。

10. $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \end{pmatrix}$ の階数を求める次の解法の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意： [　] は行列、(　) は数値、<　 > は文字式が入る。

１列と４列を交換すると $A \to$ [１] となる。その後１行目を用いて１列目を掃き出すと $\to$ [２] となる。さらに２行と３行を交換すると [２] $\to$ [３] となる。さらに２行目を用いて３行、４行の２列目を掃き出すと [３] $\to$ [４] となる。３行と４行を交換すると [４] $\to$ [５] その後４行から３行を引くと [５] $\to$ [６] となる。従って、$a \neq$ (７) のとき、$rank\,A =$ (８)， $a =$ (７) のとき、$rank\,A =$ (９) となる。これらの基本変形の操作から行列式 $|A|$ を<u>因数分解</u>すると $|A| =$ < 10 > となる。(ここまでが階数を求める解法)

(11) (この問題は解法をかくこと) $a =$ (７) のとき、$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ として連立１次方程式

$A\vec{v} = \vec{0}$ を解け。($\vec{0}$ は零ベクトル)

補足： 解を $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ は線形独立、c_1, c_2 は任意の数) と表せば加点する。